arXiv:2301.12927v1 [math.CV] 30 Jan 2023

涉及 Clausen 超几何函数的非负系数单叶函数

K. CHANDRASEKRAN、G. MURUGUSUNDARAMOORTHY 和 D. J. PRABHAKARAN

Abstract. 本文通过在开单位圆盘 $\mathbb{D}=\{z:\ |z|<1\}$ 中应用卷积算子，推导了使 ${}_3F_2\left(\begin{matrix}a & c\\ b+1 & ,\end{matrix}b,,c+1;\ z\right)$ 超几何函数属于 $\mathcal{M}^*(\lambda,\alpha)$ 和 $\mathcal{N}^*(\lambda,\alpha)$ 类的参数充要条件，并探讨了属于 $\mathcal{R}^\tau(A,B)$ 的函数 ${}_3F_2\left(\begin{matrix}a & c\\ b+1 & ,\end{matrix}b,,c+1;\ z\right)$ 的像。

1. 引言

令 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$ 为复平面 $\mathbb{C}$中的开单位圆盘。令 $\mathcal{H}$ 表示 $\mathbb{D}$中所有解析函数构成的类。令 $\mathcal{A}$ 表示具有以下形式的解析函数族 f

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\,z^n,\ z\in\mathbb{D} \tag{1}$$

其中 $f(0)=0$且 $f'(0)=1$位于开单位圆盘 $\mathbb{D}$中。它是 $\mathcal{H}$的子类。令 $\mathcal{S}\subset\mathcal{A}$，即 $\mathcal{S}$ 表示在开单位圆盘 $\mathbb{D}$. 中解析且单叶的所有规范化函数构成的类。对于函数 f，由 $\mathcal{A}$ 中的式 (1) 给出，且 $g\in\mathcal{A}$ 与$_\infty g(z)=z+\sum b_n\,z^n$， f与 g的卷积积定义为 $_{n=2}$

$$(f*g)(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\,b_n\,z^n, z\in\mathbb{D}.$$

请注意，卷积积也称为阿达马积。更多详情请参阅 [9]定义 1.1。 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子类，由以下形式的函数组成

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\,z^n,\ z\in\mathbb{D},\ \text{with } a_n\geq 0,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$$

在 [14], 中，Uralegaddi 等人引入了以下两个类，定义如下:

定义 1.2。 [14] 阶为 α、且$1<\alpha\leq\frac{4}{3}$ 的星形函数类 $\mathcal{M}(\alpha)$ 定义如下:

$$\mathcal{M}(\alpha)=\left\{f\in\mathcal{A}:\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)<\alpha,\ z\in\mathbb{D}\right\}$$

2000 年数学主题分类：30C45，33C20。关键词和短语：广义超几何级数、单叶函数、星形函数、凸函数和亚历山大积分算子。最终版本日期：2023 年 1 月 30 日。

定义 1.3。 [14] 阶为 α、且 $1 < \alpha \leq \frac{4}{3}$ 的凸函数类 $\mathcal{N}(\alpha)$ 定义如下:

$$\mathcal{N}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < \alpha,\, z \in \mathbb{D} \right\} = \{ f \in \mathcal{A} : zf'(z) \in \mathcal{M}(\alpha) \}$$

本文中，我们考虑两个子类 $\mathcal{M}(\lambda, \alpha)$ 和 $\mathcal{N}(\lambda, \alpha)$，以讨论基于 Clausen 超几何函数的一些包含性质。这两个子类由 Bulboaca 和 Murugusundaramoorthy [2] 引入，定义如下:

定义 1.4. [2] 对于某些 α $\left(1 < \alpha \leq \frac{4}{3}\right)$ 和 λ $(0 \leq \lambda < 1)$，形式如 (1) 的函数属于 $\mathcal{S}$ 的子类 $\mathcal{M}(\lambda, \alpha)$，当且仅当

$$\mathcal{M}(\lambda, \alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \Re\left(\frac{zf'(z)}{(1-\lambda)f(z) + \lambda z\, f'(z)}\right) < \alpha,\, z \in \mathbb{D} \right\}$$

定义 1.5. [2] 对于某些 α $\left(1 < \alpha \leq \frac{4}{3}\right)$ 和 λ $(0 \leq \lambda < 1)$，形式如 (1) 的函数属于 $\mathcal{S}$ 的子类 $\mathcal{N}(\lambda, \alpha)$，当且仅当

$$\mathcal{N}(\lambda, \alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \Re\left(\frac{f'(z) + zf''(z)}{f'(z) + \lambda z\, f''(z)}\right) < \alpha,\, z \in \mathbb{D} \right\}$$

此外，令 $\mathcal{M}^*(\lambda, \alpha) \equiv \mathcal{M}(\lambda, \alpha) \cap \mathcal{V}$ 和 $\mathcal{N}^*(\lambda, \alpha) \equiv \mathcal{N}(\lambda, \alpha) \cap \mathcal{V}$。

定义 1.6. [8] 若函数 $f \in \mathcal{A}$ 满足不等式，则称其属于类 $\mathcal{R}^\tau(A, B)$，其中 $\tau \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$且 $-1 \leq B \leq A \leq 1$。

$$\left| \frac{f'(z) - 1}{(A - B)\tau - B[f'(z) - 1]} \right| < 1, z \in \mathbb{D}$$

Dixit 和 Pal [8] 引入了类 $\mathcal{R}^\tau(A, B)$。其定义如定义 1.6 所述。若在定义 1.6 中代入 $\tau = 1$、 $A = \beta$ 和 $B = -\beta$，$(0 < \beta \leq 1)$，则得到满足不等式的函数类 $f \in \mathcal{A}$:

$$\left| \frac{f'(z) - 1}{f'(z) + 1} \right| < \beta,\, z \in \mathbb{D}$$

该类随后由 Padmanabhan [12] 等人进行了研究。

定义 1.7. [1] ${}_3F_2(a, b, c;\, d, e;\, z)$ 超几何级数定义为

$$(2) \qquad {}_3F_2(a, b, c; d, e; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (c)_n}{(d)_n (e)_n (1)_n} z^n, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{C},$$

提供 ed d、 $e \neq 0$、 -1、 -2、 $-3 \cdots$，这是一个在开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内的解析函数。

我们考虑由卷积积定义的线性算子 $\mathcal{I}^{a}_{,b,b+1}{}^{c}_{,c+1}(f) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

$$(3) \qquad \mathcal{I}^{a,b,c}_{b+1,c+1}(f)(z) = z\, {}_3F_2(^{a,b,c}_{b+1,c+1}; z) * f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n\, z^n$$

其中 $A_1 = 1$ 且对于 $n > 1$,

$$(4) \qquad A_n = \frac{(a)_{n-1} (b)_{n-1} (c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1} (c+1)_{n-1} (1)_{n-1}}\, a_n.$$

受解析单叶函数各个子类之间联系相关结果的启发，我们利用超几何函数 [3, 4, 5, 6, 7, 14], 和泊松分布[2], ，得到了参数的充要条件，使得 ${}_3F_2(\begin{smallmatrix}a & c\\ b+1 & \end{smallmatrix},b,,c+1;z)$ 超几何级数属于类 $\mathcal{M}^*(\lambda,\alpha)$ 和 $\mathcal{N}^*(\lambda,\alpha)$；此外，通过应用阿达马积，获得了关于属于 $\mathcal{R}^\tau(A,B)$ 的函数 ${}_3F_2(\begin{smallmatrix}a & c\\ b+1 & \end{smallmatrix},b,,c+1;z)$ 超几何级数的像的信息。

2. Main Results and Proofs

首先，我们回顾以下结果，以证明我们的主要定理。

引理5. [11] 对于某些 $\alpha(1 < \alpha \leq \frac{4}{3})$ 和 $\lambda(0 \leq \lambda < 1)$，且若 $f \in \mathcal{V}$，则$f \in \mathcal{M}^*(\lambda,\alpha)$ 当且仅当

$$\sum_{n=2}^{\infty}[n-(1+n\lambda-\lambda)\alpha]a_n \leq \alpha-1. \tag{6}$$

引理7. [11] 对于某些 $\alpha(1 < \alpha \leq \frac{4}{3})$ 和 $\lambda(0 \leq \lambda < 1)$，且若 $f \in \mathcal{V}$，则$f \in \mathcal{N}^*(\lambda,\alpha)$ 当且仅当

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\,[n-(1+n\lambda-\lambda)\alpha]a_n \leq \alpha-1. \tag{8}$$

以下结果归功于 Miller 和 Paris [10] & Shpot 和 Srivastava [13]。

定理9. 对于 $a, b, c > 0, c \neq b$ 和 $a < \min(1, b+1, c+1)$,

$${}_3F_2\left(\begin{smallmatrix}a,b,c\\ b+1,c+1\end{smallmatrix};1\right) = \frac{bc}{c-b}\Gamma(1-a)\left[\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(1-a+b)}-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(1-a+c)}\right]. \tag{10}$$

现在，我们陈述以下由 Chandrasekran 和 Prabhakaran 提出的引理，该引理有助于证明我们的主要结果。

引理 11. [4] 设 $a,b,c>0$。则有:

(1) 对于 $b,c > a-1$，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(a)_n(b)_n(c)_n}{(b+1)_n(c+1)_n(1)_n} = \frac{bc\,\Gamma(1-a)}{c-b}\left[\frac{(1-b)\Gamma(b)}{\Gamma(1-a+b)}-\frac{(1-c)\Gamma(c)}{\Gamma(1-a+c)}\right].$$

(2) 对于 $b,c > a-1$，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2(a)_n(b)_n(c)_n}{(b+1)_n(c+1)_n(1)_n} = \frac{bc\,\Gamma(1-a)}{c-b}\left[\frac{(1-b)^2\Gamma(b)}{\Gamma(1-a+b)}-\frac{(1-c)^2\Gamma(c)}{\Gamma(1-a+c)}\right].$$

(3) 对于 b、$c > a-1$，我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^3(a)_n(b)_n(c)_n}{(b+1)_n(c+1)_n(1)_n} = \frac{bc\,\Gamma(1-a)}{c-b}\left[\frac{(1-b)^3\Gamma(b)}{\Gamma(1-a+b)}-\frac{(1-c)^3\Gamma(c)}{\Gamma(1-a+c)}\right].$$

(4) 对于 $a \neq 1$、 $b \neq 1$ 和 $c \neq 1$，其中 b、 $c > \max\{0, a-1\}$，我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (c)_n}{(b+1)_n (c+1)_n (1)_{(n+1)}} = \frac{bc}{(a-1)(b-1)(c-1)} \times \left[\frac{\Gamma(2-a)}{c-b} \left(\frac{(c-1)\Gamma(b)}{\Gamma(1-a+b)} - \frac{(b-1)\Gamma(c)}{\Gamma(1-a+c)} \right) - 1 \right].$$

定理12. 设 $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, b, $c > 0$, $c \neq b$ 和 $|a| < \min\{1, b+1, c+1\}$。函数 $z\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b,c \\ b+1,c+1 \end{matrix}; z\right)$ 属于类 $\mathcal{M}^*(\lambda, \alpha)$ $1 < \alpha \leq \frac{4}{3}$ 和 $0 \leq \lambda < 1$ 的充分条件是

$$\frac{((1-\alpha) - b(1-\alpha\lambda))\,\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)} \leq \frac{((1-\alpha) - c(1-\alpha\lambda)))\,\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)} \tag{13}$$

证明. 设 $f(z) = z\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b,c \\ b+1,c+1 \end{matrix}; z\right)$，则根据引理5，只需证明

$$\mathcal{T}_1(\alpha, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} [n - (1 + n\lambda - \lambda)\alpha]\,|A_n| \leq \alpha - 1$$

利用事实 $|(a)_n| \leq (|a|)_n$，可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1(\alpha, \lambda) &= \sum_{n=2}^{\infty} [n(1-\alpha\lambda) - \alpha(1-\lambda)] \left(\frac{(|a|)_{n-1} (b)_{n-1} (c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1} (c+1)_{n-1} (1)_{n-1}} \right) \\
&= (1-\alpha\lambda) \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{(|a|)_{n-1} (b)_{n-1} (c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1} (c+1)_{n-1} (1)_{n-1}} \right) \\
&\quad -\alpha(1-\lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(|a|)_{n-1} (b)_{n-1} (c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1} (c+1)_{n-1} (1)_{n-1}} \right) \\
&= (1-\alpha\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+1) (|a|)_n (b)_n (c)_n}{(b+1)_n (c+1)_n (1)_n} \right) - (1-\alpha\lambda) \\
&\quad -\alpha(1-\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(|a|)_n (b)_n (c)_n}{(b+1)_n (c+1)_n (1)_n} \right) + \alpha(1-\lambda)
\end{aligned}$$

利用引理 11 的结果 (1) 以及上述方程中的公式 (10)，我们推导出

$$\begin{aligned}
&= (1-\alpha\lambda) \frac{bc\,\Gamma(1-|a|)}{c-b} \left[\frac{(1-b)\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)} - \frac{(1-c)\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)} \right] \\
&\quad -\alpha(1-\lambda) \frac{bc\Gamma(1-|a|)}{c-b} \left[\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)} - \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)} \right] + \alpha - 1 \\
&= \frac{bc\,\Gamma(1-|a|)}{c-b} \left[\frac{(1-b)(1-\alpha\lambda)\,\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)} - \frac{(1-c)(1-\alpha\lambda)\,\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)} \right. \\
&\quad \left. -\frac{\alpha(1-\lambda)\,\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)} + \frac{\alpha(1-\lambda)\,\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)} \right] + \alpha - 1
\end{aligned}$$

$$= \frac{bc\,\Gamma(1-|a|)}{c-b}\left[\frac{(1-\alpha)-b(1-\alpha\lambda))\,\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)}-\frac{((1-\alpha)-c(1-\alpha\lambda))\,\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)}\right]+\alpha-1$$

当且仅当方程 (13) 成立时，上述表达式有上界 $\alpha-1$，从而完成证明。□

定理 14. 设 $a\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, b, $c>0$, $c\neq b$ 和 $|a|<\min\{1,\,b+1,\,c+1\}$。函数 $z\,{}_3F_2\left(\begin{smallmatrix}a,b,c\\ b+1,c+1\end{smallmatrix};\,z\right)$ 属于类 $\mathcal{N}^*(\lambda,\alpha)$ $1<\alpha\leq\frac{4}{3}$ 和 $0\leq\lambda<1$ 的一个充分条件是

$$(15)\qquad \frac{(b-1)(b(1-\alpha\lambda)-(1-\alpha))\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)}\leq\frac{(c-1)\,(c(1-\alpha\lambda)-(1-\alpha))\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)}$$

证明。设 $f(z)=z\,{}_3F_2\left(\begin{smallmatrix}a,b,c\\ b+1,c+1\end{smallmatrix};\,z\right)$，那么，根据引理7，只需证明

$$\mathcal{T}_2(\alpha,\lambda)=\sum_{n=2}^{\infty}n\left[n-(1+n\lambda-\lambda)\alpha\right]|A_n|\leq\alpha-1$$

利用事实 $|(a)_n|\leq(|a|)_n$，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_2(\alpha,\lambda) &= \sum_{n=2}^{\infty}n\left[n(1-\alpha\lambda)-\alpha(1-\lambda)\right]\left(\frac{(|a|)_{n-1}(b)_{n-1}(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}(c+1)_{n-1}(1)_{n-1}}\right)\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}[n^2(1-\alpha\lambda)-\alpha(1-\lambda)n]\left(\frac{(|a|)_{n-1}(b)_{n-1}(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}(c+1)_{n-1}(1)_{n-1}}\right)\end{aligned}$$

代入 $n=(n-1)+1$ 以及 $n^2=(n-1)(n-2)+3(n-1)+1$ 在上文中，我们发现

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_2(\alpha,\lambda) &= \sum_{n=2}^{\infty}[((n-1)(n-2)+3(n-1)+1)]\left(\frac{(1-\alpha\lambda)(|a|)_{n-1}(b)_{n-1}(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}(c+1)_{n-1}(1)_{n-1}}\right)\\ &\quad-\sum_{n=2}^{\infty}[\alpha(1-\lambda)((n-1)+1)]\left(\frac{(|a|)_{n-1}(b)_{n-1}(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}(c+1)_{n-1}(1)_{n-1}}\right)\\ &= (1-\alpha\lambda)\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(n-1)(n-2)(|a|)_{n-1}(b)_{n-1}(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}(c+1)_{n-1}(1)_{n-1}}\right)\\ &\quad+(3-2\alpha\lambda-\alpha)\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(n-1)(|a|)_{n-1}(b)_{n-1}(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}(c+1)_{n-1}(1)_{n-1}}\right)\\ &\quad+(1-\alpha)\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(|a|)_{n-1}(b)_{n-1}(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}(c+1)_{n-1}(1)_{n-1}}\right)\\ &= (1-\alpha\lambda)\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{(|a|)_{n-1}(b)_{n-1}(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}(c+1)_{n-1}(1)_{n-3}}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(3-2\alpha\,\lambda-\alpha)\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(|a|)_{n-1}\,(b)_{n-1}\,(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}\,(c+1)_{n-1}\,(1)_{n-2}}\right)\\
&+(1-\alpha)\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(|a|)_{n-1}\,(b)_{n-1}\,(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}\,(c+1)_{n-1}\,(1)_{n-1}}\right)\\
=\;&(1-\alpha\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(|a|)_{n+2}\,(b)_{n+2}\,(c)_{n+2}}{(b+1)_{n+2}\,(c+1)_{n+2}\,(1)_{n}}\right)\\
&+(3-2\alpha\,\lambda-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(|a|)_{n+1}\,(b)_{n+1}\,(c)_{n+1}}{(b+1)_{n+1}\,(c+1)_{n+1}\,(1)_{n}}\right)\\
&+(1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(|a|)_{n}\,(b)_{n}\,(c)_{n}}{(b+1)_{n}\,(c+1)_{n}\,(1)_{n}}\right)\\
=\;&(1-\alpha\lambda)\left(\frac{|a|(|a|+1)b(b+1)c(c+1)}{(b+1)(b+2)(c+1)(c+2)}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(|a|+2)_{n}\,(b+2)_{n}\,(c+2)_{n}}{(b+3)_{n}\,(c+3)_{n}\,(1)_{n}}\right)\\
&+(3-2\alpha\,\lambda-\alpha)\left(\frac{abc}{(b+1)(c+1)}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(|a|)_{n+1}\,(b)_{n+1}\,(c)_{n+1}}{(b+1)_{n+1}\,(c+1)_{n+1}\,(1)_{n}}\right)\\
&+(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(|a|)_{n}\,(b)_{n}\,(c)_{n}}{(b+1)_{n}\,(c+1)_{n}\,(1)_{n}}\right)-(1-\alpha)
\end{aligned}
$$

将公式（10）代入上述方程，我们发现

$$
\begin{aligned}
=\;&(1-\alpha\lambda)\left(\frac{|a|(|a|+1)b(b+1)c(c+1)}{(b+1)(b+2)(c+1)(c+2)}\right)\left(\frac{(b+2)(c+2)\Gamma(1-(a+2))}{(c+2)-(b+2)}\right)\\
&\times\left(\frac{\Gamma(b+2)}{1-(|a|+2)+(b+2)}-\frac{\Gamma(c+2)}{1-(|a|+2)+(c+2)}\right)\\
&+(3-2\alpha\,\lambda-\alpha)\left(\frac{|a|bc}{(b+1)(c+1)}\right)\left(\frac{(b+1)(c+1)\Gamma(1-(|a|+1))}{(c+1)-(b+1)}\right)\\
&\times\left(\frac{\Gamma(b+1)}{1-(|a|+1)+(b+1)}-\frac{\Gamma(c+1)}{1-(|a|+1)+(c+1)}\right)\\
&+(1-\alpha)\,\frac{bc\Gamma(1-|a|)}{c-b}\left[\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)}-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)}\right]-(1-\alpha)\\
=\;&(1-\alpha\lambda)\left(\frac{bc\,(-|a|)(-(|a|+1))\,\Gamma(1-(|a|+2))}{c-b}\right)\left(\frac{(b+1)\,b\,\Gamma(b)}{1-|a|+b}-\frac{(c+1)\,c\,\Gamma(c)}{1-|a|+c}\right)\\
&-(3-2\alpha\,\lambda-\alpha)\left(\frac{bc(-|a|)\Gamma(1-(|a|+1))}{c-b}\right)\left(\frac{b\,\Gamma(b)}{1-|a|+b}-\frac{c\,\Gamma(c)}{1-|a|+c}\right)\\
&+(1-\alpha)\,\frac{bc\Gamma(1-|a|)}{c-b}\left[\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)}-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)}\right]-(1-\alpha)
\end{aligned}
$$

利用 $\Gamma(1-a) = -a\Gamma(-a)$，上述方程化简为

$$= \left(\frac{bc\,\Gamma(1-|a|)}{c-b}\right) \times \left[\frac{(b-1)(b(1-\alpha\lambda)-(1-\alpha))\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)} - \frac{(c-1)\,(c(1-\alpha\lambda)-(1-\alpha))\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)}\right] + \alpha - 1$$

当且仅当方程（15）成立时，上述表达式的上界为 $\alpha-1$，这就完成了证明。□

引理 16。 [8] 如果 $f \in \mathcal{R}^{\tau}(A,B)$ 具有形式（1），则

$$|a_n| \leq (A-B)\frac{|\tau|}{n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{17}$$

该结果是精确的。

利用引理 16，我们证明以下结果：

定理18。设 $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$、$b$、$c > 0$、$c \neq b$ 和 $|a| < \min\{1, b+1, c+1\}$ 且 $f \in \mathcal{R}^{\tau}(A,B) \cap \mathcal{V}$。则 $\mathcal{I}^{a}_{,b,b+1}{}^{c}_{,c+1}(f)(z) \in \mathcal{N}^{*}(\alpha,\lambda)$ 如果

$$\left(\frac{bc\,\Gamma(1-|a|)}{c-b}\left[\frac{(1-\alpha)-b(1-\alpha\lambda))\,\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)} - \frac{((1-\alpha)-c(1-\alpha\lambda))\,\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)}\right]\right) \times \left(\frac{(A-B)\,|\tau|}{(1-(A-B)\,|\tau|)}\right) \leq \alpha-1. \tag{19}$$

证明。设 f 为 (1) 的形式，属于类 $\mathcal{R}^{\tau}(A,B) \cap \mathcal{V}$。根据引理7，只需证明

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,[n(1-\alpha\lambda)-\alpha(1-\lambda)] \left(\frac{(|a|)_{n-1}\,(b)_{n-1}\,(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}\,(c+1)_{n-1}\,(1)_{n-1}}\right)|a_n| \leq \alpha-1$$

由于 $f \in \mathcal{R}^{\tau}(A,B) \cap \mathcal{V}$，由引理 16 可得

$$|a_n| \leq (A-B)\frac{|\tau|}{n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

令

$$\mathcal{T}_3(\alpha,\lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,[n(1-\alpha\lambda)-\alpha(1-\lambda)] \left(\frac{(|a|)_{n-1}\,(b)_{n-1}\,(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}\,(c+1)_{n-1}\,(1)_{n-1}}\right)|a_n|$$

我们推导出

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_3(\alpha,\lambda) &= (A-B)\,|\tau| \sum_{n=2}^{\infty} [n(1-\alpha\lambda)-\alpha(1-\lambda)] \left(\frac{(|a|)_{n-1}\,(b)_{n-1}\,(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}\,(c+1)_{n-1}\,(1)_{n-1}}\right) \\ &= (A-B)\,|\tau| \left((1-\alpha\lambda)\sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{(|a|)_{n-1}\,(b)_{n-1}\,(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}\,(c+1)_{n-1}\,(1)_{n-1}}\right)\right. \\ &\qquad \left. -\alpha\,(1-\lambda)\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(|a|)_{n-1}\,(b)_{n-1}\,(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}\,(c+1)_{n-1}\,(1)_{n-1}}\right)\right)\end{aligned}$$

$$= (A-B)|\tau|\left((1-\alpha\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+1)(|a|)_n(b)_n(c)_n}{(b+1)_n(c+1)_n(1)_n}\right)-(1-\alpha\lambda)\right.$$
$$\left.-\alpha(1-\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(|a|)_n(b)_n(c)_n}{(b+1)_n(c+1)_n(1)_n}\right)+\alpha(1-\lambda)\right)$$

利用引理 11 的结果 (1) 以及上述方程中的公式 (10)，我们推导出

$$= (A-B)|\tau|\left((1-\alpha\lambda)\frac{bc\,\Gamma(1-|a|)}{c-b}\left[\frac{(1-b)\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)}-\frac{(1-c)\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)}\right]\right.$$
$$\left.-\alpha(1-\lambda)\frac{bc\Gamma(1-|a|)}{c-b}\left[\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)}-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)}\right]+\alpha-1\right)$$
$$= (A-B)|\tau|\left(\frac{bc\,\Gamma(1-|a|)}{c-b}\left[\frac{(1-b)(1-\alpha\lambda)\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)}-\frac{(1-c)(1-\alpha\lambda)\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\alpha(1-\lambda)\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)}+\frac{\alpha(1-\lambda)\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)}\right]+\alpha-1\right)$$
$$= (A-B)|\tau|\left(\frac{bc\,\Gamma(1-|a|)}{c-b}\left[\frac{(1-\alpha)-b(1-\alpha\lambda))\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)}-\frac{((1-\alpha)-c(1-\alpha\lambda))\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)}\right]\right.$$
$$\left.+\alpha-1\right)$$

上述表达式不超过 $\alpha-1$ 当且仅当方程（19）成立，由此完成证明。□

定理 20. 设 $a\in\mathbb{C}\backslash\{0\}, b, c>0,\ c\neq b$ 和 $|a|<\min\{1, b+1, c+1\}$ and$f\in\mathcal{R}^{\tau}(A,B)\cap\mathcal{V}$。则 $\mathcal{I}^{a}_{,b,b+1}{}^{c}_{,c+1}(f)(z)\in\mathcal{M}^{*}(\alpha,\lambda)$ 如果

$$\left(\frac{(1-\alpha\lambda)\,bc\,\Gamma(1-|a|)}{c-b}\left[\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)}-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)}\right]\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\alpha(1-\lambda)\,bc}{(|a|-1)(b-1)(c-1)}\right)\left[\frac{\Gamma(2-|a|)}{c-b}\left(\frac{(c-1)\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)}-\frac{(b-1)\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)}\right)-1\right]\right)$$
$$\times\left(\frac{(A-B)|\tau|}{(1-(A-B)|\tau|)}\right)\leq\alpha-1. \tag{21}$$

证明。设 f 为形式（1）的函数，属于类 $\mathcal{R}^{\tau}(A,B)\cap\mathcal{V}$。根据引理5，只需证明

$$\sum_{n=2}^{\infty}[n(1-\alpha\lambda)-\alpha(1-\lambda)]\left(\frac{(|a|)_{n-1}(b)_{n-1}(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}(c+1)_{n-1}(1)_{n-1}}\right)|a_n|\leq\alpha-1$$

由于 $f\in\mathcal{R}^{\tau}(A,B)\cap\mathcal{V}$，根据引理 16，不等式 (17) 成立。令

$$\mathcal{T}_4(\alpha,\lambda) = \sum_{n=2}^{\infty}[n(1-\alpha\lambda)-\alpha(1-\lambda)]\left(\frac{(|a|)_{n-1}(b)_{n-1}(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}(c+1)_{n-1}(1)_{n-1}}\right)|a_n|$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_4(\alpha,\lambda) &= (A-B)|\tau| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}\left[n(1-\alpha\lambda)-\alpha(1-\lambda)\right] \left(\frac{(|a|)_{n-1}(b)_{n-1}(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}(c+1)_{n-1}(1)_{n-1}}\right) \\
&= (A-B)|\tau| \left((1-\alpha\lambda)\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(|a|)_{n-1}(b)_{n-1}(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}(c+1)_{n-1}(1)_{n-1}}\right)\right. \\
&\quad \left. -\alpha(1-\lambda)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(|a|)_{n-1}(b)_{n-1}(c)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}(c+1)_{n-1}(1)_{n-1}}\right)\right) \\
&= (A-B)|\tau| \left((1-\alpha\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(|a|)_{n}(b)_{n}(c)_{n}}{(b+1)_{n}(c+1)_{n}(1)_{n}}\right)-(1-\alpha\lambda)\right. \\
&\quad \left. -\alpha(1-\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(|a|)_{n}(b)_{n}(c)_{n}}{(b+1)_{n}(c+1)_{n}(1)_{n+1}}\right)+\alpha(1-\lambda)\right)
\end{aligned}$$

在上述方程中使用公式 (10) 和引理 11 的结果 (4)，可得

$$\begin{aligned}
&= (A-B)|\tau| \left((1-\alpha\lambda)\frac{bc\,\Gamma(1-|a|)}{c-b}\left[\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(1-a+b)}-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)}\right]\right. \\
&\quad -\left(\frac{\alpha(1-\lambda)bc}{(|a|-1)(b-1)(c-1)}\right)\left[\frac{\Gamma(2-|a|)}{c-b}\left(\frac{(c-1)\Gamma(b)}{\Gamma(1-|a|+b)}-\frac{(b-1)\Gamma(c)}{\Gamma(1-|a|+c)}\right)-1\right] \\
&\quad \left.+\alpha-1\right)
\end{aligned}$$

上述表达式不超过 $\alpha-1$ 的充要条件是方程 (21) 成立，证毕。□

References

[1] G.E.Andrews、R.Askey 和 R.Roy，1999，《特殊函数》，《数学及其应用百科全书》第71卷，剑桥大学出版社，剑桥。[2] T.Bulboaca 和 G.Murugusundaramoorthy，（2020），《涉及帕斯卡分布级数的正系数单叶函数》，《韩国数学会通讯》35，第3期，867–877页。[3]K.Chandrasekran 和 D.J.Prabhakaran，《广义超几何函数与稳定函数的几何性质》，博士论文，2022年5月。[4] K.Chandrasekran 和 D.J.Prabhakaran，《克劳森型超几何函数的几何性质》，预印本。[5] K.Chandrasekran 和 D.J.Prabhakaran，《涉及克劳森型超几何函数的Hohlov型积分算子》，预印本。[6]K.Chandrasekran 和 D.J.Prabhakaran，《利用卷积方法研究${}_4F_3\left(\begin{smallmatrix}a_1,&a_2,&a_3,&a_4\\ b_1,&b_2,&b_3,&\end{smallmatrix};z\right)$ 超几何函数的单叶性、星形性和凸性性质》，预印本。[7] K.Chandrasekran 和 D.J.Prabhakaran，《与广义超几何函数的卷积》，预印本。[8] K. K. Dixit 和 S. K. Pal，《关于一类与复阶相关的单叶函数》，《印度纯粹与应用数学杂志》26（1995），第9期，889–896页。[9] A. W. Goodman，《单叶函数》，第I卷和第II卷，佛罗里达州坦帕：Mariner Publishing Company，（1983）。

[10] A. R. Miller 和 R. B. Paris, 《具有整数参数差的克劳森级数 ${}_3F_2(1)$及超几何函数 ${}_2F_2(x)$的变换》, 《积分变换与特殊函数》23（2012）, 第1期, 21–33页。[11] G. Murugusundaramoorthy, 《涉及泊松分布级数的正系数单叶函数》, 《Honam数学杂志》40（2018）, 第3期, 529–538页。[12] K. S. Padmanabhan, 《关于一类在单位圆盘内导数具有正实部的函数》, 《波兰数学年刊》23（1970/71）, 73–81页。[13] M. A. Shpot 和 H. M. Srivastava, 《具有单位自变量且参数差为负整数的克劳森型超几何函数 ${}_3F_2$ 》, 《应用数学与计算》259（2015）, 819–827页。[14] B. A. Uralegaddi、M. D. Ganigi 和 S. M. Sarangi, （1994）, 《正系数单叶函数》, 《淡江数学杂志》25, 第3期, 225–230页。K. Chandrasekran, Research Scholar, Department of Mathematics, MIT Campus, AnnaUniversity, Chennai 600 044, India电子邮箱：kchandru2014@gmail.comG. Murugusundaramoorthy, School of Advanced Sciences, Vellore Institute of Tech-nology, Vellore-632014, India电子邮箱：gmsmoorthy@yahoo.comD. J. Prabhakaran, Department of Mathematics, MIT Campus, Anna University, Chen-nai 600 044, India电子邮箱：asirprabha@gmail.com