arXiv:2301.12771v1 [math.AC] 30 Jan 2023

多项式函数下的可约性

RICCARDO CAMERLO 和 CARLA MASSAZA

摘要。我们研究特征零代数闭域的子集族上的预序，该预序定义为：如果存在一个多项式 P 使得 $A = P^{-1}(B)$，则令 $A \leq_p B$ $\leq_p$ 。

目录

1. 引言与论文计划 1 1.1. 一些术语和记号 4 2. 有限集上的可归约性 5 2.1. 簇 Σ_n 6 2.2. 多项式双可归约性的几何描述 9 2.3. Σ_3 是一条直线 14 2.4. 例外类 15 2.5. 有限集上的多项式可约性 23 3. 无限且余无限的集合 33 3.1. $\mathbb{C}$ 的子域 35 4. 后续问题 36 5. 附录：范德蒙的一种变体 37 参考文献 38

1. 引言与本文计划

我们始终用 k 表示交换域，用 κ 表示其基数；稍后我们将进一步假设 k 是代数闭的且具有特征零。本文旨在研究 k的子集之间的以下关系。

定义 1. 对于 A、$B \subseteq k$，若存在多项式函数 $P\colon k \to k$，使得 $A \leq_p B$

$$A = P^{-1}(B). \tag{1}$$

2020 数学学科分类。 主要分类号 12E05。次要分类号 14A05。关键词与短语。可约性；多项式；仿射簇；维数。

此时称 A 多项式可约于 B。(1) 中的多项式 P 称为将 A 约化为 B。此外，令 $A \equiv_p B$ 表示 $A \leq_p B \leq_p A$，此时称 A、B 双向多项式可约。若 $A \leq_p B$ 但 $A \not\equiv_p B$，则记作 $A <_p B$。

关系 $\leq_p$ 是<style id='2'>可归约关系的一个实例：如果 $\mathcal{F}$ 是从集合 X 到其自身的函数类，包含恒等函数并且在复合运算下封闭，则令

$$A \leq_{\mathcal{F}} B \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{F}, A = f^{-1}(B), \tag{2}$$

对于 A、$B \subseteq X$，在 $\mathcal{P}(X)$ —— X的幂集——上定义一个预序。这个预序称为 $\mathcal{F}$-归约，而出现在（2）中的函数 f 称为将 A 归约到 B 的<style id='10'>归约。

可归约性概念背后的思想是：每当关系$A \leq_{\mathcal{F}} B$ 由归约 $f \in \mathcal{F}$ 见证时，集合 A 的复杂度就受集合 B 的复杂度所界定，因为判定 A 中成员资格的问题被归约为 B 中的同一问题，正如 $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$。这种相对复杂度的概念取决于所选的归约类 $\mathcal{F}$；其中最值得注意的例子是，X 为拓扑空间且 $\mathcal{F}$ 是 X 上连续函数的集合。此时，$\leq_{\mathcal{F}}$ 称为<style id='15'>连续归约或<style id='17'>Wadge归约，因为对它的首次系统研究（针对 $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$）是在Wadge的论文[11]中进行的。

本文关注的是集合为特征零的代数闭域k 的情形，并选择 $\mathcal{F}$ 作为 k上的多项式函数类，因为这些函数是交换代数和代数几何所关注的基本函数，也就是仿射簇 k的态射。由于 $\equiv_p$ 是一种等价关系，我们仍用 $\leq_p$ 表示它在等价类上的诱导偏序，即在 $\mathcal{P}(k)\Big/\equiv_p$上的偏序。$\equiv_p$-等价类 $[A] = \{B \in \mathcal{P}(k) \mid B \equiv_p A\}$ 将称为多项式类。

我们主要关注 $\leq_p$ 在 k的有限子集上的研究：这正是第2节的内容，也是本文的核心。在介绍一些一般性事实后，我们在第2.1节证明，对于任意给定的 n，由 n 个元素的集合构成的多项式类形成一个维数为 $n-2$的仿射簇 Σ_n。这一事实的重要意义在于，它为使用维数定量研究 $\leq_p$ 提供了框架，后续各节将对此展开。在第2.2节中，我们从几何角度描述有限集上的 $\equiv_p$；在第2.3节中，我们证明 Σ_3 是一条仿射直线。第2.4节专门讨论代表元数量少于一般情形的多项式类。我们称这些类为例外类，并在命题36和推论 38中证明，根据 n 为偶数还是奇数，它们构成 Σ_n 的一个维数为 $\frac{n-2}{2}$ 或 $\frac{n-3}{2}$ 的子簇。在第2.5节中，我们证明了若干关于有限集上 $\leq_p$ 的结果。给定 k的一个含 n个元素的子集 A，我们给出一个含 m个元素的集合与 A 可比较的条件，并证明，与 $[A]$ 可比较的 m 元素集合的多项式类族是 Σ_m 的一个子簇，并计算其维数（命题 41及定理

42和44）。在定理 47中，我们证明，大多数有限集的多项式类在1元素集合类之下是$\leq_p$-极大的，从而为$\leq_p$提供了一个大的反链。

在第 3 节中，我们汇集了一些关于 $\leq_p$ 的结果，这些集合既是无限的，又是余无限的。我们证明，存在 2^κ 个基数为 κ 且其补集的基数为 κ 的集合的 $\leq_p$-极大多项式类（定理 48）。此外，若 k 可数，从贝尔纲的角度来看，k 的大多数子集都是 $\leq_p$-极大的，也就是说，它们构成了 k 幂集中的一个余瘦子集（定理 49）。最后，当 $k \subseteq \mathbb{C}$时，我们在命题 51 中构造了一条序型为ζ 的多项式类链——其序型与整数集相同。

为证明我们的一个主要结果，我们在引理 43 中需要证明一个特定矩阵非奇异；该矩阵是范德蒙矩阵的一种扩展。我们在现有文献中未能找到这一观察结果，它本身或许也值得关注，其证明将在一个单独的章节（第 5 节）中给出。

注 1。(1) 用 Pol 表示在 k 上以复合作为运算的多项式函数幺半群。预序 $\leq_p$ 由 Pol 在 $\mathcal{P}(k)$ 上定义的右作用诱导，其中该作用定义为 $(A, P) \mapsto P^{-1}(A)$。(2) 有两个彼此不可比较且先于所有其他多项式类的多项式类：$[\emptyset] = \{\emptyset\}$ 和 $[k] = \{k\}$。事实上，若 A 是 k 的真子集，那么任何取值在 A 之外的常数多项式都是将 $\emptyset$ 归约到 A 的归约；同样，k 可多项式归约到任意非空集合 A。

多项式函数关于 k 上的扎里斯基拓扑（即余有限拓扑）是连续的，因此可得

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(k), A \leq_p B \Rightarrow A \leq_W B \tag{3}$$

其中 $\leq_W$ 是关于扎里斯基拓扑的 Wadge归约关系。文献 [1] 研究了扎里斯基拓扑下的关系 $\leq_W$：例如，文中指出，k 的非空真闭子集（当 k 无限时，恰为有限非空集合）在与 $\leq_W$ 相关联的等价关系下构成同一个等价类。下面的命题 2 表明，对于某些域 k，关系 $\leq_p$ 在有限集上可以与 $\leq_W$ 重合。不过，本文旨在说明，一般而言，情况截然不同。

命题 2. 设 A 是 k 的有限非空子集。那么 $A \leq_p \{0\}$。

如果 k 是有序域，那么 $\{0\} \leq_p A$ 也成立。因此，如果 k 是有序域，那么对于任意有限非空子集 A，B，都有 $A \equiv_p B$。

证明。多项式 $P(X) = \prod_{a \in A}(X - a)$ 将 A 化为 $\{0\}$。如果 k 是有序域，令 $a = \max A$；那么 $Q(X) = X^2 + a$ 将 $\{0\}$ 化为 A。□

从现在起，k 是代数闭域且特征为零。

注 3. 关于 k 的假设特别意味着：

(1) k 是无限集，因此可以将多项式与多项式函数视为相同。(2) 每个非恒定多项式函数都是满射；因此，如果非恒定多项式 P 将 A 约化为 B，那么也可得出 $P(A) = B$。

命题 4。 设 $A \in \mathcal{P}(k)\setminus\{\emptyset, k\}$。若 $A \leq_p B$，则要么 A，B均为有限集，此时 $\mathrm{card}(A) \geq \mathrm{card}(B)$；要么 $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$。因此，对任意$A$，$B$，若 $A \equiv_p B$，则 $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$。

证明。 这是因为非常数多项式是满射，且每个元素只有有限多个原像。□

对于 $\lambda \leq \kappa$，令

$$\mathcal{P}_\lambda = \{A \in \mathcal{P}(k) \mid \mathrm{card}(A) = \lambda\}, \qquad \check{\mathcal{P}}_\lambda = \{k \setminus A\}_{A\in\mathcal{P}_\lambda}.$$

ˇˇ 根据命题 4，每个 $\mathcal{P}_\lambda$ 和 $\mathcal{P}_\lambda$，以及 $\mathcal{P}_\kappa \cap \mathcal{P}_\kappa$，相对于 $\equiv_p$都是不变的。回忆一下，$\mathsf{card}(\mathcal{P}_\lambda) = \mathsf{card}(\check{}\mathcal{P}_\lambda) = \kappa^\lambda$ （见 [7, 练习 I.13.20]），且 $\mathsf{card}(\mathcal{P}_\kappa \cap \check{}\mathcal{P}_\kappa) = 2^\kappa$。

我们记 $\Sigma_\lambda = \{[A] \mid A \in \mathcal{P}_\lambda\}$：这是 $\mathcal{P}_\lambda$ 关于 $\equiv_p$ 的限制所形成的商。类似地，定义 $\check{}\,\Sigma_\lambda = \{[A] \mid A \in \check{}\mathcal{P}_\lambda\}$。关于 $\mathcal{P}_\lambda$、Σ_λ 的多项式可约性结果，分别通过双射 $A \mapsto k \setminus A$以及 $A \leq_p B \Leftrightarrow k \setminus A \leq_p k \setminus B$ 这一事实，转移到 $\check{}\,\mathcal{P}_\lambda$、$\check{}\Sigma_\lambda$。

1.1. 一些术语和记号。 本文中使用的术语和记号都相当标准：主要参考文献为 [5, 4, 9, 2]。这里列出一些我们使用的常见概念。

- 我们用 $\deg(P)$ 表示多项式 P 的次数。一次多项式 是次数为 1 的多项式，即形如 $cX + c'$ 的多项式，其中 $c \neq 0$。我们用 $\mathcal{L}$ 表示一次多项式的集合；在复合运算下，它构成一个群。二次多项式 是次数为 2 的多项式，即形如$cX^2 + c'X + c''$的多项式，其中 $c \neq 0$。如果 $P(X) = cX + c'$是一次多项式，那么反复应用 P 可得

$$P^j(X) = c^jX + (c^j + \cdots + c + 1)c'; \tag{4}$$

  因此，若进一步有 $c \neq 1$，则

$$P^j(X) = c^jX + \frac{c^j - 1}{c - 1}c'. \tag{5}$$

- 多项式 $h \in k[X_1, \ldots, X_n]$ 是 平移不变的当且仅当

$$\forall a_1, \ldots, a_n, t \in k, h(a_1, \ldots, a_n) = h(a_1 + t, \ldots, a_n + t).$$

- 若 $\mathcal{S} \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$，我们将 $V(\mathcal{S}) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in k^n \mid \forall f \in \mathcal{S}$记作 $f(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$；当 $f_1, \ldots, f_m \in k[X_1, \ldots, X_n]$时，我们还令 $V(f_1, \ldots, f_m) = V(\{f_1, \ldots, f_m\})$。与某个 $V(\mathcal{S})$ 同构的集合称为仿射簇。注意，按照我们的定义，仿射簇可能为空。

• 若 $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$, 集合 $D(f) = k^n \setminus V(f)$ 是一个标准开集：它由 k^n 中 f 不为零的所有元素组成。根据 [9, 命题 III.3.3], $D(f)$ 是一个仿射簇，并赋予其 k^n 的正则函数层的限制。

• 若 $V \subseteq k^n$ 是仿射簇，我们用 $I(V) = \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid \forall (a_1, \ldots, a_n) \in V, f(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$ 表示 V 的理想。

• 我们用 $Sym(A)$表示集合 A上的对称群；我们也令 $Sym_n = Sym(\{1, \ldots, n\})$。

• 若 α 是一个群作用，且 a 是被作用集合中的一个元素，我们用$Stab_a^\alpha$ 表示 a 在作用 α下的稳定子。

2. 有限集上的可归约性

由 (3) 可知，若 B 是有限的，因而在扎里斯基拓扑下是闭的，且$A \leq_p B$, 那么 $A = k$ 或 A 是有限的。因此，有限集连同 k构成 $\leq_p$的一个初始段。

命题 5。(1) 若 $1 \leq n < m$, $A \in \mathcal{P}_n$, $B \in \mathcal{P}_m$, 则 $A \not\leq_p B$。

(2) 对于每个 $n \geq 1$、每个 $A \in \mathcal{P}_n$ 和每个 $B \in \mathcal{P}_1$，都有 $A \leq_p B$。

(3) $\forall A$, $B \in \mathcal{P}_2$, $A \equiv_p B$。特别地， Σ_1 和 Σ_2 都只含有一个元素。

证明。(1) 这是命题 4。

(2) 设 $B = \{b\}$。那么，多项式 $\prod_{a \in A}(X - a) + b$ 将 A 约化为 B。

(3) 设 $A = \{a_1, a_2\}, B = \{b_1, b_2\}$，为证明存在一个多项式$P$: $k \to k$，事实上是一个线性多项式，使得 $A = P^{-1}(B)$。设 $P(X) = cX + c'$。此类多项式的系数可通过求解以下线性方程组得到

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

这表明 $A \subseteq P^{-1}(B)$；由于 P 不可能是常数，因此 $P^{-1}(B)$ 的基数为 2，并由此得到 $A = P^{-1}(B)$。

由于多项式 P^{-1} 将 B 约化为 A，断言得证。 □

命题6. 设 $n \geq 2$。若 A, $B \in \mathcal{P}_n$，且 P 是一个多项式，使得 $A = P^{-1}(B)$，则 P 是线性的。

证明。 设 $A = \{a_1, \ldots, a_n\}, B = \{b_1, \ldots, b_n\}$，其中可假设对于每个 j，都有 $P(a_j) = b_j$。反设 P 的次数为 $\gamma > 1$。那么，每个方程 $P(x) - b_j = 0$ 都有唯一解 a_j，其重数为 γ，因此对于某个 $c \neq 0$, $P(X) - b_j = c(X - a_j)^\gamma$。这意味着对于每个$j$, j'，多项式 $c(X - a_j)^\gamma - c(X - a_{j'})^\gamma$ 是常数；但对于 $j \neq j'$ 并非如此，因为次数为 $\gamma - 1$ 的项的系数为 $c\gamma a_{j'} - c\gamma a_j \neq 0$。□

推论 7。 如果 A, $B \in \mathcal{P}_n$ 满足 $A \leq_p B$，则 $A \equiv_p B$。换言之， Σ_n 的元素两两 $\leq_p$-不可比。

证明。 根据命题 5(2)，可以假设 $n \geq 2$。如果 $A \leq_p B$，由命题 6，存在一次多项式 P，使得 $A = P^{-1}(B)$。那么 P^{-1} 是一个多项式，实际上是一个一次多项式，将 B 化为 A。□

因此，如果 $A \in \mathcal{P}_n$，多项式类 $[A]$ 就是某个一次多项式作用于 A所得的所有像构成的族。由此得到以下结果。

定义2. 设 α 为 $\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{P}(k)$ 上的作用，定义为 $\alpha(P, A) = P(A)$。

我们也用 α 表示该作用在固定的 $\mathcal{P}_n$ 上的限制。

C推论8. $\equiv_p$ 在 $\mathcal{P}_n$ 上的限制 $\equiv_p^n$ 是作用 α 的轨道关系 .

推论8不能推广到无限集：参见注释52。

注9。 由命题6和命题5(3)的证明可知，对于每个 $A, B \in \mathcal{P}_2$，恰有两个将 A 约化为 B的多项式：一个的系数是方程 (6) 的解 (c, c')；另一个则由交换 (6) 中的 b_1, b_2 得到。将类似论证应用于方程

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

可知，若 $\{a_1, \dots, a_n\} \leq_p \{b_1, \dots, b_n\}$，则至多有 $n!$ 个将 $\{a_1, \dots, a_n\}$ 约化为 $\{b_1, \dots, b_n\}$的多项式。注意，(7) 对 $\{b_1, \dots, b_n\}$ 的某些枚举可能相容，而对另一些枚举则不相容。

特别地，每个 $A \in \mathcal{P}_n$ 的稳定子 $Stab_A^\alpha$ 至多有 $n!$ 个元素。$Stab_A^\alpha$ 的基数在多项式类的几何中发挥作用：参见注 23。

2.1. 簇 Σ_n。推论8指出，可以为作用 α 的轨道空间（即 Σ_n）赋予几何结构。事实上，本节将证明，$\mathcal{P}_n$，更重要的是，Σ_n，都可以赋予商仿射簇的结构。这一事实的重要意义在于，它为研究关系 $\leq_p$提供了定量框架。

Let

$$f_n(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j \neq j'} (X_j - X_{j'}) \in k[X_1, \dots, X_n].$$

那么，标准开集 $D(f_n) = k^n \backslash V(f_n)$ 由 k^n 中所有坐标互不相同的元素组成。特别地，$D(f_n)$ 上的正则函数环是局部化环 $\Gamma(D(f_n))$
$= k[X_1, \dots, X_n]_{f_n} = \left\{ \frac{g}{f_n^r} \mid g \in k[X_1, \dots, X_n], r \in \mathbb{N} \right\}$。

注10。 多项式 f_n 并不是用于识别 $D(f_n)$ 的最低次数多项式：也可以使用范德蒙德行列式 $\prod_{j<j'}(X_j - X_{j'})$。多项式 f_n 的优点是它是对称的，这在

接下来的步骤中很方便。还要注意， f_n 是次数为 $n(n-1)$ 的齐次多项式，并且是平移不变的。

接下来，我们描述 $\mathcal{P}_n$ 作为一个仿射簇的结构。我们将 $\mathcal{P}_n$ 视为 Sym_n 在 $D(f_n)$ 上通过坐标置换所产生的作用的轨道空间。于是，根据 [4, §10]， $\mathcal{P}_n$ 是一个仿射簇：它是 $D(f_n)$ 在此作用下的几何商。记 $\theta : D(f_n) \to \mathcal{P}_n$ 为商映射。$\mathcal{P}_n$ 上的正则函数环 $\Gamma(\mathcal{P}_n)$ 由 $\Gamma(D(f_n))$ 中相对于 Sym_n的作用保持不变的元素组成；这意味着，如果 $F \in \Gamma(\mathcal{P}_n)$，那么存在一个对称的 $g \in k[X_1, \ldots, X_n]$ 和 $r \in \mathbb{N}$，使得对每个 $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathcal{P}_n$都有

$$F(A) = \frac{g(a_1, \ldots, a_n)}{(f_n(a_1, \ldots, a_n))^r}. \tag{8}$$

根据推论8， Σ_n 是作用 α 在 $\mathcal{P}_n$上的轨道空间。令 $\theta' : \mathcal{P}_n \to \Sigma_n$为商映射。我们断言， Σ_n 是 $\mathcal{P}_n$ 关于α的几何商。为此，我们首先确定 k-代数 $\mathcal{A}$，它由$\Gamma(\mathcal{P}_n)$ 中在 α作用下保持不变的元素组成：如果 Σ_n 是几何商，那么该代数就是正则函数环 $\Gamma(\Sigma_n)$。

引理 11. 设 F, g, r 如 (8) 中所述。那么 $F \in \mathcal{A}$ 当且仅当 g 是次数为 $n(n-1)r$ 的齐次多项式且是平移不变的。

证明. ($\Rightarrow$) 假设 $F \in \mathcal{A}$。

设 $\{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathcal{P}_n, s \in k \setminus \{0\}$。由于 $\{a_1, \ldots, a_n\}, \{sa_1, \ldots, sa_n\}$ 属于同一轨道（这可由一次多项式 $P(X) = sX$ 见证），由 $F(\{a_1, \ldots, a_n\}) = F(\{sa_1, \ldots, sa_n\})$ 可得

$$\frac{g(a_1, \ldots, a_n)}{(f_n(a_1, \ldots, a_n))^r} = \frac{g(sa_1, \ldots, sa_n)}{(f_n(sa_1, \ldots, sa_n))^r} = \frac{g(sa_1, \ldots, sa_n)}{s^{n(n-1)r}(f_n(a_1, \ldots, a_n))^r}$$

由此 $g(sa_1, \ldots, sa_n) = s^{n(n-1)r} g(a_1, \ldots, a_n)$，这表明 g是次数为 $n(n-1)r$的齐次多项式。

现在设 $\{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathcal{P}_n, t \in k$。由于 $\{a_1, \ldots, a_n\}, \{a_1 + t, \ldots, a_n + t\}$ 属于同一轨道（这可由一次多项式 $P(X) = X + t$ 见证），由 $F(\{a_1, \ldots, a_n\}) = F(\{a_1 + t, \ldots, a_n + t\})$ 可得

$$\frac{g(a_1, \ldots, a_n)}{(f_n(a_1, \ldots, a_n))^r} = \frac{g(a_1 + t, \ldots, a_n + t)}{(f_n(a_1 + t, \ldots, a_n + t))^r} = \frac{g(a_1 + t, \ldots, a_n + t)}{(f_n(a_1, \ldots, a_n))^r}$$

由此得到 $g(a_1+t, \ldots, a_n+t) = g(a_1, \ldots, a_n)$，这表明 g 是平移不变的。($\Leftarrow$) 假设 g 是次数为 $n(n-1)r$ 的齐次平移不变函数。设 $A, B \in \mathcal{P}_n$ 属于同一个轨道。若 $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$，则 $B = \{sa_1+t, \ldots, sa_n+t\}$

对于某些 s,t，其中 $s\neq 0$。于是

$$F(B)=\frac{g(sa_1+t,\dots,sa_n+t)}{(f_n(sa_1+t,\dots,sa_n+t))^r}=\frac{g(sa_1,\dots,sa_n)}{(f_n(sa_1,\dots,sa_n))^r}=$$
$$=\frac{s^{n(n-1)r}g(a_1,\dots,a_n)}{s^{n(n-1)r}(f_n(a_1,\dots,a_n))^r}=\frac{g(a_1,\dots,a_n)}{(f_n(a_1,\dots,a_n))^r}=F(A).$$

因此 $F\in\mathcal{A}$。 □

还需证明， $\Sigma_n\to k$ 上的函数环 $\mathcal{A}$ 这一 k-代数生成 Σ_n 上的商拓扑，即如下命题。

命题 12。 (1) 对每个 $F\in\mathcal{A}$， F 的零点集在 Σ_n 中是闭集。(2) 对每个闭 $C\subseteq\Sigma_n$，存在 $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$，使得 C 是 $\mathcal{B}$ 的零点集。

证明。 (1) 设 g、r 如 (8) 所示。那么， Σ_n 中 F 的零点集是 $\mathcal{P}_n$ 中由 g 确定的零点集在 θ' 下的像；后者是 $\mathcal{P}_n$ 中一个在 α 作用下不变的闭子集，因此其在 θ' 下的投影是 Σ_n 中的闭集。

(2) 若 C 在 Σ_n 中是闭集，则存在一个在作用α 下不变的闭集 $C'\subseteq\mathcal{P}_n$，使得 $C=\theta'(C')$。进而存在一个在坐标置换下不变的闭集 $C''\subseteq D(f_n)$，使得 $C'=\theta(C'')$。注意， C'' 对变换 $(a_1,\dots,a_n)\mapsto(sa_1,\dots,sa_n)$（其中 $s\neq 0$）以及 $(a_1,\dots,a_n)\mapsto(a_1+t,\dots,a_n+t)$ 也保持不变。

断言。 存在 $\mathcal{S}\subseteq k[X_1,\dots,X_n]$，使得 $C''=V(\mathcal{S})$，且 $\mathcal{S}$ 中的每个元素都是齐次的、在平移下不变，并且是对称的。

断言的证明。 由于 C'' 是对称的，存在一个由对称多项式组成的集合 $\mathcal{T}_0\subseteq k[X_1,\dots,X_n]$，使得 C'' 是 $\mathcal{T}_0$ 在 $D(f_n)$ 中的零点集。为说明这一点，注意到 $I(C'')$ 是一个对称理想，也就是说，对任意 $f\in I(C'')$，通过对变量进行置换从 f 得到的任何多项式都属于 $I(C'')$；根据 [10, 命题 2.6, 4]（该命题针对 $\mathbb{C}$ 陈述，但其证明对任意代数闭域都成立），由 $I(C'')$ 的对称多项式生成的理想的根基等于 $I(C'')$。因此，只需将 $I(C'')$ 中所有对称多项式组成的集合取作 $\mathcal{T}_0$。

下一步是将每个 $h\in\mathcal{T}_0$ 替换为一组对称齐次多项式。其论证与证明射影簇存在齐次方程的论证类似（例如参见 [9, 命题-定义 4.1]）。设 $h=\sum_{j=1}^u h_j$，其中多项式 h_j 是齐次的，且次数两两不同 γ_j；注意，每个 h_j 也都是对称的。若 $h_1(a_1,\dots,a_n)=\dots=h_u(a_1,\dots,a_n)=0$，则 $h(a_1,\dots,a_n)=0$。反过来，若对所有$h\in\mathcal{T}_0$都有 $h(a_1,\dots,a_n)=0$，则由 C'' 的性质可知，对每个 $s\neq 0$，

$$0=h(sa_1,\dots,sa_n)=\sum_{j=1}^u h_j(a_1,\dots,a_n)s^{\gamma_j}$$

因此 $h_1(a_1,\dots,a_n)=\dots=h_u(a_1,\dots,a_n)=0$。所以 $V(\mathcal{T}_0)=V(\mathcal{T}_1)$，其中$\mathcal{T}_1$ 由 $\mathcal{T}_0$中所有元素的各次数齐次部分组成。

最后一步是将 $\mathcal{T}_1$ 的每个元素替换为一个与之等价的对称、齐次且平移不变的多项式。对于每个 $h\in\mathcal{T}_1$，令 $p_h(X_1,\dots,X_n)=h(X_1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j,\dots,X_n-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j)$。直接利用 h 的性质可知，p_h 确实是对称、齐次且平移不变的。此外，根据 C'' 的性质，

$\forall h\in\mathcal{T}_1, p_h(a_1,\dots,a_n)=0$ 当且仅当

$$\forall h\in\mathcal{T}_1, h\left(a_1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j,\dots,a_n-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j\right)=0 \qquad \text{iff}$$
$$\forall h\in\mathcal{T}_1, h(a_1,\dots,a_n)=0$$

因此令 $\mathcal{S}=\{p_h\}_{h\in\mathcal{T}_1}$ 即可证明这一结论。 □

现在，对于每个 $h\in\mathcal{S}$，令 γ_h 为 h 的次数。由此可知，多项式 $(h(X_1,\dots,X_n))^{n(n-1)}$ 是次数为 $n(n-1)\gamma_h$ 的齐次多项式，且平移不变、对称。令 $\mathcal{B}=\left\{\frac{h^{n(n-1)}}{f_n^{\gamma_h}}\right\}_{h\in\mathcal{S}}$ 即完成证明。 □

簇 Σ_n 的第一个显然性质如下。

推论 13。仿射簇 Σ_n 是不可约的。

证明。事实上，Σ_n 是不可约簇 $D(f_n)$在态射 $\theta'\theta$ 下的像。然后应用 [9, 命题 I.6.11(2)]。□

Moreover $\dim(\Sigma_n)=n-2$, see corollary 16(2).

问题1。确定 Σ_n。

我们在命题 20 中回答 $n=3$ 的问题1。

2.2. 多项式双可归约性的几何描述。在本节中，我们对 $\mathcal{P}_n$中的多项式双可归约性关系进行几何描述，其中 $n\geq 3$，即作用 α的轨道关系；换言之，我们给出 Σ_n的元素的几何描述。

固定 $B=\{b_1,\dots,b_n\}\in\mathcal{P}_n$。给定 $(x_1,\dots,x_n)\in D(f_n)$，集合 $A=\{x_1,\dots,x_n\}$属于 $[B]$ 当且仅当存在一次多项式 $P(X)=cX+c'$，以及 $\{1,\dots,n\}$的一个置换 σ，使得对于 $j\in\{1,\dots,n\}$，$P(x_j)=x_1-b_{\sigma(j)}$。因此，条件是存在 $\sigma\in Sym_n$，使得 $(x_1,\dots,x_n)$ 满足线性增广矩阵为 $N=\begin{pmatrix} x_1 & 1 & b_{\sigma(1)}\\ x_2 & 1 & b_{\sigma(2)}\\ \dots & \dots & \dots\\ x_n & 1 & b_{\sigma(n)}\end{pmatrix}$ 相容的线性系统。由于

$rk\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} = 2$, the condition becomes

$$rkN = 2, \tag{9}$$

这意味着点 $(1, \dots, 1)$、$(x_1, \dots, x_n)$、$(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)})$ 位于同一个过原点的平面上。

更确切地说，由于 N 的任意两行都线性无关，(9) 意味着每一行都与前两行线性相关，这可转化为以下线性方程组：

$$\begin{cases} (b_{\sigma(3)} - b_{\sigma(2)})x_1 + (b_{\sigma(1)} - b_{\sigma(3)})x_2 + (b_{\sigma(2)} - b_{\sigma(1)})x_3 &= 0 \\ \dots \\ (b_{\sigma(j)} - b_{\sigma(2)})x_1 + (b_{\sigma(1)} - b_{\sigma(j)})x_2 + (b_{\sigma(2)} - b_{\sigma(1)})x_j &= 0 \\ \dots \\ (b_{\sigma(n)} - b_{\sigma(2)})x_1 + (b_{\sigma(1)} - b_{\sigma(n)})x_2 + (b_{\sigma(2)} - b_{\sigma(1)})x_n &= 0 \end{cases}. \tag{10}$$

由于 (10) 的系数矩阵的秩为 $n-2$，该方程组在 k^n 中的解集 π_σ 是一个二维向量空间，即一个平面，它包含直线

$$r: \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_n. \tag{11}$$

注意，π_σ 也取决于 B 的枚举，而 $\mathcal{F}_B = \{\pi_\sigma\}_{\sigma \in Sym_n}$ 则不然——参见定义3。

根据以上讨论和记号，可得如下结果。

引理14。固定 $\sigma \in Sym_n$，并令 $B = \{b_1, \dots, b_n\} \in \mathcal{P}_n$。令 π_σ 和 r 分别按 (10) 和 (11) 定义。若 $A \in \mathcal{P}_n$ 和 $A \leq_p B$，则存在$(a_1, \dots, a_n) \in \pi_\sigma \setminus r$，使得 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$。反之，若 $(a_1, \dots, a_n) \in \pi_\sigma \setminus r$，则 $\{a_1, \dots, a_n\} \leq_p B$。

证明。假设多项式 P可约化为 B，因此根据命题6，P 是线性的。于是存在 $\tau \in Sym_n$，使得 $\forall j \in \{1, \dots, n\}, P(x_j) = b_{\tau(j)}$，由此可得 $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $P(x_{\tau^{-1}\sigma(j)}) = b_{\sigma(j)}$。因此 $(x_{\tau^{-1}\sigma(1)} \ \cdots, x_{\tau^{-1}\sigma(n)}) \in \pi_\sigma \setminus r$。

根据前面的讨论，以及$\pi_\sigma \setminus r$ 中的元素具有两两不同的坐标这一事实，逆命题也成立。□

因此，我们得到以下结论。

注15。(1) 所有满足 $\{x_1, \dots, x_n\} \in [B]$ is$\bigcup_{\sigma \in Sym_n} \pi_\sigma \setminus r = (\theta'\theta)^{-1}([B])$ 的 $(x_1, \dots, x_n)$ 构成的集合：这是态射 $\theta'\theta: D(f_n) \to \Sigma_n$ 下 $[B] \in \Sigma_n$ 的纤维。该纤维在 k^n 中的闭包是$\bigcup_{\sigma \in Sym_n} \pi_\sigma$。(2) 对任意固定的 $\sigma \in Sym_n$,

$$[B] = \{\{x_1, \dots, x_n\} \mid (x_1, \dots, x_n) \in \pi_\sigma \setminus r\}.$$

(3) 对于相同或不同的 B，两个如 (10) 中所述的不同平面相交于 r。(4) 令 B 在 $\mathcal{P}_n$ 中取值，(10) 中的平面覆盖 k^n，但不包括坐标有两个相等的点，也就是位于 ${}^{n}{}_{(n-1)\ 2}$ 个超平面$x_j = x_{j'}$ 上的点，其中 $j \neq j'$。

推论 16. (1) 每个多项式类 $[B]$ 都是 $\mathcal{P}_n$ 的一个 2 维子簇。(2) 维数$(\Sigma_n) = n - 2$。

证明。 态射 θ 的每个纤维都是有限的，而根据注15(1)，态射 $\theta'\theta$的每个纤维的维数均为 2。应用 [9, 推论 IV.3.8(2)]。□

因此，每个多项式类都由 (10) 中至多n 个平面中的任意一个平面 π_σ 唯一确定，其中 σ 在 Sym_n中取值。这些平面属于以直线 r为基的平面层。

定义 3. 设 $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \in \mathcal{P}_n$。

- 我们称 (10) 中的每个平面为 B的一个特征平面，或称 $[B]$的一个特征平面。记 $\mathcal{F}_B$ 为 B的特征平面集合。
- 我们称 B的特征数，或称 $[B]$的特征数，并将其记作 $\chi(B)$或 $\chi([B])$，即 B 的特征平面的数量，也就是 $\mathrm{card}(\mathcal{F}_B)$。

因此 $\chi(B) \leq n!$ ——另见定义5。

定义 4. 给定 $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$，令 β： $Sym_n \times \mathcal{F}_B \to \mathcal{F}_B$为如下作用：令 $\beta(\tau, \pi_\sigma) = \pi_{\tau\sigma}$。

引理 17. 作用 β 仅取决于多项式类 $[B]$，而不取决于代表集合 B 及其枚举。

证明. 首先，我们证明 β不取决于 $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$的任何枚举。设 $B = \{b_{\rho(1)}, \ldots, b_{\rho(n)}\}$是另一种枚举，且 $\rho \in Sym_n$。对于每个$\sigma \in Sym_n$，令 π'_σ 为使用这个新枚举按式(10)定义的平面，即

$$\pi'_\sigma : (b_{\sigma\rho(j)} - b_{\sigma\rho(2)})x_1 + (b_{\sigma\rho(1)} - b_{\sigma\rho(j)})x_2 + (b_{\sigma\rho(2)} - b_{\sigma\rho(1)})x_j = 0, \qquad j \in \{3, \ldots, n\}.$$

于是 $\pi'_\sigma = \pi_{\sigma\rho}$。因此，若 β' : $(\tau, \pi'_\sigma) \mapsto \pi'_{\tau\sigma}$ 是使用新枚举定义的 $\mathcal{F}_B$ 上的作用，则 $\beta(\tau, \pi'_\sigma) = \beta(\tau, \pi_{\sigma\rho}) = \pi_{\tau\sigma\rho} = \pi'_{\tau\sigma} = \beta'(\tau, \pi'_\sigma)$，由此$\beta = \beta'$。

现在设 $C \in [B]$，并设$(c_1, \ldots, c_n) \in \pi_{id}$，使得 $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$，其中id是 $\{1, \ldots, n\}$上的恒等置换。若 π'_σ是使用$(c_1, \ldots, c_n)$按照(10)定义的平面，即

$$\pi'_\sigma : (c_{\sigma(j)} - c_{\sigma(2)})x_1 + (c_{\sigma(1)} - c_{\sigma(j)})x_2 + (c_{\sigma(2)} - c_{\sigma(1)})x_j = 0, \quad j \in \{3, \ldots, n\},$$

只需证明，对于每个 $\sigma \in Sym_n$， $\pi'_\sigma = \pi_\sigma$。由于 $r \subseteq \pi_\sigma \cap \pi'_\sigma$，且将 $(c_{\sigma(1)}, \ldots, c_{\sigma(n)}) \in \pi'_\sigma$ 直接代入方程可得，因此接下来只需

证明 $(c_{\sigma(1)},\dots,c_{\sigma(n)}) \in \pi_\sigma$，也就是 $(c_1,\dots,c_n) \in \pi = \{(p_1,\dots,p_n) \in k^n \mid (p_{\sigma(1)},\dots,p_{\sigma(n)}) \in \pi_\sigma\}$。但这是显然的，因为 π 是一个包含 r 且经过点 $(b_1,\dots,b_n)$ 的平面，所以 $\pi = \pi_{id}$。□

因此，对于 $j \neq j'$，令 $\mathcal{F}$ 为包含直线 r 且不包含在任何超平面 $x_j = x_{j'}$ 中的平面的集合，根据定义 4，可得到一个作用 $Sym_n \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$，仍记作 β。其轨道是给定多项式类的特征平面集合。

给定 $(b_1,\dots,b_n) \in D(f_n)$，通过在 (10) 中选择置换 σ 为恒等变换，即可得到包含 $(b_1,\dots,b_n)$ 的 $\mathcal{F}$ 中的平面，也就是说

$$\pi_{id}: \begin{cases} (b_2-b_1)(x_3-x_1)+(b_1-b_3)(x_2-x_1) &= 0 \\ \dots \\ (b_2-b_1)(x_j-x_1)+(b_1-b_j)(x_2-x_1) &= 0 \\ \dots \\ (b_2-b_1)(x_n-x_1)+(b_1-b_n)(x_2-x_1) &= 0 \end{cases}. \tag{12}$$

对于 $j \in \{1,\dots,n\}$，令

$$\lambda_j = \frac{b_1-b_j}{b_1-b_2}. \tag{13}$$

注意，$\lambda_1 = 0$、$\lambda_2 = 1$ 以及 $(b_1,\dots,b_n) \in D(f_n)$ 时 $(\lambda_3,\dots,\lambda_n)$ 所取值的 k^{n-2} 的子集，均由以下条件定义

$$\begin{array}{l} \forall j \in \{3,\dots,n\}, \lambda_j \notin \{0,1\} \\ \forall j,j' \in \{3,\dots,n\}, j \neq j' \Rightarrow \lambda_j \neq \lambda_{j'} \end{array}. \tag{14}$$

满足 (14) 的所有 $(\lambda_3,\dots,\lambda_n) \in k^{n-2}$ 构成k^{n-2}的一个标准开子集，即它是 $D(S_n)$，其中 $S_n(\Lambda_3,\dots,\Lambda_n) = \prod_{h=3}^{n} \Lambda_h(\Lambda_h-1)\cdot\prod_{3\leq h<h'\leq n}(\Lambda_h-\Lambda_{h'})$。因此，(13) 定义了一个满态射 $\eta: D(f_n) \to D(S_n)$:

$$\eta(b_1,\dots,b_n) = \left(\frac{b_1-b_3}{b_1-b_2},\dots,\frac{b_1-b_n}{b_1-b_2}\right).$$

系统 (12) 可写为

$$(x_j-x_1)+\lambda_j(x_1-x_2)=0, \qquad \text{for } j \in \{3,\dots,n\} \tag{15}$$

其中参数之间的关系由下式给出

$$\lambda_j = \frac{b_1-b_j}{b_1-b_{j'}}\lambda_{j'}, \qquad \text{for } j,j' \in \{3,\dots,n\}. \tag{16}$$

以下注释汇集了方程 (15) 的若干推论。

注 18. (1) 每个特征平面 (12) 都恰好包含一个满足 $x_1 = 0, x_2 = 1$ 的点，即点 $\lambda = (0,1,\lambda_3,\dots,\lambda_n)$。(2) 态射 η 的纤维是去掉直线 r 后的特征平面：也就是说，$\eta^{-1}(\{(\lambda_3,\dots,\lambda_n)\})$ 是不含直线 r 的特征平面，其中包含点 $(0,1,\lambda_3,\dots,\lambda_n)$。

(3) 方程 (15) 还推出

$$\lambda_j = \frac{x_1 - x_j}{x_1 - x_2}. \tag{17}$$

因此，掌握 $(\lambda_3, \ldots, \lambda_n) \in D(S_n)$，即可通过任意选取不同的元素 $x_1, x_2 \in k$ 并应用 (17)，找出 $[\{0, 1, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}]$ 中的所有元素 $\{x_1, \ldots, x_n\}$。

(4) 函数 $(\lambda_3, \ldots, \lambda_n) \mapsto (0, 1, \lambda_3, \ldots, \lambda_n)$ 是一个态射 $\xi\colon D(S_n) \to D(f_n)$，它是 η 的右逆。因此，令 $\eta' = \theta'\theta\xi\colon D(S_n) \to \Sigma_n$，我们得到如下簇之间态射的交换图：

$$\begin{array}{ccc} D(f_n) & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{P}_n \\ \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle \theta'} \\ D(S_n) & \xrightarrow{\eta'} & \Sigma_n \end{array} \tag{18}$$

给定 $\Theta \in \Sigma_n$，纤维 $\eta'^{-1}(\{\Theta\})$ 是由 $\chi(\Theta)$ 个元素构成的集合。

所有这些态射都依赖于 n。当需要指定 n 的值时，会将其作为下标标出。

(5) 由交换图 (18) 还可得，子集 $F \subseteq \Sigma_n$ 是闭集，当且仅当 $\eta'^{-1}(F)$ 是 $D(S_n)$ 中的闭集。换言之，Σ_n 上的拓扑与 $D(S_n)$ 的商拓扑同胚，其中所取的等价关系是由 η' 诱导的。

系数 $(\lambda_3, \ldots, \lambda_n)$ 的定义 (13) 可用于为有限集上的多项式双可归约关系提供完备不变量。更准确地说，如果除了扎里斯基拓扑之外，k 还带有一种 Polish拓扑，且相对于该拓扑，各项运算都是 Borel 的（如 $k = \mathbb{C}$ 的情形），那么上述讨论便可改述为关于等价关系在 Borel归约下分类的问题——关于这一主题的一般性参考资料见 [3]。请注意，在这种情况下，$Fin = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ 是 $K(k)$ 的一个 F_σ 子集；$K(k)$ 是由 Vietoris 拓扑赋予拓扑的紧子集 Polish 空间，因为每个 $\bigcup_{h\le n} \mathcal{P}_h$ 都是闭集。因此，Fin 是一个标准Borel空间。以下命题表明，从描述集合论的角度来看，有限集上的多项式等价是一个相当简单的等价关系。

命题19。 如果 k 配备了一个使运算为 *Borel* 的 *Polish*拓扑，那么等价关系 $\equiv_p$ 在 Fin 上的限制是一个光滑等价关系。

证明。只需证明，对于每个 $n \ge 3$，$\equiv_p$ 在$\mathcal{P}_n$ 上的限制 $\equiv_p^n$ 都是光滑的。为此，定义一个 Borel函数 $\Phi\colon \mathcal{P}_n \to k^{n-2}$，使得$A \equiv_p^n B \Leftrightarrow \Phi(A) = \Phi(B)$。在 k^{n-2}上固定一个 Borel全序 $\trianglelefteq$。

根据 [6, 练习 18.15]，设 $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \colon \mathcal{P}_n \to k$ 为 Borel函数，且满足 $\forall A \in \mathcal{P}_n, A = \{\Phi_1(A) \ldots, \Phi_n(A)\}$。令 $\Lambda(b_1, \ldots, b_n) = (\lambda_3, \ldots, \lambda_n)$ 按照 (13) 定义。于是，对每个 $A \in \mathcal{P}_n$，将 $\Phi(A)$ 定义为所有 $\Lambda(\Phi_{\sigma(1)}(A) \ldots, \Phi_{\sigma(n)}(A))$（其中 $\sigma \in Sym_n$）中的 $\trianglelefteq$-最小者。函数 Φ 具有所需的性质。□

对多项式可约性和多项式等价的描述集合论性质进行详细研究，不在本文的讨论范围内。不过，我们提出以下问题。

问题 2. $\equiv_p$、$\leq_p$ 在 $K(k)$上的描述集合论复杂度是什么?

2.3. **Σ_3 是一条直线。** 令 R_n^γ 为 $k[X_1, \ldots, X_n]$ 的子空间，由所有对称、次数为 γ 的齐次平移不变多项式（包括零多项式）组成。根据 [8], ，向量空间 R_n^γ 的一组基由以下多项式给出

$$W_I(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{\ell=2}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(X_j - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} X_l \right)^\ell \right]^{i_\ell}$$

其中，I 是将 γ 划分为从2到 n 的整数所得的划分，i_ℓ 是 I中 ℓ的重数。令

$$W_\ell = \sum_{j=1}^{n} \left(X_j - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} X_l \right)^\ell, \tag{19}$$

这类基的元素都是如下形式的多项式

$$W_2^{i_2} W_3^{i_3} \cdot \ldots \cdot W_n^{i_n}$$

其中 $2i_2 + 3i_3 + \ldots + ni_n = \gamma$。

现在我们运用这一事实和上述讨论来回答关于 $n =$ 的问题1 3.

定理20。 Σ_3 同构于一条仿射直线。

证明。我们证明代数 $\Gamma(\Sigma_3)$ 同构于一条仿射直线的正则函数代数。

根据引理 11，若 $F \in \Gamma(\Sigma_3)$，则 $F = \frac{g(X_1,\ X_2,\ X_3)}{[f_3(X_1,\ X_2,\ X_3)]^\gamma}$，其中 g 是对称的、次数为 6γ 的齐次平移不变函数。利用（19），我们可以写成

$$F = \frac{\sum_{2i_2+3i_3=6\gamma} \beta_{i_2 i_3} W_2^{i_2} W_3^{i_3}}{f_3^\gamma}$$

其中 $f_3 = \sum_{2j_2+3j_3=6} \alpha_{j_2 j_3} W_2^{j_2} W_3^{j_3}$；由于 $2j_2 + 3j_3 = 6$ 意味着要么 $j_2 =$3, $j_3 = 0$，要么 $j_2 = 0$，$j_3 = 2$，因此对于某些固定的系数 α_0、α_1，有 $f_3 = \alpha_0 W_2^3 + \alpha_1 W_3^2$——它们不全为零。

关系 $2i_2+3i_3=6\gamma$ 意味着 i_3 是偶数，因此令 $i_3=2i_3'$，其中 $0\le i_3'\le\gamma$，由此得出 $i_2=3\gamma-3i_3'$。令 $T_2=W_2^3$、$T_3=W_3^2$，得到

$$F=\frac{\sum_{i_3'=0}^{\gamma}\beta_{i_3'}T_2^{\gamma-i_3'}T_3^{i_3'}}{(\alpha_0T_2+\alpha_1T_3)^{\gamma}}. \tag{20}$$

(20) 中所有函数构成的代数，是射影直线 $\mathbb{P}^1$ 上单点集 $\{(\alpha_1:-\alpha_0)\}$ 的补集的正则函数代数；该射影直线也就是一条仿射直线。□

2.4. **例外类**。

定义5。设 $n\ge 3$，且设 $B\in\mathcal{P}_n$。若 $\chi(B)<n!$，则称 B 为例外集，并称 $[B]$ 为例外类。

因此，多项式类是例外类，当且仅当存在不同的 σ、$\sigma'\in Sym_n$，使得系统 **(10)** 分别针对 σ 和 σ' 所描述的平面 π_σ、$\pi_{\sigma'}$ 重合。

例外类在关于关系 $\le_p$ 方面具有特殊作用，见定理45。因此，以下问题自然而然地出现了。

- 什么是例外类?
- 给定一个例外类，它的特征数是多少?

多项式类 $[B]$ 是例外类，当且仅当对某个（等价地，对任意）$\pi\in\mathcal{F}_B$ 而言，π 在作用 β 下的稳定子不是 Sym_n 的平凡子群；等价地，当且仅当存在一个非恒等置换 σ 使得 $\pi_\sigma=\pi_{id}$。因此，根据（15），多项式类 $[\{b_1,\dots,b_n\}]$ 是例外类，当且仅当存在一个非恒等置换 σ，使得对每个 $j\in\{3,\dots,n\}$,

$$\lambda_j=\frac{b_{\sigma(1)}-b_{\sigma(j)}}{b_{\sigma(1)}-b_{\sigma(2)}}, \tag{21}$$

也就是说

$$\frac{b_{\sigma(1)}-b_{\sigma(2)}}{b_1-b_2}=\frac{b_{\sigma(1)}-b_{\sigma(j)}}{b_1-b_j}. \tag{22}$$

注意，对于 $j\in\{1,2\}$，（21）总是成立，而对于 $j=2$，（22）总是成立。还要注意，方程（21）可以等价地写成

$$\lambda_{\sigma(j)}-\lambda_{\sigma(1)}=\lambda_j(\lambda_{\sigma(2)}-\lambda_{\sigma(1)}). \tag{23}$$

任意枚举 $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ 都诱导出一个同构（该同构取决于所选的枚举）

$$Sym(B)\to Sym_n,\qquad \tau\mapsto\sigma \tag{24}$$

定义为

$$\tau(b_j)=b_{\sigma(j)}. \tag{25}$$

固定的 $\tau \in Sym(B)$ 在由 B 的不同枚举诱导的同构（24）下的像是共轭的。

若 $\tau \in Sym(B)$，给定互不相同的 $b, b' \in B$，定义

$$Y_\tau(b, b') = \frac{\tau(b) - \tau(b')}{b - b'}. \tag{26}$$

下面利用差商（26）给出例外类的一种刻画。

命题 21. 设 $B \in \mathcal{P}_n$。以下各项等价：

(1) 多项式类 $[B]$ 是例外类。*(2)* 对任意 $b \in B$，都存在一个非恒等置换 $\tau \in Sym(B)$，使得差商 $Y_\tau(b, b')$ 对每个 $b' \in B \setminus \{b\}$ 都是常数。*(3)* 存在 $b \in B$ 和一个非恒等置换 $\tau \in Sym(B)$，使得差商 $Y_\tau(b, b')$ 对每个 $b' \in B \setminus \{b\}$ 都是常数。*(4)* 存在一个非恒等置换 $\tau \in Sym(B)$，使得差商 $Y_\tau(b, b')$ 对任意互不相同的 $b, b' \in B$ 都是常数。*(5)* B 在定义*2*中的作用 α 下的稳定子非平凡。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)。设 $B = \{b_1, \dots, b_n\}$，且 $b_1 = b$。因此，(22) 给出了一个非恒等变换 $\sigma \in Sym_n$，使得比值 $\frac{b_{\sigma(1)} - b_{\sigma(j)}}{b_1 - b_j}$ 不依赖于 $j \neq 1$。定义 τ 为 is (25)，即可得到结论。

(4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) 显然。

(3) $\Rightarrow$ (1)。设 $B = \{b_1, \dots, b_n\}$，且 $b_1 = b$。定义 σ 为 is (25)。于是成立。(22)

(3) $\Rightarrow$ (4)。设 τ、b 满足 (3)。给定不同的 b'、$b'' \in B \setminus \{b\}$，令 $\varepsilon = Y_\tau(b, b') = Y_\tau(b, b'')$。因此，$\tau(b) - \tau(b') = \varepsilon(b - b')$，由此 $\tau(b) - \varepsilon b = \tau(b') - \varepsilon b'$，类似地 $\tau(b) - \varepsilon b = \tau(b'') - \varepsilon b''$。于是 $\tau(b') - \varepsilon b' = \tau(b'') - \varepsilon b''$，最后 $Y_\tau(b', b'') = \varepsilon$。

(3) $\Rightarrow$ (5)。令 τ、b 满足 (3)，并令 $\varepsilon = Y_\tau(b, b')$，对任意 $b' \neq b$。定义

$$P(X) = \varepsilon X - \varepsilon b + \tau(b). \tag{27}$$

于是 $P(B) = B$，因为

$$\forall x \in B, P(x) = \tau(x). \tag{28}$$

(5) $\Rightarrow$ (4)。若 $P \in \mathcal{L} \setminus \{X\}$ 满足 $P(B) = B$，则将 P 限制到 B 可确定 B 的一个非恒等置换 τ；差比值 $Y_\tau(b, b')$ 为常数，并且与 P 的一次项系数相同。□

在命题 21 的证明 (3) $\Rightarrow$(5) 中，多项式 P 不依赖于 b的选择，而只依赖于 τ。事实上，若 P_{b_0}, P_{b_1}分别是通过从 (28) 中选择 b_0, b_1所定义的多项式，则可得 $P_{b_0} = P_{b_1}$，因为 P_{b_0}, P_{b_1}都是线性的，且在 n 个点上重合。

定义 6. 设 $B \in \mathcal{P}_n, \tau \in Sym(B)$。那么，如果 $Y_\tau(b,b')$ 为常数，则 τ 是 B 的特征置换，其中 $b \neq b'$；在此情形下，将这样的值记为 Y_τ。此外，设 G_B 为 B 的特征置换集合。对于 $\tau \in G_B$，令 P_τ 为如 (27) 中定义的多项式，并设 $H_B = \{P_\tau \mid \tau \in G_B\}$。

命题 22。设 $B \in \mathcal{P}_n$。

(1) G_B 是 $Sym(B)$ 的子群， H_B 是 B 在作用 α 下的稳定子，并且函数 $\tau \mapsto P_\tau$ 是它们之间的同构。(2) 函数 $Y : \tau \mapsto Y_\tau$ 是群 G_B 到乘法群 $k \setminus \{0\}$的单射态射。

证明。(1)

- 恒等变换 id 是一个特征置换，因为对 $b \neq b'$， $Y_{id}(b,b') = 1$。
- 设 $\tau, \tau' \in G_B$。若 $b \neq b'$，则 $Y_{\tau\tau'}(b,b') = \frac{\tau\tau'(b) - \tau\tau'(b') - \tau\tau'(b) + \tau\tau'(b')}{b - b'} = Y_\tau Y_{\tau'}$，因此$\tau\tau' \in G_B$。
- 设 $\tau \in G_B$。若 $b \neq b'$，则 $Y_{\tau^{-1}}(b,b') = \frac{\tau^{-1}(b) - \tau^{-1}(b') - \tau\tau^{-1}(b) + \tau\tau^{-1}(b')}{b - b'} = Y_\tau^{-1}$，因此 $\tau^{-1} \in G_B$。

由 (28) 可立即得出，每个 P_τ 都属于 B 的稳定子；而每个属于 B 稳定子的元素都具有如下形式：对某个$\tau \in G_B$ ，它等于 P_τ。这一点可仿照命题 21 的证明中 (5) $\Rightarrow$(4) 的论证。由 (28) 可知，$\tau \mapsto P_\tau$ 是一个态射，因为

$$\forall x \in B, P_{\tau\tau'}(x) = \tau\tau'(x) = P_\tau P_{\tau'}(x)$$

由此 $P_{\tau\tau'} = P_\tau P_{\tau'}$。同样由 (28) 可知，若 $P_\tau(X) = X$，则 τ是恒等变换，因此 $\tau \mapsto P_\tau$ 是一个同构。

(2) 根据 (1) 的证明的第一部分，函数 Y 是一个态射。为证明它是单射，取满足 $Y_\tau = 1$的 $\tau \in G_B$。那么，值 $\tau(b) - b$ 在 B上为常数，设对某个 $c \in k$，有 $\tau(b) = b + c$。因此，对每个 r，都有 $\tau^r(b) = b + rc$。设 m是 τ的阶。由此可得 $b = \tau^m(b) = b + mc$，从而 $c = 0$，因此 τ是恒等变换。□

因此， B 是例外集，当且仅当 G_B 不是 Sym（B）的平凡子群。

注 23. 给定 B的特征平面 π、 π' ，它们的稳定子 $Stab_\pi^\beta$、 $Stab_{\pi'}^\beta$彼此共轭，因此同构。

注意，根据命题 21 的证明， $\tau \in Sym(B)$ 是 B 的特征置换，当且仅当与 τ 通过 (25) 关联的任意（等价地，每个）置换 σ 都属于 B 的某个特征平面的稳定子。因此，关于特征置换的事实可以得出关于稳定特征平面的置换的相应结果。例如，多项式类 $[B]$ 是例外类，当且仅当对于某个（等价地，所有） $\pi \in \mathcal{F}_B$ ，稳定子 $Stab_\pi^\beta$ 不是 Sym_n 的平凡子群；事实上， $\chi(B) = n!$ $\text{card}(Stab_\pi^\beta) = n!$ $\text{card}(G_B) = n!$ $\text{card}(H_B)$。

引理24。 若 $\tau \in G_B$，且存在 b，b'，满足 $b \neq b'$，使得 $\tau(b) = b$，$\tau(b') = b'$，则 τ 是恒等变换。

证明。 根据假设，$Y_\tau = \frac{\tau(b) - \tau(b')}{b - b'} = 1$。现在应用命题 22(2)。 □

每个非平凡有限群都含有一个阶为素数的元素。因此，要确定例外集，只需考虑阶为素数的置换。

推论25。 集合 $B \in \mathcal{P}_n$ 是例外集，当且仅当存在 τ 的一个特征置换 B，使得

$$\tau = c_1 \cdot \ldots \cdot c_s$$

其中 c_1、.....、c_s 是互不相交的 p-循环，某个素数 p 满足，并且 $n = sp$ 或 $n = sp + 1$。

证明。 假设 B 是例外集。令 $\tau \in G_B$ 的阶为某个素数p。那么 $\tau = c_1 \cdot \ldots \cdot c_s$，其中有一些互不相交的 p-循环 c_1、.....、c_s。由引理24可知，$n = sp$ 或 $n = sp + 1$。

反之显然。 □

引理26。 设 $B \in \mathcal{P}_n$，并设 $\tau = c_1 \cdot \ldots \cdot c_s \in G_B \setminus \{id\}$，其中 c_1、.....、c_s 是两两不交的循环；令 $r \geq 2$ 为其中至少一个循环的阶。则 Y_τ 是本原 r 次单位根。

证明。 设 $(b_1 \ \ldots \ b_r)$ 是 τ 的一个 r-循环。令 $P_\tau(X) = Y_\tau X - Y_\tau b_1 + \tau(b_1)$ 按照（27）定义，并取 b_1 为 b。将 P_τ^r 限制在 $\{b_1, \ldots, b_r\}$ 上所得的是恒等变换，因此，由于 $r \geq 2$，多项式 P_τ^r 是恒等变换，并且根据（4），$Y_\tau^r = 1$；此外

$$(Y_\tau^{r-1} + \ldots + Y_\tau + 1)(-Y_\tau b_1 + \tau(b_1)) = 0. \tag{29}$$

如果 $Y_\tau = 1$，则由（29）可推出 $\tau(b_1) = b_1$，这是错误的。因此 $Y_\tau \neq 1$，又由于对于任意 $j < r$，P_τ^j 都不是恒等变换，由（5）可知 $Y_\tau^j \neq 1$。□

推论 27. 如果 τ 是 $B \in \mathcal{P}_n$的非恒等特征置换，那么$\tau = c_1 \cdot \ldots \cdot c_s$ 就是不相交循环 $c_1, \ldots, c_s$的乘积，其中所有这些循环的阶都相同，设为 r，且 $n = sr$ 或 $n = sr + 1$。

证明. 由引理24和引理26可得。 □

命题28. 群 G_B 是一个循环群。其阶是n 的一个因子或 $n - 1$的一个因子。

证明. 由命题22(2)和引理26可知，G_B 同构于单位根群的一个有限子群；特别地，G_B 是循环的。设 r 为其阶，且 $\tau \in G_B$ 的阶为 r。由推论 27，τ 是不相交的 r-循环的乘积，因此再次应用推论 27即可得出结论。□

现在我们得到例外集的一种刻画。

定义 7. 设 $r \geq 2$。正则星形 r-边形是由 k 中互不相同的元素 $(z_1, \ldots, z_r)$ 构成的序列，称为顶点，且存在 $P \in \mathcal{L}$ 使其满足以下性质：

$$P(z_1) = z_2, \quad P(z_2) = z_3, \quad \ldots, \quad P(z_{r-1}) = z_r, \quad P(z_r) = z_1. \tag{30}$$

一个正 r边形是正星形 r 边形的顶点集合。

因此，如果 $k = \mathbb{C}$，正星形 r 边形和正 r 边形是高斯平面中的通常几何概念。

还要注意，如果 P 如（30）中所示，那么 $P^r(X) = X$，其中 P^r 表示将 P 与自身复合 r 次所得的复合。

引理 29。 设 $(z_1, \ldots\ldots, z_r)$ 是一个正星形 r 边形，并设 P 如(30)中所示。则$P(X) = \varepsilon X + c$ 其中：

- ε 是单位根的一个本原 r 次根；
- P的不动点，即$\frac{c}{1-\varepsilon}$，是正则星形r边形的重心 b。

证明。利用 (4)，由 $P^r(X) = X$ 可得，ε 是单位根的 r 次根。此外$\varepsilon \neq 1$，否则 $P^r(z_1) = z_1 + rc \neq z_1$。若存在 $r' < r$ 使得$\varepsilon^{r'} = 1$，那么根据 (5)，$P^{r'}(X) = X + c\frac{\varepsilon^{r'}-1}{\varepsilon-1} = X$，这与 (30) 矛盾。最后，

$$b = \frac{\sum_{j=0}^{r-1} P^j(z)}{r} = \frac{\sum_{j=0}^{r-1} \varepsilon^j z + \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{\ell=0}^{j-1} \varepsilon^\ell c}{r} = \frac{\frac{\varepsilon^r-1}{\varepsilon-1} z + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^j-1}{\varepsilon-1} c}{r} =$$

$$= \frac{(\varepsilon^{r-1} + \ldots + \varepsilon + 1 - r)c}{r(\varepsilon-1)} = \frac{c}{1-\varepsilon}.$$

□

事实证明，例外集是具有相同重心的正则 r边形的并集，也可能包含重心本身。

定理 30。 设 $B \in \mathcal{P}_n$。那么，B 是例外集，当且仅当存在$r \geq 2$ 和 s 使得

(a) 要么 $sr = n$ 且 $B = \bigcup_{h=1}^{s} C_h$，其中集合 C_h 是两两不交、具有相同重心 b的正则 r 边形；(b) 要么 $sr + 1 = n$ 且 $B = \bigcup_{h=1}^{s} C_h \cup \{b\}$，其中集合 C_h 是两两不交、具有相同重心 b的正则 r边形。

证明。假设 (a) 或 (b) 成立。对于每个 h，令 $P_h(X) = \varepsilon_h X + c_h$ 为由 C_h 的元素构成的正则 r-星中式 (30) 所示的一次多项式。

现在固定任意一个 h。根据引理 29，对于每个 h'，都存在 ℓ，使得 $\varepsilon_h = \varepsilon_{h'}^{\ell}$。由于 $\frac{c_{h'}}{1-\varepsilon_{h'}} = \frac{c_h}{1-\varepsilon_h} = b$，可得 $c_h = c_{h'}\frac{1-\varepsilon_{h'}^{\ell}}{1-\varepsilon_{h'}} = c_{h'}(1 + \varepsilon_{h'} + \varepsilon_{h'}^2 + \ldots + \varepsilon_{h'}^{\ell-1})$。因此

$$P_h(X) = \varepsilon_{h'}^{\ell} X + c_{h'}(1 + \varepsilon_{h'} + \varepsilon_{h'}^2 + \ldots + \varepsilon_{h'}^{\ell-1}) = P_{h'}^{\ell}(X).$$

由于 $P_{h'}$ 将 $C_{h'}$ 映到其自身，同样的结论对 P_h也成立。因为这对每个 h'都成立，所以 $P_h(B) = B$，因此 B 在作用 α 下的稳定子非平凡。

反过来，假设 B 是一个例外集，令 τ 为 B 的一个非恒等特征置换，并令 P_τ 由（27）定义。令 r 为 τ 的阶。根据推论 27，$\tau = c_1 \cdot \ldots \cdot c_s$ 与 $sr = n$ 或 $sr + 1 = n$，其中循环 c_j 两两不交，其元素构成正则的 r 星形结构，正如多项式 P_τ 根据（28）所示。因此，它们的重心必与 P_τ 的唯一不动点重合；该不动点存在，因为（27）中的系数 ε 不等于 1，这是因为 τ 不是恒等变换。□

注释 31。定理 30 表明，可以通过选择定理 (a) 或 (b) 中的一个数 s，以及选择 $s + 1$ 个点来确定一个例外集 $B \in \mathcal{P}_n$；这些点分别是每个正则 r 边形中的一个点和公共重心。进而，根据引理 29，只要知道某个正则星形 r 边形的第二个顶点，以及多项式 P（见（30））的首项系数（它是有限多个本原 r 次单位根之一），便可求出重心。

因此，B 由 $s + 1$ 个参数确定。这个思路将在计算例外类集合的维数时发挥作用。

下面是命题28的逆命题。

推论 32. 如果 r 是 n 或 $n - 1$的因子，那么存在 $B \in \mathcal{P}_n$，使得 G_B 的阶为 r。

证明. 首先假设 r 是 n的因子，并令 s 满足 $sr = n$。令$B = \bigcup_{h=1}^{s} C_h$，其中：

(i) 每个 C_h 都是正则的 r边形；
(ii) 所有 C_h 的重心均为 0；(iii) 对每个 h，都有 $h \in C_h$。

T因此 $C_h = \{h, \varepsilon h, \varepsilon^2 h, \ldots, \varepsilon^{r-1} h\}$，其中 ε 是单位根的一个本原 r次根。

根据定理 30(a)，B 是一个例外集。设 τ 为 G_B的一个生成元。那么，τ 每个循环中的元素都包含在某个 C_h中，因此 τ 的阶是 r的一个因子；此外，若 P_h 如定理 30 的证明中所述，则 P_h在 C_h 上的限制的阶为 r，且是 $\tau|_{C_h}$的一个幂，所以 τ 的阶不可能小于 r。

若 r 是 $n - 1$的一个因子，也可采用类似的论证；此时将正则 r边形的公共重心 0 纳入集合 B。□

利用同构 (25)，从推论 32 的证明中还可得到以下结论。

推论 33。通过(25) 与某个特征置换相关联的 $\sigma \in Sym_n$ 集合，都是 $\{1, \ldots, n\}$ 的如下形式的置换：$\sigma = c_1 \cdot \ldots \cdot c_s$，其中 c_1、.....、c_s 是一些长度均为 r的不相交循环，且 $n = sr$ 或 $n = sr + 1$。

推论34。 $\mathcal{P}_n$ 中各集合的所有特征数构成的集合，是所有形如 ${}^{n!}\ {}_{r}$ 的数所组成的集合，其中 r 遍历 $n-1$ 或 n的所有因子。

证明。 由命题28、推论 32，以及 $\chi(B) = {}^{n!}\ {}_{\mathrm{card}(G_B)}$ 这一事实可知。 □

推论35。 设 $B \in \mathcal{P}_n$，且 $\tau \in Sym(B)$ 的阶为2。那么， τ 是 B 的特征置换，当且仅当对所有 $b \in B$， $b + \tau(b)$ 的值均为常数。

证明。 引理26指出， τ 是 B 的特征置换，当且仅当 $\forall b, b' \in B, b \neq b' \Rightarrow Y_\tau(b, b') = -1$；这个等式等价于 $b + \tau(b) = b' + \tau(b')$。□

定义8。 • 我们将 $\mathcal{E}_n$ 记作 Σ_n 的例外类集合。
• 我们将 $\mathcal{E}_n^*$ 记作 Σ_n 的例外类集合，其中的元素具有偶数阶特征群。

命题36. $\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n^*$ 是 Σ_n 的子簇。

证明。 沿用注18(4)中的记号，当且仅当存在某个非恒等置换 σ 使多项式系统 (23) 成立时，点 $(\lambda_3, \ldots, \lambda_n) \in D(S_n)$ 才属于 $\eta'^{-1}(\mathcal{E}_n)$。因此， $\eta'^{-1}(\mathcal{E}_n)$ 是由 σ 在 $Sym_n \setminus \{id\}$ 中取值所得到的、由系统 (23) 生成的仿射簇之并，故它是一个相对于 η' 的纤维不变的仿射簇。因此， $\mathcal{E}_n$ 是一个仿射簇。

通过仅考虑偶数阶的置换 σ ，可类似地证明 $\mathcal{E}_n^*$ 。□

为了确定 $\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n^*$ 的维数，我们利用

$$\dim(\mathcal{E}_n) = \dim((\theta'\theta)^{-1}(\mathcal{E}_n)) - 2 \tag{31}$$

对 $\mathcal{E}_n^*$ 也同样如此。因此，令 I 为满足以下条件的所有自然数 r 的集合： $r \geq 2$，且 r 是 $n-1$ 或 n 的因子；令 I^* 为 I 中所有偶数元素组成的集合。对于 $r \in I$，令 E_r 为所有满足以下条件的 $(b_1, \ldots, b_n) \in D(f_n)$ 的集合： $\{b_1, \ldots, b_n\}$ 满足定理 30 的 (a) 或 (b)。因此

$$\begin{array}{l}(\theta'\theta)^{-1}(\mathcal{E}_n) = \bigcup_{r\in I} E_r \\ (\theta'\theta)^{-1}(\mathcal{E}_n^*) = \bigcup_{r\in I^*} E_r\end{array} .$$

引理 37. 设 $n = sr$ 或 $n = sr + 1$，其中某个 $r \in I$。那么 E_r 是 $D(f_n)$ 的子簇，并且维数$(E_r) = s + 1$。

证明. 我们借鉴注释 31 的思路。

首先假设 $n = sr$。如果 ε 是一个本原的 r 次单位根，考虑如下定义的 $\psi_\varepsilon : k^{s+1} \to k^n$： 给定 $(b_1, b_2, b_{r+1}, b_{2r+1}, b_{3r+1}, \ldots, b_{(s-1)r+1}) \in k^{s+1}$， 令

$$\psi_\varepsilon(b_1, b_2, b_{r+1}, b_{2r+1}, b_{3r+1}, \ldots, b_{(s-1)r+1}) = (b_h)_{h=1}^n$$

其中

$$b_{ur+1+j} = \varepsilon^j b_{ur+1} + (1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{j-1})(b_2-\varepsilon b_1) \tag{32}$$

对于 $u \in \{0,\ldots,s-1\}, j \in \{1,\ldots,r-1\}$。因此， ψ_ε 以一列 s 顶点 $\vec{b} = (b_1, b_{r+1}, b_{2r+1}, \ldots, b_{(s-1)r+1})$ 以及一个额外顶点 b_2 作为输入，并输出 s 个同心正星形 r 边形，每个多边形都从 b 中的一个顶点 b_{ur+1} 开始，并以 $\varepsilon b_{ur+1} + b_2 - \varepsilon b_1$ 作为第二个顶点。

根据 (22) 和引理26， E_r 中的每个元素都属于某个 $\sigma\psi_\varepsilon$ 的值域，其中 ε 是一个本原 r 次单位根， σ 是坐标置换。此外， $\psi_\varepsilon(b_1, b_2, b_{r+1}, b_{2r+1}, \ldots, b_{(s-1)r+1})$ 属于 E_r，当且仅当其分量 b_h（对于 $h \in \{1,\ldots,n\}$）两两不同；这等价于 $(b_1, b_2, b_{r+1}, b_{2r+1}, \ldots, b_{(s-1)r+1}) \in D(g_\varepsilon)$，其中 g_ε 是以下多项式的乘积：

- $X_j - X_{j'}$ for $j, j' \in \{1, 2, r+1, 2r+1, 3r+1, \ldots, (s-1)r+1\}, j \neq j'$,
- $X_{vr+1} - \varepsilon^j X_{ur+1} - (1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{j-1})(X_2 - \varepsilon X_1)$ for $u \neq v, j \in \{1,\ldots,r-1\}$,
- $X_j - \frac{1}{1-\varepsilon}(X_2 - \varepsilon X_1)$ for $j \in \{r+1, 2r+1, 3r+1, \ldots, (s-1)r+1\}$.

根据方程 (32)，每个 $\psi_\varepsilon|_{D(g_\varepsilon)}$ 的值域都是一个仿射簇，并且 $\psi_\varepsilon|_{D(g_\varepsilon)}$ 是到其值域上的同构。因此，对于任意 ε，都有 $\dim(E_r) = \dim(D(g_\varepsilon)) = \dim(k^{s+1})$，也就是说 $\dim(E_r) = s+1$。

情形 $n = sr+1$ 类似。若 ε 是一个 r 次本原单位根，则考虑如下定义的 $\psi_\varepsilon : k^{s+1} \to k^n$： 给定 $(b_1, b_2, b_{r+1}, b_{2r+1}, b_{3r+1}, \ldots, b_{(s-1)r+1}) \in k^{s+1}$， 令

$$\psi_\varepsilon(b_1, b_2, b_{r+1}, b_{2r+1}, b_{3r+1}, \ldots, b_{(s-1)r+1}) = (b_h)_{h=1}^n$$

其中

$$\begin{aligned} b_{ur+1+j} =& \varepsilon^j b_{ur+1} + (1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{j-1})(b_2-\varepsilon b_1) \\ & \text{for } u \in \{0,\ldots,s-1\}, j \in \{1,\ldots,r-1\}, \\ b_n =& \frac{b_2 - \varepsilon b_1}{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

再次根据 (22) 和引理26， E_r 中的每个元素都属于某个 $\sigma\psi_\varepsilon$ 的值域，其中 ε 是一个 r 次本原单位根， σ 是坐标置换；并且当且仅当 $(b_1, b_2, b_{r+1}, b_{2r+1}, \ldots, b_{(s-1)r+1}) \in D(g_\varepsilon)$ 时， $\psi_\varepsilon(b_1, b_2, b_{r+1}, b_{2r+1}, \ldots, b_{(s-1)r+1})$ 属于 E_r，其中 g_ε 与上面相同。现在，证明可如前一种情形一样完成。□

Then

$$\begin{aligned} \dim((\theta'\theta)^{-1}(\mathcal{E}_n)) &= \max\{\dim(E_r)\}_{r\in I} \\ \dim((\theta'\theta)^{-1}(\mathcal{E}_n^*)) &= \max\{\dim(E_r)\}_{r\in I^*} \end{aligned}. \tag{33}$$

引理 37 表明，当 r 较小时，这个最大值可以达到。

推论 38。 如果 n 是偶数，则 $\dim(\mathcal{E}_n) = \dim(\mathcal{E}_n^*) = \frac{n-2}{2}$ ； 如果 n 是奇数，则 $\dim(\mathcal{E}_n) = \dim(\mathcal{E}_n^*) = \frac{n-3}{2}$ 。

证明。 应用 (33)、引理 37 和 (31)。 □

例如，在仿射直线 Σ_3 中，令 σ 遍历换位，求解（23）得到 λ_3 的值 1 2、2、 -1。由于 $\{0,1,\frac{1}{2}\} \equiv_p \{0,1,2\} \equiv_p \{0,1,-1\}$，子簇 $\mathcal{E}_3^*$ 由一个点组成。令 σ 遍历 3 阶循环，求解（ 23 ）得到 $\lambda_3 = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$。由于 $\left\{0、\ 1、\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right\} \equiv_p \left\{0、1、\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$，可推出 $\mathcal{E}_3 = \left\{\left[\left\{0,1,\frac{1}{2}\right\}\right]、\ \left[\left\{0、1、\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right\}\right]\right\}$。

2.5. 有限集上的多项式可约性。 设 $A = \{a_1,\ldots,a_m\} \in \mathcal{P}_m, B = \{b_1,\ldots,b_n\} \in \mathcal{P}_n$，其中某个 $m > n \geq 2$。设 P是一个多项式，使得 $A = P^{-1}(B)$，并令 $\gamma = \deg(P)$。由于每个方程 $P(x) - b_j = 0$至多有 γ个解，因此可得 $m \leq n\gamma$，即 $\gamma \geq \frac{m}{n}$。

另一方面，如果 a 是方程 $P(x) - b_j = 0$ 的一个重根，重数为$r_a > 1$，那么 a是导数 P'的一个重数为 $r_a - 1$的根。令 M为方程 $P(x) - b_j = 0$（其中 $j \in \{1,\ldots,n\}$）的所有重根组成的集合。由于P'的次数为 $\gamma - 1$，令 $t = \sum_{a\in M}(r_a - 1)$，即可得出 $0 \leq t \leq \gamma - 1$。由 $n\gamma - t = m$这一事实，进而可得 $n\gamma - (\gamma - 1) \leq m$，从而 $\gamma \leq \frac{m-1}{n-1}$。

综上所述，

$$\frac{m}{n} \leq \gamma \leq \frac{m-1}{n-1}, \tag{34}$$

也就是说

$$\gamma(n-1) + 1 \leq m \leq \gamma n. \tag{35}$$

特别地，集合 $\mathcal{P}_m$ 可多项式归约到集合 $\mathcal{P}_n$ 的必要条件是:

$$\text{there exists a natural number in } \left[\frac{m}{n}, \frac{m-1}{n-1}\right]. \tag{36}$$

设 e 是 $\frac{m}{n}$ 的整数部分，即满足 $m \geq en$的最大整数。那么条件（36）等价于

$$\text{either } m = en, \quad \text{or } m \geq (e+1)n - e. \tag{37}$$

还要注意，（35）可以改写为

$$m \in \bigcup_{\gamma\geq 2} [\gamma(n-1) + 1, \gamma n] \cap \mathbb{N}, \tag{38}$$

当 $m \geq (n-1)^2 + 1$时，这显然成立，因为在（38）所示的并集中，具有 $\gamma = n - 1$ 的区间与具有 $\gamma = n$的区间相邻；而当 γ 取更大的值时，这些区间会重叠。

由 (37) 可知，给定 $B \in \mathcal{P}_n$，可能存在满足 $A \leq_p B$ 的 $A \in \mathcal{P}_m$ 的最小 $m > n$ 是 $m = 2n - 1$。在这种情况下，根据 (34)，任何将 A 化归为 B 的多项式的次数都是 2。另一方面，如果存在一个次数为 2 的多项式将 A 化归为 B，那么 $A \in \mathcal{P}_{2n-1}$ 或 $A \in \mathcal{P}_{2n}$。

下面的引理推广了注9。

引理 39。固定 n，m，A，B，其中 $2 \leq n < m$，$A \in \mathcal{P}_m$，$B \in \mathcal{P}_n$。那么满足 $A = P^{-1}(B)$ 的多项式 P 至多只有有限多个（如果存在的话）。

证明。只需证明，对于任何满足 (34) 的 γ，使 A 化约为 B 的、次数为 γ 的多项式 P 只有有限多个。任意这样的 P 都确定了 A 的一个划分 $\{A_b^P\}_{b\in B}$，使得对每个 $b \in B$，都有 $A_b^P = P^{-1}(\{b\})$。因此，只需证明：给定 A 的一个划分 $\{A_b\}_{b\in B}$，满足对每个 $b \in B$ 都有 $A_b = A_b^P$ 的、次数为 γ 的 P 只有有限多个（事实上至多一个）。确实，如果 P、Q 是次数为 γ 的多项式，且对每个 $b \in B$ 都有 $A_b^P = A_b^Q$，那么 $P(X) - Q(X)$ 是一个次数至多为 γ 的多项式，并且在 A 的所有元素上取值为 0。由 $\gamma < m$ 可得 $P = Q$。□

引理40。设 $A, B \subseteq k$。假设存在一个次数为 $\gamma \geq 1$ 的多项式 P，将 A 约化为 B，并固定互不相同的 $a, a' \in A$ 以及互不相同的 $b, b' \in B$，使得 $P(a) = b$ 且 $P(a') = b'$。再设 $x, x', y, y' \in k$ 满足 $x \neq x'$ 和 $y \neq y'$。那么存在 $A', B' \subseteq k$，使得

$$x, x' \in A', \quad A' \equiv_p A, \qquad y, y' \in B', \quad B' \equiv_p B,$$

以及一个次数为 γ 的多项式 Q，将 A' 约化为 B'，并且满足

$$Q(x) = y, \qquad Q(x') = y'.$$

此外，x, x' 作为多项式 $Q(X)-y, Q(X)-y'$ 的根的重数，分别与 a, a' 作为多项式 $P(X) - b, P(X) - b'$ 的根的重数相同。

证明。设 R 是一次多项式，使得 $R(x) = a, R(x') = a'$；再设 S 是一次多项式，使得 $S(b) = y, S(b') = y'$。令

$$A' = R^{-1}(A), \quad B' = S(B), \quad Q = SPR.$$

□

引理40的主要用途是处理 $x = 0$、$x' = 1$ 或 $y = 0$、$y' = 1$：这样尤其可以将一个集合替换为与之等价且包含 0、1 的集合，这有时能简化计算。

以下内容应与定理 44 和命题 51 对照来看。

命题 41. 设 $\Theta \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Sigma_m$。那么集合 $\{\Xi \mid \Theta \leq_p \Xi\}$ 是有限的。

证明。根据命题 5 和 (34)，只需证明：若 $A = \{a_1, \ldots, a_m\} \in \mathcal{P}_m$，则对于 $2 \leq n < m$ 和 $\frac{m}{n} \leq \gamma \leq \frac{m-1}{n-1}$，满足 $B = \{0, 1, b_3, \ldots, b_n\} \in \mathcal{P}_n$ 且使得对于某个次数为 γ 的多项式 P，有 $A = P^{-1}(B)$ 的等价类 $[B]$ 只有有限多个。若 B 是这样的集合，且 P 是这样的多项式，则存在一个非空集合 $I = \{i_1, \ldots, i_p\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ 和一个元素 $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_p\}$，使得 $P^{-1}(\{0\}) = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}\}, P(a_j) = 1$。因此，存在正整数 $r_1, \ldots, r_p$，使得 $r_1 + \ldots + r_p = \gamma$，且 $P(X) = c(X - a_{i_1})^{r_1} \cdot \ldots \cdot (X - a_{i_p})^{r_p}$

其中，由 $P(a_j) = c(a_j - a_{i_1})^{r_1} \cdot \ldots \cdot (a_j - a_{i_p})^{r_p} = 1$ 可得 $c = \frac{1}{(a_j - a_{i_1})^{r_1} \cdot \ldots \cdot (a_j - a_{i_p})^{r_p}}$。由于 $B = P(A)$，这意味着等价类 $[B]$ 仅取决于 $i_1, \ldots, i_p, j, r_1, \ldots, r_p$ 的选取；这样的选取只有有限多个，故结论成立。□

定义9。给定满足（34）的 n、m、γ 以及 $\Theta \in \Sigma_n$，令 $\mathcal{A}_m^\gamma(\Theta)$ 表示所有满足以下条件的 $\Xi \in \Sigma_m$ 的集合：存在 $B \in \Theta$、$A \in \Xi$ 以及一个次数为 γ 的多项式，将 A 约化为 B。

另外，令

$$\mathcal{A}_m(\Theta) = \{\Xi \in \Sigma_m \mid \Xi \leq_p \Theta\} = \bigcup_{\gamma \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m-1}{n-1}\right] \cap \mathbb{N}} \mathcal{A}_m^\gamma(\Theta). \tag{39}$$

注意，$\mathcal{A}_m^\gamma(\Theta)$ 的定义实际上并不依赖于 A、B 的选取，因为分别与 A、B 等价的任意集合，都可通过线性多项式与它们双向可约。

我们的目标是证明 $\mathcal{A}_m(\Theta)$ 是一个仿射簇，并计算其维数。由于（39）中的并是有限的，这等价于对所有 $\mathcal{A}_m^\gamma(\Theta)$ 证明这一点。

定理42。固定 n，m，其中有 $n < m$，并令 $\Theta \in \Sigma_n$。则 $\mathcal{A}_m(\Theta)$ 是 Σ_m 的子簇。

证明。令 $B = \{0, 1, b_3, \ldots, b_n\} \in \Theta$。只需证明每个

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\gamma = & \ (\theta'\theta)^{-1}(\mathcal{A}_m^\gamma(\Theta)) = \\ = & \ \{(a_1, \ldots, a_m) \mid \{a_1, \ldots, a_m\} = P^{-1}(\{0, 1, b_3, \ldots, b_n\}) \text{ for some} \\ & \text{polynomial } P \text{ of degree } \gamma\}, \end{aligned} \tag{40}$$

对于 $\frac{m}{n} \leq \gamma \leq \frac{m-1}{n-1}$，都是 $D(f_m)$ 的子簇。

其思路是：我们可以通过考察将 $\{a_1, \ldots, a_m\}$ 划分为 n 个部分的所有划分，并尝试写出一个次数为 γ 的多项式来判断给定的 $(a_1, \ldots, a_m)$ 是否属于 V_γ；其中，划分中的元素是 B 中各元素的原像集合。为了表示这个多项式，我们选取划分中的一个元素作为 $0 \in B$ 的原像集合，并利用它写出该多项式的因式分解。

因此，设 $(a_1, \ldots, a_m) \in D(f_m)$。那么 $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{V}_\gamma$ 当且仅当存在：

- 一个满足 $1 \leq \ell \leq \gamma$ 的整数 ℓ，
- 一个由 ℓ 指标 $I_1 = \{i_1, \ldots, i_\ell\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ 组成的集合，
- 正整数 r_1，……，r_ℓ 满足 $r_1 + \ldots + r_\ell = \gamma$，
- 以及 $c \in k \setminus \{0\}$

使得令 $P(X) = c\prod_{h=1}^{\ell}(X - a_{i_h})^{r_h}$，有 $\{a_1, \ldots, a_m\} = P^{-1}(\{0, 1, b_3, \ldots, b_n\})$。这又等价于以下条件：

> 存在满足 $1 \leq \ell \leq \gamma$ 的 ℓ、满足 $\mathrm{card}(I_1) = \ell$ 的 $\{1, \ldots, m\}$ 的一个划分 $\{I_1, \ldots, I_n\}$，以及满足 $\sum_{h=1}^{\ell} r_h = \gamma$ 的正整数 $r_1, \ldots, r_\ell$，使得

以下等式成立：

$$\begin{cases} c\prod_{h\in I_1}(a_j-a_h)^{r_h}=1 & \text{for every } j\in I_2\\ c\prod_{h\in I_1}(a_j-a_h)^{r_h}=b_3 & \text{for every } j\in I_3\\ \dots & \dots\\ c\prod_{h\in I_1}(a_j-a_h)^{r_h}=b_n & \text{for every } j\in I_n \end{cases} \tag{41}$$

其中 $c=\frac{1}{\prod_{h\in I_1}(a_j-a_h)^{r_h}}$，对于 j 中任意固定的元素 I_2：事实上，可以由方程（41）中的任意一个求得 c，并将其代入其他方程。

方程（41）给出了坐标 $(a_1,\dots,a_m)$ 中的多项式方程，因此它们定义了这些坐标下的一个仿射簇。该仿射簇取决于划分 $\{I_1,\dots,I_n\}$ 以及整数 $r_1,\dots,r_\ell$的选取。由于这样的选取只有有限多个， V_γ 是有限多个仿射簇的有限并，因此它本身也是一个仿射簇。□

为了计算 $\mathcal{A}_m(\Theta)$ 的维数，我们从以下引理开始。

引理 *43.* 设 n,m,γ 满足 *(34)*，并固定 $B=\{b_1,\dots,b_n\}\in\mathcal{P}_n$。设 $\mathcal{U}$ 为所有满足 $\{a_1,\dots,a_m\}=P^{-1}(B)$ 的 $(a_1,\dots,a_m,c_0,\dots,c_\gamma)\in D(f_m)\times k^{\gamma+1}$ 的集合，其中 $P(X)=\sum_{j=0}^{\gamma}c_jX^j$。那么， $\mathcal{U}$ 是 $D(f_m)\times k^{\gamma+1}$ 的一个维数为 $\gamma+1-(n\gamma-m)$ 的子簇。

证明。 记 $r=n\gamma-m$，由（35）可得 $0\le r\le\gamma-1$。

考虑元组 $(a_1,\dots,a_m)\in D(f_m)$以及次数至多为 γ 的多项式 P 所满足的以下条件：

$(*)$ There exist:
- a sequence of positive integers $\vec{\ell}=(\ell_1,\dots,\ell_n)$ such that $\ell_1+\dots+\ell_n=m$,
- and a sequence of natural numbers $\vec{s}=(s_1,\dots,s_m)$ such that

$$\begin{cases} s_1+s_2+\dots+s_{\ell_1}+\ell_1=\gamma\\ s_{\ell_1+1}+s_{\ell_1+2}+\dots+s_{\ell_1+\ell_2}+\ell_2=\gamma\\ \dots\\ s_{\ell_1+\dots+\ell_{n-1}+1}+s_{\ell_1+\dots+\ell_{n-1}+2}+\dots+s_m+\ell_n=\gamma \end{cases} \tag{42}$$

（这尤其意味着 $s_1+\dots+s_m=r$）

满足

$$
(43)\qquad \begin{cases} P(a_1)=\ldots=P(a_{\ell_1})=b_1 \\ P'(a_1)=P''(a_1)=\ldots=P^{(s_1)}(a_1)=0 \\ \ldots \\ P'(a_{\ell_1})=\ldots=P^{(s_{\ell_1})}(a_{\ell_1})=0 \\ \hline P(a_{\ell_1+1})=\ldots=P(a_{\ell_1+\ell_2})=b_2 \\ P'(a_{\ell_1+1})=\ldots=P^{(s_{\ell_1+1})}(a_{\ell_1+1})=0 \\ \ldots \\ P'(a_{\ell_1+\ell_2})=\ldots=P^{(s_{\ell_1+\ell_2})}(a_{\ell_1+\ell_2})=0 \\ \hline \ldots \\ \hline P(a_{\ell_1+\ldots+\ell_{n-1}+1})=P(a_{\ell_1+\ldots+\ell_{n-1}+2})=\ldots=P(a_m)=b_n \\ P'(a_{\ell_1+\ldots+\ell_{n-1}+1})=\ldots=P^{(s_{\ell_1+\ldots+\ell_{n-1}+1})}(a_{\ell_1+\ldots+\ell_{n-1}+1})=0 \\ \ldots \\ P'(a_m)=\ldots=P^{(s_m)}(a_m)=0 \end{cases}.
$$

系统 (43) 由 n 个块组成，每个块对应 B 的一个元素。注意，$n\geq 2$ 意味着 P 不是常数多项式。于是，第一个块描述了 b_1 的原像，说明 a_1 是多项式 $P(X)-b_1$ 的根，其重数至少为 s_1+1，……，a_{ℓ_1} 是多项式 $P(X)-b_1$ 的根，其重数至少为 $s_{\ell_1}+1$；其他块也有类似的含义。由 (42) 可知，这意味着每个 a_j 作为相应多项式 $P(X)-b_{i_j}$ 的根，其重数恰好为 s_j+1。因此，由 $(*)$ 和 $\deg(P)\leq\gamma$ 还可推出 $\deg(P)=\gamma$ 且 $\{a_1,\ldots,a_m\}=P^{-1}(B)$。反过来，若 a_1，……，a_n，P 满足 $\{a_1,\ldots,a_n\}=P^{-1}(B)$，其中 a_1，……，a_n 互不相同，则存在 $\sigma\in Sym_n$，使得 $(a_{\sigma(1)}$，……，$a_{\sigma(n)}$，$P)$ 满足 (43)。

方程 (43) 定义了一个子簇 $\mathcal{U}_{\vec{\ell}\vec{s}}$ ——它取决于序列 $\vec{\ell},\vec{s}$ 的选择——位于 $D(f_m)\times k^{\gamma+1}$ 中，坐标为 $(a_1,\ldots,a_m,c_0,\ldots,c_\gamma)$，其中 c_j 是 P 的 j 次系数。于是，$\mathcal{U}$ 是此类簇 $\mathcal{U}_{\vec{\ell}\vec{s}}$ 在变量 $(a_1,\ldots,a_n)$ 的所有置换作用下所得像的并集。由于这样的并集是有限的，$\mathcal{U}$ 是 $D(f_m)\times k^{\gamma+1}$ 的子簇，其维数等于所有 $\mathcal{U}_{\vec{\ell}\vec{s}}$ 维数中的最大值。因此，只需证明以下两点：

(a) 某个 $\mathcal{U}_{\vec{\ell}\vec{s}}$ 非空；(b) 若 $\mathcal{U}_{\vec{\ell}\vec{s}}$ 非空，则 $\dim(\mathcal{U}_{\vec{\ell}\vec{s}})=\gamma+1-r$。

对于 (a) 部分，只需证明存在一个次数为 γ 的多项式 P，使得 $\mathrm{card}(P^{-1}(B))=m$。取 $b\in B$，并考虑多项式$P_\mu(X)=\mu X^{r+1}(X-1)(X-2)\cdot\ldots\cdot(X-(\gamma-r-1))+b$，其中 $\mu\in k\setminus\{0\}$。注意，导数 P'_μ 的根集合 S 与 μ 无关，并且当且仅当 $r>0$ 时，$0\in S$。此外，$\mathrm{card}(P_\mu^{-1}(B))\leq m$，而 $\mathrm{card}(P_\mu^{-1}(B))=m$ 当且仅当

若 $\forall a \in S \setminus \{0\}$，则 $P_\mu(a) \notin B$：这一结论对除有限多个 μ 值之外的所有值都成立。

我们通过计算 (43) 的雅可比矩阵，并证明它在 $\mathcal{U}_{\vec{\ell s}}$ 的每一点都非奇异，来确立 (b)：由于这个雅可比矩阵是一个 $(m+r) \times (m+\gamma+1)$ 矩阵，因此确实有 $\dim(\mathcal{U}_{\vec{\ell s}}) = m+\gamma+1-(m+r) = \gamma+1-r$。

系统 (43) 意味着

$$
\begin{cases}
c_0 + c_1 a_j + c_2 a_j^2 + c_3 a_j^3 + \ldots + c_{\gamma-1} a_j^{\gamma-1} + c_\gamma a_j^\gamma & = & b_{i_j} \\
c_1 + 2c_2 a_j + 3c_3 a_j^2 + \ldots + (\gamma-1) c_{\gamma-1} a_j^{\gamma-2} + \gamma c_\gamma a_j^{\gamma-1} & = & 0 \\
2c_2 + 6c_3 a_j + \ldots + (\gamma-2)(\gamma-1) c_{\gamma-1} a_j^{\gamma-3} + (\gamma-1)\gamma c_\gamma a_j^{\gamma-2} & = & 0 \\
\ldots & & \\
s_j! c_{s_j} + \ldots + (\gamma-s_j) \cdot \ldots \cdot (\gamma-1) c_{\gamma-1} a_j^{\gamma-s_j-1} + (\gamma-s_j+1) \cdot \ldots \cdot \gamma c_\gamma a_j^{\gamma-s_j} & = & 0
\end{cases} \tag{44}
$$

对于 $j \in \{1, \ldots, m\}$，其中 b_{i_j} 是 (43) 中 P 作用于 a_j 所得的像。雅可比矩阵 (43) 中对应于这块方程的部分是一个 $(s_j+1) \times (m+\gamma+1)$ 子矩阵；前 m 列包含关于变量 $(a_1, \ldots, a_m)$ 的偏导数，它们为

$$
\begin{pmatrix}
0 & \ldots & 0 & P'(a_j) & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & P''(a_j) & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & 0 & P^{(s_j+1)}(a_j) & 0 & \ldots & 0
\end{pmatrix} \tag{45}
$$

而最后 $\gamma+1$ 列包含关于变量 $(c_0, \ldots, c_\gamma)$ 的偏导数，它们为

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_j & a_j^2 & a_j^3 & \ldots & a_j^{\gamma-1} & a_j^\gamma \\
0 & 1 & 2a_j & 3a_j^2 & \ldots & (\gamma-1) a_j^{\gamma-2} & \gamma a_j^{\gamma-1} \\
0 & 0 & 2 & 6a_j & \ldots & (\gamma-2)(\gamma-1) a_j^{\gamma-3} & (\gamma-1)\gamma a_j^{\gamma-2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (\gamma-s_j) \cdot \ldots \cdot (\gamma-1) a_j^{\gamma-s_j-1} & (\gamma-s_j+1) \cdot \ldots \cdot \gamma a_j^{\gamma-s_j}
\end{pmatrix}. \tag{46}
$$

注意，在$\mathcal{U}_{\vec{\ell s}}$中的一个点处计算时，每个子矩阵 (45) 恰好只有一个非零元素，即

$$
P^{(s_j+1)}(a_j). \tag{47}
$$

令 M 为从雅可比矩阵中删去与元素 (47) 对应的行和列后得到的 $r \times (\gamma+1)$ 矩阵。接下来只需证明下面的断言，即可完成证明；该断言将在第 5 节中证明。

断言。 矩阵 M 是非奇异的。

□

定理 44。 设 n, m 满足 (34)，并设 $\Theta \in \Sigma_n$。设 $m = en + t$，其中 e 是 $\frac{m}{n}$ 的整数部分。那么

$$\dim(\mathcal{A}_m(\Theta)) = \begin{cases} e-1 & if\ t = 0 \\ e-n+t & if\ t > 0 \end{cases}.$$

注意，第二种情况下确实有 $e - n + t \geq 0$，由 (37) 可知，因为如果 $m \in [\gamma(n-1)+1, \gamma n]$，那么 $e < \gamma$，因此 $e-n+t = e-n+m-en = m-n-(n-1)e \geq \gamma(n-1)+1-n-(n-1)(\gamma-1) = 0$。

定理44的证明。设 $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \in \Theta$。令 $\mathcal{A}'(\gamma)$ 为所有满足以下条件的 $(a_1, \ldots, a_m) \in D(f_m)$ 所成的集合：对于某个次数为 γ 的多项式 P，有 $\{a_1, \ldots, a_m\} = P^{-1}(B)$。由引理 43，$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\gamma)$ 是 $= \{(a_1, \ldots, a_m, c_0, \ldots, c_\gamma)$ 的 $\in D(f_m) \times k^{\gamma+1} \mid \{a_1, \ldots, a_m\} = P^{-1}(B)$，其中 $P = \sum_{j=1}^{\gamma} c_j X^j\}$ 是 $D(f_m) \times k^{\gamma+1}$ 的一个子簇，其在前 m 个坐标上的投影为 $\mathcal{A}'(\gamma)$。由引理 39，对于每个 $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{A}'(\gamma)$，只有有限多个 $(c_0, \ldots, c_\gamma) \in k^{\gamma+1}$ 满足 $(a_1, \ldots, a_m, c_0, \ldots c_\gamma) \in \mathcal{U}(\gamma)$，由此根据引理 43 可得 $\dim(\mathcal{A}'(\gamma)) = \gamma + 1 - (n\gamma - m)$。由于 $\dim(\mathcal{A}_m(\Theta)) = \max\{\dim(\mathcal{A}_m^\gamma(\Theta))\}_{\gamma \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m-1}{n-1}\right] \cap \mathbb{N}}$，且 $\dim(\mathcal{A}_m^\gamma(\Theta)) = \dim(\mathcal{A}'(\gamma)) - 2$，因此只需证明

$$\max\{\dim(\mathcal{A}'(\gamma))\}_{\gamma \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m-1}{n-1}\right] \cap \mathbb{N}} = \begin{cases} e+1 & \text{if } t = 0 \\ e-n+t+2 & \text{if } t > 0 \end{cases}.$$

情形1. $t = 0$。

在允许范围（34）内，$\gamma + 1 - (n\gamma - m)$ 的最大值在$\gamma = e$时取得，因此 $\dim(\mathcal{A}'(e)) = e + 1$。

情形2. $t > 0$。

由于（34）蕴含 $\frac{ne+t}{n} = e + \frac{t}{n} \leq \gamma$，$\gamma + 1 - (n\gamma - m)$ 的最大值在 $\gamma = e + 1$ 时取得，因此 $\dim(\mathcal{A}'(e+1)) = e + 2 - (n(e+1) - m) = e - n + t + 2$。□

定理45. 设 $B \in \mathcal{P}_n$。

(1) 如果存在一个将 A 约化为 B的二次多项式，那么 A 是一个例外集合，并且 $[A] \in \mathcal{E}_{2n-1}^*$ 或 $[A] \in \mathcal{E}_{2n}^*$，也就是说，群 G_A 的阶为偶数。(2) 存在唯一的 $\Theta \in \Sigma_{2n-1}$ 使得 $\Theta \leq_p [B]$。反之，如果 $\Theta \in \mathcal{E}_{2n-1}^*$，那么存在唯一的 $\Xi \in \Sigma_n$ 使得 $\Theta \leq_p \Xi$。(3) 设 $\mathcal{A}$ 为所有满足以下条件的 $[A] \in \Sigma_{2n}$ 构成的族：存在一个将 A 约化为 B的二次多项式。那么 $\dim(\mathcal{A}) = 1$。反之，如果 $\Theta \in \mathcal{E}_{2n}^*$，那么存在 $\Xi \in \Sigma_n$ 和一个二次多项式 P，将 Θ 中的某个元素约化为 Ξ中的某个元素。

注意，在定理45的情形（3）中，$n > 2$ 要求多项式为二次多项式这一条件是多余的，因为它已由（34）蕴含；因此 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{2n}([B])$。对于 $n = 2$，将 $\mathcal{P}_{2n}$ 中的一个元素约化为 $\mathcal{P}_n$ 中的一个元素的多项式，其次数可能为3。

定理45的证明。设 P 是一个将 A 约化为 B的二次多项式。根据 $A \in \mathcal{P}_{2n-1}$ 还是 $A \in \mathcal{P}_{2n}$, 我们分两种情形讨论。

首先令 $A \in \mathcal{P}_{2n-1}$。在此情形下， B 中有唯一一个元素在 P下恰有一个原像, 而 B 中的其余所有元素都有两个原像。应用引理40，可假设 $B = \{0, 1, b_3, \dots, b_n\}$, $\{0, 1\} \subseteq A$，0 是 P的一个重数为 2 的根，并且 $P(1) = 1$。由此可得 $P(X) = X^2$, 因此 $A = \{0, \pm 1, \pm a_3, \dots, \pm a_n\}$，其中 a_j是 b_j的一个平方根，从而特别证明了 $[A]$ 的存在性和唯一性，这就是 (2) 的第一部分。现在对 τ 应用推论35：由 $\tau(a) = -a$ 定义的 $A \to A$，可得 A 是一个例外集。A 具有一个阶2的特征置换这一事实，证明了 $\mathrm{card}(G_A)$ 为偶数。因此，在此情形下，(1) 得证。

现在，我们应用这一论证来证明对应 $[B] \mapsto [A]$ 是单射，从而得到 (2) 第二部分中的唯一性。给定 $B = \{0, 1, b_3, \dots, b_n\}$、$B' = \{0, 1, b'_3, \dots, b'_n\}$ 和 $A = \{0, \pm 1, \pm a_3, \dots, \pm a_n\}$、$A' = \{0, \pm 1, \pm a'_3, \dots, \pm a'_n\}$，满足 $A = P^{-1}(B)$ $A' = P^{-1}(B')$，其中 $P(X) = X^2$，并假设 $A \equiv_p A'$。那么，令 Q 为一次多项式，使得 $Q(A) = A'$。由于 Q 保持重心，因此 $Q(0) = 0$，故对某个 $c \in k \setminus \{0\}$，有 $Q(X) = cX$，从而 $PQ(X) = c^2X^2$。因此， $B' = PQ(A) = \{0, c^2, c^2a_3^2, \dots, c^2a_n^2\} = R(B) \equiv_p B$，其中 $R(X) = c^2X$。

现在令 $A \in \mathcal{P}_{2n}$。那么， B 中的每个元素在 P 下恰有两个原像。再次根据引理40, 可以假设:

- $A = \{0, 1, a_3, \dots, a_{2n}\}$,
- $B = \{0, 1, b_3, \dots, b_n\}$,
- $P(0) = P(1) = 0$, $P(a_3) = P(a_4) = 1$, and $P(a_{2j-1}) = P(a_{2j}) = b_j$ for $3 \le j \le n$.

由此可知，存在某个 $c \in k \setminus \{0\}$:

$$\begin{cases} P(X) = cX(X-1) \\ P(X) - 1 = c(X - a_3)(X - a_4) \\ P(X) - b_j = c(X - a_{2j-1})(X - a_{2j}) \quad \text{for } 3 \le j \le n \end{cases}.$$

那么，由等式

$$cX(X-1) = c(X - a_3)(X - a_4) + 1 = c(X - a_{2j-1})(X - a_{2j}) + b_j,$$

即

$$\begin{aligned} cX^2 - cX =& cX^2 - c(a_3 + a_4)X + ca_3a_4 + 1 = \\ =& cX^2 - c(a_{2j-1} + a_{2j})X + ca_{2j-1}a_{2j} + b_j, \end{aligned} \tag{48}$$

可得

$$\forall j \in \{2, \dots, n\}, a_{2j-1} + a_{2j} = 1.$$

因此，令 $\tau : A \to A$ 定义为

$$\tau(0) = 1, \quad \tau(1) = 0, \quad \tau(a_{2j-1}) = a_{2j}, \quad \tau(a_{2j}) = a_{2j-1}$$

对于 $j \in \{2, \ldots, n\}$，应用推论35可得 A 是一个例外集。τ 的阶为2这一事实再次表明 card(G_A) 是偶数。由此完成了 (1) 的证明。

（3）的第一部分是引理 43 的证明所推出的：当 $\gamma = 2, r = 0$ 时，对于非空的 $\mathcal{U}_{\vec{\ell}\vec{s}}$，有 $\dim(\mathcal{U}_{\vec{\ell}\vec{s}}) = 3$，因此 $\dim(\mathcal{A}) = 3 - 2 = 1$。

剩下需要证明（2）的第二部分和（3）的第二部分所述对象的存在性。设 A 是一个例外集，使得 card(G_A) 为偶数，记作 card(G_A) $= r$，并设 τ 是 G_A 的一个生成元，因此 τ 的阶为 r。因此，$\rho = \tau^{\frac{r}{2}}$ 的阶为 2。

假设 $A \in \mathcal{P}_{2n-1}$。利用引理40，可以假设 0 是 ρ 的不动点。因此，根据推论35，$\forall a \in A, a + \rho(a) = 0$，由此可得，对于某个 $a_2, \ldots, a_n$，$A = \{0, \pm a_2, \ldots, \pm a_n\}$。这意味着 $A = P^{-1}(\{0, a_2^2, \ldots, a_n^2\})$，其中 $P(X) = X^2$。

现在假设 $A \in \mathcal{P}_{2n}$。由引理40，可假设 $\pm 1 \in A$，其中 $\rho(\pm 1) = \mp 1$。由于 $\forall a \in A, a + \rho(a) = 0$，根据推论 35 可知，$A = \{\pm 1, \pm a_2, \ldots, \pm a_n\}$ 对某些 $a_2, \ldots, a_n$ 成立。这意味着 $A = P^{-1}(\{1, a_2^2, \ldots, a_n^2\})$，其中 $P(X) = X^2$。□

定理45(2)表明，利用 $\leq_p$，Σ_n 中的点可以用 $\mathcal{E}^*_{2n-1}$中的元素参数化。下面的命题表明，Σ_n 中的任意两个元素在 Σ_{2n}中都没有共同的前驱。因此，根据定理45(3)，关系 $\leq_p$ 将 $\mathcal{E}^*_{2n}$ 划分为一维子簇，每个 Σ_n中的元素对应一个子簇。

命题46。设 $\Xi, \Xi' \in \Sigma_n$ 和 $\Theta \in \Sigma_{2n}$ 满足 $\Theta \leq_p \Xi$ 和$\Theta \leq_p \Xi'$ 均成立。则 $\Xi = \Xi'$。

证明。不妨设 $n > 2$。若 $A \in \Theta, B \in \Xi$，则任何将 P 约化为A 的多项式 B 都是二次多项式。根据引理40，不妨设 $A = \{0, 1, a_3, \ldots, a_{2n}\}, B = \{0, 1, b_3, \ldots, b_n\}, P(0) = P(1) = 0$。因此，对某个$c \in k \setminus \{0\}$，有 $P(X) = cX(X - 1)$。再根据引理40，令 $B' = \{0, 1, b'_3, \ldots, b'_n\} \in \Xi'$和 Q 为满足 $A = Q^{-1}(B')$ $Q(0) = Q(1) = 0$的二次多项式。由此可得，对某个 $c' \in k \setminus \{0\}$，$Q(X) = c'X(X-1)$。因此 $B = R^{-1}(B')$，其中 $R(X) = \frac{c'}{c}X$，故 $B \equiv_p B'$。□

定理45和命题46表明，两个具有 n 个元素且彼此 $\equiv_p$ 不可比较的集合，不存在具有 $2n - 1$ 或 $2n$ 个元素的公共下界。这引出了以下问题。

问题3. 给定非空的 B、$B' \in Fin$，它们何时存在除 $\emptyset$、k 之外的公共下界？也就是说，何时存在 $A \in Fin \setminus \{\emptyset, k\}$ 使得$A \leq_p B$ 且 $A \leq_p B'$?

可以如下构造具有公共下界且不同于 $\emptyset, k$ 的一对 $\equiv_p$-不可比较集合的例子。设 $P(X)$ $Q(X)$ 是可交换的

多项式，即满足 $P[Q(X)] = Q[P(X)]$。任取 $C \in Fin$，并令$B = P^{-1}(C)$ $B' = Q^{-1}(C)$。那么 $A = Q^{-1}(B) = P^{-1}(B')$ 是 B, B' 的公共下界。确实存在这样的 $C, P(X)$ $Q(X)$，使得 B, B' 是$\leq_p$-不可比较的。例如，对于 $j \neq j'$，令 $P(X) = X^j, Q(X) = X^{j'}$；或者令$P(X)$ $Q(X)$ 分别为第 j 个和第 j' 个切比雪夫多项式：若 card($P^{-1}(C)$)、card($Q^{-1}(C)$) 不满足 (36)，则 B, B' 是 $\leq_p$-不可比较的。例如，从单元素集合 $\{1\}$ 开始，并在所有幂 X^j 的原像下取闭包，可得到子格 $\mathcal{R}$，其中包含对任意 j 而言由 j 次单位根构成的集合；注意，这些都是定理 30 中的例外集。在$\mathcal{R}$上，关系 $\leq_p$ 与反向包含 $\supseteq$ 一致。

然而，我们并不知道一般情况下的情形如何。

2.5.1. 大型反链与极大元素。 本节讨论相对于 $\leq_p$ 的有限集中的大型反链是否存在。关于无限且余无限的集合，参见定理 48。

首先要指出，根据推论 7，每个 Σ_m 都是反链，其基数为 κ，见 [5, 习题 I.4.8] 若 $m \geq 3$。此外，仿照引理 43 的证明，我们可以找到延伸至所有 Σ_m 且规模很大的反链，也就是说，在每个 Σ_m中都包含一个开集。事实上，虽然不存在有限集的 $\leq_p$-极小多项式类，只有 $[\emptyset]$ （见定理 44），但我们的论证证明大多数类都是 $\leq_p$-极大的。

定理 47。 存在一个反链 $\mathcal{C}$，它位于$\bigcup_{m\geq 2} \Sigma_m$ 中，并且对于每个 m，$\mathcal{C} \cap \Sigma_m$ 都包含一个 Σ_m 的开集。特别地，对于 $m \geq 3$，每个 $\mathcal{C} \cap \Sigma_m$ 的基数都是 κ。

证明。反链 $\mathcal{C}$ 由每个 Σ_m 中相对于 $\leq_p$ 而言、位于 Σ_1 的唯一元素之下且极大的所有元素组成。因此，只需证明：对于每个 $m \geq 3$， Σ_m 中那些在 1 元集合之下不是 $\leq_p$-极大的元素，都包含于 Σ_m 的一个真子簇中；等价地，集合

$$\mathcal{S} = \{(a_1, \ldots, a_m) \in D(f_m) \mid \{a_1, \ldots, a_m\} \text{ is polynomially reducible to a } n\text{-element set for some } n \geq 2\}$$

包含于 $D(f_m)$ 的一个真子簇中。当且仅当存在满足 (34) 的 $n \geq 2$ 和 γ，使得 $\{a_1, \ldots, a_m\}$ 可通过一个次数为 γ 的多项式约化为 $\mathcal{P}_n$ 的某个成员时，元组 $(a_1, \ldots, a_m)$ 才属于 $\mathcal{S}$。

再次考虑由块 (44) 构成的系统，其中 $j \in \{1, \ldots, m\}$，但现在变量为 $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n, c_0, \ldots, c_{\gamma+1}$。这定义了 $D(f_m) \times D(f_n) \times k^{\gamma+1}$ 的一个子簇 $\mathcal{W}_{\vec{\ell}\vec{s}\vec{i}}$，它取决于序列 $\vec{\ell}, \vec{s}$ 的选择，这些序列如证明引理 43 的条件 $(*)$ 中所述；同时也取决于序列 $\vec{i} = (i_1, \ldots, i_m)$，使得 $\{1, \ldots, n\} = \{i_1, \ldots, i_m\}$。那么， $\mathcal{S}$ 是将簇 $\mathcal{W}_{\vec{\ell}\vec{s}\vec{i}}$ 在 $a_1, \ldots, a_m$ 的任意置换下所得的像投影到 $D(f_m)$ 上之后的并集。

现在我们再次通过计算雅可比矩阵来确定 $\dim(\mathcal{W}_{\vec{\ell}\vec{s}\vec{i}})$。该雅可比矩阵与证明引理 43 中讨论的雅可比矩阵相同，有 $n\gamma$ 行；但每一行都更长，因为还包含关于 $b_1,\dots,b_n$ 的导数。特别地，它在 $\mathcal{W}_{\vec{\ell}\vec{s}\vec{i}}$ 的每一点处都非奇异。因此，$\dim(\mathcal{W}_{\vec{\ell}\vec{s}\vec{i}}) = m+n+\gamma+1-n\gamma < m$ 当且仅当

$$(n-1)\gamma > n+1. \tag{49}$$

在这种情况下，$\mathcal{W}_{\vec{\ell}\vec{s}\vec{i}}$ 在 $D(f_m)$上的投影的维数也小于 m。

接下来需要分别处理（49）不成立的情形，即：

$$n=2,\gamma=2, \quad n=3,\gamma=2, \quad n=2,\gamma=3.$$

当 $n=2$ 时，回顾 Σ_2 只包含一个元素，使用定理 44；当$\gamma=2$ 时，使用定理 45(1)和推论 38。□

3. 无限且余无限的集合

现在讨论 k 的无限且余无限子集。事实上，根据命题 4，这类集合与有限集或余有限集是 $\leq_p$-不可比较的；此外，如果无限集 A、B 是 $\leq_p$-可比较的，那么

$$\operatorname{card}(A)=\operatorname{card}(B), \qquad \operatorname{card}(k\setminus A)=\operatorname{card}(k\setminus B). \tag{50}$$

根据命题 2 后的注记，单元素集类及其补集类相对于 $\leq_p$ 是极大元素。其他极大类的数量可以达到最大可能值。

˘定理 48. 在 $\Sigma_\kappa\cap\Sigma_\kappa$ 中存在 2^κ 个极大元素。

证明. 回忆一下，若 $A<_p B$，则存在一个次数至少为 2 的多项式 P，将 A 归约为 B。利用注记 3(2)，只需构造 2^κ 个两两不等价的集合 $A\in\mathcal{P}_\kappa\cap\breve{}\mathcal{P}_\kappa$，使得对每个次数至少为 2 的多项式 P，$A\neq P^{-1}(P(A))$。

令 $\{P_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ 为所有次数至少为 2 的多项式的一个枚举。通过递归，令 $\alpha<\kappa$，并假设对于每个 $\beta<\alpha$，元素 a_β、b_β、$c_\beta\in k$ 均已定义，且所有满足 $\beta<\alpha$ 的元素 a_β、b_β、c_β 互不相同，并具有性质 $\forall\beta<\alpha\ P_\beta(a_\beta)=P_\beta(b_\beta)$。

给定任意 $d\in k$，多项式 $P_\alpha(X)-d$ 的重根也是 $P'_\alpha(X)$ 的根。由于 $\operatorname{card}(k\setminus P_\alpha(\{a_\beta,b_\beta,c_\beta\}_{\beta<\alpha}))=\kappa$，必定存在 $d\in k\setminus P_\alpha(\{a_\beta,b_\beta,c_\beta\}_{\beta<\alpha})$，使得 $P_\alpha(X)-d$没有重根；特别是，$P_\alpha^{-1}(\{d\})$ 至少包含两个元素：将它们记为 a_α、b_α，并固定任意一个 $c_\alpha\in k\setminus(\{a_\beta,b_\beta,c_\beta\}_{\beta<\alpha}\cup\{a_\alpha,b_\alpha\})$。

现在，设 A 是任意一个包含 $\{a_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ 且与 $\{b_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ 不相交的集合。根据构造，$\forall\alpha<\kappa$, $b_\alpha\in P_\alpha^{-1}(P_\alpha(A))\setminus A$，因此 A 满足要求。

最后，存在 2^κ 个两两不等价的此类集合。事实上，存在 2^κ 个形如 $\{a_\alpha\}_{\alpha<\kappa}\cup C$ 的集合，其中 $C\subseteq\{c_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$；由于每个多项式类至多有 κ 个元素，因此存在一个基数为 2^κ 的子族，其中的此类集合两两不等价。□

虽然定理 48 指出，许多 k 的子集相对于 $\leq_p$ 是极大的，但证明中的论证实际上可用于说明，在可数情形下，从拓扑视角看， k 的大多数子集都是极大的。这可以视为无限集的一个类比：正如定理 47 的证明所确立的，从几何角度看，有限集的大多数多项式类在 Σ_1 的唯一元素之下是 $\leq_p$-极大的。

赋予 $\mathcal{P}(k)$ 以下拓扑，其基由这些集合给出

$$U^{v_1\dots v_m}_{u_1\dots u_n} = \{A \in \mathcal{P}(k) \mid u_1, \dots, u_n \in A, v_1 \dots v_m \notin A\}$$

对于任意互异的 $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m \in k$ 的选取。当 k 可数时，该拓扑与康托尔空间同胚。

定理 49. 假设 k 可数。那么， k 的 $\leq_p$-极大子集族是 $\mathcal{P}(k)$ 的一个余瘦子集。

证明。令 $A \in \mathcal{P}(k)$。那么， A 是 $\leq_p$-极大的，当且仅当对每个次数至少为 2 的多项式 P :

(a) 要么 P 不是从 A 到 $P(A)$ 的归约

(b) 或者存在一个多项式 Q ，使得 $P(A) = Q^{-1}(A)$

我们证明， $\leq_p$-极大集合族包含一个稠密的 G_δ 集合。由于多项式只有可数多个，因此只需证明，对于任意给定的 P，满足 (a) 的集合 A 族是 $\mathcal{P}(k)$ 中的一个开稠密子集。

条件 (a) 可以写成 $A \neq P^{-1}[P(A)]$；由于 $A \subseteq P^{-1}[P(A)]$ 总是成立，因此 (a) 等价于

$$\exists a \in k, (P(a) \in P(A) \wedge a \notin A) \tag{51}$$

对于固定的 a、 P，条件 $P(a) \in P(A)$ 和 $a \notin A$ 关于变量A都是既开又闭的：后者根据 $\mathcal{P}(A)$ 的拓扑定义成立；前者则因为它等价于 $a_1 \in A \vee \dots \vee a_l \in A$，其中 $\{a_1, \dots, a_l\} = P^{-1}[P(\{a\})]$，，同样由拓扑定义可知。因此，对于任意固定的 P，条件 (51) 定义了一个开集。

为了证明稠密性，固定互不相同的元素 $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m \in k$，以便找到满足 (51) 的某个 $A \in U^{v_1\dots v_m}_{u_1\dots u_n}$。设 $b \in k \setminus \{P(u_1) \dots, P(u_n)\ P(v_1) \dots, P(v_m)\}$，使得 $P^{-1}(\{b\})$ 至少包含两个不同的元素，并设 u, v 为其中两个。那么，任何包含 $\{u, u_1, \dots, u_n\}$ 且与 $\{v, v_1, \dots, v_m\}$ 不相交的集合 A 都满足条件；也就是说， $U^{vv_1\dots v_m}_{uu_1\dots u_n}$ 中的任何元素都满足条件。□

问题 4. 在 $[\emptyset], [k]$ 之上，是否存在 $\leq_p$-极小多项式类?

定理 49 的证明中相同的思路表明，当 k 可数时，即使问题 4 的答案是肯定的，从拓扑的观点来看， k 在 $\emptyset, k$ 之上的 $\leq_p$-极小子集族也非常小。

命题50。假设 k 是可数的。那么， k 中在 $\emptyset, k$ 之上极小的子集所成的族是 $\mathcal{P}(k)$ 中的一个瘦集。

证明。令 $A \in \mathcal{P}(k)$。那么， A 在 $\emptyset, k$ 之上极小，当且仅当对于每个次数至少为 2 的多项式 P，都存在一个多项式 Q，使得 $A = Q^{-1}[P^{-1}(A)]$。换言之，这样的 $\mathcal{P}(k)$ 的子集可以写成 $\bigcap_P \bigcup_Q \mathcal{A}_{PQ}$，其中 $\mathcal{A}_{PQ} = \{A \in \mathcal{P}(k) \mid A = Q^{-1}[P^{-1}(A)]\}$。因此，只需证明每个 $\mathcal{A}_{PQ}$ 都是内部为空的闭集。

每个 $\mathcal{A}_{PQ}$ 都是闭集这一事实成立，因为 $A \in \mathcal{A}_{PQ}$ 当且仅当

$$\forall a \in A, a \in A \Leftrightarrow PQ(a) \in A \tag{52}$$

为了证明补集是稠密的，固定互不相同的 $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m \in k$，以证明存在 $A \in U^{v_1 \ldots v_m}_{u_1 \ldots u_n}$ 使得 A 不满足（52）。由于多项式 PQ 的次数至少为 2，任取互不相同的 $u, v \in k \setminus \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\}$，使得 $v \notin PQ(\{v_1, \ldots, v_m\})$ 且 $PQ(u) = v$。那么，任何包含 $\{u, u_1, \ldots, u_n\}$ 且与 $\{v, v_1, \ldots, v_m\}$ 不相交的集合 A，也就是 $U^{v v_1 \ldots v_m}_{u u_1 \ldots u_n}$ 中的任意元素，都满足这一点。□

3.1. **复数域的子域** $\mathbb{C}$。在本节中，我们增加额外假设 $k \subseteq \mathbb{C}$，以便利用欧几里得拓扑的一些性质。

注意，除了满足 (50) 之外，如果 $A, B \notin \{\emptyset, k\}$ 是 $\leq_p$-可比较的，那么若其中一个有界，另一个也有界；若其中一个的补集有界，那么另一个的补集也有界。原因是，非恒定多项式函数下，有界（分别为无界）子集的原像也是有界（分别为无界）的。

命题 51。存在一个由 k 的无界且余无界子集构成的 $\leq_p$-链，其序型为 ζ。

证明。对于 $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$，记 $\mathcal{C}^m_n = \{x \in \mathbb{C} \mid n^{2^m} \leq |x| \leq (n+1)^{2^m}\}$。对于 $m \in \mathbb{Z}$，令

$$C_m = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^m_{2n}, \qquad A_m = C_m \cap k,$$

因此，如果 $P(X) = X^2$ 那么 $\forall m \in \mathbb{Z}, A_m = P^{-1}(A_{m+1})$。因此，只需证明 $\forall m \in \mathbb{Z}$, $A_{m+1} \not\leq_p A_m$。

为导出矛盾，假设 $Q(X) = cX^\gamma + \ldots \in k[X]$ 是一个次数为 γ 的多项式，使得 $A_{m+1} = Q^{-1}(A_m)$，由此还可推出 $Q(A_{m+1}) = A_m$。注意， $\gamma \geq 2$。

ˆ记 $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为将 Q 扩展到复数域的多项式函数，ˆ并赋予复数域欧几里得拓扑。因此， Q是满射且连续的。由 k 在 $\mathbb{C}$ 中的稠密性可知，ˆ $Q(C_{m+1}) = C_m$。由于每个 $\mathcal{C}^{m+1}_h$ 都是连通的，因此对于每个 h，存在唯一的 l，使得

$$\hat{Q}(\mathcal{C}^{m+1}_h) \subseteq \mathcal{C}^m_l. \tag{53}$$

若 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是将每个 h 映射到唯一的 l asis (53) 的函数，那么由 Q 关于欧几里得拓扑的连续性可得 $\forall h \in$

$\mathbb{N}, \varphi(h+1) = \varphi(h) \pm 1$。由于必定存在 h 使得 $\varphi(h) = 0$，因此最终有 $\varphi(h) \leq h$。特别地，最终

$$|\hat{Q}((h+1)^{2^{m+1}})| \leq (h+1)^{2^m}. \tag{54}$$

然而

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{C}, |x| > M \Rightarrow \left| \frac{|\hat{Q}(x)|}{|x|^\gamma} - |c| \right| < \varepsilon$$

ˆ 其中，最后一个不等式可以改写为 $(|c| - \varepsilon)|x|^\gamma < |Q(x)| < (|c| + \varepsilon)|x|^\gamma$。因此，当 h 足够大时，$|\hat{Q}((h+1)^{2^{m+1}})| > \frac{|c|}{2}(h+1)^{2^{m+1}\gamma}$，这与 (54) 矛盾。□

注记 52. 有限集的多项式双可归约性可以由一次多项式见证（见命题6），但这并不适用于无限且余无限的集合。

事实上，使用命题 51 证明中的记号，令

$$A = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_2^{2m} \cap k, \qquad B = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_2^{2m+1} \cap k.$$

令 $P(X) = X^2$，可得 $A = P^{-1}(B)$ $B = P^{-1}(A)$，从而 $A \equiv_p B$。然而，不存在一次多项式 Q 使得 $A = Q^{-1}(B)$，因为否则，ˆ 考虑将 Q 延拓得到的多项式函数 $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，由 k 在 $\mathbb{C}$ 中的稠密性可推出 $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_2^{2m} = \hat{Q}^{-1}\left(\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_2^{2m+1}\right)$，这是不可能的。

4. 后续问题

我们的研究局限于代数闭域 k 特征零的情形。尽管显然可以看出，我们广泛使用了代数闭性的假设，但需要指出的是，k 具有特征零这一事实在命题6和引理 29的证明中是必要的，因此对于 $\leq_p$ 的组合学以及多项式类的几何结构都发挥着核心作用。

这些观察引出了以下问题（另见命题 2）。

问题 5。当 k 不是代数闭域时，关于 $\leq_p$ 可以得出什么结论?

问题 6。当 k 具有正特征时，关于 $\leq_p$ 可以得出什么结论?

多项式函数 $k \to k$ 是仿射簇 k 上的态射；在本文中，我们选择它们作为归约类，由此诱导出预序 $\leq_p$，并对其进行了研究。类似地，对于任意仿射簇 V，多项式函数 $V \to V$ 是V上的态射。因此，自然可以尝试拓展我们的研究，或许从最简单的情形，即 k^n，开始。

问题 7. 研究 k^n 以及其他仿射簇上的多项式可约性关系。多项式可约性的结构在多大程度上取决于簇的几何性质?

对于问题 7 最后一部分的回答，应与 [1], 的结果进行比较。该结果表明，连续归约关系 $\leq_W$ 会使簇的大多数几何性质被遗忘；事实证明，这种关系的结构仅取决于簇的少数特征，例如基数、维数以及不可约分支的分解。

5. 附录：范德蒙的一种变体

本节将证明引理 43 证明中的断言。

给定一个矩阵 M，记 R_1^M、R_2^M、.....为 M 的各行，记 C_1^M、C_2^M、.....为 M 的各列。另记 $M[i,j]$ 为 M 中第 i 行、第 j 列的元素。

定义 10. 设 γ、h 为自然数，且满足 $h \geq 1$。固定一个自然数序列 $\vec{s} = (s_1, \ldots\ldots, s_h)$ 和一个由互不相同的变量组成的序列 $\vec{a} = (a_1, \ldots\ldots, a_h)$。定义序列 $\vec{r} = (r_1, \ldots\ldots, r_h)$ 如下：对于 $1 \leq \ell < h$，令其为 $\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_{\ell+1} = r_\ell + s_\ell + 1 \end{cases}$。假设 $R = \sum_{\ell=1}^{h} s_\ell + h \leq \gamma + 1$。

我们将与三元组 $(\gamma+1, \vec{s}, \vec{a})$ 相关联的增广范德蒙矩阵称为矩阵 M，它有 R 行和 $\gamma+1$ 列，并满足

$$M[i,j] = \frac{d^s}{da_\ell^s} a_\ell^{j-1},$$

其中 ℓ, s 唯一确定，且满足

$$i = r_\ell + s, \qquad 0 \leq s \leq s_\ell. \tag{55}$$

换言之，增广范德蒙矩阵是一个矩阵，其行数不超过列数，由形如 (46) 的行块组成。注意，引理 43 中断言所涉及的矩阵 M 是一个增广范德蒙矩阵（不过，它的块少一行，因为按照定义，每个块的最后一条直线都已被删去）。

定理 53。 设 M 是一个增广范德蒙矩阵，有 R 行和 $\gamma+1$ 列。那么 $rkM = R$。

证明。 使用定义 10 中的记号。考虑与矩阵 M 关联的齐次线性方程组，其未知数为 $(c_0, c_1, \ldots, c_\gamma)$。当且仅当多项式 $P(X) = \sum_{\ell=0}^{\gamma} c_\ell X^\ell$ 以 a_j 为根且重数至少为 $s_j + 1$ 时，$(c_0, c_1, \ldots, c_\gamma)$ 才是该方程组的解，因为每个块中的方程意味着 $P(a_j) = P'(a_j) = \ldots = P^{(s_j)}(a_j) = 0$。令 V 为 $k^{\gamma+1}$ 中该方程组解的子簇。那么 V 是 $k^{\gamma+1}$ 的向量子空间，维数为 $\gamma + 1 - rkM$，因此只需证明 $\dim(V) = \gamma + 1 - R$。

令 $\varphi\colon k^{\gamma+1}\to k^{\gamma+1}$ 为如下定义的态射:

$$\varphi(c,\alpha_1,\dots,\alpha_\gamma)=$$
$$=((-1)^\gamma cE_\gamma(\alpha_1,\dots,\alpha_\gamma),(-1)^{\gamma-1}cE_{\gamma-1}(\alpha_1,\dots,\alpha_\gamma),\dots,-cE_1(\alpha_1,\dots,\alpha_\gamma),c),$$

其中 $E_1,\dots,E_\gamma$ 是初等对称函数，因此 $\varphi(c,\alpha_1,\dots,\alpha_\gamma)$ 是多项式 $c(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(X-\alpha_\gamma)$ 的系数序列。

设 $\mathcal{F}=\{F_1,\dots,F_h\}$ 是 $\{1,\dots,\gamma\}$ 的一个互不相交子集族，对每个 $j\in\{1,\dots,h\}$ 都有 $\mathrm{card}(F_j)=s_j+1$，并设 W 是 $k^{\gamma+1}$ 中在坐标 $c,\alpha_1,\dots,\alpha_\gamma$ 下通过对每个 $r\in F_j, j\in\{1,\dots,h\}$ 令 $\alpha_r=a_j$ 而得到的子簇。因此 $\dim(W)=\gamma+1-R$。现在注意到 φ 的纤维是有限的，且 $\varphi(W)=V$，所以由 [9, 推论 IV.3.8(2)] 可得结论。□

参考文献

[1] R. Camerlo, C. Massaza, *Zariski*拓扑上的 *Wadge* 层级,《拓扑及其应用》294（2021），107661。[2] D.A. Cox, J. Little, D. O'Shea, 理想、簇与算法，Springer，2015。[3] S. Gao，不变描述集合论，CRC，2009。[4] J. Harris，代数几何，Springer，1992。[5] R. Hartshorne，代数几何，Springer，1977。[6] A.S. Kechris，经典描述集合论，Springer，1995。[7] K. Kunen，数学基础，College Publications，2012。[8] J. Liptrap，关于平移不变对称多项式与 *Haldane*猜想，载于：《拓扑与物理》（K. Lin、Z. Whang、W. Zhang 编），279–287，World Scientific，2008。[9] D. Perrin，代数几何，Springer，2008。[10] B. Sturmfels，不变理论中的算法，Springer，2008。[11] W.W. Wadge，贝尔空间上的可约性与确定性，博士论文，加州大学伯克利分校，1983。

热那亚大学数学系，Via Dodecaneso 35，16146 热那亚 — 意大利电子邮箱地址：camerlo@dima.unige.it

ViaMuriaglio 19，10141 都灵 — 意大利电子邮箱地址：carla.massaza@formerfaculty.polito.it