亚纯对应的平衡测度正则性

TIEN-CUONG DINH 和 HAO WU

摘要。设 f 是紧致 K¨ahler 流形 X 上的一个亚纯对应，其维数为 k。假设其拓扑度大于 $k-1$ 阶动力学度。我们根据 f 的超势，定量地刻画其平衡测度的正则性。

arXiv:2301.12786v1 [math.CV] 30 Jan 2023

2020年美国数学学会分类：32H, 37F05, 32U40。

关键词： 亚纯对应、平衡测度、动力学度、超势。

1. 引言

设 X 是一个维数为 k 的紧 K¨ahler 流形，其上赋有 K¨ahler 形式 ω，并归一化为使 ω^k 在 X 上的积分为 1。X 上的一个 亚纯对应 f 由有限个全纯链 $\Gamma := \sum_{j=1}^m \Gamma_j$ 给出，使得

(1) 对于每个 j，Γ_j 是 $X \times X$ 中维数为 k 的不可约解析子集（彼此不必不同）；
(2) 自然投影 $\pi_i : X \times X \to X$、$i = 1$（$i = 1$ 或 2）限制在每个 Γ_j 上时，都是满射且一般有限。

我们称 Γ 为 f 的图。f 的作用定义为

$$f(A) := \pi_2\big(\pi_1^{-1}(A) \cap \Gamma\big) \quad \text{and} \quad f^{-1}(A) := \pi_1\big(\pi_2^{-1}(A) \cap \Gamma\big) \quad \text{for every set} \quad A \subset X.$$

我们看到，亚纯对应可以看作从 X 到自身的亚纯多值映射。我们称以下两个集合

$$I_1(f) := \{x \in X : \dim \pi_1^{-1}(x) \cap \Gamma > 0\} \quad \text{and} \quad I_2(f) := \{x \in X : \dim \pi_2^{-1}(x) \cap \Gamma > 0\}$$

f的第一和第二不定点集。它们在 X中的余维至少为 2。如果 $I_1(f)$为空，则 f 是一个全纯对应。如果对一般点 $x \in X$，$\pi_1^{-1}(x)$仅包含一个点，且 Γ 不可约，则 f 是一个支配亚纯映射。

为定义 $f^n := f \circ \cdots \circ f$($n$ 次)，我们在一个解析集之外将 f与其自身复合，并对图进行紧化，从而得到 f^n的图。我们还可以定义 f^n作用下光滑形式的推前和拉回，见第 2节。对于$0 \le p \le k$，已知极限

$$d_p := \lim_{n\to\infty} \|(f^n)^*(\omega^p)\|^{1/n}$$

存在且是一个双亚纯不变量，参见 [8]。我们称其为 f 的第 阶动力学度。我们有，d_0 是映射 $\pi_1|_\Gamma$ 的一般纤维中的点数，并且

本研究得到新加坡国立大学和教育部拨款 A-0004285-00-00 及 MOE-T2EP20120-0010 的资助。

d_k 是 $\pi_2|_\Gamma$ 的点数（按重数计）。我们也称 d_k 为 f 的拓扑度。有关动力学度和 K¨ahler 几何的更多细节，读者可参阅 [4, 6, 15, 17]。

Sibony和第一作者 [8] 证明，如果 X上的 f 是一个具有主拓扑度的亚纯对应，即 $d_k > d_{k-1}$，那么 f 存在一个平衡测度。更确切地说，存在 X 上的唯一概率测度 μ，使得 d_k^{-n} $(f^n)^*(\omega^k)$弱收敛到 μ，并且满足 $f^*(\mu) = d_k\mu$，另见 [12]。

回顾一下，X 上的准拟次调和（简称准拟 *p.s.h.*）函数在局部上是一个拟次调和函数与一个光滑函数之差。若 X 的一个子集包含于某个准拟次调和函数 ϕ的 $\{\phi = -\infty\}$ 中，则称其为极多极集，另见 [19]。对于 $1 \le p < \infty$，以下两个集合在 $L^p(X)$中是紧的，

$$\{\phi \text{ quasi-p.s.h.} : dd^c\phi \ge -\omega, \quad \max\phi = 0\}$$

$$\Big\{\phi \text{ quasi-p.s.h.} : dd^c\phi \ge -\omega, \quad \int_X \phi\,\omega = 0\Big\}.$$

令 DSH(X) 表示 X 上所有 d.s.h. 函数组成的空间，即由两个准拟次调和函数之差表示的函数。若两个 d.s.h. 函数在极多极集之外相等，则将它们视为相同。若 ϕ 是 d.s.h. 函数，则存在 X 上的正闭 (1, 1)-流 $T^\pm$，使得 $dd^c\phi = T^+ - T^-$。由于这两个流上同调等价，它们具有相同的质量。我们在 DSH(X) 上定义范数如下：

$$\|\phi\|_{\mathrm{DSH}} := \Big|\int_X \phi\,\omega\Big| + \inf\|T^\pm\|,$$

其中，下确界取遍上述所有 $T^\pm$。该范数在 DSH(X) 上诱导出一个距离。但在本文中，我们将在此空间上使用 L^1-距离。

对于 X 上的任意 d.s.h. 函数 ϕ，存在准拟次调和函数 $\phi^\pm$ 和一个数 m，使得 $\phi = \phi^+ - \phi^- + m$、$\max\phi^\pm = 0$、$dd^c\phi^\pm \ge -c\|\phi\|_{\mathrm{DSH}}\omega$、$\|\phi^\pm\|_{\mathrm{DSH}} \le c\|\phi\|_{\mathrm{DSH}}$ 和 $|m| \le c\|\phi\|_{\mathrm{DSH}}$，其中 $c > 0$ 是一个与 ϕ 无关的常数，参见 [8]。

以下是我们的主要结果；当 f 是黎曼曲面上的主导亚纯映射或对应时，该结果也已是新的。

定理 1.1。设 f 是紧致 *K¨ahler* 流形 (X, ω)上的亚纯对应，其维数为 k。令 d_p 表示其第 p 阶动力学度。假设 $d_k > d_{k-1}$。令 μ 表示 f的平衡测度。那么存在一个数 $\gamma > 0$，使得若$\mathscr{F} \subset \mathrm{DSH}(X)$ 是$\mathrm{DSH}(X)$ 的有界子集，则对所有 $\phi, \psi \in \mathscr{F}$，

$$\Big|\int_X \phi\,d\mu - \int_X \psi\,d\mu\Big| \le c\big(\log^\star\|\phi - \psi\|_{L^1}\big)^{-\gamma},$$

其中 $c = c(\mathscr{F}) > 0$ 是一个与 ϕ 和 ψ 无关的常数，且 $\log^\star(t) := 1 + |\log t|$。

回忆一下，具有 ϕ d.s.h. 的泛函 $\phi \mapsto \int_X \phi\,d\mu$ 称为 μ的超势。上述定理表明，平衡测度的超势在上述意义下是 $\log^\gamma$-连续的。众所周知，$\log^\gamma$-连续性在复动力学中很有用，参见 [1, 5]。对于 $k = 1$，该结果表明 μ 具有局部 $\log^\gamma$-连续的势。

在第2节中，我们将讨论 f 对 d.s.h. 函数和正闭流的作用。定理 1.1 的证明将在第3节中给出。

2. d.s.h. 函数与$(1,\ 1)$-流的拉回

本节讨论的性质请参阅 [4, 7, 8, 9] 。

设 f 是 X 上的亚纯对应，由上述链 Γ 给出。由于 π_1 和 π_2 是全纯真下沉，$(\pi_1)_*$ 和 π_2^* 在流空间上良定义。因此，对于 X上的流 T，我们定义其拉回 $f^*(T)$为

$$f^*(T) := (\pi_1)_*\big(\pi_2^*(T) \wedge [\Gamma]\big)$$

若 $\pi_2^*(T) \wedge [\Gamma]$ 良定义。这里，$[\Gamma]$ 是 Γ上的积分正闭流。特别地，若 T是光滑形式，则 $f^*(T)$良定义，且它是一个 L^1-形式。

设 T是一个光滑(p,q)-形式。不难看出，若 T是闭的，则 $f^*(T)$也是闭的；若 T是恰当的，则 $f^*(T)$也是恰当的。因此，f^*在霍奇上同调上诱导出一个线性映射

$$f^* : H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{p,q}(X,\mathbb{C}).$$

一般而言，我们没有 $(g^n)^*\circ(g^m)^* \neq (g^{n+m})^*$。若对 $p = q = 1$ 等式成立，则称 f 在 Fornaess-Sibony [11, 16] 的意义下是 代数稳定 的。

对于紧致 K¨ahler 流形 (X,ω) 上的正 (p,p)-流 T，其维数为 k，回忆一下，T 的质量定义为 $\|T\| := \int_X T\wedge\omega^{k-p}$。若 T 是闭的，则 T 的质量只取决于 T 在 H^p 中的上同调类，$^p(X,\mathbb{C})$。

根据上述定义，我们有

$$\|f^*(\omega^p)\| = \int_X f^*(\omega^p)\wedge\omega^{k-p} = \int_\Gamma \pi_2^*(\omega^p)\wedge\pi_1^*(\omega^{k-p}) = \int_X f_*(\omega^{k-p})\wedge\omega^p = \|f_*(\omega^{k-p})\|.$$

注意，若 S_1 和 S_2 是同一上同调类中的两个正闭 (p,p)-形式，则 $\|f^*(S_1)\| = \|f^*(S_2)\|$。因此，$f^*$ 在 $H^{p,p}(X,\mathbb{C})$ 上的作用范数与其在正闭流上的作用 f^* 有关。由于 $H^{0,0}(X,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ 且 $H^{k,k}(X,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$，$f^*$ 在 $H^{0,0}(X,\mathbb{C})$ 上的作用是乘以 d_0，而其在 $H^{k,k}(X,\mathbb{C})$ 上的作用是乘以 d_k。这里，d_0 和 d_k 是引言中定义的动态次数。

为简便起见，在下文中我们假设 Γ 是不可约的。一般情形~可由此情形推出。设 $\pi : \Gamma \to \Gamma \subset X^2$ 是 Γ 的消解奇点，它可以通过在 X^2 上~Γ的奇点处进行有限次爆破得到。根据 Blanchard [3]，Γ 是一个紧致 K¨ahler 流形。定义 $\Pi_i := \pi_i|_\Gamma \circ \pi$。于是，~$(\Pi_1)_* : \mathrm{DSH}(\Gamma) \to \mathrm{DSH}(X)$ 以及 $\Pi_2^* : \mathrm{DSH}(X) \to \mathrm{DSH}(\Gamma)$ 都是良定义的；此外，$f^* = (\Pi_1)_*\circ\Pi_2^*$ 在 $\mathrm{DSH}(X)$ 上也是良定义的。特别地，对于$\phi \in \mathrm{DSH}(X)$，我们可以定义 $\pi_2^*(\phi) \wedge [\Gamma] := \pi_*(\Pi_2^*(\phi))$。该定义与 π 的选择无关。

现在设 T 为一个正闭（1,1）流。我们可以取一个与 T 属于同一上同调类的实光滑（1,1）形式 S。于是存在一个 d.s.h.函数 ϕ，使得 $dd^c\phi = T - S$，并且我们有

$$\pi_2^*(T) \wedge [\Gamma] = \pi_2^*(dd^c\phi + S)\wedge[\Gamma] = \pi_2^*(dd^c\phi)\wedge[\Gamma] + \pi_2^*(S)\wedge[\Gamma] = dd^c(\pi_2^*(\phi)[\Gamma]) + \pi_2^*(S)\wedge[\Gamma].$$

在最后一个求和中，根据上文的讨论，第一项是良定义的；由于 S 是光滑的，第二项也是良定义的。因此，$\pi_2^*(T) \wedge [\Gamma]$ 是良定义的。于是我们可以定义

$$f^*(T) := (\pi_1)_*\big(dd^c(\pi_2^*\phi\wedge[\Gamma]) + \pi_2^*(S)\wedge[\Gamma]\big).$$

显然，此定义与 ϕ 和 S的选择无关。它关于 T连续，并且我们有 $\|f^*(T)\| = \|f^*(S)\|$。

同样，我们可以如上所述在 d.s.h. 函数和正闭 (1, 1)-流上定义推前 f_*。

由于 Π_1 是全纯且为真映射，不难看出，推前算子 $\widetilde{(\Pi_1)_*} : \mathrm{DSH}(X) \to \mathrm{DSH}(\Gamma)$ 关于 DSH 范数是有界的。由下面的引理可知，拉回算子 $\widetilde{\text{operator}}\ \Pi_2^* : \mathrm{DSH}(\Gamma) \to \mathrm{DSH}(X)$ 也是有界的。

引理 2.1. 设 $g : X \to Y$ 是两个紧致 *Kähler* 流形之间的满射全纯映射。那么，拉回算子 $g^* : \mathrm{DSH}(Y) \to \mathrm{DSH}(X)$ 关于 DSH 范数是有界的。

证明。设 $\phi \in \mathrm{DSH}(Y)$，且 $\|\phi\|_{\mathrm{DSH}} = 1$。我们只需证明 $g^*(\phi)$ 包含于 $\mathrm{DSH}(X)$ 的某个紧子集中。对于准拟次调和函数 $\phi^{\pm}$，我们记 $\phi = \phi^+ - \phi^- + m$，其中 $\max \phi^{\pm} = 0$, $dd^c\phi^{\pm} \geq -c\omega$, $\|\phi^{\pm}\|_{\mathrm{DSH}} \leq c$ 且 $|m| \leq c$，这里常数 $c > 0$ 与 ϕ 无关。我们有 $g^*(\phi) = g^*(\phi^+) - g^*(\phi^-) + m$。此外，$dd^c g^*(\phi^{\pm}) \geq -cg^*(\omega)$，且 $\max g^*(\phi^{\pm}) = 0$。因此，$g^*(\phi^{\pm})$ 属于 $L^1(X)$ 的某个紧子集。结合 $|m| \leq c$，我们推得 $g^*(\phi)$ 也属于 $\mathrm{DSH}(X)$ 的某个紧子集。□

3. 主定理的证明

我们用以下引理开始证明定理 1.1。

引理 3.1. 设 B 是一个有限直径的度量空间。设 $u : B \to \mathbb{R}$ 是一个 *Lipschitz* 函数，其 *Lipschitz* 常数为 c_1；设 $\Lambda : B \to B$ 是一个 *θ-Hölder* 映射（$0 < \theta \leq 1$），且满足 $\|\Lambda\|_{\mathscr{C}^{0,\theta}} = c_2$。设 $\delta > 1$ 为一个常数。那么函数

$$v(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{-n} u(\Lambda^n(x))$$

是 $\log^{\gamma}$-连续的，其中常数为 $\gamma > 0$。也就是说，我们有

$$|v(x) - v(y)| \leq c\big(\log^{\star} \mathrm{dist}(x, y)\big)^{-\gamma} \quad \textit{for all} \quad x, y \in B,$$

其中 $c > 0$ 是一个依赖于 c_1, c_2, θ 和 δ 的常数。

证明。当 $\theta = 1$ 时，由引理 1.19]，v 是 Hölder 连续的，这显然推出所需的不等式。现在假设 $\theta < 1$。定义 $\xi := \mathrm{dist}(x, y)$。我们只需考虑 $\xi < 1/4$，因为否则当 c 足够大时，所需的不等式成立。我们有 $1 + |\log \xi| \leq 2|\log \xi|$。因此，只需证明

$$|v(x) - v(y)| \leq c|\log \xi|^{-\gamma} \quad \text{for some} \quad c > 0. \tag{3.1}$$

取一个 $c_3 > 1$ 大于 c_2的常数。根据归纳法，对于 $n \geq 1$，有

$$\big|\Lambda^n(x) - \Lambda^n(y)\big| \leq c_2^{1+\theta+\cdots+\theta^{n-1}} \xi^{\theta^n} \leq c_3^{1/(1-\theta)} \xi^{\theta^n}.$$

将 u 乘以一个常数后，不妨设 $\max u - \min u \le 1$ 和 $c_1 \le 1$。因此，利用对于 $n \le m$ 有 $\xi^{\theta^n} \le \xi^{\theta^m}$，可得

$$\begin{aligned}|v(x)-v(y)| &\le \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{-n}\big|u(\Lambda^n(x)) - u(\Lambda^n(y))\big| \\ &\le |u(x)-u(y)| + \sum_{n=1}^{N} \delta^{-n}\big|u(\Lambda^n(x)) - u(\Lambda^n(y))\big| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \delta^{-n} \\ &\le \xi + \sum_{n=1}^{N} \delta^{-n} c_3^{1/(1-\theta)} \xi^{\theta^n} + \frac{\delta^{-N}}{\delta - 1} \le C_1(\xi^{\theta^N} + \delta^{-N}).\end{aligned}$$

这里，N 是任意正整数，而 C_1 是依赖于 c_3、θ 和 δ 的某个常数。现在我们取

$$N := \lfloor \log|\log\xi|/|2\log\theta| \rfloor \quad \text{and} \quad \gamma := \log\delta/|2\log\theta|.$$

回忆一下，$\theta < 1$ 和 $\xi < 1/4$。因此

$$\begin{aligned}\xi^{\theta^N} \le \xi^{\theta^{\log|\log\xi|/|2\log\theta|}} &= \exp\Big[\theta^{\log|\log\xi|/|2\log\theta|}\log\xi\Big] = \exp\Big[|\log\xi|^{-1/2}\log\xi\Big] \\ &= \exp\Big[-|\log\xi|^{1/2}\Big] \le C_2 \exp\Big[-\gamma\log|\log\xi|\Big] = C_2|\log\xi|^{-\gamma}\end{aligned}$$

其中某个常数 C_2 依赖于 θ 和 δ。对于上面的不等式，我们利用了 $-|\log\xi|^{1/2} \le A - \gamma\log|\log\xi|$，其中某个较大的常数 A 依赖于 θ 和 δ。

对于项 δ^{-N}，我们有

$$\delta^{-N} \le \delta^{-\log|\log\xi|/|2\log\theta|+1} = \delta\exp\Big[\big(-\log|\log\xi|/|2\log\theta|\big)\cdot\log\delta\Big] = \delta\exp\Big[-\gamma\log|\log\xi|\Big],$$

这等于 $\delta|\log\xi|^{-\gamma}$。因此我们得出

$$|v(x)-v(y)| \le C_1(C_2|\log\xi|^{-\gamma} + \delta|\log\xi|^{-\gamma}) = C_1(C_2+\delta)|\log\xi|^{-\gamma}.$$

由此得到 $c = C_1(C_2+\delta)$ 的 (3.1)，并完成了该引理的证明。 □

根据第2节中的讨论，f_* 关于 DSH 距离是 d.s.h. 函数空间上的利普希茨映射。此外，我们还需要证明：在 DSH(X) 上关于 L^1-距离，f_* 在 DSH(X) 的有界子集上是 H¨older 连续的。这正是下一个引理的内容。

引理 3.2. 存在一个数 $0 < \theta \le 1$，使得 $\phi \mapsto f_*(\phi)$ 关于每个 $\mathrm{DSH}(X)$ 的有界子集，在 L^1-范数下是 θ-*H¨older* 连续的。也就是说，对于每个有界子集 $\mathscr{F} \subset \mathrm{DSH}(X)$，都存在一个常数 $c = c(\mathscr{F})$，使得

$$\big\|f_*(\phi) - f_*(\psi)\big\|_{L^1} \le c\|\phi-\psi\|_{L^1}^{\theta} \quad \textit{for} \quad \phi,\psi \in \mathscr{F}.$$

证明。注意，我们可以用 $\mathscr{F} - \mathscr{F}$ 替换 $\mathscr{F}$，因此只需证明对于 $\phi \in \mathscr{F}$，$\|f_*(\phi)\|_{L^1} \lesssim \|\phi\|_{L^1}^{\theta}$。我们可以分别处理 Γ 的每个分支。因此，为简便起见，可以假设 Γ 是不可约的。

设 $\widetilde{\Gamma} \xrightarrow{\pi} \Gamma$ 是 Γ 的消解奇点，如第2节所述，并且我们固定一个 K¨ahler 形式 $\widetilde{\omega}$ 于 $\widetilde{\Gamma}$ 上。定义 $\Pi_i := \pi_i \circ \pi$。我们有 $\Pi_1^* : \mathrm{DSH}(X) \to \mathrm{DSH}(\widetilde{\Gamma})$，且 $(\Pi_2)_* : \mathrm{DSH}(\widetilde{\Gamma}) \to \mathrm{DSH}(X)$，以及 $f_* = (\Pi_2)_* \circ \Pi_1^*$。由第2节可知，所有这些映射都是良定义的，并且关于 DSH 范数有界。

我们首先考虑 $(\Pi_2)_*$。由于 Π_2 是全纯的，$(\Pi_2)^*(\omega^j)$ 是光滑的，因此 $\widetilde{(\Pi_2)^*(\omega^j)} \lesssim \widetilde{\omega}^j$。对于任意 $\varphi \in \mathrm{DSH}(\Gamma)$，我们有

$$\|(\Pi_2)_*(\varphi)\|_{L^1} \leq \int_X (\Pi_2)_*(|\varphi|)\,\omega^k = \int_{\widetilde{\Gamma}} |\varphi|\,(\Pi_2)^*(\omega^k) \lesssim \int_{\widetilde{\Gamma}} |\varphi|\,\widetilde{\omega}^k = \|\varphi\|_{L^1}.$$

还需证明 $\|\Pi_1^*(\phi)\|_{L^1} \lesssim \|\phi\|_{L^1}^{\theta}$ 对于 $\phi \in \mathscr{F}$。令 Σ 表示 Π_1 的临界值集合，并令 $\widetilde{\Sigma} := \Pi_1^{-1}(\Sigma)$。我们还将 $\widetilde{\Sigma}'$ 表示为 Π_1的临界点集合，它是 Π_1 在局部全纯坐标下的雅可比行列式 $\{\mathrm{Jac}\,\Pi_1 = 0\}$ 的零点集（我们用有限个局部全纯图覆盖 Γ）。显然，$\Sigma' \subset \Sigma$。通过使用爆破，我们可以假设 Σ 是光滑流形的有限并。令 Σ_ϵ 为 Σ 的 $\sim\epsilon$- 邻域。我们将 $\|\Pi_1^*(\phi)\|_{L^1}$ 分成两部分：

$$\|\Pi_1^*(\phi)\|_{L^1} \leq \int_{\widetilde{\Gamma}\setminus\widetilde{\Sigma}_\epsilon} \Pi_1^*(|\phi|)\,\widetilde{\omega}^k + \int_{\widetilde{\Sigma}_\epsilon} \Pi_1^*(|\phi|)\,\widetilde{\omega}^k. \tag{3.2}$$

断言 1。对于某个 $\alpha > 0$，其与 ϕ无关，有

$$\int_{\widetilde{\Gamma}\setminus\widetilde{\Sigma}_\epsilon} \Pi_1^*(|\phi|)\,\widetilde{\omega}^k \lesssim \epsilon^{-\alpha}\|\phi\|_{L^1} \quad \text{for all} \quad \phi \in L^1(X).$$

命题 1 的证明。</style}由于 Σ' 是由 $\mathrm{Jac}\Pi_1$定义的 Γ 的解析子集，我们可以将 Łojasiewicz不等式 [2, 定理 6.4] 应用于函数 $\mathrm{Jac}\Pi_1$，得到

$$\mathrm{dist}(x, \widetilde{\Sigma}') \lesssim |\mathrm{Jac}\Pi_1(x)|^A \quad \text{for} \quad x \in \widetilde{\Gamma},$$

其中 $A > 0$ 是与 x无关的常数。因此

$$\mathrm{dist}(x, \widetilde{\Sigma}) \leq \mathrm{dist}(x, \widetilde{\Sigma}') \lesssim |\mathrm{Jac}\Pi_1(x)|^A.$$

因此，对于 $x \in \Gamma \setminus \Sigma_\epsilon$，有

$$|\mathrm{Jac}\Pi_1(x)|^{-1} \lesssim \epsilon^{-1/A}.$$

对于每个 $x \in \Gamma \setminus \Sigma_\epsilon$，都可以找到 x 的一个小邻域 $D \subset \Gamma$，使得 Π_1 在 D 上是单射的，从而 Π_1 是 D 与 $\Pi_1(D)$ 之间的双全纯映射。因此，在点 $\Pi_1(x)$ 处，我们有

$$(\Pi_1|_D)_*(\widetilde{\omega}^k) \lesssim |\mathrm{Jac}\Pi_1|^{-2}\omega^k \lesssim \epsilon^{-2/A}\omega^k.$$

注意，Π_1 在 Σ_ϵ之外是一个次数为 d_0 的全纯覆盖。因此

$$(\Pi_1)_*(\widetilde{\omega}^k) \lesssim \epsilon^{-2/A}\omega^k \quad \text{on} \quad \Pi_1(\widetilde{\Gamma}\setminus\widetilde{\Sigma}_\epsilon).$$

取 $\alpha := 2/A$，我们有

$$\int_{\widetilde{\Gamma}\setminus\widetilde{\Sigma}_\epsilon} \Pi_1^*(|\phi|)\,\widetilde{\omega}^k = \int_{\Pi_1(\widetilde{\Gamma}\setminus\widetilde{\Sigma}_\epsilon)} |\phi|\,(\Pi_1)_*(\widetilde{\omega}^k) \lesssim \int_X |\phi|\epsilon^{-\alpha}\,\omega^k = \epsilon^{-\alpha}\|\phi\|_{L^1}.$$

命题 1 的证明完成。 □

回忆一下，如果正测度 ν 在 X 上满足以下条件，则称其为中等的：ν 在多极集上没有质量，并且对于 X上的任意有界族 d.s.h. 函数 $\mathscr{F}$，存在常数 $\alpha' > 0$ 和 $c' > 0$，使得

$$\int_X e^{\alpha'|\psi|} d\nu \leq c' \quad \text{for} \quad \psi \in \mathscr{F}.$$

等价地，存在常数 $\beta' > 0$ 和 $c' > 0$，使得

$$\nu\{z \in X : |\psi(z)| > M\} \leq c' e^{-\beta' M}$$

对于 $M \geq 0$ 和 $\psi \in \mathscr{F}$。概率测度 ω^k 具有中等性质 [13]。X 上维数为 $\geq k$ 的一般实子流形上的勒贝格测度也具有中等性质 [18]。局部情形另见 [14] 。

断言 2. 我们有

$$\int_{\widetilde{\Sigma}_\epsilon} \Pi_1^*(|\phi|)\, \widetilde{\omega}^k \lesssim \epsilon^{1/2} \quad \text{for} \quad \phi \in \mathscr{F}.$$

~断言 *2* 的证明。只需考虑 ϵ 很小的情形。我们先估计 Σ_ϵ的体积。

~回顾一下，Σ 是有限个光滑流形的并。因此，Σ_ϵ 的体积为 $\lesssim \epsilon$。此外，~由于 Σ_ϵ 包含一个半径为 ϵ的球，其体积为 $\gtrsim \epsilon^{2k}$。

~根据引理 2.1，$\Pi_1^*(|\phi|)$属于 DSH(Γ)的一个紧子集，对 $\phi \in \mathscr{F}$成立。再次利用 $\widetilde{\omega}^k$ 的中等性质，对于 $\phi \in \mathscr{F}$，有

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} e^{\alpha'' \Pi_1^*(|\phi|)}\, \widetilde{\omega}^k \leq c''$$

对于某些与 ϕ 无关的正数常数 α'' 和 c''。特别地，

$$\int_{\widetilde{\Sigma}_\epsilon} e^{\alpha'' \Pi_1^*(|\phi|)}\, \widetilde{\omega}^k \leq c'' \quad \text{for all} \quad \phi \in \mathscr{F}.$$

A 对 Σ_ϵ 上的概率测度 $\widetilde{\omega}^k$/vol(Σ$_\epsilon$) 应用詹森不等式，可得 s

$$\exp\Big[\int_{\widetilde{\Sigma}_\epsilon} \alpha'' \Pi_1^*(|\phi|)\, \frac{\widetilde{\omega}^k}{\mathrm{vol}(\widetilde{\Sigma}_\epsilon)}\Big] \leq \int_{\widetilde{\Sigma}_\epsilon} e^{\alpha'' \Pi_1^*(|\phi|)}\, \frac{\widetilde{\omega}^k}{\mathrm{vol}(\widetilde{\Sigma}_\epsilon)} \leq \frac{c''}{\mathrm{vol}(\widetilde{\Sigma}_\epsilon)}.$$

因此，

$$\int_{\widetilde{\Sigma}_\epsilon} \Pi_1^*(|\phi|)\, \widetilde{\omega}^k \leq \frac{\mathrm{vol}(\widetilde{\Sigma}_\epsilon)}{\alpha''} \log \frac{c''}{\mathrm{vol}(\widetilde{\Sigma}_\epsilon)} \lesssim \epsilon \cdot \log(\epsilon^{-2k}) \lesssim \epsilon^{1/2}.$$

这就完成了断言 2 的证明。 □

利用上述断言并取 $\epsilon := \|\phi\|_{L^1}^{2/(2\alpha+1)}$，由 (3.2) 可得 $\|\Pi_1^*(\phi)\|_{L^1} \lesssim \|\phi\|_{L^1}^{1/(2\alpha+1)}$，从而完成引理 3.2 的证明。□

引理 3.3。设 $\epsilon > 0$ 为任意正数。则存在一个常数 $c = c(\epsilon) > 0$，使得对于任意 $n \geq 0$ 以及任意质量为 1 的正闭 (1,1)-流 S，都有

$$\|(f^n)_*(S)\| \leq c(d_{k-1} + \epsilon)^n.$$

证明。我们在 X 的上同调群 $H^*(X, \mathbb{C})$ 上固定一个范数。回顾引言中的内容，

$$\lim_{n\to\infty} \|(f^n)^* : H^{k-1,k-1}(X, \mathbb{C}) \to H^{k-1,k-1}(X, \mathbb{C})\|^{1/n} = d_{k-1}.$$

由 Poincar´e 对偶性可得

$$\lim_{n\to\infty} \|(f^n)_* : H^{1,1}(X, \mathbb{C}) \to H^{1,1}(X, \mathbb{C})\|^{1/n} = d_{k-1}.$$

由 [4, 7], , 存在 X 上的正闭光滑（1,1）形式 $S_j^\pm$，使得 $\|S_j^\pm\|$ 有界于某个常数，且 $S_j^+ - S_j^- \to S$ 在流的意义下成立。由于 $(f^n)_*$ 在正闭（1,1）流上连续作用，我们可以用 $S_j^\pm$ 替换 S，从而假设 S 是光滑的。

由于 $\|S\| = 1$，其在 $H^{1,\,1}(X,\mathbb{C})$ 中的上同调类的范数有一个常数上界A。因此，$(f^n)_*(S)$ 在 $H^{1,\,1}(X,\mathbb{C})$ 中的上同调类的范数有界于

$$A\|(f^n)_* : H^{1,1}(X,\mathbb{C}) \to H^{1,1}(X,\mathbb{C})\|.$$

利用正闭流的质量仅取决于其上同调类这一事实，我们很容易推出 $\limsup_{n\to\infty} \|(f^n)_*(S)\|^{1/n} \le d_{k-1}$。引理得证。□

我们继续证明定理 1.1。回顾一下，$d_{k-1} < d_k$。根据上一个引理，将 f 替换为一次迭代（这不会改变测度 μ）后，我们可以假设

$$\kappa := \sup\left\{\|f_*(S)\| :\ S \text{ positive closed } (1,1)\text{-current of mass } 1\right\} < d_k.$$

我们取一个满足 $1 < \delta < d_k/\kappa$ 的 δ，并定义 $\Lambda := \delta d_k^{-1} f_*$，它作用于 DSH($X$) 上。

回顾 [8] 可知，$\phi \mapsto \int_X \phi\, d\mu$ 在 DSH(X) 上连续。因此，我们可以用以下等价范数替换 DSH 范数

$$\|\phi\|_\mu := \Big|\int_X \phi\, d\mu\Big| + \inf \|T^\pm\|,$$

其中，下确界取遍所有满足 $dd^c\phi = T^+ - T^-$的正闭（1,1）流 $T^\pm$。

考虑由下式定义的 DSH(X) 超平面

$$E := \Big\{\phi \in \mathrm{DSH}(X) :\ \int_X \phi\, d\mu = 0\Big\}.$$

引理 3.4. 空间 E 在 Λ 作用下保持不变，并且有 $\|\Lambda\|_\mu \le 1$。特别地，E 中以0 为中心的任意球在 Λ作用下保持不变。

证明。 由于 μ 在多极集上没有质量，且 $f^*(\mu) = d_k\mu$，对于 $\phi \in E$，我们有

$$\int_X \Lambda(\phi)\, d\mu = \int_X \delta d_k^{-1} f_*(\phi)\, d\mu = \delta \int_X \phi\, d_k^{-1}\, df^*(\mu) = \delta \int_X \phi\, d\mu = 0.$$

因此 E 在 Λ作用下保持不变。

对于第二个断言，只需证明对任意正闭（1,1）流 T，$\|\Lambda(T)\| \le \|T\|$。这由假设 $\delta d_k^{-1}\kappa < 1$ 可得。□

现在我们可以完成定理 1.1 的证明。

定理 *1.1* 证明结束。对于 $\phi, \psi \in$ DSH(X)，其 DSH 范数由固定常数 $M > 1$ 控制，定义 $\phi' := d_k^{-1} f_*(\phi) - \phi$ 以及 $\psi' := d_k^{-1} f_*(\psi) - \psi$。那么 ϕ'和 ψ' 均属于 E，因为 μ 在 $d_k^{-1} f^*$下是不变的。

ϕ' 的定义给出

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \int_X d_k^{-n} (f^n)_*(\phi')\, \omega^k &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_X d_k^{-n} (f^n)_* (d_k^{-1} f_*(\phi) - \phi)\, \omega^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\int_X d_k^{-(n+1)} (f^{n+1})_*(\phi)\, \omega^k - \int_X d_k^{-n} (f^n)_*(\phi)\, \omega^k \Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X d_k^{-n} (f^n)_*(\phi)\, \omega^k - \int_X \phi\, \omega^k.
\end{aligned}$$

回忆一下，$d_k^{-n}\,(f^n)^*(\omega^k)$ 收敛到 μ。因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_X d_k^{-n}(f^n)_*(\phi)\,\omega^k=\lim_{n\to\infty}\int_X \phi\, d_k^{-n}(f^n)^*(\omega^k)=\int_X \phi\, d\mu.$$

因此，根据 Λ 的定义，我们有

$$\int_X \phi\, d\mu=\int_X \phi\,\omega^k+\sum_{n=0}^{\infty}\int_X d_k^{-n}(f^n)_*(\phi')\,\omega^k=\int_X \phi\,\omega^k+\sum_{n=0}^{\infty}\delta^{-n}\int_X \Lambda^n(\phi')\,\omega^k.$$

将 ϕ、ϕ' 替换为 ψ、ψ' 后，同样的等式仍然成立。因此

$$\int_X \phi\, d\mu-\int_X \psi\, d\mu=\int_X (\phi-\psi)\,\omega^k+\sum_{n=0}^{\infty}\delta^{-n}\int_X \Lambda^n(\phi'-\psi')\,\omega^k.$$

注意到，$\|\phi'\|_{\mathrm{DSH}}$、$\|\psi'\|_{\mathrm{DSH}}$ 都被某个固定常数乘以 M 所界。因此，ϕ' 和 ψ' 属于 E 中以 0 为中心、半径被某个常数乘以 M 所界的球 $\mathbb{B}$（关于 L^1-范数）。此外，根据引理 3.2 和引理 3.4，Λ 是从 $\mathbb{B}$ 到 $\mathbb{B}$ 的 θ-H¨older 映射，关于 L^1-距离，对某个 $0<\theta\le 1$ 成立。因此，我们可以将引理 3.1 应用于 $u(\phi):=\int_X \phi\,\omega^k$，得到

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty}\delta^{-n}\int_X \Lambda(\phi'-\psi')\,\omega^k\Big|\lesssim\big(\log^\star\|\phi'-\psi'\|_{L^1}\big)^{-\gamma}$$

对某个 $\gamma>0$。

再次使用引理 3.2，我们有

$$\|\phi'-\psi'\|_{L^1}\le\big\|d_k^{-1}f_*(\phi-\psi)\big\|_{L^1}+\|\phi-\psi\|_{L^1}\lesssim\|\phi-\psi\|_{L^1}^{\theta}+\|\phi-\psi\|_{L^1}\lesssim\|\phi-\psi\|_{L^1}^{\theta}.$$

这里我们利用了 $\|\phi-\psi\|_{L^1}\lesssim M$。

我们得出

$$\Big|\int_X \phi\, d\mu-\int_X \psi\, d\mu\Big|\lesssim\|\phi-\psi\|_{L^1}+\big(\log^\star\|\phi-\psi\|_{L^1}^{\theta}\big)^{-\gamma}.$$

由于 $\|\phi-\psi\|_{L^1}\lesssim M$，为了证明所需的不等式，只需考虑 $t:=\|\phi-\psi\|_{L^1}\le 1/2$ 的情形。在这种情况下，我们有

$$t\lesssim(1-\log t)^{-\gamma}$$

and

$$(1-\theta\log t)^{-\gamma}=\theta^{-\gamma}(\theta^{-1}-\log t)^{-\gamma}\le\theta^{-\gamma}(1-\log t)^{-\gamma}.$$

由此我们得到

$$\Big|\int_X \phi\, d\mu-\int_X \psi\, d\mu\Big|\le c(1-\log t)^{-\gamma}=c(\log^\star t)^{-\gamma}$$

对于某个取决于 θ 和 γ的常数 $c>0$。定理 1.1 的证明至此完成。□

参考文献

[1] Fabrizio Bianchi 和 Tien-Cuong Dinh。$\mathbb{P}^k$ I 的自同态的平衡态：存在性与性质。arXiv:2007.04595，即将发表于《纯粹与应用数学杂志》，2023年。[2] Edward Bierstone 和 Pierre D. Milman。半解析集与亚解析集。高等科学研究院数学出版物，（67）：5–42，1988。[3] Andr´e Blanchard。关于复解析簇。Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.（3），73：157–202，1956。[4] Jean-Pierre Demailly。闭正流的正则化与交叉理论。《代数几何杂志》，1（3）：361–409，1992。[5] Tien-Cuong Dinh、Lucas Kaufmann 和 Hao Wu。在 $SL_2(\mathbb{C})$ 上的随机游走：谱隙与极限定理。arXiv:2106.04019，即将发表于《概率论及相关领域》，2021年。[6] Tien-Cuong Dinh、Viˆet-Anh Nguyˆen 和 Tuyen Trung Truong。具有主导拓扑度的亚纯映射的等分布。《印第安纳大学数学杂志》，64（6）：1805–1828，2015。[7] Tien-Cuong Dinh 和 Nessim Sibony。流的正则化与熵。Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup.（4），37（6）：959–971，2004。[8] Tien-Cuong Dinh 和 Nessim Sibony。亚纯变换的值分布及其应用。《赫尔维数学评论》，81（1）：221–258，2006。[9] Tien-Cuong Dinh 和 Nessim Sibony。全纯映射对流的拉回。《数学手稿》，123（3）：357–371，2007。[10] Tien-Cuong Dinh 和 Nessim Sibony。多复变数动力学：射影空间的自同态与多项式型映射。载于《全纯动力系统》，《数学讲义》第1998卷，第165–294页。Springer，柏林，2010。[11] John Erik Fornaess 和 Nessim Sibony。高维复动力学。II。载于《复分析现代方法》（普林斯顿，新泽西州，1992），《数学研究年刊》第137卷，第135–182页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1995。[12] Vincent Guedj。具有大拓扑度的有理映射的遍历性质。《数学年刊》（2），161（3）：1589–1607，2005。[13] Lars H¨ormander。《多复变数复分析导论》，北荷兰数学丛书第7卷。North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，第三版，1990。[14] Lucas Kaufmann。关于奇异 Monge-Amp`ere 测度的 Skoda型可积性定理。《密歇根数学杂志》，66（3）：581–594，2017。[15] Xiaonan Ma 和 George Marinescu。全纯Morse不等式与Bergman核，《数学进展》第254卷。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2007。[16] Nessim Sibony。有理映射的动力学 $\mathbb{P}^k$。载于《复动力学与复几何》（里昂，1997），《全景综合》第8卷，第ix–x、xi–xii、97–185页。法国数学会，巴黎，1999。[17]Tuyen Trung Truong。任意特征域上对应的相对动力次数。《纯粹与应用数学杂志》，758：139–182，2020。[18] Duc-Viet Vu。支撑在实子流形上的测度的复 Monge-Amp`ere 方程。《数学年刊》，372（1-2）：321–367，2018。[19] Duc-Viet Vu。非K¨ahler流形上亚纯自映射的平衡测度。《美国数学会汇刊》，373（3）：2229–2250，2020。

数学系，新加坡国立大学，肯特岗下段路10号，新加坡 119076。电子邮箱地址：matdtc@nus.edu.sg；e0011551@u.nus.edu