arXiv:2301.12894v1 [math.RA] 16 Dec 2022

基于完备格上的重叠映射与分组映射确定的F变换

Abha Tripathi*、S.P. Tiwari†和Sutapa Mahato‡数学与计算系 印度理工学院（ISM）丹巴德-826004，印度

摘要

本文从构造性方法和公理化方法两个方面，研究基于完备格上的重叠映射与分组映射、剩余蕴涵算子和余剩余蕴涵算子的 F变换。此外，本文还研究了所提出的 F变换的对偶性、基本性质及逆变换，并探讨了所提出的直接 F变换的公理化刻画。

关键词：完备格；重叠映射；分组映射；直接 F变换； L模糊变换系统。

1 引言

模糊变换（F-变换）理论最初由 Perfilieva 提出 [22],，这一概念引起了许多研究者的兴趣。如今，这一理论已得到极大拓展，并开启了半线性空间概念的新篇章。 F-变换的基本思想是利用邻近关系对自变量的精确值进行因式分解（或模糊化），并将因变量的精确值取平均，得到一个近似值（参见 [22,23]）；研究范围也从模糊集扩展到参数化模糊集 [31]，从单变量扩展到两个或更多变量（参见 [2–4,32]）。近期，若干研究开始探讨基于任意论域上的任意 L-模糊划分的 F-变换（参见 [11,14,15,17–20,25,26,35]），其中 L 是完备剩余格。在这些研究中， [14]，提出了由一元关系确定的广义变换算子概念； [17]，考察了 F-变换与半模同态之间的联系； [20] 探讨了 F-变换与相似关系之间的联系。此外，还发现了一个引人入胜的关系： L-模糊拓扑／余拓扑与 L-模糊近似算子（这些概念均用于

*tripathiabha29@gmail.com
†sptiwarimaths@gmail.com
‡sutapaiitdhanbad@gmail.com

粗糙集理论的算子导向视角研究）与 F-变换之间也存在联系， [25], 对此亦有发现； [35]则讨论了 L^M 值 F-变换与 L^M 值模糊近似算子以及 ML 阶拓扑／余拓扑之间的联系。此外， [26]考察了 F-变换和 L-模糊预拓扑的概念。研究表明，较弱的闭包算子和内部算子（以 Cech 命名）也可以用 F-变换表示，这意味着 L 值 F-变换可与闭包算子和内部算子并行使用，作为它们的典范表示。 [34]还讨论了考虑三类著名蕴涵算子的 F-变换类别，即 $R-$、 $S-$、 $QL-$ 蕴涵算子。关于 F-变换应用的研究已有多项，例如：趋势-周期估计 [7], 、数据压缩 [8], 、偏微分方程数值解 [10], 、调度 [13], 、时间序列 [21], 、数据分析 [24],、去噪 [27], 、人脸识别 [30], 、神经网络方法 [33] 以及交易 [36]。

1.1 我们研究的动机

与通常的模糊逻辑联结词 t-范数和 t-余范数相比，重叠映射与分组映射也可以被视为单位区间上经典逻辑交运算和并运算的一种新结构。尽管这些映射与 t-范数和 t-余范数密切相关，但它们不具有任何非平凡零因子。近年来，一些研究人员考察了完备格上重叠映射与分组映射的构造技术和性质，并开展了广泛研究。Qiao 在 [29]提出了完备格上重叠映射与分组映射的概念，并给出了两种构造技术。在 [37], 中，利用完备同态和完备 0_L、 1_L-自同态研究了完备格上重叠映射与分组映射的构造技术。此外， [38]讨论了重叠映射与分组映射的序和。此外，重叠映射与分组映射还被应用于实际应用问题的多个方面，例如图像处理 [9], 、分类 [5], 和决策 [1] 问题。具体而言，在处理某些实际问题时，这些映射比 t-范数和 t-余范数具有更多优势。将重叠映射与分组映射的思想应用于 F-变换，似乎可以进一步开拓一些新的应用领域。因此，利用这类映射的思想研究 F-变换理论，正是本文的主题。

1.2 主要贡献

本文提出了基于完备格上的重叠映射与分组映射、剩余与余剩余蕴涵算子的 F-变换理论。有趣的是，在某些条件下， [22, 25, 34] 中引入的 F-变换是本文所提出的 F-变换的特例。此外，我们基于完备格上的上述逻辑运算，从构造性方法和公理化方法两个角度研究 F-变换。主要发现总结如下：

- 我们讨论所提出的直接 F-变换的对偶性，并研究其基本性质；

- 我们介绍所提出的 F-变换的逆变换，并讨论一些基本性质；以及

- 我们展示了所提出的 F变换与 L模糊变换系统之间的密切联系，并讨论了 L模糊变换系统的对偶性。

本文其余部分安排如下。第2节回顾全文主要部分将使用的一些关键概念。第3节介绍并研究由完备格上的重叠映射与分组映射确定的各种直接 F变换类。第4节介绍所提出的直接 F变换的逆变换。在下一节中，我们从公理化方法刻画所提出的直接F变换。

2 预备知识

本文回顾与完备格、重叠映射与分组映射以及来自 [6,12,28,29,37,38]的 L模糊集相关的基本概念。在全文中，具有最小元0和最大元1的完备格记为 $L \equiv (L, \vee, \wedge, 0, 1)$。我们从以下内容开始。

定义 2.1 设 X 为非空集。则 X 上的 L-模糊集是一个映射 $f\colon X \to L$。

X 上所有 L-模糊集构成的族记为 L^X。对于所有 $u \in L$, $\mathrm{u} \in L^X$, $\mathrm{u}(x) = u$, $x \in X$ 表示常值 L-模糊集。此外, L-模糊集 f 的核是一个清晰集 $core(f) = \{x \in X, f(x) = 1\}$.。若 $core(f) \neq \emptyset$, 则称 f 为正规 L-模糊集。对于 $A \subseteq X$, A 的特征映射是一个映射 $1_A\colon X \to \{0,1\}$，满足

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

下面回顾并介绍一些基本概念。

定义 2.2 L 上的重叠映射是一个映射 $\theta\colon L \times L \to L$，满足对所有 u、$v \in L$、$\{u_i\colon i \in J\}$、$\{v_i\colon i \in J\} \subseteq L$

(i) $\theta(u,v) = \theta(v,u)$, (ii) $\theta(u, v)$ 当且仅当 $u = 0$ 或 $v = 0$, (iii) $\theta(u,v)$ 当且仅当 $u = 1$ 且 $v = 1$,

(iv) $\theta(u,v) \leq \theta(u,w)$ 如果 $v \leq w$, 并且

(v) $\theta(u, \bigvee_{i\in J} v_i) = \bigvee_{i\in J} \theta(u, v_i), \theta(\bigwedge_{i\in J} u_i, v) = \bigwedge_{i\in J} \theta(u_i, v).$

如果 $\theta(1,u) = u, \forall\, u \in L$, 我们称 1 是 θ 的中性元。此外，重叠映射称为

（i）如果 $\theta(1,u) \le u, \forall u \in L$，则称为收缩，

（ii）若 $u \le \theta(1,u)\ \forall u \in L$，则为膨胀，并且

（iii）若 EP-重叠映射满足 $\theta(u,\theta(v,w)) = \theta(v,\theta(u,w))\ \forall u,v,w \in L$。

例 2.1 （i）每个没有非平凡零因子的连续 t-范数 $\mathcal{T}$ 都是重叠映射，

（ii）在含有素元 0 的框架上，$\theta_M(u,v) = u \wedge v, \forall u,v \in L$ 是重叠映射。

定义 2.3 L 上的分组映射是满足下述条件的映射 $\eta: L \times L \to L$：对所有u, $v \in L, \{u_i: i \in J\}, \{v_i: i \in J\} \subseteq L$

(i) $\eta(u,v) = \eta(v,u)$,

(ii) $\eta(u,v) = 0$ 当且仅当 $u = 0$ 且 $v = 0$,

(iii) $\eta(u,v) = 1$ 当且仅当 $u = 1$ 或 $v = 1$,

(iv) $\eta(u,v) \le \eta(u,w)$ 若 $v \le w$，且

(v) $\eta(u, \bigvee\limits_{i\in J} v_i) = \bigvee\limits_{i\in J} \eta(u,v_i), \eta(\bigwedge\limits_{i\in J} u_i, v) = \bigwedge\limits_{i\in J} \eta(u_i,v)$.

若 $\eta(0,u) = u, \forall u \in L$，则称 0 是 η 的中性元。此外，分组映射称为

(i) 收缩，若 $\eta(0,u) \ge u, \forall u \in L$,

(ii) 膨胀，若 $u \ge \eta(0,u)\ \forall u \in L$，且

(iii) EP-分组映射，如果 $\eta(u,\eta(v,w)) = \eta(v,\eta(u,w))\ \forall u,v,w \in L$。

例 2.2 (i) 每个没有非平凡零因子的连续 t-余三角模 $\mathcal{S}$ 都是分组映射，

(ii) 在具有素元 0 的框架上，$\eta_M(u,v) = u \vee v, \forall u,v \in L$ 是一个分组映射。

定义 2.4 L 上的否定算子是一个递减映射 N: $L \to L$，满足 N(0) = 1 且 N(1) = 0。

如果 N(N(u)) = $u, \forall u \in L$，则称否定算子 N 是对合的（强的）。此外，如果 N 严格递减且连续，则称否定算子 N 是严格的，即对合的（因为每个对合否定算子都严格递减且连续）。

否定算子 $N_S(u) = 1 - u$ 在 $L = [0,1]$ 通常被视为标准否定子。对于给定的否定算子 N，重叠映射 θ 和分组映射 η 关于 N 对偶，若 η(N(u), N(v)) = N($\theta(u,v)$) θ(N(u), N(v)) = N($\eta(u,v)$) $\forall u,v \in L$。

定义 2.5 设 N 为一个否定算子，θ 为一个重叠映射，η 为一个分组映射。则

（i）由重叠映射 θ 诱导的剩余蕴涵算子是一个映射 $\mathcal{I}_\theta$： $L \times L \to L$，满足 $\mathcal{I}_\theta(u, v) = \{w \in L : \theta(u, w) \leq v\}$， $\forall u$， $v \in L$，并且

(ii) 由分组映射 η 诱导的余剩余蕴涵算子是一个映射 $\mathcal{I}_\eta$： $L \times L \to L$，满足 $\mathcal{I}_\eta(u, v) = \{w \in L : \eta(u, w) \geq v\}, \forall u, v \in L.$

例 2.3 设 $L = [0, 1], \theta = \theta_M, \eta = \eta_M$。则对于所有 $u, v \in L$

(i) 剩余蕴涵算子 $\mathcal{I}_{\theta_M}$ 定义为 $\mathcal{I}_{\theta_M}(u, v) = \begin{cases} 1 \text{ 当 } u \leq v, \text{ 否则为 } v \end{cases}$ *and*

(ii) 余剩余蕴涵算子 $\mathcal{I}_{\eta_M}$ 定义为 $\mathcal{I}_{\eta_M}(u, v) = \begin{cases} 0 \text{ 当 } u \leq v, \text{ 否则为} \end{cases}$

u 。

引理 2.1 设 θ 和 η 分别为重叠映射与分组映射。则 θ 和 $\mathcal{I}_\theta$、η 和 $\mathcal{I}_\eta$ 分别构成两组伴随对，即对于所有 $u, v, w \in L$, $\theta(u, v) \leq w \Leftrightarrow u \leq \mathcal{I}_\theta(v, w)$ $\eta(u, v) \geq w \Leftrightarrow u \geq \mathcal{I}_\eta(v, w)$，分别成立。

引理 2.2 设 θ 是一个重叠映射。则对所有 u、 v、 $w \in L$

(i) $\mathcal{I}_\theta(0, 0) = \mathcal{I}_\theta(1, 1) = 1$、$\mathcal{I}_\theta(1, 0) = 0$；(ii) 若 $u \leq v$，则 $\mathcal{I}_\theta(u, w) \geq \mathcal{I}_\theta(v, w)$ $\mathcal{I}_\theta(w, u) \leq \mathcal{I}_\theta(w, v)$；(iii) $\mathcal{I}_\theta$ 是一个 OP、NP-剩余蕴涵算子，即 $u \leq v \Leftrightarrow \mathcal{I}_\theta(u, v) = 1$、$\mathcal{I}_\theta(1, u) = u$，当且仅当 1 分别是 θ 的中性元；(iv) $\mathcal{I}_\theta$ 是一个 IP-剩余蕴涵算子，即 $\mathcal{I}_\theta(u, u) = 1$ 当且仅当 θ 是一个收缩型重叠映射；(v) $\mathcal{I}_\theta$ 是一个 EP-剩余蕴涵算子，即 $\mathcal{I}_\theta(u, \mathcal{I}_\theta(v, w)) = \mathcal{I}_\theta(v, \mathcal{I}_\theta(u, w))$ 当且仅当 θ 是一个 EP-重叠映射。

引理 2.3 设 θ 是一个重叠映射。那么对于所有 u、 v、 $w \in L$、$\{u_i : i \in J\}$、$\{v_i : i \in J\} \subseteq L$

(i) $\theta(u, \mathcal{I}_\theta(u, v)) \leq v$， $\mathcal{I}_\theta(u, \theta(u, v)) \geq v$， $\mathcal{I}_\theta(\theta(u, v), 0) = \mathcal{I}_\theta(u, \mathcal{I}_\theta(v, 0))$，(iii) $\mathcal{I}_\theta(u, \bigvee_{i \in J} v_i) \geq \bigvee_{i \in J} \mathcal{I}_\theta(u, v_i)$，$\mathcal{I}_\theta(\bigwedge_{i \in J} u_i, v) = \bigvee_{i \in J} \mathcal{I}_\theta(u_i, v)$，(iv) (ii) $\mathcal{I}_\theta(u, \bigwedge_{i \in J} v_i) = \bigwedge_{i \in J} \mathcal{I}_\theta(u, v_i)$，$\mathcal{I}_\theta(\bigvee_{i \in J} u_i, v) = \bigwedge_{i \in J} \mathcal{I}_\theta(u_i, v)$，$\theta$ 是一个 EP-重叠映射，当且仅当 $\mathcal{I}_\theta(\theta(u, v), u) = \mathcal{I}_\theta(u, \mathcal{I}_\theta(v, w))$。

如果 θ 与 η 关于对合否定算子 N 互为对偶，那么 $\mathcal{I}_\theta$ 与 $\mathcal{I}_\eta$ 关于对合否定算子 N 也互为对偶，即 $\mathcal{I}_\eta(\mathrm{N}(u), \mathrm{N}(v)) = \mathrm{N}(\mathcal{I}_\theta(u, v))$， $\mathcal{I}_\theta(\mathrm{N}(u), \mathrm{N}(v)) = \mathrm{N}(\mathcal{I}_\eta(u, v))$ $\forall u$， $v \in L$。根据 $\mathcal{I}_\theta$ 的性质，我们得到 $\mathcal{I}_\eta$ 的以下对偶性质：

(i) $\mathcal{I}_\eta(0,0) = \mathcal{I}_\eta(1,1) = 0, \mathcal{I}(0,1) = 1$,

(ii) $\mathcal{I}_\eta(u,w) \geq \mathcal{I}_\eta(v,w)$ $\mathcal{I}_\eta(w,u) \leq \mathcal{I}_\eta(w,v)$ 当且仅当 $u \leq v$,

(iii) $\mathcal{I}_\eta$是 OP且 NP-余剩余蕴涵算子，即， $u \geq v \Leftrightarrow \mathcal{I}_\eta(u,v) = 0$且$\mathcal{I}_\eta(0,u) = u$，当且仅当 0 分别是 η的中性元,

(iv) $\mathcal{I}_\eta$是一个 IP-余剩余蕴涵算子，即， $\mathcal{I}_\eta(u,u) = 0$当且仅当 η是一个收缩分组映射,

(v) $\mathcal{I}_\eta$是一个 EP-余剩余蕴涵算子，即， $\mathcal{I}_\eta(u,\mathcal{I}_\eta(v,w)) = \mathcal{I}_\eta(v,\mathcal{I}_\eta(u,w))$ 当且仅当η是一个 EP-分组映射,

(vi) $\eta(u,\mathcal{I}_\eta(u,v)) \geq v, \mathcal{I}_\eta(u,\eta(u,v)) \leq v, \mathcal{I}_\eta(\eta(u,v),1) = \mathcal{I}_\eta(u,\mathcal{I}_\eta(v,1))$,

(vii) $\mathcal{I}_\eta(u, \bigvee\limits_{i\in J} v_i) = \bigvee\limits_{i\in J} \mathcal{I}_\eta(u,v_i), \mathcal{I}_\eta(\bigwedge\limits_{i\in J} u_i, v) = \bigvee\limits_{i\in J} \mathcal{I}_\eta(u_i,v)$,

(viii) $\mathcal{I}_\eta(u, \bigwedge\limits_{i\in J} v_i) \leq \bigwedge\limits_{i\in J} \mathcal{I}_\eta(u,v_i)$,

(ix) η是一个 EP-分组映射，当且仅当 $\mathcal{I}_\eta(\eta(u,v)\ w) = \mathcal{I}_\eta(u,\mathcal{I}_\eta(v,w))$。

对于任意 $\mathcal{I}_\theta$和 $\mathcal{I}_\eta$， $\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(u) = \mathcal{I}_\theta(u,0)$和$\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(u) = \mathcal{I}_\eta(u,1)$ $\forall\, u \in L$分别称为由 $\mathcal{I}_\theta$ 和 $\mathcal{I}_\eta$诱导的否定算子。接下来，我们引入以下记号，供后续各节使用。

给定一个重叠映射 θ、一个分组映射 η、一个剩余蕴涵算子 $\mathcal{I}_\theta$、一个余剩余蕴涵算子 $\mathcal{I}_\eta$、一个否定算子N，以及 L-模糊集 f、 $g \in L^X$，我们定义 L-模糊集$\theta(f,g)$ $\eta(f,g)$ $\mathcal{I}_\theta(f,g)$ $\mathcal{I}_\eta(f,g)$和$\mathbf{N}(f)$如下:

$$\begin{aligned}
\theta(f,g)(x) &= \theta(f(x),g(x)), \forall\, x \in X,\\
\eta(f,g)(x) &= \eta(f(x),g(x)), \forall\, x \in X,\\
\mathcal{I}_\theta(f,g)(x) &= \mathcal{I}_\theta(f(x),g(x)), \forall\, x \in X,\\
\mathcal{I}_\eta(f,g)(x) &= \mathcal{I}_\eta(f(x),g(x)), \forall\, x \in X, \text{ and}\\
(\mathbf{N}(f))(x) &= \mathbf{N}(f(x)), \forall\, x \in X.
\end{aligned}$$

3 直接 F-变换

本文中，我们认为 θ 和 η 是重叠映射与分组映射，且它们关于对合否定算子 N 互为对偶。此外， $\mathcal{I}_\theta$ 和 $\mathcal{I}_\eta$ 分别是由 θ 和 η诱导的剩余与余剩余蕴涵算子，其定义如第 2 节所述。本节主要介绍关于上述逻辑运算的 L-模糊集的直接 F-变换概念。此外，我们研究并探讨这些变换之间的关系，并讨论其基本性质。我们从 [25]中的 L-模糊划分定义开始。

定义 3.1 非空集 X 上的正规 L-模糊集 $\{A_j : j \in J\}$ 的集合 $\mathcal{P}$ 称为 L-模糊划分，如果相应的普通集合$\{core(A_j) : j \in J\}$ 是 X的划分。对$(X, \mathcal{P})$称为具有 L-模糊划分的空间。

对于一个 L-模糊划分 $\mathcal{P} = \{A_j : j \in J\}$，可以关联满射指标映射 $k : X \to J$，使得 $k(x) = j$ 当且仅当 $x \in core(A_j)$。

下面讨论使用 θ、η、$\mathcal{I}_\theta$ 和 $\mathcal{I}_\eta$ 计算的直接 F-变换，其中 $\mathcal{I}_\theta$ 和 $\mathcal{I}_\eta$ 分别是由重叠映射与分组映射 θ、η 诱导的剩余与余剩余蕴涵算子。现在，我们从以下内容开始。

定义 3.2 设 $\mathcal{P}$ 是集合 X 的一个 L-模糊划分，且 $f \in L^X$。则

(i) 在 L-模糊划分 $\mathcal{P}$ 上，使用重叠映射 θ 计算的 f 的（直接 θ-上） $F^{\uparrow,\theta}$-变换，是一组格元素 $\{F_j^{\uparrow,\theta}[f] : j \in J\}$；（直接 θ-上） $F^{\uparrow,\theta}$-变换的 j^{th} 分量定义为

$$F_j^{\uparrow,\theta}[f] = \bigvee_{x \in X} \theta(A_j(x), f(x)),$$

(ii) 在 L-模糊划分 $\mathcal{P}$ 上，使用分组映射 η 计算的 f 的（直接 η-下） $F^{\downarrow,\eta}$-变换，是一组格元素 $\{F_j^{\downarrow,\eta}[f] : j \in J\}$；（直接 η-下） $F^{\downarrow,\eta}$-变换的 j^{th} 分量定义为

$$F_j^{\downarrow,\eta}[f] = \bigwedge_{x \in X} \eta(\mathbf{N}(A_j(x)), f(x)),$$

(iii) 通过由分组映射 η 在 L-模糊划分 $\mathcal{P}$ 上诱导的余剩余蕴涵算子 $\mathcal{I}_\eta$ 计算得到的 f 的（直接 $\mathcal{I}_\eta$-上） $F^{\uparrow,\,\mathcal{I}_\eta}$-变换是格元素 $\{F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f]$ 的集合：$j \in J\}$，并且（直接 $\mathcal{I}_\eta$-上） $F^{\uparrow,\,\mathcal{I}_\eta}$-变换的 j^{th} 分量为

$$F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f] = \bigvee_{x \in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)), f(x)), \; and$$

(iv) 通过由重叠映射 θ 在 L-模糊划分 $\mathcal{P}$ 上诱导的剩余蕴涵算子 $\mathcal{I}_\theta$ 计算得到的 f 的（直接 $\mathcal{I}_\theta$-下） $F^{\downarrow,\,\mathcal{I}_\theta}$-变换是格元素 $\{F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f]$ 的集合：$j \in J\}$，并且（直接 $\mathcal{I}_\theta$-下）$F^{\downarrow,\,\mathcal{I}_\theta}$-变换的 j^{th} 分量为

$$F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f] = \bigwedge_{x \in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x), f(x)).$$

使用 t-范数计算的直接上 F-变换，以及使用 R-蕴涵算子计算的直接下 F-变换（该蕴涵算子由 [22, 25, 34] 提出），分别是 $F^{\uparrow,\,\theta}$和$F^{\downarrow,\,\mathcal{I}_\theta}$-变换的特例。此外，使用由 [34] 提出的$S$-蕴涵算子计算的直接下 F-变换，是 $F^{\downarrow,\,\eta}$-变换的特例。在上述引入的直接 F-变换中，$F^{\uparrow,\,\mathcal{I}_\eta}$-变换是一个新的定义。

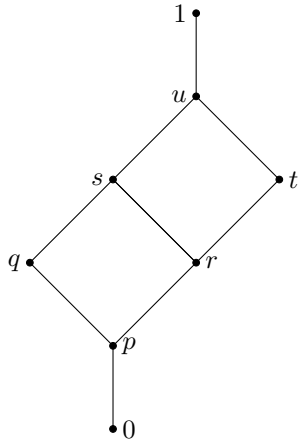

图 1：格 L 的示意图

例 3.1 设 $L = \{0, p, q, r, s, t, u, 1\}$ 为一个完备格，使得 $0 < p < r < t < u < 1$、$0 < p < q < s < u < 1$ 和 $\{q, r\}$ 以及 $\{s, t\}$ 两两不可比（图 1）。则 $(X, \mathcal{P})$ 是一个带有 L-模糊划分 $\mathcal{P}$的空间，其中$X = \{x_1, x_2, x_3\}$ 和 $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, A_3\}$ 满足 $A_1 = \frac{1}{x_1} + \frac{p}{x_2} + \frac{q}{x_3}$、$A_2 = \frac{s}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{u}{x_3}$、$A_3 = \frac{s}{x_1} + \frac{p}{x_2} + \frac{1}{x_3}$. 此外，设 $f \in L^X$ 满足 $f = \frac{p}{x_1} + \frac{q}{x_2} + \frac{u}{x_3}$，且 N 是一个对合否定算子，满足 $\mathsf{N}(0) = 1$、$\mathsf{N}(a) = u$、$\mathsf{N}(q) = t$、$\mathsf{N}(r) = s$、$\mathsf{N}(s) = r$、$\mathsf{N}(t) = q$、$\mathsf{N}(u) = p$、$\mathsf{N}(1) = 0$。则相对于θ_M、η_M、$\mathcal{I}_{\eta_M}$、$\mathcal{I}_{\theta_M}$的直接 F-变换为 $F^{\uparrow, \theta_M}[f] = \{F_1^{\uparrow,\theta_M}[f] = q, F_2^{\uparrow,\theta_M}[f] = u, F_2^{\uparrow,\theta_M}[f] = u\}$、$F^{\downarrow, \eta_M}[f] = \{F_1^{\downarrow,\eta_M}[f] = p, F_2^{\downarrow,\eta_M}[f] = r, F_3^{\downarrow,\eta_M}[f] = r\}$、$F^{\uparrow, \mathcal{I}_{\eta_M}}[f] = \{F_1^{\uparrow,\mathcal{I}_{\eta_M}}[f] = u, F_2^{\uparrow,\mathcal{I}_{\eta_M}}[f] = r, F_3^{\uparrow,\mathcal{I}_{\eta_M}}[f] = u\}$、$F^{\downarrow, \mathcal{I}_{\theta_M}}[f] = \{F_1^{\downarrow,\mathcal{I}_{\theta_M}}[f] = p$、$F^{\downarrow}{}_2{}^{\mathcal{I}_{\theta_M}}[f] = p$、$F^{\downarrow}{}_3{}^{\mathcal{I}_{\theta_M}}[f] = p\}$.

注 3.1 (i) 如果 $L = [0, 1]$、$\mathsf{N} = \mathsf{N}_S$、$\theta = \theta_M$、$\eta = \eta_M$、$\mathcal{I}_\eta = \mathcal{I}_{\eta_M}$ 和 $\mathcal{I}_\theta = \mathcal{I}_{\theta_M}$，则 j^{th} 分量的 $F^{\uparrow, \theta}$、$F^{\downarrow, \eta}$、$F^{\uparrow, \mathcal{I}_\eta}$ 和 $F^{\downarrow, \mathcal{I}_\theta}$-变换如下：

$$
\begin{aligned}
F_j^{\uparrow,\theta_M}[f] &= \bigvee_{x \in X} (A_j(x) \wedge f(x)), \\
F_j^{\downarrow,\eta_M}[f] &= \bigwedge_{x \in X} ((1 - A_j(x)) \vee f(x)), \\
F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_{\eta_M}}[f] &= \bigvee_{x \in X} \mathcal{I}_{\eta_M}((1 - A_j(x)), f(x)), \textit{ and} \\
F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_{\theta_M}}[f] &= \bigwedge_{x \in X} \mathcal{I}_{\theta_M}(A_j(x), f(x)), \forall\, j \in J, f \in L^X.
\end{aligned}
$$

显然 $F^{\uparrow,\theta_M}$和 $F^{\downarrow,\mathcal{I}_{\theta_M}}$-变换分别与在 *[22, 25, 34],* 中提出的直接上、下 F-变换的特殊情形一致。此外，$F^{\downarrow,\eta_M}$-变换与所提出的直接下 F-变换的特殊情形一致，该变换由

在 *[34]*
中提出。

(ii) 如果 $L = [0,1]$、$\theta = \theta_M$、$\eta = \eta_M$、$\mathcal{I}_\eta = \mathcal{I}_{\eta_M}$和 $\mathcal{I}_\theta = \mathcal{I}_{\theta_M}$，那么 $F^{\uparrow,\theta}$、$F^{\downarrow,\eta}$、$F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}$和 $F^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}$-变换的 j^{th} 分量如下所示:

$$\begin{aligned}
F_j^{\uparrow,\theta_M}[f] &= \bigvee_{x\in X}(A_j(x)\wedge f(x)),\\
F_j^{\downarrow,\eta_M}[f] &= \bigwedge_{x\in X}(\mathbf{N}(A_j(x))\vee f(x)),\\
F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_{\eta_M}}[f] &= \bigvee_{x\in X}\mathcal{I}_{\eta_M}(\mathbf{N}(A_j(x)),f(x)),\ \textit{and}\\
F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_{\theta_M}}[f] &= \bigwedge_{x\in X}\mathcal{I}_{\theta_M}(A_j(x),f(x)),\ \forall\, j\in J, f\in L^X.
\end{aligned}$$

显然，$F^{\uparrow,\theta_M}$和 $F^{\downarrow,\mathcal{I}_{\theta_M}}$-变换分别与 *[22, 25, 34],* 中提出的直接上 F-变换和直接下 F-变换的特殊情形重合。此外，$F^{\downarrow,\eta_M}$-变换与 *[34]*中提出的直接下 F-变换的特殊情形重合。

(iii) 如果 $L = [0,1]$、$\theta = \mathcal{T}$和 $\eta = \mathcal{S}$，其中 $\mathcal{T}$、$\mathcal{S}$分别是没有非平凡零因子的连续 t-范数和 t-余范数，那么 $F^{\uparrow,\theta}$、$F^{\downarrow,\eta}$、$F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}$和 $F^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}$-变换的 j^{th} 分量如下所示:

$$\begin{aligned}
F_j^{\uparrow,\mathcal{T}}[f] &= \bigvee_{x\in X}\mathcal{T}(A_j(x),f(x)),\\
F_j^{\downarrow,\mathcal{S}}[f] &= \bigwedge_{x\in X}\mathcal{S}(\mathbf{N}(A_j(x)),f(x)),\\
F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\mathcal{S}}[f] &= \bigvee_{x\in X}\mathcal{I}_\mathcal{S}(\mathbf{N}(A_j(x)),f(x)),\ \textit{and}\\
F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\mathcal{T}}[f] &= \bigwedge_{x\in X}\mathcal{I}_\mathcal{T}(A_j(x),f(x)),\ \forall\, j\in J, f\in L^X.
\end{aligned}$$

显然，$F^{\uparrow,\mathcal{T}}$和 $F^{\downarrow,\mathcal{I}_\mathcal{T}}$-变换与使用 t-范数和 R-蕴涵算子计算的直接上、下 F- 变换一致，相关范数和蕴涵算子分别由 *[22, 25, 34],* 提出。此外，$F^{\downarrow,\mathcal{S}}$-变换与使用 S-蕴涵算子计算的直接下 F-变换一致，该蕴涵算子由 *[34],* 提出。

由上文可知，一些现有的直接 F-变换是所提出的直接 F-变换的特例。其中，一些直接 F-变换与所提出的直接 F-变换一致，而一些所提出的直接 F-变换则与现有直接 F-变换的特例一致。也就是说，所提出的直接 F-变换比其他现有变换更具一般性。

命题 3.1 设 θ 和 η 关于对合否定算子 $\mathbf{N}$ 互为对偶。那么对于所有的 $j\in J$、$f\in L^X$

(i) $F_j^{\uparrow,\theta}[f] = \mathbf{N}(F_j^{\downarrow,\eta}[\mathbf{N}(f)])$, *i.e.,* $\mathbf{N}(F_j^{\uparrow,\theta}[f]) = F_j^{\downarrow,\eta}[\mathbf{N}(f)]$, *and*

(ii) $F_j^{\downarrow,\eta}[f] = \mathbf{N}(F_j^{\uparrow,\theta}[\mathbf{N}(f)])$, *i.e,* $\mathbf{N}(F_j^{\downarrow,\eta}[f]) = F_j^{\uparrow,\theta}[\mathbf{N}(f)]$.

证明：（i）设 $j \in J$ 和 $f \in L^X$。根据定义 3.2

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(F_j^{\downarrow,\eta}[\mathbf{N}(f)]) &= \mathbf{N}(\bigwedge_{x\in X} \eta(\mathbf{N}(A_j(x)), (\mathbf{N}(f))(x))) \\
&= \mathbf{N}(\bigwedge_{x\in X} \eta(\mathbf{N}(A_j(x)), \mathbf{N}(f(x)))) \\
&= \bigvee_{x\in X} \mathbf{N}(\eta(\mathbf{N}(A_j(x)), \mathbf{N}(f(x)))) \\
&= \bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x), f(x)) \\
&= F_j^{\uparrow,\theta}[f].
\end{aligned}$$

因此 $F^{\uparrow}{}_{,j}{}^{\theta}[f] = \mathbf{N}(F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\eta}[\mathbf{N}(f)])$，或者 $\mathbf{N}(F^{\uparrow}{}_{,j}{}^{\theta}[f]) = F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\eta}[\mathbf{N}(f)]$。类似地，我们可以证明 $F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\eta}[f] = \mathbf{N}(F^{\uparrow}{}_{,j}{}^{\theta}[\mathbf{N}(f)])$，或者 $\mathbf{N}(F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\eta}[f]) = F^{\uparrow}{}_{,j}{}^{\theta}[\mathbf{N}(f)]$。

命题 3.2 设 $\mathcal{I}_\theta$ 和 $\mathcal{I}_\eta$ 关于对合否定算子 $\mathbf{N}$ 互为对偶。那么，对所有 $j \in J$, $f \in L^X$

(i) $F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f] = \mathbf{N}(F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}(f)])$, *i.e,* $\mathbf{N}(F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f]) = F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}(f)]$, *and*

(ii) $F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f] = \mathbf{N}(F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[\mathbf{N}(f)])$, *i.e.,* $\mathbf{N}(F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f]) = F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[\mathbf{N}(f)]$.

证明：（i）设 $j \in J$ 和 $f \in L^X$。由定义 3.2 可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}(f)]) &= \mathbf{N}(\bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x), (\mathbf{N}(f))(x))) \\
&= \mathbf{N}(\bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x), \mathbf{N}(f(x)))) \\
&= \bigvee_{x\in X} \mathbf{N}(\mathcal{I}_\theta(A_j(x), \mathbf{N}(f(x)))) \\
&= \bigvee_{x\in X} \mathbf{N}(\mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}(\mathbf{N}(A_j(x))), \mathbf{N}(f(x)))) \\
&= \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)), f(x)) \\
&= F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f].
\end{aligned}$$

因此 $F^{\uparrow}{}_{,j}{}^{\mathcal{I}_\eta}[f] = \mathbf{N}(F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}(f)])$，或者 $\mathbf{N}(F^{\uparrow}{}_{,j}{}^{\mathcal{I}_\eta}[f]) = F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}(f)]$。类似地，我们可以证明 $F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\mathcal{I}_\theta}[f] = \mathbf{N}(F^{\uparrow}{}_{,j}{}^{\mathcal{I}_\eta}[\mathbf{N}(f)])$，或者 $\mathbf{N}(F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\mathcal{I}_\theta}[f]) = F^{\uparrow}{}_{,j}{}^{\mathcal{I}_\eta}[\mathbf{N}(f)]$。

上述两个命题表明，$F^{\uparrow}{}_{,j}{}^{\theta}$ 与 $F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\eta}$、$F^{\uparrow}{}_{,j}{}^{\mathcal{I}_\eta}$ 与 $F^{\uparrow}{}_{,j}{}^{\mathcal{I}_\theta}$ 具有对偶性

相对于 N 互为对偶。一般来说， $F^{\uparrow,}{}_{j}{}^{\theta}$ 与 $F^{\uparrow,}{}_{j}{}^{\mathcal{I}_\theta}$、 $F^{\downarrow,}{}_{j}{}^{\eta}$ 与 $F^{\uparrow,}{}_{j}{}^{\mathcal{I}_\eta}$ 相对于 N 并不满足对偶性。但它们满足以下结果。对此，我们假设 $\bigwedge \mathcal{I}_\theta(\mathcal{I}_\theta(u,v)\ v) = u, \forall\, u \in L.{}_{b\in L}$

命题 3.3 设 N 为对合 neator， θ 和 η 分别为 EP-重叠映射和 EP-分组映射。那么对于 $j \in J$、 $u \in L$， $f \in L^X$

(i) $F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f] = \bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(F_j^{\uparrow,\theta}[\mathcal{I}_\theta(f,\boldsymbol{u})],u),\ F_j^{\uparrow,\theta}[f] = \bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[\mathcal{I}_\theta(f,\boldsymbol{u})],u),$ *and*

(ii) $F_j^{\downarrow,\eta}[f] = \bigvee_{u\in L} \mathcal{I}_\eta(F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[\mathcal{I}_\eta(f,\boldsymbol{u})],u),\ F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f] = \bigvee_{u\in L} \mathcal{I}_\eta(F_j^{\downarrow,\eta}[\mathcal{I}_\eta(f,\boldsymbol{u})],u).$

证明：设 $u \in L$ 和 $f \in L^X$。则根据定义 3.2

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(F_j^{\uparrow,\theta}[\mathcal{I}_\theta(f,\mathbf{u})],u) &= \bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(\bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x),\mathcal{I}_\theta(f,\mathbf{u})(x)),u)\\
&= \bigwedge_{u\in L}\bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(\theta(A_j(x),\mathcal{I}_\theta(f(x),u)),u)\\
&= \bigwedge_{u\in L}\bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x),\mathcal{I}_\theta(\mathcal{I}_\theta(f(x),u),u))\\
&= \bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x),\bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(\mathcal{I}_\theta(f(x),u),u))\\
&= \bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x),f(x))\\
&= F^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f].
\end{aligned}$$

因此 $F^{\downarrow,}{}_{\mathcal{I}_\theta}[f] = \bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(F^{\uparrow,}{}_{j}{}^{\theta}[\mathcal{I}_\theta(f,\ \mathbf{u})],\ u)$ 且

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[\mathcal{I}_\theta(f,\mathbf{u})],u) &= \bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(\bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x),\mathcal{I}_\theta(f,\mathbf{u})(x)),u)\\
&= \bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(\bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x),\mathcal{I}_\theta(f(x),u)),u)\\
&= \bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(\bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(\theta(A_j(x),f(x)),u),u)\\
&= \bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(\mathcal{I}_\theta(\bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x),f(x)),u),u)\\
&= \bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x),f(x))\\
&= F^{\uparrow,\theta}[f].
\end{aligned}$$

因此 $F^{\uparrow,}{}_{\theta}[f] = \bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(F^{\downarrow,}{}_{j}{}^{\mathcal{I}_\theta}[\mathcal{I}_\theta(f,\ \mathbf{u})],$
$u)$ 。

(ii) 令 $u \in L$ 和 $f \in L^X$。则由定义 3.2、命题 3.1 和 3.2

$$\begin{aligned}
F^{\downarrow,\eta}[f] &= \mathbf{N}(F^{\uparrow,\theta}[\mathbf{N}(f)]) \\
&= \mathbf{N}(\bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[\mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}(f),\mathbf{u})],u)) \\
&= \mathbf{N}(\bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(\bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x),\mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}(f),\mathbf{u})(x)),u)) \\
&= \bigvee_{u\in L} \mathbf{N}(\mathcal{I}_\theta(\bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x),\mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}(f),\mathbf{u})(x)),u)) \\
&= \bigvee_{u\in L} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(\bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x),\mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}(f),\mathbf{u})(x))),\mathbf{N}(u)) \\
&= \bigvee_{u\in L} \mathcal{I}_\eta(\bigvee_{x\in X} \mathbf{N}(\mathcal{I}_\theta(A_j(x),\mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}(f),\mathbf{u})(x))),\mathbf{N}(u)) \\
&= \bigvee_{u\in L} \mathcal{I}_\eta(\bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)),\mathbf{N}(\mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}(f),\mathbf{u})(x))),\mathbf{N}(u)) \\
&= \bigvee_{u\in L} \mathcal{I}_\eta(\bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)),\mathcal{I}_\eta(f,\mathbf{N}(\mathbf{u}))(x)),\mathbf{N}(u)) \\
&= \bigvee_{u\in L} \mathcal{I}_\eta(F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[\mathcal{I}_\eta(f,\mathbf{N}(\mathbf{u}))],\mathbf{N}(u)).
\end{aligned}$$

因此 $F^{\downarrow,\ \eta}[f] = \bigvee_{u\in L} \mathcal{I}_\eta(F^{\uparrow,\ \mathcal{I}_\eta}[\mathcal{I}_\eta(f, \mathbf{N}(\mathbf{u}))], \mathbf{N}(u))$ 和

$$\begin{aligned}
F^{\downarrow,\mathcal{I}_\eta}[f] &= \mathbf{N}(F^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}(f)]) \\
&= \mathbf{N}(\bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(F_j^{\uparrow,\theta}[\mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}(f),\mathbf{u})],u)) \\
&= \mathbf{N}(\bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(\bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x),\mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}(f),\mathbf{u})(x)),u)) \\
&= \bigvee_{u\in L} \mathbf{N}(\mathcal{I}_\theta(\bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x),\mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}(f),\mathbf{u})(x)),u)) \\
&= \bigvee_{u\in L} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(\bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x),\mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}(f),\mathbf{u})(x))),\mathbf{N}(u)) \\
&= \bigvee_{u\in L} \mathcal{I}_\eta(\bigwedge_{x\in X} \mathbf{N}(\theta(A_j(x),\mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}(f),\mathbf{u})(x))),\mathbf{N}(u)) \\
&= \bigvee_{u\in L} \mathcal{I}_\eta(\bigwedge_{x\in X} \eta(\mathbf{N}(A_j(x)),\mathbf{N}(\mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}(f),\mathbf{u})(x))),\mathbf{N}(u)) \\
&= \bigvee_{u\in L} \mathcal{I}_\eta(\bigwedge_{x\in X} \eta(\mathbf{N}(A_j(x)),\mathcal{I}_\eta(f,\mathbf{N}(\mathbf{u}))(x)),\mathbf{N}(u)) \\
&= \bigvee_{u\in L} \eta(F^{\downarrow,\eta}[\mathcal{I}_\eta(f,\mathbf{N}(\mathbf{u}))],\mathbf{N}(u)).
\end{aligned}$$

Thus $F^{\downarrow,\mathcal{I}_\eta}[f] = \bigvee_{u\in L} \mathcal{I}_\eta(F^{\downarrow,\eta}[\mathcal{I}_\eta(f,\mathbf{N}(\mathbf{u}))],\mathbf{N}(u))$.

根据以上三个结果，我们得到以下结果，它展示了 $F^{\uparrow,\theta}$与 $F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}$、 $F^{\downarrow,\eta}$与 $F^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}$之间的联系。

命题 3.4 设 N 为一个对合否定算子。则对于 $j \in J, u \in L,$ u $f \in L^X$

(i) $F_j^{\uparrow,\theta}[f] = \bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}(F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[\mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(f),\mathbf{N}(\boldsymbol{u}))]),u)$,

(ii) $F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f] = \bigvee_{u\in L} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(F_j^{\uparrow,\theta}[\mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(f),\mathbf{N}(\boldsymbol{u}))]),u)$,

(iii) $F_j^{\downarrow,\eta}[f] = \bigvee_{u\in L} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[\mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(f),\mathbf{N}(\boldsymbol{u}))]),u)$, *and*

(iv) $F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f] = \bigwedge_{u\in L} \mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}(F_j^{\downarrow,\eta}[\mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(f),\mathbf{N}(\boldsymbol{u}))]),u)$.

证明：命题 3.1、3.2 和 3.3 可得此证明。

以下内容涉及相对于对合否定算子 $\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}$、$\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\eta}$的 $F^{\uparrow,\theta}_{,j}$和 $F^{\uparrow,\mathcal{I}_\theta}_{,j}$, $F^{\downarrow,\eta}_{,j}$和 $F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}_{,j}$的对偶性，分别对应这两个否定算子。

命题 3.5 设 $\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}$为一个对合否定算子，满足 $\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(.) = \mathcal{I}_\theta(., 0)$。则对于所有 $j \in J, f \in L^X$

(i) $F^{\uparrow,\theta}_{,j}[f] = \mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(F^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}_{,j}[\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f)])$, 即，$\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(F^{\uparrow,\theta}_{,j}[f]) = F^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}_{,j}[\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f)]$,，以及 (ii) $F^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}_{,j}[f] = \mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(F^{\uparrow,\theta}_{,j}[\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f)])$, 即，$\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(F^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}_{,j}[f]) = F^{\uparrow,\theta}_{,j}[\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f)]$。

证明：（i）设 $j \in J$ 和 $f \in L^X$。根据定义 3.2

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f)]) &= \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(\bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x),(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f))(x))) \\
&= \mathcal{I}_\theta(\bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x),\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f(x))),0) \\
&= \mathcal{I}_\theta(\bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x),\mathcal{I}_\theta(f(x),0)),0) \\
&= \mathcal{I}_\theta(\bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(\theta(A_j(x),f(x)),0),0) \\
&= \bigvee_{x\in X} \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(\mathcal{I}_\theta(A_j(x),\mathbf{N}(f(x)))) \\
&= \bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x),f(x)) \\
&= F_j^{\uparrow,\theta}[f].
\end{aligned}$$

因此 $F^{\uparrow,\theta}_{,j}[f] = \mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(F^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}_{,j}[\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f)])$，或者 $\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(F^{\uparrow,\theta}_{,j}[f]) = F^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}_{,j}[\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f)]$。

（ii）令 $j \in J$和 $f \in L^X$。根据定义 3.2

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f)]) &= \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(\bigvee_{x\in X}\theta(A_j(x),(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f))(x))) \\
&= \mathcal{I}_\theta(\bigvee_{x\in X}\theta(A_j(x),\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f(x))),0) \\
&= \bigwedge_{x\in X}\mathcal{I}_\theta(A_j(x),\mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f(x)),0)) \\
&= \bigwedge_{x\in X}\mathcal{I}_\theta(A_j(x),\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f(x)))) \\
&= \bigwedge_{x\in X}\mathcal{I}_\theta(A_j(x),f(x)) \\
&= F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f].
\end{aligned}$$

因此 $F^{\uparrow,}{}_j{}^{\theta}[f] = \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(F^{\downarrow,}{}_j{}^{\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f)])$，或者 $\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(F^{\uparrow,}{}_j{}^{\theta}[f]) = F^{\downarrow,}{}_j{}^{\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f)]$。

命题 3.6 设 $\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}$为对合否定算子，满足 $\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(.) = \mathcal{I}_\eta(., 1)$。则对于所有 $j \in J$, $f \in L^X$

(i) $F_j^{\downarrow,\eta}[f] = \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(f)])$, *i.e.,* $\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(F_j^{\downarrow,\eta}[f]) = F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(f)]$, *and*

(ii) $F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f] = \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(F_j^{\downarrow,\eta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(f)])$, *i.e,* $\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f]) = F_j^{\downarrow,\eta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(f)]$.

证明：与命题 3.5 的证明类似。

下面讨论 $F^{\uparrow,}{}_j{}^{\theta}, F^{\downarrow,}{}_j{}^{\eta}, F^{\uparrow,}{}_j{}^{\mathcal{I}_\eta}$和 $F^{\uparrow,}{}_j{}^{\mathcal{I}_\theta}$的基本结果。

命题 3.7 设 $\mathcal{P} = \{A_j : j \in J\}, \mathcal{P}' = \{B_{j'} : j' \in J\}$ 为 L-模糊划分，X和 $A_j \leq B_{j'}, \forall j, j' \in J$。则对于所有 $f \in L^X$

(i) $F_j^{\uparrow,\theta}[f] \leq F_{j'}^{\uparrow,\theta}[f], F_j^{\downarrow,\eta}[f] \geq F_{j'}^{\downarrow,\eta}[f]$, *and*

(ii) $F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f] \leq F_{j'}^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f], F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f] \geq F_{j'}^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f]$.

证明：（i）设 $j \in J$和 $f \in L^X$。则 $F^{\uparrow,}{}_j{}^{\theta}[f] = \bigvee_{x\in X}\theta(A_j(x)\ f(x)) \leq \bigvee_{x\in X}\theta(B_{j'}(x)\ f(x)) = F^{\uparrow,}{}_{j'}{}^{\theta}[f]$. 因此 $F^{\uparrow,}{}_j{}^{\theta}[f] \leq F^{\uparrow,}{}_{j'}{}^{\theta}[f]$。类似地，可以证明$F^{\downarrow,}{}_j{}^{\eta}[f] \geq F^{\downarrow,}{}_{j'}{}^{\eta}[f]$。

(ii) 令 $j \in J$和 $f \in L^X$。那么 $F^{\uparrow,}{}_j{}^{\mathcal{I}_\eta}[f] = \bigvee_{x\in X}\mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x))\ f(x)) \leq \bigvee_{x\in X}\mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x))\ f(x)) = F^{\uparrow,}{}_{j'}{}^{\mathcal{I}_\eta}[f]$. 因此 $F^{\uparrow,}{}_j{}^{\mathcal{I}_\eta}[f] \leq F^{\downarrow,}{}_{j'}{}^{\mathcal{I}_\eta}[f]$。类似地，我们可以证明 $F^{\downarrow,}{}_j{}^{\mathcal{I}_\theta}[f] \geq F^{\downarrow,}{}_{j'}{}^{\mathcal{I}_\theta}[f]$。

命题 3.8 设 $\mathcal{P}$是 L-模糊划分 X。则对所有 $j \in J, f \in L^X, x_j \in core(A_j)$

(i) $F_j^{\uparrow,\theta}[f] \geq \theta(1, f(x_j)), F_j^{\downarrow,\eta}[f] \leq \eta(0, f(x_j))$, *and*

(ii) $F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f] \geq \mathcal{I}_\eta(0, f(x_j)), F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f] \leq \mathcal{I}_\theta(1, f(x_j))$.

证明：（i）设$j \in J, x_j \in core(A_j)$且$f \in L^X$。则$F^{\uparrow,}{}_j{}^{\theta}[f] = \bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x)\ f(x))$ $\geq \theta(A_j(x_j)\ f(x_j)) = \theta(1, f(x_j))$。因此$F^{\uparrow,}{}_j{}^{\theta}[f] \geq \theta(1, f(x_j))$。类似地，可以证明$F^{\downarrow,}{}_j{}^{\eta}[f] \leq \eta(0, f(x_j))$。

(ii) 设 $j \in J, x_j \in core(A_j)$ 和 $f \in L^X$。则 $F^{\uparrow,}{}_j{}^{\mathcal{I}_\eta}[f] = \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x))$ $\geq \mathcal{I}_\eta(\mathrm{N}(A_j(x_j))\ f(x_j)) = \mathcal{I}_\eta(0, f(x_j))$。因此 $F^{\uparrow,}{}_j{}^{\mathcal{I}_\eta}[f] \geq \mathcal{I}_\eta(0, f(x_j))$。类似地，我们可以证明 $F^{\downarrow,}{}_j{}^{\mathcal{I}_\theta}[f] \leq \mathcal{I}_\theta(1, f(x_j))$。

推论 3.1 设命题 3.8 的条件成立，且 1、0 分别是 θ, η 的中性元。则对所有 $f \in L^X$, $x_j \in core(A_j)$

(i) $F_j^{\uparrow,\theta}[f] \geq f(x_j), F_j^{\downarrow,\eta}[f] \leq f(x_j)$, *and*

(ii) $F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f] \geq f(x_j), F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f] \leq f(x_j)$.

证明：设 1、0 分别是 θ, η 的中性元。则有 $\theta(1, f(x_j)) = f(x_j)$ $\eta(0, f(x_j)) = f(x_j)$ $\mathcal{I}_\eta(0, f(x_j)) = f(x_j)$，并且 $\mathcal{I}_\theta(1, f(x_j)) = f(x_j)$。现在，由命题 3.8 可得

(i) $F_j^{\uparrow,\theta}[f] \geq f(x_j), F_j^{\downarrow,\eta}[f] \leq f(x_j)$ if $x_j \in core(A_j)$, and

(ii) $F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f] \geq f(x_j), F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f] \leq f(x_j)$ if $x_j \in core(A_j)$.

命题 3.9 设 $\mathcal{P}$ 是 X 的 L-模糊划分。那么对于所有 $j \in J$、f、$g \in L^X$ 和 $f \leq g$

(i) $F_j^{\uparrow,\theta}[f] \leq F_j^{\uparrow,\theta}[g], F_j^{\downarrow,\eta}[f] \leq F_j^{\downarrow,\eta}[g]$, *and*

(ii) $F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f] \leq F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[g], F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f] \leq F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[g]$.

证明：(i) 设 $j \in J$、f、$g \in L^X$ 和 $f \leq g$。则 $F^{\uparrow,}{}_j{}^{\theta}[f] = \bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x)\ f(x))$ $\leq \bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x)\ \eta(x)) = F^{\uparrow,}{}_j{}^{\theta}[g]$. 因此 $F^{\uparrow,}{}_j{}^{\theta}[f] \leq F^{\uparrow,}{}_j{}^{\theta}[g]$。类似地，我们可以证明 $F^{\downarrow,}{}_j{}^{\eta}[f] \leq F^{\downarrow,}{}_j{}^{\eta}[g]$。

(ii) 设 $j \in J$、f、$g \in L^X$ 和 $f \leq g$。则 $F^{\uparrow,}{}_j{}^{\mathcal{I}_\eta}[f] = \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x))$ $\leq \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ \eta(x)) = F^{\uparrow,}{}_j{}^{\mathcal{I}_\eta}[g]$. 因此 $F^{\uparrow,}{}_j{}^{\theta}[f] \leq F^{\uparrow,}{}_j{}^{\theta}[g]$。类似地，我们可以证明 $F^{\downarrow,}{}_j{}^{\mathcal{I}_\theta}[f] \leq F^{\downarrow,}{}_j{}^{\mathcal{I}_\theta}[g]$。

命题3.10 设 θ 和 η 分别是 EP-重叠映射和 EP-分组映射。那么对所有 $u \in L$, u $f \in L^X$

(i) $F_j^{\uparrow,\theta}[\theta(\boldsymbol{u},f)] = \theta(a, F_j^{\uparrow,\theta}[f]), F_j^{\downarrow,\eta}[\eta(\boldsymbol{u},f)] = \eta(a, F_j^{\downarrow,\eta}[f])$, *and*

(ii) $F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[\mathcal{I}_\eta(\boldsymbol{u},f)] = \mathcal{I}_\eta(a, F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f]), F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[\mathcal{I}_\theta(\boldsymbol{u},f)] = \mathcal{I}_\theta(a, F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f])$.

证明：(i) 设 $\mathrm{u}\ f \in L^X$。那么

$$\begin{aligned} F_j^{\uparrow,\theta}[\theta(\mathbf{u},f)] &= \bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x), \theta(\mathbf{u},f)(x)) = \bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x), \theta(u, f(x))) \\ &= \bigvee_{x\in X} \theta(u, \theta(A_j(x), f(x))) = \theta(u, \bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x), f(x))) \\ &= \theta(u, F_j^{\uparrow,\theta}[f]). \end{aligned}$$

因此 $F^{\uparrow,\ \theta}_{\ j}[\theta(\mathrm{u}\ f)] = \theta(u, F^{\uparrow,\ \theta}_{\ j}[f])$。类似地，我们可以证明 $F^{\downarrow,\ \eta}_{\ j}[\eta(\mathrm{u}\ f)] = \eta(u, F^{\downarrow,\ \eta}_{\ j}[f])$。

(ii) 设 $u \in L$ 且 $\mathrm{u}\ f \in L^X$。则

$$\begin{aligned} F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f] &= \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)), \mathcal{I}_\eta(\mathbf{u},f)(x)) = \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)), \mathcal{I}_\eta(u, f(x))) \\ &= \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(u, \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)), f(x))) = \mathcal{I}_\eta(u, \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)), f(x))) \\ &= \mathcal{I}_\eta(u, F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f]). \end{aligned}$$

因此 $F^{\uparrow,\ \mathcal{I}_\eta}_{\ j}[\mathcal{I}_\eta(\mathrm{u}\ f)] = \mathcal{I}_\eta(u, F^{\uparrow,\ \mathcal{I}_\eta}_{\ j}[f])$。类似地，我们可以证明 $F^{\downarrow,\ \mathcal{I}_\theta}_{\ j}[\mathcal{I}_\theta(\mathrm{u}\ f)] = \mathcal{I}_\theta(u, F^{\downarrow,\ \mathcal{I}_\theta}_{\ j}[f])$。

命题3.11 设 $\mathcal{P}$是 X的 L-模糊划分。则对于所有 $\mathrm{u}\ f \in L^X, \{f_j\colon\ j \in J\} \subseteq L^X$

(i) $F_j^{\uparrow,\theta}[\bigvee_{k\in J} f_k] = \bigvee_{k\in J} F_j^{\uparrow,\theta}[f_k], F_j^{\downarrow,\eta}[\bigwedge_{k\in J} f_k] = \bigwedge_{k\in J} F_j^{\downarrow,\eta}[f_k]$, *and*

(ii) $F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[\bigvee_{k\in J} f_k] = \bigvee_{k\in J} F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f_k], F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[\bigwedge_{k\in J} f_k] = \bigwedge_{k\in J} F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f_k]$.

证明：(i) 设 $\{f_k\colon\ k \in J\} \subseteq L^X$。则 $F^{\uparrow,\ \theta}_{\ j}[\bigvee_{k\in} f_k] = \bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x), \bigvee_{k\in J} f_k(x))$ $= \bigvee_{x\in X} \bigvee_{k\in J} \theta(A_j(x), f_k(x)) = \bigvee_{k\in J} F^{\uparrow,\ \theta}_{\ k}[f_k]$. 因此 $F^{\uparrow,\ \theta}_{\ j}[\bigvee_{k\in} f_k] = \bigvee_{k\in J} F^{\uparrow,\ \theta}_{\ k}[f_k]$。类似地，我们得到 $F^{\downarrow,\ \eta}_{\ j}[\bigwedge_{j\in J} f_k] = \bigwedge_{j\in J} F^{\downarrow,\ \eta}_{\ j}[f_k]$。

(ii) 令 $\{f_k\colon\ k \in J\} \subseteq L^X$. 则 $F^{\uparrow,\ \mathcal{I}_\eta}_{\ j}[\bigvee_{k\in} f_k] = \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)), \bigvee_{k\in J} f_k(x)) =$ $\bigvee_{x\in X} \bigvee_{k\in J} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)), f_k(x)) = \bigvee_{k\in J} F^{\uparrow,\ \mathcal{I}_\eta}_{\ k}[f_k]$. 因此 $F^{\uparrow,\ \mathcal{I}_\eta}_{\ j}[\bigvee_{k\in} f_k] = \bigvee_{k\in J} F^{\uparrow,\ \mathcal{I}_\eta}_{\ k}[f_k]$. 类似地，我们得到 $F^{\downarrow,\ \mathcal{I}_\theta}_{\ j}[\bigwedge_{j\in J} f_k] = \bigwedge_{j\in J} F^{\downarrow,\ \mathcal{I}_\theta}_{\ j}[f_k]$.

命题3.12 令 $\mathcal{P}$ 为 X 的一个 L-模糊划分。则对于 $u \in L$,$\mathrm{u} \in L^X$

(i) $F_j^{\uparrow,\theta}[\boldsymbol{u}] = \theta(1,u), F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[\boldsymbol{u}] = \mathcal{I}_\theta(1,u)$, *and*

(ii) $F_j^{\downarrow,\eta}[\boldsymbol{u}] = \eta(\bigwedge_{x\in X}(\mathbf{N}(A_j(x)),u), F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[\boldsymbol{u}] = \mathcal{I}_\eta(\bigwedge_{x\in X}(\mathbf{N}(A_j(x)),u)$. *In addition, for a strict negator* $\mathbf{N}$, $F_j^{\downarrow,\eta}[\boldsymbol{u}] = \eta(0,u), F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\eta}[\boldsymbol{u}] = \mathcal{I}_\eta(0,u)$.

证明：(i) 设 $u \in L$ and $\mathrm{u} \in L^X$。则 $F^{\uparrow}{}_{,j}{}^{\theta}[\mathrm{u}] = \bigvee_{x\in X}\theta(A_j(x),\mathrm{u}(x)) = \theta(\bigvee_{x\in X}A_j(x)\ a) = \theta(1,u)$。因此 $F^{\uparrow}{}_{,j}{}^{\theta}[\mathrm{u}] = \theta(1,u)$。类似地，我们可以证明 $F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\mathcal{I}_\theta}[\mathrm{u}] = \mathcal{I}_\theta(1,u)$。

(ii) 设 $u \in L$ and $\mathrm{u} \in L^X$。则 $F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\eta}[\mathrm{u}] = \bigwedge_{x\in X}\eta(\mathrm{N}(A_j(x)),\mathrm{u}(x)) = \eta(\bigwedge_{x\in X}\mathrm{N}(A_j(x))\ a)$。因此 $F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\eta}[\mathrm{u}] = \eta(\bigwedge_{x\in X}\mathrm{N}(A_j(x))\ a)$。现在，设 N 为严格否定子。则我们得到 $F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\eta}[\mathrm{u}] = \eta(\bigwedge_{x\in X}\mathrm{N}(A_j(x))\ a) = \eta(\mathrm{N}(\bigvee_{x\in X}A_j(x))\ a) = \eta(\mathrm{N}(1)\ a) = \eta(0,u)$。因此 $F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\eta}[\mathrm{u}] = \eta(0,u)$。类似地，我们可以证明 $F^{\uparrow}{}_{,j}{}^{\mathcal{I}_\eta}[\mathrm{u}] = \mathcal{I}_\eta(\bigwedge_{x\in X}\mathrm{N}(A_j(x))\ a)$，并且对于严格否定子 N，$\mathcal{I}_\eta[\mathrm{u}] = \mathcal{I}_\eta(0,u)$。

推论3.2 设命题3.12的条件成立，且1和0分别是 θ、η的中性元。则对所有 $f \in L^X$

(i) $F_j^{\uparrow,\theta}[\boldsymbol{u}] = u, F_j^{\downarrow,\eta}[\boldsymbol{u}] = u$, *and*

(ii) $F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[\boldsymbol{u}] = u, F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[\boldsymbol{u}] = u$.

证明：设1和0分别是 θ、η的中性元。则有，$\theta(1,u) = u, \eta(0,u) = u, \mathcal{I}_\eta(0,u) = u$ 且 $\mathcal{I}_\theta(1,u) = u$。此外，由命题3.12可得

(i) $F_j^{\uparrow,\theta}[\mathbf{u}] = u, F_j^{\downarrow,\eta}[\mathbf{u}] = u$, and

(ii) $F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[\mathbf{u}] = u, F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{u}] = u$.

由命题3.12可得如下结果。

命题3.13 设 $\mathcal{P}$ 是 X的一个 L-模糊划分。则对所有 $u \in L$,$\mathrm{u} \in L^X$

(i) $F_j^{\downarrow,\eta}[\boldsymbol{u}] = \eta(0,u)$ *iff* $F_j^{\downarrow,\eta}[0_X] = 0$, *and*

(ii) $F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[\boldsymbol{u}] = \mathcal{I}_\eta(0,u)$ *iff* $F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[1_X] = 1$.

证明：(i) 令 $F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\eta}[\mathrm{u}] = \eta(0,u)\ \forall u \in L$，$\mathrm{u} \in L^X$。则假设 $\mathrm{u} = 0_X$，有 $F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\eta}[0_X] = \eta(0,0) = 0$。因此 $F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\eta}[0_X] = 0$。反之，根据命题 3.9(ii)，有 $F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\eta}[0_X] = 0 \Leftrightarrow \eta(\bigwedge_{x\in X}(\mathrm{N}(A_j(x)),0) = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_{x\in X}(\mathrm{N}(A_j(x)) = 0$.因此 $F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\eta}[\mathrm{u}] = \eta(\bigwedge_{x\in X}(\mathrm{N}(A_j(x))\ u) = \eta(0,u)$。因此 $F^{\downarrow}{}_{,j}{}^{\eta}[\mathrm{u}] = \eta(0,u)$。

(ii) 令 $F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}_j[\mathrm{u}] = \mathcal{I}_\eta(0,u)\ \forall u \in L,\ \mathrm{u} \in L^X$。则假设 $\mathrm{u} = 1_X$，有 $F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}_j[1_X] = \mathcal{I}_\eta(0,1) = 1$。因此 $F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}_j[1_X] = 1$。反之，根据命题 3.9(ii)，有 $F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}_j[1_X] = 1 \Leftrightarrow \mathcal{I}_\eta(\bigwedge_{x\in X}(\mathrm{N}(A_j(x)),1) = 1 \Leftrightarrow \bigwedge_{x\in X}(\mathrm{N}(A_j(x)) = 0$.因此 $F^{\downarrow,\eta}_j[\mathrm{u}] = \mathcal{I}_\eta(\bigwedge_{x\in X}(\mathrm{N}(A_j(x)) u) = \mathcal{I}_\eta(0,u)$。因此 $F^{\downarrow,\eta}_j[\mathrm{u}] = \mathcal{I}_\eta(0,u)$。

以下结果旨在刻画原始 L-模糊集的直接 F-变换的各个分量，因为其下均值和上均值分别给出某些集合的最大元素和最小元素。

命题 3.14 设 $\mathcal{P}$ 是 X 和 $f \in L^X$ 的一个 L-模糊划分。那么

(i) f 的 $F^{\uparrow,\theta}$-变换的 j^{th} 分量是集合 $U_j = \{u \in L\colon \theta(A_j(x)\ f(x)) \le u, \forall x \in X\}, j \in J$ 的最小元素；(ii) f 的 $F^{\downarrow,\eta}$-变换的 j^{th} 分量是集合 $V_j = \{v \in L\colon v \le \eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x))\ \forall x \in X\}, j \in J.$ 的最大元素。

证明：(i) 为证明此结论，我们需要证明 $F^{\uparrow,\theta}_j[f] \in U_j$ 和 $F^{\uparrow,\theta}_j[f] \le u$。由定义 3.2(i) 可得 $F^{\uparrow,\theta}_j[f] = \bigvee_{x\in X}\theta(A_j(x)\ f(x)) \ge \theta(A_j(x)\ f(x))$。因此 $F^{\uparrow,\theta}_j[f] \in U_j$。现在，设 $u \in L, x \in X$。那么，由给定条件可得 $\theta(A_j(x)\ f(x)) \le u \Rightarrow \bigvee_{x\in X}\theta(A_j(x)\ f(x)) \le u \Rightarrow F^{\uparrow,\theta}_j[f] \le u.$。因此，$F^{\uparrow,\theta}$- 变换的 j^{th} 分量是集合 U_j 的最小元素。

（ii）为证明这一点，我们需要证明 $F^{\downarrow,\eta}_j[f] \in V_j$ 以及 $v \le F^{\downarrow,\eta}_j[f]$。根据定义 3.2(ii)，可得 $F^{\downarrow,\eta}_j[f] = \bigwedge_{x\in X}\eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x)) \le \eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x))$。因此，$F^{\downarrow,\eta}_j[f] \in V_j$。现在，令 $v \in L、x \in X$。然后由给定条件 $v \le \eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x)) \Rightarrow v \le \bigwedge_{x\in X}\eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x)) \Rightarrow v \le F^{\downarrow,\eta}_j[f].$因此，$F^{\downarrow}$的 j^{th} 分量的 F-变换是集合 V_j 的最大元素。

命题 3.15 设 $\mathcal{P}$ 是 X 的一个 L-模糊划分，并且 $f \in L^X$。则

（i） f的 $F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}$-变换的 j^{th} 分量是集合 $U_j = \{u \in L\colon \mathcal{I}_\eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x)) \le u、\ \forall x \in X\}、\ j \in J$ 中的最小元素；以及（ii） f 的 $F^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}$- 变换的 j^{th} 分量是集合$V_j = \{v \in L\colon\ v \le \mathcal{I}_\theta(A_j(x)\ f(x))\ \forall x \in X\}、\ j \in J.$ 中的最大元素

证明：(i) 为证明这一点，我们需要证明 $F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}_j[f] \in U_j$和 $F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}_j[f] \le u$。由定义 3.2(i) 可知 $F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}_j[f] = \bigvee_{x\in X}\mathcal{I}_\eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x)) \ge \mathcal{I}_\eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x))$。因此 $F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}_j[f] \in U_j$。现在，令 $u \in L, x \in X$。根据给定条件，有 $\mathcal{I}_\eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x)) \le u \Rightarrow \bigvee \mathcal{I}_\eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x)) \le u \Rightarrow_{x\in X}$

$F^{\uparrow,j}{}^{\mathcal{I}_\eta}[f] \leq u.$因此， $F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}$-变换的 j^{th}分量是集合 U_j的最小元素。

(ii) 为证明这一点，我们需要证明 $F^{\downarrow}$、$_j{}^{\mathcal{I}_\theta}[f] \in V_j$以及 $v \leq F^{\downarrow}$、$_j{}^{\mathcal{I}_\theta}[f]$。由定义 3.2(ii) 可得， $F^{\downarrow}(A_j(x)\ f(x))_j{}^{\mathcal{I}_\theta}[f] = \bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta \leq \mathcal{I}_\theta(A_j(x)\ f(x))$。因此， $F^{\downarrow}$、$_j{}^{\mathcal{I}_\theta}[f] \in V_j$。现在，令 $v \in L$、$x \in X$。根据给定条件，$v \leq \mathcal{I}_\theta(A_j(x)\ f(x)) \Rightarrow v \leq \bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta\, A_j(x)\ f(x)) \Rightarrow v \leq F^{\downarrow}$、$_j{}^{\mathcal{I}_\theta}[f].$。因此， $F^{\downarrow}$的 j^{th}分量 $\mathcal{I}_\theta$-变换是集合 V_j的最大元素。

命题3.16 设命题3.14的条件成立， θ 和 η 分别为收缩重叠映射和收缩分组映射。则对于所有 $u \in U_j$、$v \in V_j$

(i) $\bigwedge \mathcal{I}_\theta(\theta(A_j(x)\ f(x))\ u)) = 1$且 j^{th} $F^{\uparrow}$的分量，$^\theta$-变换是$_{x\in X}$最小的此类 u，且 (ii) $\bigwedge \mathcal{I}_\eta(\eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x))\ v) = 0$且 j^{th} $F^{\downarrow}$的分量，$^\eta$-变换是$_{x\in X}$最大的此类 v。

证明：(i) 设 $j \in J$。则对所有 $x \in X$， $\theta(A_j(x)\ f(x)) \leq u$，或者说，$\bigwedge \mathcal{I}_\theta(\theta(A_j(x)\ f(x))\ u) = 1$，因为 $\mathcal{I}_\theta$是一个 IP-剩余蕴涵算子。$_{x\in X}$

(ii) 设 $j \in J$。则对所有 $x \in X$， $\eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x)) \geq v$，或者说，$\bigwedge \mathcal{I}_\eta(\eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x))\ v) = 0$，因为 $\mathcal{I}_\eta$是一个 IP-余剩余蕴涵算子。$_{x\in X}$

命题 3.17 设命题 3.15 的条件成立， θ 和 η 分别为收缩重叠映射和收缩分组映射。则对所有 $u \in U_j$、$v \in V_j$

(i) $\bigwedge \mathcal{I}_\eta(u, \mathcal{I}_\eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x))) = 0$和 j^{th}的 $F^{\uparrow,\ \mathcal{I}_\eta}$-变换是这样的 u中的最小者，且 (ii) $\bigwedge \mathcal{I}_\theta(v, \mathcal{I}_\theta(A_j(x)\ f(x))) = 1$和 j^{th}的 $F^{\downarrow,\ \mathcal{I}_\theta}$-变换是这样的 v中的最大者。

证明：(i) 设 $j \in J$。则对所有 $x \in X$、 $\mathcal{I}_\eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x)) \leq u$，或者说，$\bigwedge \mathcal{I}_\eta(u, \mathcal{I}_\eta(\mathrm{N}(A_j(x))\ f(x))) = 0$，因为 $\mathcal{I}_\eta$是一个 IP-余剩余蕴涵算子。$_{x\in X}$

(ii) 令 $j \in J$。则对于所有 $x \in X$，$\mathcal{I}_\theta(A_j(x)\ f(x)) \geq v$，或者说，$\bigwedge \mathcal{I}_\theta(v, \mathcal{I}_\theta(A_j(x)\ f(x))) = 1$，因为 $\mathcal{I}_\theta$ 是一个 IP-剩余蕴涵算子。$_{x\in X}$

4 F逆变换

在本节中，我们分别介绍利用重叠映射与分组映射、剩余与余剩余蕴涵算子在 L 上计算的逆 F-变换的概念。进一步地，我们讨论它们的性质。现在，我们从以下内容开始。

定义 4.1 设 $(X,\mathcal{P})$ 是一个空间，具有 L-模糊划分 $\mathcal{P}$和 $f\in L^X$，其中$\mathcal{P}=\{A_j\in L^X: j\in J\}$。进一步地，设 $F^{\uparrow,\ _j\ \theta}[f]$和 $F^{\downarrow,\ _j\ \eta}[f]$分别是利用重叠映射 θ 在 $\mathcal{P}$ 上计算的 j^{th}分量$F^{\uparrow,\ \theta}$-变换，以及利用分组映射 η 在 $\mathcal{P}$ 上计算的 f $F^{\downarrow,\ \eta}$-变换的 j^{th}分量。则

(i) 在模糊划分 $\mathcal{P}$ 上使用剩余蕴涵 $\mathcal{I}_\theta$ 算子计算得到的 f 的逆（上） $F^{\uparrow,\ \theta}$-变换是一个映射 $\hat{}f^{\uparrow,\ \mathcal{I}_\theta}$： $L^X\to L^X$，满足

$$\hat{f}^{\uparrow,\mathcal{I}_\theta}(x)=\bigwedge_{j\in J}\mathcal{I}_\theta(A_j(x),F_j^{\uparrow,\theta}[f]),$$

(ii) 在模糊划分 $\mathcal{P}$ 上使用重叠映射 θ 计算得到的 f 的逆（下） $F^{\downarrow,\ \mathcal{I}_\theta}$-变换是一个映射 $\hat{}f^{\downarrow,\ \theta}$： $L^X\to L^X$，满足

$$\hat{f}^{\downarrow,\theta}(x)=\bigvee_{j\in J}\theta(A_j(x),F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f]),$$

(iii) 在模糊划分 $\mathcal{P}$ 上使用分组映射 η 计算得到的 f 的逆（上） $F^{\uparrow,\ \mathcal{I}_\eta}$-变换是一个映射 $\hat{}f^{\uparrow,\ \eta}$： $L^X\to L^X$，满足

$$\hat{f}^{\uparrow,\eta}=\bigwedge_{j\in J}\eta(\mathbf{N}(A_j(x)),F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f]),\ and$$

(iv) 在模糊划分 $\mathcal{P}$ 上使用余剩余蕴涵算子 $\mathcal{I}_\eta$ 计算得到的 f 的逆（下） $F^{\downarrow,\ \eta}$-变换是一个映射 $\hat{}f^{\downarrow,\ \mathcal{I}_\eta}$： $L^X\to L^X$，满足

$$\hat{f}^{\downarrow,\mathcal{I}_\eta}(x)=\bigvee_{j\in J}\mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)),F_j^{\downarrow,\eta}[f]).$$

使用 t-范数和 R-蕴涵算子计算得到的逆 F-变换，以及在[22, 25, 34]中提出的逆 F-变换，分别是关于 θ 和 $\mathcal{I}_\theta$所提出逆变换的特殊情形。在上述介绍的逆 F-变换中，$\hat{}f^{\downarrow,\ \eta}$、$\hat{}f^{\downarrow,\ \mathcal{I}_\eta}$ 是新的定义。

例 4.1 接续例 3.1，关于$\mathcal{I}_{\theta_M}$、θ_M、η_M、$\mathcal{I}_{\eta_M}$的逆变换 F-变换分别为 $\hat{}f^{\uparrow,\ \mathcal{I}_{\theta_M}}=\frac{q}{x_1}+\frac{u}{x_2}+\frac{u}{x_3}$、$\hat{}f^{\downarrow,\ \theta_M}=\frac{p}{x_1}+\frac{p}{x_2}+\frac{p}{x_3}$、$\hat{}f^{\uparrow,\eta_M}=\frac{r}{x_1}+\frac{r}{x_2}+\frac{r}{x_3}$、$\hat{}f^{\downarrow,\ \mathcal{I}_{\eta_M}}=\frac{0}{x_1}+\frac{u}{x_2}+\frac{t}{x_3}$.

备注 4.1 (i) 如果 $L=[0,1]$、$\mathbf{N}=\mathbf{N}_S$、$\theta=\theta_M$ 和 $\eta=\eta_M$，那么逆变换F-变换 $\hat{}f^{\uparrow,\ \mathcal{I}_\theta}$、$\hat{}f^{\downarrow,\ \theta}$、$\hat{}f^{\uparrow,\ \eta}$ 和 $\hat{}f^{\downarrow,\ \mathcal{I}_\eta}$ 变为如下形式：

$$\begin{aligned}
\hat{f}^{\uparrow,\mathcal{I}_{\theta_M}}(x) &= \bigwedge_{j\in J}\mathcal{I}_{\theta_M}(A_j(x),F_j^{\uparrow,\theta_M}[f]),\\
\hat{f}^{\downarrow,\theta_M}(x) &= \bigvee_{j\in J}(A_j(x)\wedge F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_{\theta_M}}[f]),\\
\hat{f}^{\uparrow,\eta_M}(x) &= \bigwedge_{j\in J}((1-A_j(x))\vee F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_{\eta_M}}[f]),\ and\\
\hat{f}^{\downarrow,\mathcal{I}_{\eta_M}}(x) &= \bigvee_{j\in J}\mathcal{I}_{\eta_M}((1-A_j(x)),F_j^{\downarrow,\eta_M}[f]),\ \forall\, x\in X, f\in L^X.
\end{aligned}$$

显然， $f^{\uparrow,\mathcal{I}_{\theta_M}}$ 和 $f^{\downarrow,\theta_M}$ 分别与 *[22, 25, 34],* 中提出的逆上变换和逆下F-变换的特殊情形重合。

(ii) 如果 $L=[0,1]$、$\theta=\theta_M$ 和 $\eta=\eta_M$，则逆变换 $\hat{}f^{\uparrow,\mathcal{I}_\theta}$、$\hat{}f^{\downarrow,\theta}$、$\hat{}f^{\uparrow,\eta}$ 和 $\hat{}f^{\downarrow,\mathcal{I}_\eta}$ 变为如下形式:

$$\begin{aligned}
\hat{f}^{\uparrow,\mathcal{I}_{\theta_M}}(x) &= \bigwedge_{j\in J}\mathcal{I}_{\theta_M}(A_j(x),F_j^{\uparrow,\theta_M}[f]),\\
\hat{f}^{\downarrow,\theta_M}(x) &= \bigvee_{j\in J}(A_j(x)\wedge F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_{\theta_M}}[f]),\\
\hat{f}^{\uparrow,\eta_M}(x) &= \bigwedge_{j\in J}(\mathbf{N}(A_j(x))\vee F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_{\eta_M}}[f]),\ \textit{and}\\
\hat{f}^{\downarrow,\mathcal{I}_{\eta_M}}(x) &= \bigvee_{j\in J}\mathcal{I}_{\eta_M}(\mathbf{N}(A_j(x)),F_j^{\downarrow,\eta_M}[f]),\ \forall\, x\in X, f\in L^X.
\end{aligned}$$

显然， $f^{\uparrow,\mathcal{I}_{\theta_M}}$ 和 $f^{\downarrow,\theta_M}$ 分别与 *[22, 25, 34],* 中提出的逆上变换和逆下F-变换的特殊情形相重合。

(iii) 如果 $L=[0,1]$、$\theta=\mathcal{T}$ 和 $\eta=\mathcal{S}$，其中 $\mathcal{T}$、$\mathcal{S}$ 分别是没有非平凡零因子的连续 *t*-范数和 *t*-余范数，则逆变换 $\hat{}f^{\uparrow,\mathcal{I}_\theta}$、$\hat{}f^{\downarrow,\theta}$、$\hat{}f^{\uparrow,\eta}$ 和 $\hat{}f^{\downarrow,\mathcal{I}_\eta}$ 变为如下形式:

$$\begin{aligned}
\hat{f}^{\uparrow,\mathcal{I}_{\mathcal{T}}}(x) &= \bigwedge_{j\in J}\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A_j(x),F_j^{\uparrow,\mathcal{T}}[f]),\\
\hat{f}^{\downarrow,\mathcal{T}}(x) &= \bigvee_{j\in J}\mathcal{T}(A_j(x),F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_{\mathcal{T}}}[f]),\\
\hat{f}^{\uparrow,\mathcal{S}}(x) &= \bigwedge_{j\in J}\mathcal{S}(\mathbf{N}(A_j(x)),F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_{\mathcal{S}}}[f]),\ \textit{and}\\
\hat{f}^{\downarrow,\mathcal{I}_{\mathcal{S}}}(x) &= \bigvee_{j\in J}\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(\mathbf{N}(A_j(x)),F_j^{\downarrow,\mathcal{S}}[f]),\ \forall\, x\in X, f\in L^X.
\end{aligned}$$

显然， $f^{\uparrow,\mathcal{I}_{\mathcal{T}}}$ 和 $f^{\downarrow,\mathcal{T}}$ 分别与使用 *t*-范数和 *R*-蕴涵算子计算得到的、 *[22, 25, 34],* 中提出的逆上变换和逆下 F- 变换相重合。

由上可知，现有的一些逆 F-变换是所提出的逆 F-变换的特例。其中，一些逆 F-变换与所提出的逆 F-变换一致，而所提出的一些逆 F-变换与现有逆 F-变换的特例一致。也就是说，所提出的逆 F-变换比现有的一些逆变换更具一般性。

下面的两个结果旨在使逆 F-变换逼近原始的 L-模糊集。

命题 4.1 设 $\mathcal{P}$ 是 X 的 L-模糊划分。则对于所有 $x\in X$、$f\in L^X$

(i) $\hat{f^{\uparrow,\mathcal{I}_\theta}}(x) \geq f(x)$, 以及

(ii) $\hat{f^{\downarrow,\ \theta}}(x) \leq f(x)$。

证明：（i）设 $x \in X$、 $f \in L^X$。则由定义 4.1

$$\begin{aligned}\hat{f}^{\uparrow,\mathcal{I}_\theta}(x) &= \bigwedge_{j\in J} \mathcal{I}_\theta(A_j(x), F_j^{\uparrow,\theta}[f]) = \bigwedge_{j\in J} \mathcal{I}_\theta(A_j(x), \bigvee_{y\in X} \theta(A_j(y), f(y))) \\ &\geq \bigwedge_{j\in J} \mathcal{I}_\theta(A_j(x), \theta(A_j(x), f(x))) \geq f(x).\end{aligned}$$

因此 $\hat{}\ f^{\uparrow,\mathcal{I}_\theta}(x) \geq f(x)$。

(ii) 设 $x \in X$ 和 $f \in L^X$。那么根据定义 4.1

$$\begin{aligned}\hat{f}^{\downarrow,\theta}(x) &= \bigvee_{j\in J} \theta(A_j(x), F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f]) = \bigvee_{j\in J} \theta(A_j(x), \bigwedge_{y\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(y), f(y))) \\ &\leq \bigvee_{j\in J} \theta(A_j(x), \mathcal{I}_\theta(A_j(x), f(x))) \leq f(x).\end{aligned}$$

因此 $\hat{}\ f^{\downarrow,\theta}(x) \leq \mathcal{I}_\theta(1, f(x))$。

命题 4.2 设 $\mathcal{P}$ 是 X的一个 L-模糊划分。那么对于所有 $x \in X$、 $f \in L^X$

(i) $\hat{f}^{\uparrow,\eta}(x) \geq f(x)$, *and*

(ii) $\hat{f}^{\downarrow,\mathcal{I}_\eta}(x) \leq \mathcal{I}_\eta(0, f(x))$.

证明：(i) 令 $x \in X$、 $f \in L^X$。由定义 4.1

$$\begin{aligned}\hat{f}^{\uparrow,\eta}(x) &= \bigwedge_{j\in J} \eta(\mathbf{N}(A_j(x)), F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f]) = \bigwedge_{j\in J} \eta(\mathbf{N}(A_j(x)), \bigvee_{y\in X} \mathcal{I}_\eta((\mathbf{N}(A_j(y)), f(y))) \\ &\geq \bigwedge_{j\in J} \eta(\mathbf{N}(A_j(x)), \mathcal{I}_\eta((\mathbf{N}(A_j(x)), f(x))) \geq f(x).\end{aligned}$$

因此 $\hat{}\ f^{\uparrow,\ \eta}(x) \geq f(x)$。

(ii) 令 $x \in X$ 和 $f \in L^X$。由定义 4.1

$$\begin{aligned}\hat{f}^{\downarrow,\mathcal{I}_\eta}(x) &= \bigvee_{j\in J} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)), F_j^{\downarrow,\eta}[f]) = \bigvee_{j\in J} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)), \bigwedge_{y\in X} \eta(\mathbf{N}(A_j(y)), f(y))) \\ &\leq \bigvee_{j\in J} \mathcal{I}_\eta(A_j(x), \eta(\mathbf{N}(A_j(x)), f(x))) \leq f(x).\end{aligned}$$

因此 $\hat{}\ f^{\downarrow,\ \mathcal{I}_\eta}(x) \leq f(x)$。

下面，我们分别证明 L-模糊集 f 与逆 F-变换具有相同的 F-变换。因此，逆 F-变换的逆 F-变换分别再次是逆 F-变换。这可由以下结论直接推出。

命题 4.3 设 $\mathcal{P}$ 是 X的一个 L-模糊划分。则对于所有 $j \in J$、 $f \in L^X$

(i) $F_j^{\uparrow,\theta}[f] = \bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x), \hat{f}^{\uparrow,\mathcal{I}_\theta}(x))$, *and*

(ii) $F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f] = \bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x), \hat{f}^{\downarrow,\theta}(x))$.

证明：（i）由命题 4.1(i)，$\hat{}\, f^{\uparrow,\,\mathcal{I}_\theta}(x) \geq f(x)\ \forall x \in X$。根据定义 3.2 可得

$$\begin{aligned} F_j^{\uparrow,\theta}[f] = \bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x), f(x)) &\leq \bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x), \hat{f}^{\uparrow,\mathcal{I}_\theta}(x)) \text{ and} \\ \theta(A_j(x), \hat{f}^{\uparrow,\mathcal{I}_\theta}(x)) &= \theta(A_j(x), \bigwedge_{k\in J} \mathcal{I}_\theta(A_k(x), F_k^{\uparrow,\theta}[f]) \\ &\leq \theta(A_j(x), \mathcal{I}_\theta(A_j(x), F_j^{\uparrow,\theta}[f]) \\ &\leq F_j^{\uparrow}[f]. \end{aligned}$$

因此 $\bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x), \hat{}\, f^{\uparrow,\mathcal{I}_\theta}(x)) \leq F^{\uparrow,\,\theta}_{,j}[f]$或者 $F^{\uparrow,\,\theta}_{,j}[f] = \bigvee_{x\in X} \theta(A_j(x), \hat{}\, f^{\uparrow,\mathcal{I}_\theta}(x))$.

(ii) 根据命题 4.1(ii)，$\hat{}\, f^{\downarrow}(x) \leq f(x)\ \forall x \in X$。根据定义 3.2,

$$\begin{aligned} F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f] = \bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x), f(x)) &\geq \bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x), \hat{f}^{\downarrow,\theta}(x)) \text{ and} \\ \mathcal{I}_\theta(A_j(x), \hat{f}^{\downarrow,\theta}(x)) &= \mathcal{I}_\theta(A_j(x), \bigvee_{k\in J} \theta(A_k(x), F_k^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f])) \\ &\geq \mathcal{I}_\theta(A_j(x), \theta(A_j(x), F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f])) \\ &\geq F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f]. \end{aligned}$$

因此 $\bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_j(x), \hat{}\, f^{\downarrow,\theta}(x)) \geq F^{\downarrow,\,\mathcal{I}_\theta}_{,j}[f]$或 $F^{\downarrow,\,\mathcal{I}_\theta}_{,j}[f] = \bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}(A_j(x), \hat{}\, f^{\downarrow,\theta}(x))$。

命题 4.4 设 $\mathcal{P}$ 是 X 的 L-模糊划分。那么对于所有 $j \in J$、 $f \in L^X$

(i) $F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f] = \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)), \hat{f}^{\uparrow,\eta}(x))$, *and*

(ii) $F_j^{\downarrow,\eta}[f] = \bigwedge_{x\in X} \eta(\mathbf{N}(A_j(x)), \hat{f}^{\downarrow,\mathcal{I}_\eta}(x))$.

证明：(i) 由命题 4.2(i)，$\hat{}\, f^{\uparrow,\eta}(x) \geq f(x)\ \forall x \in X$。由定义 3.2 可得

$$\begin{aligned} F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f] = \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)), f(x)) &\leq \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)), \hat{f}^{\uparrow,\eta}(x)) \text{ and} \\ \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)), \hat{f}^{\uparrow,\eta}(x)) &= \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)), \bigwedge_{k\in J} \eta(\mathbf{N}(A_k(x)), F_k^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f])) \\ &\leq \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)), \eta(\mathbf{N}(A_j(x)), F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f])) \\ &\leq F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f]. \end{aligned}$$

因此 $\bigvee_{x\in X}\mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)),\hat{}f^{\uparrow,\eta}(x)) \le F^{\uparrow}_{,j}{}^{\mathcal{I}_\eta}[f]$ 或 $F^{\uparrow}_{,j}{}^{\mathcal{I}_\eta}[f]=\bigvee_{x\in X}\mathcal{I}_\eta(A_j(x),\hat{}f^{\uparrow,\eta}(x))$。(ii) 由命题 4.2(ii), $\hat{}f^{\downarrow,\mathcal{I}_\eta}(x) \le f(x)\ \forall x\in X$。由定义 3.2 可得

$$\begin{aligned} F_j^{\downarrow,\eta}[f]=\bigwedge_{x\in X}\eta(\mathbf{N}(A_j(x)),f(x)) &\ge \bigwedge_{x\in X}\eta(\mathbf{N}(A_j(x)),\hat{f}^{\downarrow,\mathcal{I}_\eta}(x)) \text{ and}\\ \eta(\mathbf{N}(A_j(x)),\hat{f}^{\downarrow,\mathcal{I}_\eta}(x)) &= \eta(\mathbf{N}(A_j(x)),\bigvee_{k\in J}\mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_k(x)),F_k^{\downarrow,\eta}[f]))\\ &\ge \eta(\mathbf{N}(A_j(x)),\mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}(A_j(x)),F_j^{\downarrow,\eta}[f]))\\ &\ge F_j^{\downarrow,\eta}[f]. \end{aligned}$$

因此 $\bigwedge_{x\in X}\eta(\mathbf{N}(A_j(x)),\hat{}f^{\downarrow,\mathcal{I}_\eta}(x)) \ge F^{\downarrow}_{,j}{}^{\eta}[f]$ 或 $F^{\downarrow}_{,j}{}^{\eta}[f]=\bigwedge_{x\in X}\mathcal{I}(A_j(x),\hat{}f^{\downarrow,\mathcal{I}_\eta}(x))$。

5 F-变换的公理化方法

在 [16], 中，详细研究了采用 t-范数和R-蕴涵算子计算的直接 F-变换的公理化方法。本节重点讨论分别关于 θ、η、$\mathcal{I}_\eta$、$\mathcal{I}_\theta$，并由一些独立公理刻画的直接 F-变换的公理化特征。此外，我们首先给出每个直接 F-变换所满足的公理，这些公理保证存在一个能够产生相同F-变换的 L-模糊划分。现在，我们从以下内容开始。

对于任意 $f\in L^X$ 以及一个 L-模糊划分 $\mathcal{P}$，可以看出，直接 $F^{\uparrow,\theta}$、$F^{\downarrow,\eta}$、$F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}$以及 $F^{\uparrow,\mathcal{I}_\theta}$- 变换诱导出映射 $F^{\uparrow}_{,\mathcal{P}}{}^{\theta}$、$F^{\downarrow}_{,\mathcal{P}}{}^{\eta}$、$F^{\uparrow}_{,\mathcal{P}}{}^{\mathcal{I}_\eta}$、$F^{\uparrow}_{,\mathcal{P}}{}^{\mathcal{I}_\theta}$: $L^X\to L^J$ 使得

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{P}}^{\uparrow,\theta}[f](j) &= F_j^{\uparrow,\theta}[f],\ F_{\mathcal{P}}^{\downarrow,\eta}[f](j)=F_j^{\downarrow,\eta}[f],\\ F_{\mathcal{P}}^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f](j) &= F_j^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f],\ F_{\mathcal{P}}^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f](j)=F_j^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}[f], \text{ respectively.} \end{aligned}$$

现在，我们分别引入关于重叠映射与分组映射 θ 和 η（由分组映射与重叠映射 η 和 θ 诱导的余剩余蕴涵算子和剩余蕴涵算子 $\mathcal{I}_\eta$ 和 $\mathcal{I}_\theta$）的 L-模糊上变换系统和下变换系统的概念。

定义 5.1 设 X 为非空集，θ 为重叠映射，$\mathcal{I}_\eta$ 为定义在 L上的余剩余蕴涵算子。那么系统 $\mathcal{U}_F=(X,Y,u,U_F)$，其中 $F=\theta$ 或 $\mathcal{I}_\eta$ 且

1. Y是非空集,
2. $u: X\to Y$是满射映射,
3. $U_F: L^X\to L^Y$是一个映射，其中

   (i) for all $\{f_k : k\in J\}\subseteq L^X$, $U_F[\bigvee_{k\in J}f_k]=\bigvee_{k\in J}U_F[f_k]$,

   (ii) for all $\boldsymbol{u}, f\in L^X$, $U_F[F(\boldsymbol{u},f)]=F(\boldsymbol{u},U_F[f])$,

(iii) 对所有 $x \in X$、 $y \in Y$、 $U_F[1_{\{x\}}](y)$, $= 1$ 当且仅当 $y = u(x)$,

称为关于 F 的 L-模糊上变换系统，定义在 X 上。

定义 5.2 令 X 为非空集， η、 $\mathcal{I}_\theta$ 和 N 分别是 L 上的分组映射、剩余蕴涵算子和否定算子。则系统 $\mathcal{H}_F = (X, Y, v, H_F)$，其中$F = \eta$ 或 $\mathcal{I}_\theta$ 且

1. Y 是一个非空集合,
2. $v\colon X \to Y$ 是一个满射映射,
3. $H_F\colon L^X \to L^Y$ 是一个映射，其中

   (i) for all $\{f_k : k \in J\} \subseteq L^X$, $H_F[\bigwedge_{k\in J} f_k](y) = \bigwedge_{k\in J} H_F[f_k](y)$,

   (ii) for all $\boldsymbol{u}, f \in L^X$, $H_F[F(\boldsymbol{u}, f)] = F(\boldsymbol{u}, H_F[f])$, *and*

   (iii) for $y \in Y$ *and* $x \in X$, $(\mathbf{N}(H_F[\mathbf{N}(1_{\{x\}})]))(y) = 1$ *iff* $y = v(x)$,

称为关于 F 的 L-模糊下变换系统，定义在 X 上。

关于 t-范数的 L-模糊上变换系统，以及关于 R-蕴涵算子的 L-模糊下变换系统（ [16, 34] 中提出），分别是 $\mathcal{U}_\theta$ 和 $\mathcal{H}_{\mathcal{I}_\theta}$的特殊情形。此外，关于 S-蕴涵算子的 L-模糊下变换系统（ [34] 中提出）是 $\mathcal{H}_\eta$的特殊情形。关于 $\mathcal{U}_{\mathcal{I}_\eta}$ 的L-模糊上变换系统是一种新的定义。

例 5.1 设 X 是一个非空集，且 $id\colon X \to X$ 是一个恒等映射。现在，我们定义映射 $U_F, H_{F'}\colon L^X \to L^X$，使得 $U_F[f](x) = f(x)$ $H_{F'}[f](x) = f(x)$ $x \in X$，其中 $F = \theta$ *or* $\mathcal{I}_\eta$和 $F' = \eta$ *or* $\mathcal{I}_\theta$。那么，对于所有 $\{f_k : k \in J\} \subseteq L^X$,$U_F[\bigvee_{k\in J} f_k] = \bigvee_{k\in J} f_k = \bigvee_{k\in J} U_F[f_k]$和 $H_{F'}[\bigwedge_{k\in J} f_k] = \bigwedge_{k\in J} f_k = \bigwedge_{k\in J} H_{F'}[f_k]$.现在,

令 u $f \in L^X$. 则 $U_F[F(\mathrm{u}\ f)] = F(\mathrm{u}\ U_F[f])$ 和 $H_{F'}[F'(\mathrm{u}\ f)] = F'(\mathrm{u}\ H_{F'}[f])$. 最后，令 $x, z \in X$. 则 $U_F[1_{\{x\}}](z) = U_F[1_{\{x\}}](z) = 1_{\{x\}}(z) = 1$当且仅当 $x = z$且 $(\mathbf{N}(H_{F'}[\mathbf{N}(1_{\{x\}})]))(z) = \mathbf{N}(H_{F'}[\mathbf{N}(1_{\{x\}})](z)) = \mathbf{N}(\mathbf{N}(1_{\{x\}})(z)) = 1$当且仅当$x = z$. 因此 $U_F(1_{\{x\}})(z) = 1$, $(\mathbf{N}(H_{F'}[\mathbf{N}(1_{\{x\}})]))(z) = 1$当且仅当 $z = id(x)$. 因此$\mathcal{U}_F = (X, X, id, U_F)$ 和 $\mathcal{H}_{F'} = (X, X, id, H_{F'})$ 分别是关于 F和 F'的 L-模糊上、下变换系统，其定义在 X 上。

注5.1 (i) 如果 $L = [0, 1]$、$\mathbf{N} = \mathbf{N}_S$、 $\theta = \theta_M$、 $\eta = \eta_M$、 $\mathcal{I}_\eta = \mathcal{I}_{\eta_M}$ 和 $\mathcal{I}_\theta = \mathcal{I}_{\theta_M}$。那么，$\mathcal{U}_{\theta_M}$ 和 $\mathcal{H}_{\mathcal{I}_{\theta_M}}$ 分别与 *[16, 34],* 中提出的特殊情形 L-模糊上变换系统和下变换系统相一致。此外， $\mathcal{H}_{\eta_M}$ 与 *[34]* 中提出的特殊情形 L-模糊下变换系统相一致。

(ii) 如果 $L = [0, 1]$、 $\theta = \theta_M$、 $\eta = \eta_M$、 $\mathcal{I}_\eta = \mathcal{I}_{\eta_M}$ 和 $\mathcal{I}_\eta = \mathcal{I}_{\theta_M}$。那么，$\mathcal{U}_{\theta_M}$ 和 $\mathcal{H}_{\mathcal{I}_{\theta_M}}$ 分别与 *[16, 34],* 中提出的 L-模糊上变换系统和下变换系统的特殊情形一致。此外， $\mathcal{H}_{\eta_M}$ 与 *[34]* 中提出的 L-模糊下变换系统的特殊情形一致。

(iii) 如果 $L=[0,1]$、$\theta=\mathcal{T}$ 和 $\eta=\mathcal{S}$，其中 $\mathcal{T}$、$\mathcal{S}$ 分别是没有非平凡零因子的连续 t-范数和 t-余范数。那么，$\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ 和 $\mathcal{H}_{\mathcal{I}_{\mathcal{T}}}$ 分别与 *[16,34],* 中提出的关于 t-范数和 R-蕴涵子的 L-模糊上变换系统和下变换系统一致。此外，$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ 与 *[34]* 中提出的关于 S- 蕴涵子的 L- 模糊下变换系统一致。

由上述备注可知，一些现有的 L-模糊变换系统是所提出的 L-模糊变换系统的特殊情形。其中，一些L-模糊变换系统与所提出的 L-模糊变换系统相一致，而一些所提出的L-模糊变换系统与现有的 L-模糊变换系统的特殊情形相一致。也就是说，所提出的 L-模糊变换系统是某些现有系统的更广义形式。

下面展示了 L-模糊变换系统与 F-变换之间的密切联系。为此，我们需要一些结果，这些结果由下面的命题给出。

命题 5.1 设 N 为一个否定算子，θ、η 分别为中性元为 0、1 的重叠映射与分组映射。此外，设 $\mathbf{N}^{\mathcal{I}_\eta}$、$\mathbf{N}^{\mathcal{I}_\eta}$ 为对合否定算子。则对所有 $f\in L^X$

(i) $f=\bigvee\limits_{x\in X}\theta(\boldsymbol{f(x)},1_{\{x\}}), f=\bigwedge\limits_{x\in X}\eta(\boldsymbol{f(x)},\mathbf{N}(1_{\{x\}}))$, *and*

(ii) $f=\bigvee\limits_{x\in X}\mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(\boldsymbol{f(x)}),1_{\{x\}}), f=\bigwedge\limits_{x\in X}\mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(\boldsymbol{f(x)}),\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}}))$.

证明：（i）设 $y\in X$、$f\in L^X$。则

$$\begin{aligned} f(y) &= \bigvee_{x\in X}\theta(\mathbf{f(x)},1_{\{x\}})(y)=\bigvee_{x\in X}\theta(f(x),1_{\{x\}}(y)) \\ &= \theta(f(x),1_{\{y\}}(y))\vee\bigvee_{x\neq y\in X}\theta(f(y),1_{\{x\}}(y)) \\ &= \theta(f(y),1)=f(y). \end{aligned}$$

因此 $f=\bigvee\limits_{x\in X}\theta(\mathbf{f(x)}\ 1_{\{x\}})$ 以及

$$\begin{aligned} f(y) &= \bigwedge_{x\in X}\eta(\mathbf{f(x)},\mathbf{N}(1_{\{x\}}))(y)=\bigwedge_{x\in X}\eta(f(x),\mathbf{N}(1_{\{x\}})(y)) \\ &= \eta(f(y),\mathbf{N}(1_{\{y\}}(y)))\vee\bigwedge_{x\neq y\in X}\eta(f(y),\mathbf{N}(1_{\{x\}}(y))) \\ &= \eta(f(y),0)=f(y). \end{aligned}$$

因此 $f=\bigwedge\limits_{x\in X}\eta(\mathbf{f(x)},\mathbf{N}(1_{\{x\}}))$。

(ii) 设 $y \in X, f \in L^X$。那么

$$\begin{aligned} f(y) &= \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(\mathbf{f(x)}), 1_{\{x\}})(y) = \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(f(x)), 1_{\{x\}}(y)) \\ &= \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(f(x)), 1_{\{y\}}(y)) \vee \bigvee_{x\neq y\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(f(x)), 1_{\{x\}}(y)) \\ &= \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(f(y)), 1) = \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(f(y)) = f(y). \end{aligned}$$

因此 $f = \bigvee \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}^{\mathcal{I}_\eta}\mathbf{(f(x))}\ 1_{\{x\}})$以
及$_{x\in X}$

$$\begin{aligned} f(y) &= \bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(\mathbf{f(x)}), \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}}))(y) = \bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f(x)), \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}}(y))) \\ &= \mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f(y)), \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{y\}}(y))) \wedge \bigwedge_{x\neq y\in X} \mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f(x)), \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}}(y))) \\ &= \mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f(y)), 0) = \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f(y))) = f(y). \end{aligned}$$

现在，我们有如下结果。

命题5.2 设 θ 是一个重叠映射 L。则以下陈述等价:

(i) $\mathcal{U}_\theta = (X, Y, u, U_\theta)$ 是由重叠映射 θ 和 $Y \subseteq X$确定的 L-模糊上变换系统，定义在 X 上。(ii) 存在一个由 Y 索引的 X 上的 L-模糊划分 $\mathcal{P}$，使得 $u(x) = y$ 当且仅当$x \in core(A_y)$ 和 $U_\theta = F^{\uparrow}{}_{,\mathcal{P}}{}^{\theta}$。

证明: 设 $\mathcal{U}_\theta = (X, Y, u, U_\theta)$ 是由 θ 确定在 X de- termined 上的一个 L-模糊上变换系统。此外，设 $\mathcal{P} = \{A_y : y \in Y\}$，使得对所有 $y \in Y$, $A_y \in L^X$，均有 $A_y(x) = U_\theta[1_{\{x\}}](y)$, $x \in X$。现在，根据定义 5.1(iii)，$A_{u(x)}(x) = U_\theta[1_{\{x\}}](u(x)) = 1$，即 $x \in core(A_{u(x)})$。进一步地，对于 $y, z \in Y$，$t \in core(A_y) \cap core(A_z)$ $U_\theta[1_{\{t\}}](y) = 1 = U_\theta[1_{\{t\}}](z)$，也就是说，$A_y(t) = 1 = A_z(t)$ 当且仅当 $y = u(t) = z$。因此，$\{core(A_y) : y \in Y\}$ 是 X 的一个划分，从而 $\mathcal{P}$ 是 X 的一个 L-模糊划分。现在，对于所有 $y \in Y$ 和 $f \in L^X$

$$\begin{aligned} F^{\uparrow,\theta}_{\mathcal{P}}[f](y) &= \bigvee_{x\in X} \theta(A_y(x), f(x)) \\ &= \bigvee_{x\in X} \theta(U_\theta[1_{\{x\}}](y), f(x)) \\ &= \bigvee_{x\in X} \theta(f(x), U_\theta[1_{\{x\}}](y)) \\ &= \bigvee_{x\in X} U_\theta[\theta(\mathbf{f(x)}, 1_{\{x\}})](y) \\ &= U_\theta[\bigvee_{x\in X} \theta(\mathbf{f(x)}, 1_{\{x\}})](y) \\ &= U_\theta[f](y). \end{aligned}$$

因此 $U_\theta = F^{\uparrow,\mathcal{P}^\theta}$。反之，设 $\mathcal{P} = \{A_y \in L^X : y \in Y\}$ 是基集 $X \neq \emptyset$ 的一个 L-模糊划分。定义映射 $u : X \to Y$，使得 $u(x) = y$ 当且仅当 $x \in core(A_y)$。进一步地，设 θ 是一个中性元为 1 的重叠映射，并且 $U_\theta = F^{\uparrow,\mathcal{P}^\theta}$。于是，对于所有 $y \in Y$，$x \in X$ $U_\theta[1_{\{x\}}](y) = F^{\uparrow,\mathcal{P}^\theta}[1_{\{x\}}](y) = \bigvee_{z\in X} \theta(A_y(z), 1_{\{x\}}(z)) = \theta(A_y(x), 1)) = A_y(x)$。因此，$U_\theta[1_{\{x\}}](y) = 1$ 当且仅当 $A_y(x) = 1$ 当且仅当 $v(x) = y$。根据命题 3.10 和 3.11，(X, Y, u, U_θ) 是由 θ 确定在 X 上的一个 L-模糊上变换系统。

命题 5.3 设 $\mathcal{I}_\eta$ 是 EP 上的余剩余蕴涵算子，且 $\mathbf{N}^{\mathcal{I}_\eta}$ 是一个对合否定算子。则以下陈述等价：

(i) $\mathcal{U}_{\mathcal{I}_\eta} = (X, Y, u, U_{\mathcal{I}_\eta})$ 是由余剩余蕴涵算子 $\mathcal{I}_\eta$ 和 $Y \subseteq X$ 确定的 L-模糊上变换系统，定义在 X 上。(ii) 存在一个以 Y 为指标、X 的 L-模糊划分 $\mathcal{P}$，使得 $u(x) = y$ 当且仅当 $x \in core(A_y)$ 且 $U_{\mathcal{I}_\eta} = F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}$。

证明：设 $\mathcal{U}_{\mathcal{I}_\eta} = (X, Y, u, U_{\mathcal{I}_\eta})$ 是由 $\mathcal{I}_\eta$ 确定的、定义在 X 上的 L-模糊上变换系统。另设 $\mathcal{P} = \{A_y : y \in Y\}$，使得对于所有 $y \in Y$，$A_y \in L^X$ 由 $A_y(x) = U_{\mathcal{I}_\eta}[1_{\{x\}}](y)$，$x \in X$ 给出。现在，根据定义 5.1(iii)，$A_{u(x)}(x) = U_{\mathcal{I}_\eta}[1_{\{x\}}](u(x)) = 1$，或者说，$x \in core(A_{u(x)})$。进一步地，对于 y、$z \in Y$，$t \in core(A_y) \cap core(A_z)$，$U_{\mathcal{I}_\eta}[1_{\{t\}}](y) = 1 = U_{\mathcal{I}_\eta}[1_{\{t\}}](z)$，即 $A_y(t) = 1 = A_z(t)$ 当且仅当 $y = u(t) = z$。因此 $\{core(A_y) : y \in Y\}$ 是 X 的一个划分，从而 $\mathcal{P}$ 是 X 的 L-模糊划分。现在，对于所有 $y \in Y$ 和 $f \in L^X$

$$
\begin{aligned}
F_{\mathcal{P}}^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[f](y) &= \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(A_y(x)), f(x)) \\
&= \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(A_y(x)), \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(f(x)))) \\
&= \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(f(x)), A_y(x)) \\
&= \bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(f(x)), U_{\mathcal{I}_\eta}[1_{\{x\}}](y)) \\
&= \bigvee_{x\in X} U_{\mathcal{I}_\eta}[\mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(\mathbf{f(x)}), 1_{\{x\}})](y) \\
&= U_{\mathcal{I}_\eta}[\bigvee_{x\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(\mathbf{f(x)}), 1_{\{x\}})](y) \\
&= U_{\mathcal{I}_\eta}[f](y).
\end{aligned}
$$

因此 $U_{\mathcal{I}_\eta} = F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}$。反之，设 $\mathcal{P} = \{A_y \in L^X : y \in Y\}$ 是基集 $X \neq \emptyset$ 的一个 L-模糊划分。定义映射 $u : X \to Y$，使得 $u(x) = y$ 当且仅当 $x \in core(A_y)$。进一步地，设 $\mathcal{I}_\eta$ 是一个余剩余蕴涵算子，使得 $\mathbf{N}^{\mathcal{I}_\eta}(\cdot) = \mathcal{I}_\eta(\cdot, 1)$ 是一个对合否定算子，并且 $U_{\mathcal{I}_\eta} = F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}$。则对于所有 $y \in Y$、$x \in X$，$U_{\mathcal{I}_\eta}[1_{\{x\}}](y) = F^{\uparrow,\mathcal{I}_\eta}[1_{\{x\}}](y) = \bigvee_{z\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}^{\mathcal{I}_\eta}(A_y(z)), 1_{\{x\}}))(z)) = \bigwedge_{z\in X} \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}^{\mathcal{I}_\eta}(A_y(z)), 1_{\{x\}}(z)) = \mathcal{I}_\eta(\mathbf{N}^{\mathcal{I}_\eta}(A_y(x)), 1)) = \mathbf{N}^{\mathcal{I}_\eta}(\mathbf{N}^{\mathcal{I}_\eta}(A_y(x))) = A_y(x)$。因此 $U_{\mathcal{I}_\eta}[1_{\{x\}}](y) = 1$ 当且仅当

$A_y(x) = 1$ 当且仅当 $u(x) = y$。根据命题 3.10 和 3.11，$(X, Y, u, U_{\mathcal{I}_\eta})$ 是 L-模糊上变换系统，定义在 X 上，由 $\mathcal{I}_\eta$ 确定。

命题 5.4 设 η 是在 L 上具有中性元 0 的 EP-分组映射，且 N 是一个对合否定算子。则以下陈述等价:

(i) $\mathcal{H}_\eta = (X, Y, v, H_\eta)$ 是由 η 和 $Y \subseteq X$ 确定的 L-模糊下变换系统，定义在 X 上。(ii) 存在一个由 Y 索引的 X 的 L-模糊划分 $\mathcal{P}$，使得 $v(x) = y$ 当且仅当 $x \in core(A_y)$ 且 $H_\eta = F^{\downarrow, \eta}_{\mathcal{P}}$。

证明: 设 $\mathcal{H}_\eta = (X, Y, v, H_\eta)$ 是由 η 确定的定义在 X 上的 L-模糊下变换系统。又设 $\mathcal{P} = \{A_y : y \in Y\}$，使得对于所有 $y \in Y$，$A_y \in L^X$ 由 $A_y(x) = \mathrm{N}(H_\eta[\mathrm{N}(1_{\{x\}})])(y)$，$x \in X$ 给出。现在，根据定义 5.2(iii)，$A_{v(x)}(x) = (\mathrm{N}(H_\eta[\mathrm{N}(1_{\{x\}})]))(v(x)) = 1$，即 $x \in core(A_{v(x)})$。进一步，对于 $y, z \in Y, t \in core(A_y) \cap core(A_z)$，有 $(\mathrm{N}(H_\eta[\mathrm{N}(1_{\{t\}})]))(y) = 1 = (\mathrm{N}(H_\eta[\mathrm{N}(1_{\{t\}})]))(z)$，也就是说，$A_y(t) = 1 = A_z(t)$ 当且仅当 $y = v(t) = z$。因此，$\{core(A_y) : y \in Y\}$ 是 X 的一个划分，从而 $\mathcal{P}$ 是 X 的一个 L-模糊划分。现在，对于所有 $y \in Y$ 和 $f \in L^X$

$$\begin{aligned}
F^{\downarrow,\eta}_{\mathcal{P}}[f](y) &= \bigwedge_{x \in X} \eta(\mathbf{N}(A_y(x)), f(x)) \\
&= \bigwedge_{x \in X} \eta(H_\eta[\mathbf{N}(1_{\{x\}})](y), f(x)) \\
&= \bigwedge_{x \in X} \eta(f(x), H_\eta[\mathbf{N}(1_{\{x\}})](y)) \\
&= \bigwedge_{x \in X} H_\eta[\eta(\mathbf{f(x)}, \mathbf{N}(1_{\{x\}}))](y) \\
&= H_\eta[\bigwedge_{x \in X} \eta(\mathbf{f(x)}, \mathbf{N}(1_{\{x\}}))](y) \\
&= H_\eta[f](y).
\end{aligned}$$

因此 $H_\eta = F^{\downarrow, \eta}_{\mathcal{P}}$. 反之，设 $\mathcal{P} = \{A_y \in L^X : y \in Y\}$ 是基集 $X \neq \emptyset$上的一个 L-模糊划分。定义映射 $v : X \to Y$，使得 $v(x) = y$ 当且仅当 $x \in core(A_y)$。此外，设 η是中性元为 0 的分组映射，N 是对合否定算子，且 $H_\eta = F^{\downarrow, \eta}_{\mathcal{P}}$。那么对于所有 $y \in Y, x \in X$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{N}(H_\eta[\mathbf{N}(1_{\{x\}})]))(y) &= (\mathbf{N}(F^{\downarrow,\eta}_{\mathcal{P}}[\mathbf{N}(1_{\{x\}})]))(y) \\
&= \mathbf{N}(F^{\downarrow,\eta}_{\mathcal{P}}[\mathbf{N}(1_{\{x\}})](y)) \\
&= \mathbf{N}(\bigwedge_{z \in X} \eta(\mathbf{N}_\eta(A_y(z)), (\mathbf{N}(1_{\{x\}}))(z))) \\
&= \mathbf{N}(\bigwedge_{z \in X} \eta(\mathbf{N}(A_y(z)), \mathbf{N}(1_{\{x\}}(z)))) \\
&= \mathbf{N}(\eta(\mathbf{N}(A_y(x)), 0)) \\
&= \mathbf{N}(\mathbf{N}(A_y(x))) \\
&= A_y(x).
\end{aligned}$$

因此 $(\mathrm{N}(H_\eta[\mathrm{N}(1_{\{x\}})]))(y) = 1$ 当且仅当 $A_y(x) = 1$ 当且仅当 $v(x) = y$。根据命题 3.10 和 3.11，(X, Y, v, H_η) 是由 η确定的、定义在 X 上的一个 L-模糊下变换系统。

命题 5.5 设 $\mathcal{I}_\theta$ 是 EP 上的 L-剩余蕴涵算子，且 $\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}$ 是对合否定算子。那么，下列陈述等价：

(i) $\mathcal{H}_{\mathcal{I}_\theta} = (X, Y, v, H_{\mathcal{I}_\theta})$ 是由 $\mathcal{I}_\theta$ 和 $Y \subseteq X$ 确定的 X 上的 L-模糊下变换系统。(ii) 存在一个由 Y 索引的 X 的 L-模糊划分 $\mathcal{P}$，使得 $v(x) = y$ 当且仅当 $x \in core(A_y)$ 且 $H_{\mathcal{I}_\theta} = F^{\downarrow}_{,\mathcal{P}}{}^{\mathcal{I}_\theta}$。

证明：设 $\mathcal{H}_{\mathcal{I}_\theta} = (X, Y, v, H_{\mathcal{I}_\theta})$ 是由 $\mathcal{I}_\theta$ 确定的 X 上的 L-模糊下变换系统。此外，设 $\mathcal{P} = \{A_y : y \in Y\}$，使得对所有 $y \in Y$，$A_y \in L^X$ 都由 $A_y(x) = (\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(H_{\mathcal{I}_\theta}[\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}})]))(y)$ 给出，其中 $x \in X$。现在，根据定义 5.1(iii)，$A_{v(x)}(x) = (\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(H_{\mathcal{I}_\theta}[\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}})]))(v(x)) = 1$，或者说，$x \in core(A_{v(x)})$。进一步，对于 $t \in core(A_y) \cap core(A_z)$、$y$、$z \in Y$，以及 $\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(x) = \mathcal{I}_\theta(x, 0)$ 这一事实，有 $(\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(H_{\mathcal{I}_\theta}[\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{t\}})]))(y) = 1 = (\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(H_{\mathcal{I}_\theta}[\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{t\}})]))(z)$，即 $A_y(t) = 1 = A_z(t)$ 当且仅当 $y = v(t) = z$。因此，$\{core(A_y) : y \in Y\}$ 是 X 的一个划分，从而 $\mathcal{P}$ 是 X 的一个 L-模糊划分。现在，对所有 $y \in Y$ 和 $f \in L^X$

$$
\begin{aligned}
F^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}_{\mathcal{P}}[f](y) &= \bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(A_y(x), f(x)) \\
&= \bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta((\mathbf{N}_{\mathcal{I}}(H_{\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}})]))(y), f(x)) \\
&= \bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(H_{\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}})](y)), \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f(x)))) \\
&= \bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f(x)), \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(H_{\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}})](y)))) \\
&= \bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta((\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f))(x), H_{\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}})](y)) \\
&= \bigwedge_{x\in X} H_{\mathcal{I}_\theta}[\mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(\mathbf{f(x)}), \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}}))](y) \\
&= H_{\mathcal{I}_\theta}[\bigwedge_{x\in X} \mathcal{I}_\theta(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(\mathbf{f(x)}), \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}}))](y) \\
&= H_{\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f))](y) \\
&= H_{\mathcal{I}_\theta}[f](y).
\end{aligned}
$$

因此 $H_{\mathcal{I}_\theta} = F^{\downarrow}_{,\mathcal{P}}{}^{\mathcal{I}_\theta}$。相反，令 $\mathcal{P} = \{A_y \in L^X : y \in Y\}$ 为一个 L-模糊划分，基集为 $X \neq \emptyset$。定义映射 $v : X \to Y$，使得 $v(x) = y$ 当且仅当$x \in core(A_y)$。此外，令 $\mathcal{I}_\theta$为一个剩余蕴涵算子，使得 $\mathrm{N}_{\mathcal{I}_\theta}(\cdot) = \mathcal{I}_\theta(\cdot, 0)$ 是

一个对合否定算子)且 $H_{\mathcal{I}_\theta} = F^{\downarrow}{}_{,\mathcal{P}}{}^{\mathcal{I}_\theta}$。那么，对所有 $y \in Y, x \in X$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(H_{\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}})]))(y) &= (\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(F^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}_{\mathcal{P}}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}})]))(y) \\
&= \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(F^{\downarrow,\mathcal{I}_\theta}_{\mathcal{P}}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}})](y)) \\
&= \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(\bigwedge_{z\in X} \mathcal{I}_\theta(A_y(z), (\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}}))(z))) \\
&= \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(\bigwedge_{z\in X} \mathcal{I}_\theta(A_y(z), \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}}(z)))) \\
&= \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(\mathcal{I}_\theta(A_y(x), 0)) = A_y(x).
\end{aligned}$$

因此 $(\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(H_{\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(1_{\{x\}})]))(y) = 1$ 当且仅当 $A_y(x) = 1$ 当且仅当 $v(x) = y$。根据命题 3.10 和 3.11，$(X, Y, v, H_{\mathcal{I}_\theta})$ 是一个由 $\mathcal{I}_\theta$ 决定的 L-模糊下变换系统，其定义在 X 上。

接下来，我们有如下结果。

命题 5.6 设 θ 和 η 关于对合否定算子 $\mathbf{N}$ 对偶，$\mathcal{U}_\theta = (X, Y, u, U_\theta)$ 和 $\mathcal{H}_\eta = (X, Y, u, H_\eta)$ 分别为 L-模糊上变换系统和下变换系统。则存在一个 L-模糊划分 $\mathcal{P}$，使得 $U_\theta = F^{\uparrow}{}_{,\mathcal{P}}{}^{\theta}, H_\eta = F^{\downarrow}{}_{,\mathcal{P}}{}^{\eta}$ 当且仅当对所有 $f \in L^X$,

(i) $U_\theta[f] = \mathbf{N}(H_\eta[\mathbf{N}(f)])$, *i.e.,* $\mathbf{N}(U_\theta[f]) = H_\eta[\mathbf{N}(f)]$, *and*

(ii) $H_\eta[f] = \mathbf{N}(U_\theta[\mathbf{N}(f)])$, *i.e,* $\mathbf{N}(H_\eta) = U_\theta[\mathbf{N}(f)]$.

证明：由命题 3.1 可容易证明条件 (i) 和 (ii) 成立。现在，我们只需证明其逆命题。为此，设条件 (i) 成立。进一步，设 $\{A_{1,y} : y \in Y\}$，$\{A_{2,y} : y \in Y\} \subseteq L^X$，使得 $A_{1,y}(x) = U_\theta[1_{\{x\}}](y), A_{2,y}(x) = \mathbf{N}(H_\eta[\mathbf{N}(1_{\{x\}})])(y)$ $\forall x \in X, y \in Y$。于是，根据命题 5.2 和 5.3，显然 $\{A_{1,y} : y \in Y\}$，$\{A_{2,y} : y \in Y\} \subseteq L^X$ 是 L-模糊划分，分别定义在 X 和 $U_\theta = F^{\uparrow}{}_{,1}{}^{\theta}_{\mathcal{P}}, H_\eta = F^{\downarrow}{}_{,2}{}^{\eta}_{\mathcal{P}}$ 上。现在，由条件 (i)，我们有 $U_\theta[f] = \mathbf{N}(H_\eta[\mathbf{N}(f)]) = \mathbf{N}(F^{\downarrow}{}_{,2}{}^{\eta}_{\mathcal{P}}[\mathbf{N}(f)]) = F^{\uparrow}{}_{,2}{}^{\theta}_{\mathcal{P}}[f]$。因此 $F^{\uparrow}{}_{,1}{}^{\theta}_{\mathcal{P}} = F^{\uparrow}{}_{,2}{}^{\theta}_{\mathcal{P}}$，并且 $A_{1y} = A_{2y}, \forall y \in Y$。类似地，可以证明条件 (ii) 成立时的情形。

命题 5.7 设 θ 和 η 关于对合否定算子 $\mathbf{N}$ 对偶，$\mathcal{U}_{\mathcal{I}_\eta} = (X, Y, u, U_{\mathcal{I}_\eta})$ 和 $\mathcal{H}_{\mathcal{I}_\theta} = (X, Y, u, H_{\mathcal{I}_\eta})$ 分别为 L-模糊上变换系统和下变换系统。则存在一个 L-模糊划分 $\mathcal{P}$，使得 $F^{\uparrow}{}_{,\mathcal{P}}{}^{\mathcal{I}_\eta} = U_{\mathcal{I}_\eta}$，$F^{\downarrow}{}_{,\mathcal{P}}{}^{\mathcal{I}_\theta} = H_{\mathcal{I}_\theta}$ 当且仅当对所有 $f \in L^X$

(i) $U_{\mathcal{I}_\eta}[f] = \mathbf{N}(H_{\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}(f)])$, *i.e.,* $\mathbf{N}(U_{\mathcal{I}_\eta}[f]) = H_{\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}(f)]$, *and*

(ii) $H_{\mathcal{I}_\theta}[f] = \mathbf{N}(U_{\mathcal{I}_\eta}[\mathbf{N}(f)])$, *i.e,* $\mathbf{N}(H_{\mathcal{I}_\theta}) = U_{\mathcal{I}_\eta}[\mathbf{N}(f)]$.

证明：与命题 5.7 的证明类似。

命题 5.8 设 $\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}$ 是对合否定算子，$\mathcal{U}_\theta = (X, Y, u, U_\theta)$ 和 $\mathcal{H}_{\mathcal{I}_\theta} = (X, Y, u, H_{\mathcal{I}_\eta})$ 分别是 L-模糊上变换系统和下变换系统。那么存在一个 L-模糊划分 $\mathcal{P}$，使得 $F^{\uparrow}{}_{,\mathcal{P}}{}^{\theta} = U_\theta, F^{\downarrow}{}_{,\mathcal{P}}{}^{\mathcal{I}_\theta} = H_{\mathcal{I}_\theta}$ 当且仅当

(i) $U_\theta[f] = \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(H_{\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f)])$, *i.e.,* $\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(U_\theta[f]) = H_{\mathcal{I}_\theta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f)]$, *and*

(ii) $H_{\mathcal{I}_\theta}[f] = \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(U_\theta[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f)])$, *i.e,* $\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(H_{\mathcal{I}_\theta}) = U_\theta[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\theta}(f)]$.

证明：与命题 5.7 的证明类似。

命题 5.9 设 $\mathbf{N}^{\mathcal{I}_\eta}$ 为对合否定算子，$\mathcal{U}_{\mathcal{I}_\eta} = (X, Y, u, U_{\mathcal{I}_\eta})$ 和 $\mathcal{H}_\eta = (X, Y, u, H_\eta)$ 分别为 L-模糊上变换系统和下变换系统。则存在一个 L-模糊划分 $\mathcal{P}$ 使得 $F^{\uparrow,\,{}_{\mathcal{P}}{}^{\mathcal{I}_\eta}} = U_{\mathcal{I}_\eta}$, $F^{\downarrow,\,{}_{\mathcal{P}}{}^{\eta}} = H_\eta$ 当且仅当对所有 $f \in L^X$

(i) $U_{\mathcal{I}_\eta}[f] = \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(H_\eta[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(f)])$, *i.e.,* $\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(U_{\mathcal{I}_\eta}[f]) = H_\eta[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(f)]$, *and*

(ii) $H_\eta[f] = \mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(U_{\mathcal{I}_\eta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(f)])$, *i.e,* $\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(H_\eta) = U_{\mathcal{I}_\eta}[\mathbf{N}_{\mathcal{I}_\eta}(f)]$.

证明：与命题 5.7 的证明类似。

6 总结

本文从构造性方法和公理化方法两方面，阐述了由重叠映射与分组映射、剩余与余剩余蕴涵算子确定的直接 F-变换理论。其中，$F^{\uparrow,\,\theta}, F^{\downarrow,\,\eta}, F^{\downarrow,\,\mathcal{I}_\theta}$ 是对文献 [22, 25, 34] 和 $F^{\uparrow,\,\mathcal{I}_\eta}$ 中引入的直接 F-变换的扩展，而后者是一种新的定义。本文的主要贡献如下。

- 我们已证明所提出的直接 F变换的对偶性，并建立了这些直接 F变换之间的联系。此外，我们还讨论了这些直接 F变换的基本结果。

- 我们介绍了这些 F变换的逆变换概念。此外，我们还证明，在某些条件下，原始的 L模糊集与这些 F变换的逆变换具有相同的 F变换。

- 此外，我们还给出了所提出的直接 F变换的公理化刻画。

- 最后，我们考察了 L模糊变换系统的对偶性。

这两种理论，即 F变换理论以及重叠映射与分组映射理论，均已证明有助于实际应用。因此，将这两种思想结合起来，可能会为数据分析和图像处理问题带来新的应用。

参考文献

[1] H. Bustince、M. Pagola、R. Mesiar、E. H$\ddot{u}$llermeier、F. Herrera，《用于模糊建模成对比较的分组、重叠与广义双熵函数》，IEEE Transactions on Fuzzy Systems，20（20）405-415。

[2] F. Di Martino、V. Loia、I. Perfilieva、S. Sessa，《一种基于正向与逆向模糊变换的图像编码/解码方法》，International Journal of Approximate Reasoning，48（2008）110-131。[3] F. Di Martino、V. Loia、S. Sessa，《一种对经模糊变换压缩的图像进行分割的方法》，《模糊集与系统》，161（2010）56-74。[4] F. Di Martino、V. Loia、S. Sessa，《模糊变换方法在预测数据分析中的应用》，《模糊集与系统》，180（2011）146-163。[5] M. Elkano、M. Galar、J. Sanz、H. Bustince，《采用二元分解策略解决多分类问题的模糊规则分类系统：n维重叠函数对模糊推理方法的影响》，Information Sciences，332（2016）94-114。[6] J.A. Goguen，《*L*-模糊集》，《数学分析与应用杂志》，18（1967）147-174。[7] M. Holˇcapek、L. Nguyen，《利用高阶模糊变换进行趋势-周期估计》，《伊朗模糊系统杂志》，15（2018）23-54。[8] P. Hurtík、S. Tomasiello，《模糊变换在数据与图像压缩中的应用综述》，Soft Computing，23（2019）12641-12653。[9] A. Jurio、H. Bustince、M. Pagola、A. Pradera、R. Yagar，《重叠映射与分组映射的一些性质及其在图像阈值分割中的应用》，《模糊集与系统》，229（2013）69-90。[10] A. Khastan、I. Perfilieva、Z. Alizani，《一种通过模糊变换求解柯西问题的新型模糊近似方法》，《模糊集与系统》，288（2016）75-95。[11] A. Khastan，《逆模糊变换的一种新表示及其应用》，Soft Computing，21（2017），3503-3512。[12] G.J. Klir、B. Yuan，《模糊逻辑：理论与应用》，Prentice Hall，Englewood Cliffs，NJ，（1995）。[13] M. Liu、D. Chen、C. Wu、H. Li，《模糊推理中模糊变换的近似定理及其在调度问题中的应用》，《计算机与应用数学》，51（2006）515-526。[14] J. Moˇckoˇr，《由幺半群定义的模糊型关系与变换算子》，《国际计算智能系统杂志》，13（2020）1530-1538。[15] J. Moˇckoˇr，《具有模糊划分与模糊变换的空间》，Soft Computing 13（2017），3479-3492。[16] J. Moˇckoˇr，《格值 *F*-变换的公理化》，《模糊集与系统》，342（2018）53-66。

[17] J. Moˇckoˇr, F变换与半模同态，Soft Computing，23（2019）7603-7619。[18] J. Moˇckoˇr，关系、闭包与分划幂集理论，《模糊集与系统》，420（2021）100-122。[19] J. Moˇckoˇr，M. Holˇcapek，带模糊划分的空间中的模糊对象，Soft Computing，21（2016）7268-7284。[20] J. Moˇckoˇr，P. Hurtík，格值 F变换与相似关系，《模糊集与系统》，342（2018）67-89。[21] V. Novák，I. Perfilieva，M. Holˇcapek，V. Kreinovich，使用 F 变换滤除时间序列中的高频成分，Information Sciences，274（2014）192-209。[22] I. Perfilieva，F变换：理论及其应用，《模糊集与系统》，157（2006）993-1023。[23] I. Perfilieva，模糊变换：对传统变换的挑战，Advances in Image and Electron Physics，147（2007）137-196。[24] I. Perfilieva，V. Novák，A. Dvoˇrák，数据分析中的模糊变换，International Journal of Approximate Reasoning，48（2008）36-46。[25] I. Perfilieva，A.P. Singh，S.P. Tiwari，关于 F变换、模糊粗糙集与模糊拓扑之间关系的研究，Soft Computing，21（2017）3513-3523。[26] I. Perfilieva，S.P. Tiwari，A.P. Singh，作为 L模糊预拓扑空间内部算子的格值 F变换，Communications in Computer and Information Science，854（2018）163-174。[27] I. Perfilieva，R. Valasek，用模糊变换去除噪声，Advances in Soft Computing，2（2005）221-230。[28] J.S. Qiao，基于重叠函数的（I_O，O）模糊粗糙集，International Journal of Approximate Reasoning，132（2021）26-48。[29] J.S. Qiao，完备格上的重叠函数与分组函数，Information Sciences，542（2021）406-425。[30] S. B. Roh，S. K. Oh，J. H. Yoon，K. Seo，基于模糊变换和径向基函数神经网络的人脸识别系统设计，Soft Computing，23（2019）4969-4985。[31] L. Stefanini，具有参数化广义模糊分划的 F变换，《模糊集与系统》，180（2011）98-120。[32] M. Štˇepniˇcka，R. Valášek，模糊变换及其在波动方程中的应用，Journal of Electrical Engineering，55（2004）7-10。[33] M. Štˇepniˇcka，O. Polakoviˇc，模糊变换的神经网络方法，《模糊集与系统》，160（2009）1037-1047。

[34] A. Tripathi，S.P. Tiwari，I. Perfilieva，由蕴涵算子确定的 F变换，《伊朗模糊系统杂志》，18（2021）19-36。[35] A. Tripathi，S.P. Tiwari，A.P. Singh，关于 L^M值 F变换、 L^M值模糊粗糙集和 L^M值模糊变换系统的研究，《新数学与自然计算》，17（2021）339-359。[36] L. Troiano，P. Kriplani，利用逆模糊变换支持交易策略，《模糊集与系统》，180（2011）121-145。[37] Y.T. Wang，B.Q. Hu，利用完备同态在完备格上构造重叠函数与分组函数，《模糊集与系统》，427（2022）71-95。[38] Y.T. Wang，B.Q. Hu，完备格上重叠函数与分组函数的序和，《模糊集与系统》，（2021）。