mock-Lie 双代数与经典 Yang-Baxter 方程的 mock-Lie 类比

K. Benali[1] *、T. Chtioui[1] †、A. Hajjaji[1] ‡ 和 S. Mabrouk[2]
§ 1. 斯法克斯大学理学院，BP 1171，3038 斯法克斯，突尼斯。
2. 加夫萨大学理学院，2112 加夫萨，突尼斯。

arXiv:2301.12928v2 [math.RA] 3 Feb 2023

摘要

本文旨在引入 mock-Lie 双代数的概念，该概念等价于 mock-Lie 代数的 Manin 三元组。对一种称为余边界 mock-Lie 双代数的特殊情形进行研究，由此引入 mock-Lie 代数上的 mock-Lie Yang-Baxter 方程，该方程是李代数上经典 Yang-Baxter 方程的一种类比。注意，mock-Lie Yang-Baxter 方程的斜对称解给出一个 mock-Lie 双代数。最后，研究$\mathcal{O}$-算子的概念，以构造 mock-Lie Yang-Baxter 方程的斜对称解。

关键词：mock-Lie 代数、mock-Lie 双代数、匹配对、Manin 三元组、mock-Lie Yang-Baxter 方程、$\mathcal{O}$-算子。
M. S. C（2020年）：16W10、16T10、16T15、16T25、17B38。

目录

1 引言 **1**2 预备知识 **3**3 匹配对、Manin 三元组与 mock-Lie 双代数 **5**4 余边界 mock-Lie 双代数与 mock-Lie Yang-Baxter 方程 **9****5** $\mathcal{O}$-算子与 mock-Lie 代数的 mock-Lie Yang-Baxter 方程 **14**

1 引言

前些年，文献中出现了一类新的代数，称为 mock-Lie 代数。它们是满足雅可比恒等式的交换代数。它们首次出现于 [18]，此后围绕这一主题开展了大量研究，例如[25, 37]。这类代数具有双重身份：既属于一类非常特殊的约当代数，又像是李代数的奇特近亲。李双代数和泊松李群理论可追溯至 20 世纪 80 年代初。

*电子邮箱：karimabenali172@yahoo.fr
†电子邮箱：chtioui.taoufik@yahoo.fr
‡电子邮箱：atefhajjaji100@gmail.com§电子邮箱：mabrouksami00@yahoo.fr（通讯作者）

泊松李群是配备了额外结构的李群：泊松括号满足与群乘法相容的相容条件。与泊松李群相关的无穷小对象是群单位元处的切向量空间，它以一种自然的方式构成李代数 $\mathfrak{g}$，例如参见 [16, 32]。群上的泊松结构在李代数上诱导出一种额外结构，而这实际上是在对偶向量空间上赋予李代数结构 $\mathfrak{g}^*$，使其满足与 $\mathfrak{g}$ 自身李括号相容的相容条件。这样的李代数连同其额外结构称为李双代数。因此，给定代数上的双代数结构由相应的一组余乘法，以及乘法与余乘法之间的一组相容条件构成[9]。例如，取一个有限维向量空间 V，并在其上给定一种代数结构；可以通过在对偶空间 V^* 上赋予相同的代数结构，并规定 V 上的结构与 V^*上的结构之间的一组相容条件来实现这一点。众所周知的双代数结构包括 [1,27]中引入的结合双代数和无穷小双代数。注意，这两种结构在 V和 V^*上具有相同的结合乘法。它们的区别仅在于相容条件：对于结合双代数，余乘法作为同态作用于乘法；对于无穷小双代数，余乘法则作为导子作用于乘法。一般而言，存在多种仅在相容条件上有所不同的双代数结构是很常见的。好的相容条件一方面应有充分的动机和潜在应用，另一方面应带来丰富的结构理论和有效的构造。更多详情另见 [6, 13, 17, 19–23， 29， 30， 34–36] 。

李双代数之所以有用，一个原因是它具有余边界理论，由此可以根据经典杨-巴克斯特方程的解构造李双代数。Yang-Baxter 方程起源于纯粹的物理学。它们最初由 Baxter、McGuire 和 Yang 在 [14, 15, 33] 中提出。后来，这个方程引起了科学家的关注，并成为数学物理中最基本的方程之一 [8,10]。也就是说，它在量子群理论的引入过程中发挥着关键作用。这种重要性也体现在许多其他领域，例如：量子群、结理论、编织范畴、可积系统分析、量子力学、非交换下降理论、量子计算、非交换几何等。文献 [31] 总结了 Yang-Baxter 方程的各种形式及其在物理学中的一些应用。许多科学家都找到了 Yang-Baxter 方程的解，但其解的完整分类仍是一个悬而未决的问题。在李双代数理论中，考虑余边界情形至关重要，因为它与经典 Yang-Baxter 方程理论相关 [5,7,9,26]。我们的目标是在 mock-Lie 情形中找到类似的理论。

本文组织如下：第 2 节回顾 mock-Lie 代数的一些基本定义和构造。第 3 节讨论匹配对、Manin 三元组和 mock-Lie 双代数。第 4 节介绍并发展余边界 mock-Lie 双代数和 mock-Lie Yang-Baxter 方程的概念。第 5 节给出 mock-Lie 代数的 $\mathcal{O}$-算子，并构造 mock-Lie Yang-Baxter 方程的一个解。

除非另有说明，所有向量空间和代数均为域 $\mathbb{K}$上的有限维特征零空间。

记号。设 V和 W为两个向量空间：

1. 记 τ： $V \otimes W \to W \otimes V$为交换同构， $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$。
2. 对于线性映射 Δ： $V \to \otimes^2 V$，我们使用 Sweedler 记号 $\Delta(x) = \sum_{(x)} x_1 \otimes x_2$ 表示 $x \in V$。为简化记号，我们通常省略求和符号 $\sum_{(x)}$ 。

3. 用 $V^* = Hom(V, \mathbb{K})$ 表示 V 的线性对偶。对于 $\varphi \in V^*$ 和 $u \in V$，我们记 $\langle \varphi, u \rangle := \varphi(u) \in \mathbb{K}$。

4. 对于线性映射 ϕ: $V \to W$，我们定义映射 ϕ^*: $W^* \to V^*$，如下:

$$\langle \phi^*(\xi), v\rangle = \langle \xi, \phi(v)\rangle, \ \forall v \in V, \xi \in W^*. \tag{1.1}$$

5. 对于 mock-Lie 代数（A, $\bullet$）中的元素 x 以及 $n \geq 2$，定义伴随映射 $L(x)$: $\otimes^n A \to \otimes^n A$ 为

$$L(x)(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = \sum_{i=1}^{n} y_1 \otimes \cdots \otimes y_{i-1} \otimes x \bullet y_i \otimes y_{i+1} \otimes \cdots \otimes y_n \tag{1.2}$$

对任意 y_1, ..., $y_n \in A$.。反之，给定 $Y = y_1 \otimes \cdots \otimes y_n$，我们定义 $L(Y)$: $\mathfrak{g} \to \otimes^n \mathfrak{g}$ 为

$$L(Y)(x) = L(x)(Y), \text{ for } x \in \mathfrak{g}.$$

2 预备知识

本节介绍有关 mock-Lie 代数和左 mock-pre-Lie 代数的一些预备知识。我们主要参考文献为 [2, 3, 11, 18]。

定义 2.1. mock-Lie 代数是一个二元组（A, $\bullet$），由一个向量空间 A 及其上的乘法 $\bullet$: $A \otimes A \to A$ 构成，并满足

$$x \bullet y = y \bullet x, \quad (\text{Commutativity}), \tag{2.1}$$
$$x \bullet (y \bullet z) + y \bullet (z \bullet x) + z \bullet (x \bullet y) = 0, \quad (\text{Jacobi identity}), \tag{2.2}$$

对任意 x, y, $z \in A$。雅可比恒等式（2.2）等价于

$$x \bullet (y \bullet z) = -(x \bullet y) \bullet z - y \bullet (x \bullet z). \tag{2.3}$$

换言之，由 $L(x)y = x \bullet y$ 定义的左乘 L: $A \to End(A)$ 是 A 上的反导子。回顾一下，若线性映射 D: $A \to A$ 对所有的 $x, y \in A$ 都满足，

$$D(x \bullet y) = -D(x) \bullet y - x \bullet D(y).$$

例2.1. 设 A 是一个以 $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 为基的 4 维向量空间。那么 $(A, \bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数，其乘积 $\bullet$ 在基 $\mathcal{B}$ 上定义为 $e_1 \bullet e_1 = e_2$, $e_1 \bullet e_3 = e_4$。

例2.2. 回顾一下，反结合代数是一个二元组 $(A, \star)$，由向量空间 A 和乘积 $\star$: $A \otimes A \to A$ 组成，且其反结合子为零，即

$$Aass(x, y, z) := (x \star y) \star z + x \star (y \star z) = 0, \quad \forall x, y, z \in A. \tag{2.4}$$

设 $(A, \star)$ 是一个反结合代数。那么，$(A, \bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数，其中 $x \bullet y := x \star y + y \star x$, $\forall x$, $y \in A$。

现在，我们回顾 mock-Lie 代数表示的定义。

定义2.2. mock-Lie 代数 $(A, \bullet)$ 的一个表示是一个二元组 (V, ρ)，其中 V 是一个向量空间，且 ρ: $A \to End(V)$ 是一个线性映射，并且对所有 $x, y \in A$，以下等式成立，

$$\rho(x \bullet y) = -\rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x). \tag{2.5}$$

例2.3. 设 $(A, \bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数。则 (A, L) 是 A 在自身上的一个表示，称为伴随表示。

An mock-Lie 代数表示的等价刻画见下文 g.

命题 2.4. 设 $(A, \bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数，V 是一个向量空间，且 $\rho: A \to End(V)$ 是一个线性映射。那么，(V, ρ) 是 A 的一个表示，当且仅当直和 $A \oplus V$ 配上如下定义的乘法后

$$(x+u) \bullet_{A\oplus V} (y+v) = x \bullet y + \rho(x)v + \rho(y)u, \ \forall x, y \in A, \ \forall u, v \in V, \tag{2.6}$$

是一个 mock-Lie 代数。这个 mock-Lie 代数称为 A 和 V 的半直积，记作 $A \ltimes_\rho V$。

定义 2.3. 设 $(A, \bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数，(V_1, ρ_1) 和 (V_2, ρ_2) 是两个表示。若线性映射 $\phi: V_1 \to V_2$ 满足

$$\rho_2(x) \circ \phi = \phi \circ \rho_1(x), \ \forall x \in A. \tag{2.7}$$

若 ϕ 是双射，则 (V_1, ρ_1) 和 (V_2, ρ_2) 等价（同构）。

为了在下一节将 mock-Lie 代数的匹配对与 mock-Lie 双代数及 mock-Lie 代数的 Manin 三元组联系起来，我们需要引入余伴随表示的概念，它是伴随表示的对偶表示。下面回顾这些事实。

设 $(A, \bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数，(V, ρ) 是 A 的一个表示。设 V^* 是 V 的对偶向量空间。定义线性映射 $\rho^*: A \to End(V^*)$ 如下：

$$\langle \rho^*(x)u^*, v\rangle = \langle u^*, \rho(x)v\rangle, \quad \forall x \in A, \ v \in V, \ u^* \in V^*, \tag{2.8}$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 V 与对偶空间 V^* 之间的通常配对。采用上述记号，我们有以下结论

命题 2.5. 设 (V, ρ) 是 mock-Lie 代数 $(A, \bullet)$ 的一个表示。那么 (V^*, ρ^*) 是 A 在 V^* 上的一个表示。

考虑 $V = A$ 的情形，并定义线性映射 $L^*: A \to End(A^*)$ 如下：

$$\langle L^*(x)(\xi), y\rangle = \langle \xi, L(x)y\rangle, \quad \forall x, y \in A, \ \xi \in A^*. \tag{2.9}$$

于是我们有以下结论：

推论 2.6. 设 $(A, \bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数，且 (A, L) 是 A 的伴随表示。则 (A^*, L^*) 是 $(A, \bullet)$ 在 A^* 上的一个表示，称为余伴随表示。

如 果对偶空间 A^* 上存在一个 mock-Lie 代数结构，我们将左乘记为 $\mathcal{L}$.

定义 2.4. 设 $(A, \bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数，且 (V, ρ) 是一个表示。若线性映射 $T: V \to A$ 满足 T，则称其为与 (V, ρ) 相关的 $\mathcal{O}$-算子

$$T(u) \bullet T(v) = T\big(\rho(Tu)v + \rho(Tv)u\big), \quad \forall u, v \in V. \tag{2.10}$$

在 $(V, \rho) = (A, L)$ 的情况下，$\mathcal{O}$-算子 T被称为 Rota-Baxter 算子（零权）。

定义 2.5。mock-pre-Lie 代数是一个配备了线性映射 $\cdot: A\otimes A\to A$ 的向量空间 A，满足以下恒等式

$$Aass(x,y,z)=-Aass(y,x,z),\quad \forall x,y,z\in A, \tag{2.11}$$

回忆一下，$Aass(x,\ y,\ z)=(x\cdot y)\cdot z+x\cdot(y\cdot z)$。因此，式（2.11）等价于

$$(x\star y)\cdot y=(x\cdot y)\cdot z-y\cdot(x\cdot z),$$

其中，对所有 $x,y\in A,\ x\star y=x\cdot y+y\cdot x$。

注意，若 $(A,\cdot)$ 是一个 mock-pre-Lie 代数，则由下式给出的乘积

$$x\star y=x\cdot y+y\cdot x,\quad \forall x,y\in A, \tag{2.12}$$

定义了一个 mock-Lie 代数结构，称为 $(A,\cdot)$ 的子相邻 mock-Lie 代数，记作 A^{ac}。此外，$(A,\cdot)$ 称为 A^{ac} 上相容的 mock-pre-Lie 代数结构。另一方面，设 $\Theta:\ A\to End(A)$ 由 $\Theta(x)y=x\cdot y,\ \forall x,y\in A$ 定义。则 (A,Θ) 是 mock-Lie 代数 A^{ac} 的一个表示。

命题 2.7. 设 $(A,\bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数，(V,ρ) 是 A 的一个表示。若 T 是与 (V,ρ) 相关联的一个 $\mathcal{O}$- 算子，则 $(V,\cdot)$ 是一个 mock-pre-Lie 代数，其中

$$u\cdot v=\rho(Tu)v,\quad \forall u,v\in V. \tag{2.13}$$

命题2.8. 设 $(A,\bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数。当且仅当存在一个与表示 (V,ρ) 相关联的可逆 $\mathcal{O}$-算子 $T:\ V\to A$ 时，才存在相容的 mock-pre-Lie 代数。此外，A 上的相容 mock-pre-Lie 结构由下式给出

$$x\cdot y=T\big(\rho(x)T^{-1}(y)\big),\quad \forall x,y\in A. \tag{2.14}$$

3 匹配对、Manin 三元组与 mock-Lie 双代数

本节介绍 mock-Lie 代数的 Manin 三元组以及 mock-Lie 双代数的概念。它们之间的等价关系将通过 mock-Lie 代数的匹配对来阐释。

我们首先回顾 mock-Lie 代数匹配对的概念（参见 [4]）。设 $(A,\bullet)$ 和 $(H,\diamond)$ 是两个 mock-Lie 代数。设 $\rho:\ A\to End(H)$ 和 $\mu:\ H\to End(A)$ 是两个线性映射。在底层向量空间的直和 $A\oplus H$ 上，定义线性映射 $\circ:\ \otimes^2(A\oplus H)\to A\oplus H$，如下所示

$$(x+a)\circ(y+b)=x\bullet y+\mu(b)x+\mu(a)y+a\diamond b+\rho(y)a+\rho(x)b,\ \forall x,y\in A,\ a,b\in H. \tag{3.1}$$

定理 3.1. 设 $(A,\bullet)$ 和 $(H,\diamond)$ 是两个 mock-Lie 代数。当且仅当 (H,ρ) 和 (A,μ) 分别是 $(A,\bullet)$ 和 $(H,\diamond)$ 的表示，且对所有 $x,y\in A,\ a,b\in H$，满足以下相容条件时，$(A\oplus H,\circ)$ 是一个 mock-Lie 代数：

$$\rho(x)(a\diamond b)+\rho(x)a\diamond b+a\diamond\rho(x)b+\rho(\mu(a)x)b+\rho(\mu(b)x)a=0, \tag{3.2}$$
$$\mu(a)(x\bullet y)+\mu(a)x\bullet y+x\bullet\mu(a)y+\mu(\rho(x)a)y+\mu(\rho(y)a)x=0. \tag{3.3}$$

定义 3.1. mock-Lie 代数的匹配对是一个四元组 $(A,H;\ \rho,\mu)$，由两个 mock-Lie 代数 $(A,\bullet)$ 和 $(H,\diamond)$，以及分别为 $\rho:\ A\to End(H)$ 和 $\mu:\ H\to End(A)$ 的表示组成，并满足相容条件 (3.2) 和 (3.3)。

注 3.1. 我们将由方程（3.1）定义的 mock-Lie 代数记作 $A \bowtie H$。容易证明，任何作为两个 mock-Lie 子代数的底层向量空间直和的 mock-Lie 代数，都可以由上述 mock-Lie 代数的匹配对得到。

定义 3.2. mock-Lie 代数 $(A, \bullet)$ 上的双线性型 ω 称为不变的，若其满足

$$\omega(x \bullet y, z) = \omega(x, y \bullet z), \quad \forall x, y, z \in A. \tag{3.4}$$

命题 3.2. 设 $(A, \bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数，且 (A, L) 是 A 在自身上的伴随表示。那么，(A, L) 与 (A^*, L^*) 作为 mock-Lie 代数 $(A, \bullet)$ 的表示等价，当且仅当存在 A 上的非退化对称不变双线性形式 ω。

证明. 假设存在 A 上的非退化对称不变双线性形式 ω。由于 ω 非退化，存在一个线性同构 ϕ: $A \to A^*$，其定义为

$$\langle \phi(x), y \rangle = \omega(x, y), \quad \forall x, y \in A.$$

因此，对于任意 $x, y, z \in A$，有

$$\begin{aligned} \langle \phi(L(x)(y)), z \rangle &= \omega(L(x)(y), z) = \omega(x \bullet y, z) = \omega(y, x \bullet z) \\ &= \langle \phi(y), x \bullet z \rangle = \langle L^*(x)\phi(y), z \rangle. \end{aligned}$$

也就是说, (A, L) 与 (A^*, L^*) 等价。反过来，采用类似的方法，可以得出结论 . □

定义 3.3. mock-Lie 代数的 Manin 三元组是由三个 mock-Lie 代数 (A, A^+, A^-) 以及向量空间 A 上的非退化对称不变双线性形式 ω 构成的三元组，并满足以下条件:

(a) A^+, A^- 是 A 的 mock-Lie 子代数。(b) $A = A^+ \oplus A^-$ 作为向量空间。(c) 关于 ω， A^+ 和 A^- 是各向同性的，也就是说，对于任意 $x_+, y_+ \in A^+, x_-, y_- \in A^-$，有 $\omega(x_+, y_+) = \omega(x_-, y_-) = 0$。

设 (A, A^+, A^-) 和 (B, B^+, B^-) 是两个 mock-Lie 代数的 Manin 三元组，分别关联于两个非退化对称不变双线性形式 ω_1 和 ω_2。它们之间的同态是一个 mock-Lie 代数同态 f: $A \to B$，满足

$$f(A^+) \subset B^+, \quad f(A^-) \subset B^-, \quad \omega_1(x, y) = \omega_2(f(x), f(y)), \ \forall x, y \in A.$$

此外，如果 f 是向量空间之间的同构，则称这两个 Manin 三元组同构。

定义 3.4. [24] 设 $(A, \bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数。假设对 A 的对偶空间 A^* 存在一个 mock-Lie 代数结构 $(A^*, \diamond)$，并且在底层向量空间 A 和 A^* 的直和 $A \oplus A^*$上存在一个 mock-Lie 代数结构，使得 $(A, \bullet)$ 和 $(A^*, \diamond)$ 是子代数，且 $A \oplus A^*$ 上的自然非退化对称双线性形式定义如下:

$$\omega_d(x + \xi, y + \eta) := \langle x, \eta \rangle + \langle \xi, y \rangle, \quad \forall x, y \in A, \ \xi, \eta \in A^*, \tag{3.5}$$

是不变的，则称 $(A \oplus A^*, A, A^*)$ 为与标准双线性型 ω_d相关联的 mock-Lie 代数标准 Manin 三元组。

显然，mock-Lie 代数的标准 Manin 三元组是一个 mock-Lie 代数的 Manin 三元组。反之，我们有

命题 3.3. 每个 mock-Lie 代数的 Manin 三元组都同构于一个标准 Manin 三元组。

证明。由于 A^+ 和 A^- 关于定义在 $A^+ \oplus A^-$上的非退化不变双线性型 ω 是各向同性的，因此在这种情况下， A^- 和 $(A^+)^*$ 可由 ω 识别，且 A^- 上的 mock-Lie 代数结构可转移到 $(A^+)^*$上。因此， $A^+ \oplus A^-$ 上的 mock-Lie 代数结构可转移到 $A^+ \oplus (A^+)^*$上。将非退化双线性型 ω 转移到 $A^+ \oplus (A^+)^*$上，我们得到由 (3.5) 给出的标准双线性型。因此，(A, A^+, A^-) 与标准 Manin 三元组 $(A \oplus A^*, A, A^*)$ 同构。 □

命题 3.4. *[24]* 设 $(A, \bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数。假设 A^* 上存在一个 mock-Lie 代数结构 $(A^*, \diamond)$。那么，当且仅当 $(A, A^*; L^*, \mathcal{L}^*)$ 是一个 mock-Lie 代数的匹配对时，向量空间 $A \oplus A^*$ 上存在一个 mock-Lie 代数结构，使得 $(A \oplus A^*, A, A^*)$ 关于由 (3.5) 定义的 ω_d 构成一个标准 Manin 三元组。这里， $\mathcal{L}^*$ 是 mock-Lie 代数 $(A^*, \diamond)$ 的余伴随表示。

命题 3.5. 设 $(A, \bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数。假设 A^* 上存在一个 mock-Lie 代数结构 $(A^*, \diamond)$。那么，$(A, A^*; L^*, \mathcal{L}^*)$ 是一个 mock-Lie 代数的匹配对，当且仅当对于任意 $x, y \in A, \xi \in A^*$，我们有

$$\mathcal{L}^*(\xi)(x \bullet y) + (\mathcal{L}^*(\xi)(x)) \bullet y + x \bullet (\mathcal{L}^*(\xi)(y)) + \mathcal{L}^*(L^*(x)(\xi))(y) + \mathcal{L}^*(L^*(y)(\xi))(x) = 0. \quad (3.6)$$

证明。 显然，式（3.6）在 $\rho = L^*$， $\mu = \mathcal{L}^*$ 的情况下恰好就是式（3.3）。此外，对于任意x, $y \in A$， ξ， $\eta \in A^*$，我们有

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{L}^*(\xi)(x \bullet y), \eta \rangle = \langle x \bullet y, \mathcal{L}(\xi)(\eta) \rangle = \langle L(x)(y), \xi \diamond \eta \rangle = \langle y, L^*(x)(\xi \diamond \eta) \rangle;\\
&\langle (\mathcal{L}^*(\xi)(x)) \bullet y, \eta \rangle = \langle L(\mathcal{L}^*(\xi)(x))(y), \eta \rangle = \langle y, L^*(\mathcal{L}^*(\xi)(x))(\eta) \rangle;\\
&\langle x \bullet (\mathcal{L}^*(\xi)(y)), \eta \rangle = \langle L(x)(\mathcal{L}^*(\xi)(y)), \eta \rangle = \langle \mathcal{L}^*(\xi)(y), L^*(x)(\eta) \rangle = \langle y, \mathcal{L}(\xi)(L^*(x)(\eta)) \rangle\\
&\qquad\qquad = \langle y, \xi \diamond (L^*(x)(\eta)) \rangle;\\
&\langle \mathcal{L}^*(L^*(x)(\xi))(y), \eta \rangle = \langle y, \mathcal{L}(L^*(x)(\xi))(\eta) \rangle = \langle y, (L^*(x)(\xi)) \diamond \eta \rangle;\\
&\langle \mathcal{L}^*(L^*(y)(\xi))(x), \eta \rangle = \langle x, \mathcal{L}(L^*(y)(\xi))(\eta) \rangle = \langle x, \eta \diamond (L^*(y)(\xi)) \rangle = \langle x, \mathcal{L}(\eta)((L^*(y)(\xi)) \rangle\\
&\qquad\qquad = \langle \mathcal{L}^*(\eta)(x), L^*(y)(\xi) \rangle = \langle L(\mathcal{L}^*(\eta)(x))(y), \xi \rangle = \langle y, L^*(\mathcal{L}^*(\eta)(x))(\xi) \rangle.
\end{aligned}$$

于是，式（3.2）成立当且仅当式（3.3）成立。因此结论成立。 □

定理 3.6. 设 $(A, \bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数。假设其对偶空间 A^* 上存在一个由线性映射 $\Delta^* : A^* \otimes A^* \to A^*$ 给出的 mock-Lie 代数结构 "$\diamond$"，即对于任意$\xi, \eta \in A^*$，有 $\xi \diamond \eta = \Delta^*(\xi \otimes \eta)$。那么，$(A, A^*; L^*, \mathcal{L}^*)$ 是一对 mock-Lie 代数的匹配对，当且仅当 $\Delta : A \to A \otimes A$ 满足以下条件：

$$\Delta(x \bullet y) = -\big(L(x) \otimes id + id \otimes L(x)\big)\Delta(y) - \big(L(y) \otimes id + id \otimes L(y)\big)\Delta(x), \quad (3.7)$$

对于任意的 x、$y \in A$。

证明。 利用命题 3.5，我们可以证明方程 (3.7) 等价于方程 (3.6)。事实上，对于任意x， $y \in A$， ξ， $\eta \in A^*$，有

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{L}^*(\xi)(x \bullet y), \eta \rangle = \langle x \bullet y, \xi \diamond \eta \rangle = \langle x \bullet y, \Delta^*(\xi \otimes \eta) \rangle = \langle \Delta(x \bullet y), \xi \otimes \eta \rangle;\\
&\langle (\mathcal{L}^*(\xi)(x)) \bullet y, \eta \rangle = \langle L(y)(\mathcal{L}^*(\xi)(x)), \eta \rangle = \langle \mathcal{L}^*(\xi)(x), L^*(y)(\eta) \rangle = \langle x, \mathcal{L}(\xi)(L^*(y)(\eta)) \rangle\\
&\qquad\qquad = \langle x, \xi \diamond (L^*(y)(\eta)) \rangle = \langle (id \otimes L(y))\Delta(x), \xi \otimes \eta \rangle;\\
&\langle x \bullet (\mathcal{L}^*(\xi)(y)), \eta \rangle = \langle L(x)(\mathcal{L}^*(\xi)(y)), \eta \rangle = \langle \mathcal{L}^*(\xi)(y), L^*(x)(\eta) \rangle = \langle y, \mathcal{L}(\xi)(L^*(x)(\eta)) \rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle y, \xi \diamond (L^*(x)(\eta))\rangle = \langle (id \otimes L(x))\Delta(y), \xi \otimes \eta\rangle;$$
$$\langle \mathcal{L}^*(L^*(x)(\xi))(y), \eta\rangle = \langle y, (L^*(x)(\xi)) \diamond \eta\rangle = \langle (L(x) \otimes id)\Delta(y), \xi \otimes \eta\rangle;$$
$$\langle \mathcal{L}^*(L^*(y)(\xi))(x), \eta\rangle = \langle x, (L^*(y)(\xi)) \diamond \eta\rangle = \langle (L(y) \otimes id)\Delta(x), \xi \otimes \eta\rangle.$$

于是，方程 (3.6) 等价于方程 (3.7)。因此结论成立。 □

注记3.2。由关于 $(A, \bullet)$ 和 $(A^*, \diamond)$ 的 mock-Lie 代数的对称性，在相对于 ω_d的 mock-Lie 代数标准 Manin 三元组中，我们也可以考虑一个线性映射 $\gamma: A^* \to A^* \otimes A^*$使得 $\gamma^*: A \otimes A \to A$ 给出 " $\bullet$ " 在 A 上的 mock-Lie 代数结构。容易证明， Δ 满足方程（ 3.7 ）当且仅当 γ 满足

$$\gamma(\xi \diamond \eta) = -\big(\mathcal{L}(\xi) \otimes id + id \otimes \mathcal{L}(\xi)\big)\gamma(\eta) - \big(\mathcal{L}(\eta) \otimes id + id \otimes \mathcal{L}(\eta)\big)\gamma(\xi), \tag{3.8}$$

对于任意的 $\xi, \eta \in A^*$。

定义 3.5. 设 $(A, \bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数。 A 上的 mock-Lie 双代数结构是指一个对称线性映射 $\Delta: A \to A \otimes A$ ，使得

1. $\Delta^*: A^* \otimes A^* \to A^*$ 在 A^*上定义了一个 mock-Lie 代数结构;
2. Δ 满足方程（3.7），称为相容条件。

我们将其记为（A， Δ）或（A， A^*）。

我们可以将相容条件方程（3.7）展开为

$$\Delta(x \bullet y) = -(x \bullet y_1) \otimes y_2 - y_1 \otimes (x \bullet y_2) - (y \bullet x_1) \otimes x_2 - x_1 \otimes (y \bullet x_2). \tag{3.9}$$

注 3.3. 事实上，相容条件方程（3.7）是文献 [12]中引入的 mock-Lie 代数之之字形上同调中的一个余循环条件。确实，我们可以通过伴随作用（1.2），将 $A^{\otimes 2}$ 视为一个 A-模:

$$x \cdot (y_1 \otimes y_2) = L(x)(y_1 \otimes y_2) = (x \bullet y_1) \otimes y_2 + y_1 \otimes (x \bullet y_2), \tag{3.10}$$

对于 $x \in A$ 和 $y_1 \otimes y_2 \in A^{\otimes 2}$。于是我们可以将线性映射 $\Delta: A \to A^{\otimes 2}$ 视为一个 1-余链。则 Δ上的微分为

$$\begin{aligned} d^1\Delta(x, y) &= \Delta(x \bullet y) + x \cdot \Delta(y) + y \cdot \Delta(x) \\ &= \Delta(x \bullet y) + L(x)(\Delta(y)) + L(y)(\Delta(x)). \end{aligned}$$

因此，方程（3.7）恰好说明 $\Delta \in C^1(A, A^{\otimes 2})$ 是一个1-余循环。

例 3.7. 设 (A, A^*) 是 mock-Lie 代数 $(A, \bullet)$上的一个 mock-Lie 双代数。则 $(A^*, \gamma(or(A^*, A))$是 mock-Lie 代数 $(A^*, \diamond)$上的一个 mock-Lie 双代数，其中 γ 由注 *3.2*给出。

定义 3.6. 设 (A_1, A_1^*) 和 (A_2, A_2^*) 是两个 mock-Lie 双代数。线性映射 $\psi: A_1 \to A_2$ 若满足以下条件，则称为 mock-Lie 双代数同态： ψ 对任意 $x, y \in A_1$

$$\psi(x \bullet_1 y) = \psi(x) \bullet_2 \psi(y), \qquad (\psi \otimes \psi) \circ \Delta_1 = \Delta_2 \circ \psi. \tag{3.11}$$

现在，结合命题 3.4 和定理 3.6，我们得到以下结论。

定理 3.8. 设 $(A, \bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数。假设 A^* 上存在一个 mock-Lie 代数结构，记作" $\diamond$ "，它由一个线性映射 $\Delta: A \to A \otimes A$ 定义。那么以下条件等价:

1. $(A \oplus A^*, A, A^*)$ 是关于 ω_d 由式(3.5)定义的 mock-Lie 代数标准 Manin 三元组。

2. $(A, A^*; L^*, \mathcal{L}^*)$ 是 mock-Lie 代数的一个匹配对。

3.（A, A^*）是一个 mock-Lie 双代数。

4 余边界拟李双代数与拟李 Yang-Baxter 方程

在本节中，我们考虑一类特殊的 mock-Lie 双代数，称为余边界 mock-Lie 双代数，并引入 mock-Lie Yang-Baxter 方程的概念。

定义 4.1. 若存在元素 $r \in A\otimes A$，使得对任意 $x \in A$，mock-Lie 双代数 (A, A^*) 称为余边界的，

$$\Delta(x) = \big(L(x) \otimes id - id \otimes L(x)\big)r. \tag{4.1}$$

引理 4.1. 设 $(A, \bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数，且 $r \in A \otimes A$。假设线性映射 $\Delta: A \to A \otimes A$ 由式 (4.1)定义。那么 Δ 满足式 (3.7)给出的相容条件。

证明。令 $r = r_1 \otimes r_2 \in A \otimes A$。利用 mock-Lie 代数的交换性和雅可比恒等式。于是，对任意 x, $y \in A$，有

$$\begin{aligned}
&-\big(L(x)\otimes id + id\otimes L(x)\big)\Delta(y) - \big(L(y)\otimes id + id\otimes L(y)\big)\Delta(x)\\
=&-\big(L(x)\otimes id + id\otimes L(x)\big)\big(L(y)\otimes id - id\otimes L(y)\big)r\\
&-\big(L(y)\otimes id + id\otimes L(y)\big)\big(L(x)\otimes id - id\otimes L(x)\big)r\\
=&-\big(L(x)\otimes id + id\otimes L(x)\big)\big((y\bullet r_1)\otimes r_2 - r_1\otimes(y\bullet r_2)\big)\\
&-\big(L(y)\otimes id + id\otimes L(y)\big)\big((x\bullet r_1)\otimes r_2 - r_1\otimes(x\bullet r_2)\big)\\
=&-\Big(x\bullet(y\bullet r_1)\otimes r_2 - (x\bullet r_1)\otimes(y\bullet r_2) + (y\bullet r_1)\otimes(x\bullet r_2) - r_1\otimes(x\bullet(y\bullet r_2))\Big)\\
&-\Big(y\bullet(x\bullet r_1)\otimes r_2 - (y\bullet r_1)\otimes(x\bullet r_2) + (x\bullet r_1)\otimes(y\bullet r_2) - r_1\otimes(y\bullet(x\bullet r_2))\Big)\\
=&\big(-x\bullet(y\bullet r_1) - y\bullet(x\bullet r_1)\big)\otimes r_2 + r_1\otimes\big(x\bullet(y\bullet r_2) + y\bullet(x\bullet r_2)\big)\\
=&\big((x\bullet y)\bullet r_1\big)\otimes r_2 - r_1\otimes\big((x\bullet y)\bullet r_2\big) = \big(L(x\bullet y)\otimes id - id\otimes L(x\bullet y)\big)r\\
=&\Delta(x\bullet y).
\end{aligned}$$

证毕。 □

设 $\Delta: A \to A \otimes A$ 是一个线性映射，并将 $\sigma: A^{\otimes 3} \to A^{\otimes 3}$ 定义为 $\sigma(x \otimes y \otimes z) = y \otimes z \otimes x$，对任意 $x, y, z \in A$。设 $E_\Delta: A \to A^{\otimes 3}$ 是由下式给出的线性映射

$$E_\Delta(x) = (id + \sigma + \sigma^2)\big((id\otimes\Delta)\Delta(x)\big). \tag{4.2}$$

引理 4.2. 设 A 为一个向量空间，且 $\Delta: A \to A \otimes A$ 为一个线性映射。那么，A^* 中的乘积 " $\diamond$ " 由 $\Delta^*: A^* \otimes A^* \to A^*$ 给出，当且仅当 $E_\Delta = 0$ 时满足雅可比恒等式。

证明. 对任意 ξ、$\eta \in A^*$、$x \in A$，我们有

$$\langle \xi \diamond \eta, x\rangle = \langle \Delta^*(\xi\otimes\eta), x\rangle = \langle \xi\otimes\eta, \Delta(x)\rangle. \tag{4.3}$$

因此，对任意 ξ、η、$\nu \in A^*$ 和 $x \in A$，雅可比恒等式满足

$$\begin{aligned}
&\langle J(\xi,\eta,\nu), x\rangle\\
=&\langle \Delta^*(id\otimes\Delta^*)(\xi\otimes\eta\otimes\nu) + \Delta^*(id\otimes\Delta^*)(\eta\otimes\nu\otimes\xi) + \Delta^*(id\otimes\Delta^*)(\nu\otimes\xi\otimes\eta), x\rangle\\
=&\langle \Delta^*(id\otimes\Delta^*)\big(id+\sigma+\sigma^2\big)(\xi\otimes\eta\otimes\nu), x\rangle\\
=&\langle \xi\otimes\eta\otimes\nu, \big(id+\sigma+\sigma^2\big)((id\otimes\Delta)\Delta)(x)\rangle.
\end{aligned}$$

因此，对于任意 ξ、η、$\nu \in A^*$，$J(\xi,\eta,\nu) = 0$ 当且仅当 $E_\Delta = 0$。 □

设 $(A,\bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数，且 $r=\sum_i a_i\otimes b_i\in A\otimes A$。令

$$r_{12}=\sum_i a_i\otimes b_i\otimes 1,\quad r_{13}=\sum_i a_i\otimes 1\otimes b_i,\quad r_{23}=\sum_i 1\otimes a_i\otimes b_i, \tag{4.4}$$

其中，若（A，$\bullet$）是含幺的，则 1 是单位元；若属于非幺情形，则 1 是起类似单位作用的符号。两个 r_{ij} 之间的运算显而易见。例如，

$$r_{12}\bullet r_{13}=\sum_{ij} a_i\bullet a_j\otimes b_i\otimes b_j,\ \ r_{13}\bullet r_{23}=\sum_{ij} a_i\otimes a_j\otimes b_i\bullet b_j,\ \ r_{23}\bullet r_{12}=\sum_{ij} a_j\otimes a_i\bullet b_j\otimes b_i. \tag{4.5}$$

注意，上述元素的定义与单位元是否存在无关。若张量 $r\in A\otimes A$ 满足 $r=\tau(r)$（分别满足 $r=-\tau(r)$），则称其为对称（分别为斜对称）。另一方面，任意 $r\in A\otimes A$ 都可以按如下方式视为从对偶空间 A^* 到 A 的线性映射：

$$\langle\xi,r(\eta)\rangle=\langle\xi\otimes\eta,r\rangle,\quad \forall\xi,\eta\in A^*. \tag{4.6}$$

若张量 $r\in A\otimes A$ 的上述诱导线性映射可逆，则称其为非退化 e.

命题 4.3. 设（A，$\bullet$）是一个 mock-Lie 代数。定义线性映射 $\Delta:A\to A\otimes A$，由满足以下 (4.1) 条件的某个 $r\in A\otimes A$ 通过方程定义

$$\big(L(x)\otimes id-id\otimes L(x)\big)\big(r+\tau(r)\big)=0, \tag{4.7}$$

对于所有 $x\in A$。则

$$E_\Delta(x)+Q(x)[[r,r]]=0, \tag{4.8}$$

其中

$$[[r,r]]=r_{12}\bullet r_{13}+r_{13}\bullet r_{23}-r_{12}\bullet r_{23}, \tag{4.9}$$

且对于任意 $x\in A$，有 $Q(x)=\big(L(x)\otimes id\otimes id+id\otimes L(x)\otimes id+id\otimes id\otimes L(x)\big)$。

证明。令 $r=\sum_i a_i\otimes b_i$，条件（4.7）等价于

$$\sum_i (x\bullet a_i)\otimes b_i-a_i\otimes(x\bullet b_i)+(x\bullet b_i)\otimes a_i-b_i\otimes(x\bullet a_i)=0. \tag{4.10}$$

注意到 $E_\Delta(x)$ 是十二项之和，而 $Q(x)[[r,r]]$ 是九项之和，但其中有两项在两个和式中出现，且符号相反，因而相互抵消。因此，$E_\Delta(x)+Q(x)[[r,r]]$ 是十七项之和。适当重新排列各项后，我们得到

$$\begin{aligned}
&E_\Delta(x)+Q(x)[[r,r]]\\
=&\sum_{i,j}\big\{-(x\bullet b_i)\bullet a_j\otimes b_j\otimes a_i+x\bullet(a_i\bullet a_j)\otimes b_i\otimes b_j+(x\bullet b_i)\bullet b_j\otimes a_i\otimes a_j\\
&-(b_i\bullet b_j)\otimes(x\bullet a_i)\otimes a_j+(a_i\bullet a_j)\otimes(x\bullet b_i)\otimes b_j+(b_i\bullet a_j)\otimes b_j\otimes(x\bullet a_i)\\
&+(a_i\bullet a_j)\otimes b_i\otimes(x\bullet b_j)-a_i\otimes(x\bullet b_i)\bullet a_j\otimes b_j+a_i\otimes a_j\otimes(x\bullet b_i)\bullet b_j\\
&+b_j\otimes(x\bullet a_i)\otimes(b_i\otimes a_j)-b_j\otimes a_i\otimes(x\bullet b_i)\bullet a_j-a_j\otimes(b_i\bullet b_j)\otimes(x\bullet a_i)\\
&+a_j\otimes(x\bullet b_i)\bullet b_j\otimes a_i-a_i\otimes x\bullet(b_i\bullet a_j)\otimes b_j-a_i\otimes(b_i\bullet a_j)\otimes(x\bullet b_j)\\
&+a_i\otimes(x\bullet a_j)\otimes(b_i\bullet b_j)+a_i\otimes a_j\otimes x\bullet(b_i\bullet b_j)\big\}.
\end{aligned}$$

交换第一项中的指标 i和 j，并在 A 中使用雅可比恒等式，第一项变为

$$\sum_{i,j} x\bullet(b_j\bullet a_i)\otimes b_i\otimes a_j+b_j\bullet(a_i\bullet x)\otimes b_i\otimes a_j.$$

使用方程（4.10），$b_j \bullet (a_i \bullet x) \otimes b_i \otimes a_j$ 与第三项和第四项之和为

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} \big(L(b_j) \otimes id\big)\big((a_i \bullet x) \otimes b_i + (x \bullet b_i) \otimes a_i - b_i \otimes (x \bullet a_i)\big) \otimes a_j \\
&\sum_{j} \big(L(b_j) \otimes id\big) \sum_{i} \big((a_i \bullet x) \otimes b_i + (x \bullet b_i) \otimes a_i - b_i \otimes (x \bullet a_i)\big) \otimes a_j \\
=&\sum_{i,j} \big(L(b_j) \otimes id\big)\big(a_i \otimes (x \bullet b_i)\big) \otimes a_j \\
=&\sum_{i,j} (a_i \bullet b_j) \otimes (x \bullet b_i) \otimes a_j.
\end{aligned}$$

类似地，$(a_i \bullet b_j) \otimes (x \bullet b_i) \otimes a_j$ 与第五项之和变为

$$\sum_{i,j} b_j \otimes (x \bullet b_i) \otimes (a_i \bullet a_j) + a_j \otimes (x \bullet b_i) \otimes (a_i \bullet b_j),$$

而第六项与第七项之和为

$$\sum_{i,j} a_j \otimes b_i \otimes x \bullet (a_i \bullet b_j) + b_j \otimes b_i \otimes x \bullet (a_i \bullet a_j).$$

最后，$x \bullet (b_j \bullet a_i) \otimes b_i \otimes a_j$ 与 $E_\Delta(x) + Q(x)[[r, r]]$ 表达式之和中的第二项之和变为

$$\sum_{i,j} b_j \otimes b_i \otimes a_i \bullet (x \bullet a_j) + a_j \otimes b_i \otimes a_i \bullet (x \bullet b_j).$$

代入这些结果，我们发现，$E_\Delta(x) + Q(x)[[r, r]]$ 的表达式可写成如下形式$\sum_i \big(a_i \otimes U_i + b_i \otimes V_i\big)$: 事实上，

$$\begin{aligned}
U_i = \sum_j \big\{ &- (b_j \bullet b_i) \otimes (x \bullet a_j) - (b_i \bullet a_j) \otimes (x \bullet b_j) + b_j \otimes x \bullet (a_j \bullet b_i) \\
&+ a_j \otimes x \bullet (b_i \bullet b_j) + (x \bullet b_j) \otimes (a_j \bullet b_i) + (x \bullet a_j) \otimes (b_i \bullet b_j) \\
&- x \bullet (b_i \bullet a_j) \otimes b_j + (x \bullet b_j) \bullet b_i \otimes a_j - (x \bullet b_i) \bullet a_j \otimes b_j \\
&+ a_j \otimes (x \bullet b_i) \bullet b_j + b_j \otimes (x \bullet b_i) \bullet a_j \big\}.
\end{aligned}$$

右边的前四项之和根据式（4.10）为零，而接下来的三项之和变为

$$x \bullet (b_i \bullet b_j) \otimes a_j.$$

根据 A中的雅可比恒等式，$x \bullet (b_i \bullet b_j) \otimes a_j$ 与第八项之和为

$$-b_j \bullet (x \bullet b_i) \otimes a_j.$$

最后，$-b_j \bullet (x \bullet b_i) \otimes a_j$ 与最后三项之和变为

$$\sum_j -b_j \bullet (x \bullet b_i) \otimes a_j - (x \bullet b_i) \bullet a_j \otimes b_j + a_j \otimes (x \bullet b_i) \bullet b_j + b_j \otimes (x \bullet b_i) \bullet a_j = 0,$$

若我们将 x 代入式（4.10）中的 $x \bullet b_i$，则可得 $U_i = 0$。类似地，我们可以证明

$$V_i = \sum_j \big\{(x \bullet b_j) \otimes (a_j \bullet a_i) + b_j \otimes x \bullet (a_j \bullet a_i) + b_j \otimes a_j \bullet (x \bullet a_i)$$

$$+(x\bullet a_j)\otimes(b_j\bullet a_i)-a_j\otimes(x\bullet b_j)\bullet a_i\big\}$$
$$=0.$$

因此结论成立。 □

根据上述讨论，我们得到以下结果。

定理 4.4. 设 $(A,\bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数，且 $r\in A\otimes A$。定义双线性映射 $\diamond: A^*\otimes A^*\to A^*$如下:

$$\langle\xi\diamond\eta,x\rangle=\langle\Delta^*(\xi\otimes\eta),x\rangle=\langle\xi\otimes\eta,\Delta(x)\rangle,$$

其中 Δ 由公式 (4.1)定义。那么 $(A^*,\diamond)$ 是 mock-Lie 代数，当且仅当满足以下条件:

$$\begin{aligned}&(i)\quad \big(L(x)\otimes id-id\otimes L(x)\big)\big(r+\tau(r)\big)=0,\\&(ii)\quad Q(x)[[r,r]]=0,\end{aligned}$$

对所有 $x\in A$。在这些条件下，(A,A^*) 是余边界 mock-Lie 双代数。

证明。括号 $\diamond$由余括号 $\Delta(x)=\big(L(x)\otimes id-id\otimes L(x)\big)r$确定。因此，$(A^*,\diamond)$ 是 mock-Lie 代数，当且仅当 $\diamond$是对称的并满足雅可比恒等式。

对于任意的 $x\in A$、ξ、$\eta\in A^*$，我们有

$$\begin{aligned}\langle\xi\diamond\eta-\eta\diamond\xi,x\rangle&=\langle\Delta^*(\xi\otimes\eta)-\Delta^*(\eta\otimes\xi),x\rangle=\langle\xi\otimes\eta,\Delta(x)-\tau\circ\Delta(x)\rangle\\&=\langle\xi\otimes\eta,\big(L(x)\otimes id-id\otimes L(x)\big)r-\tau\circ\big(\big(L(x)\otimes id-id\otimes L(x)\big)r\big)\rangle\\&=\langle\xi\otimes\eta,L(x)r_1\otimes r_2-r_1\otimes L(x)r_2-r_2\otimes L(x)r_1+L(x)r_2\otimes r_1\rangle\\&=\langle\xi\otimes\eta,\big(L(x)\otimes id-id\otimes L(x)\big)\big(r+\tau(r)\big)\rangle.\end{aligned}$$

则 r 满足 (i) 当且仅当 $\diamond$ 是对称的。证明 (ii) 等价于 $\diamond$ 满足雅可比恒等式的条件，这由引理 4.2 和命题 4.3得到。由于 $\Delta(x)=\big(L(x)\otimes id-id\otimes L(x)\big)r$，定义 3.5 中的 mock-Lie 双代数相容条件自然成立。因此结论得证。

□

注 4.1。 满足定理 (i) 和 (ii) 中的条件 4.4 的一种简单方法是假设 r 是斜对称的，并且

$$[[r,r]]=0 \tag{4.11}$$

分别地。式（4.11）是 mock-Lie 代数 中的 mock-Lie Yang-Baxter 方程 $(A,\ \bullet)$。拟三角 mock-Lie 双代数是余边界 mock-Lie 双代数，其中 r 是 mock-Lie Yang-Baxter 方程的一个解。三角 mock-Lie 双代数是余边界 mock-Lie 双代数，其中 r 是 mock-Lie Yang-Baxter 方程的一个斜对称解。

定理 4.4 的一个直接应用如下。

定理 4.5。 设 $(A,\ A^*)$ 是一个 mock-Lie 双代数。则在 $A\oplus A^*$ 上存在一个典范余边界 mock-Lie 双代数结构，使得 $i_1:\ A\to A\oplus A^*$ 和 $i_2:\ A^*\to A\oplus A^*$ 到两个直和分量中的映射都是 mock-Lie 双代数同态。这里，A 上的 mock-Lie 双代数结构为$(A,\ -\Delta_A)$，其中 Δ_A 由式 (4.1)给出。

证明。令 $r\in A\otimes A^*\subset(A\oplus A^*)\otimes(A\oplus A^*)$ 对应于恒等映射 $id:\ A\to A$。令$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 A的一组基，$\{f_1,\cdots,f_n\}$ 为其对偶基。于是 $r=\sum_i e_i\otimes f_i$。假设

mock-Lie 代数结构" $\circ_{D(A)}$ " 在 $A \oplus A^*$ 上的定义为 $D(A) = A \bowtie A^*$。根据式（3.1），有

$$x \circ_{D(A)} y = x \bullet y, \quad a^* \circ_{D(A)} b^* = a^* \diamond b^*, \quad x \circ_{D(A)} a^* = L^*(x)a^* + \mathcal{L}^*(a^*)x,$$

对于任意 x， $y \in A$， a^*， $b^* \in A^*$。接下来证明 r 满足定理 4.4中的两个条件。若成立，则

$$\Delta_{D(A)}(u) = (L_{\circ_{D(A)}}(u) \otimes id_{D(A)} - id_{D(A)} \otimes L_{\circ_{D(A)}}(u))r, \quad \forall u \in D(A)$$

可以在 $D(A)$ 上诱导出余边界 mock-Lie 双代数结构。由于

$$\langle \sum_i e_i \otimes f_i, f_s \otimes e_t \rangle = \langle e_t, f_s \rangle,$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\langle [[r,r]]_{D(A)}, (e_s + f_t) \otimes (e_k + f_l) \otimes (e_p + f_q) \rangle \\
=&\sum_{ij} \langle e_i \circ_{D(A)} e_j \otimes f_i \otimes f_j - e_i \otimes f_i \circ_{D(A)} e_j \otimes f_j + e_i \otimes e_j \otimes f_i \circ_{D(A)} f_j, (e_s + f_t) \otimes (e_k + f_l) \otimes (e_p + f_q) \rangle \\
=&\sum_{ij} \langle e_i \bullet e_j \otimes f_i \otimes f_j - e_i \otimes (\mathcal{L}^*(f_i)e_j + L^*(e_j)f_i) \otimes f_j + e_i \otimes e_j \otimes f_i \diamond f_j, (e_s + f_t) \otimes (e_k + f_l) \otimes (e_p + f_q) \rangle \\
=&\sum_{ij} \Big(\langle e_i \bullet e_j, f_t \rangle \langle f_i, e_k \rangle \langle f_j, e_p \rangle - \langle e_i, f_t \rangle \langle e_j, f_i \diamond f_l \rangle \langle f_j, e_p \rangle - \langle e_i, f_t \rangle \langle f_i, e_j \bullet e_k \rangle \langle f_j, e_p \rangle \\
&+ \langle e_i, f_t \rangle \langle e_j, f_l \rangle \langle f_i \diamond f_j, e_p \rangle \Big) \\
=&\langle e_k \bullet e_p, f_t \rangle - \langle e_p, f_t \diamond f_l \rangle - \langle f_t, e_p \bullet e_k \rangle + \langle f_t \diamond f_l, e_p \rangle \\
=&0,
\end{aligned}$$

我们得到 $[[r,r]]_{D(A)} = 0$。类似地，我们证明

$$\big(L_{\circ_{D(A)}}(u) \otimes id_{D(A)} - id_{D(A)} \otimes L_{\circ_{D(A)}}(u)\big)\big(r + \tau(r)\big) = 0,$$

对于所有 $u \in D(A)$。因此，根据定理 4.4，在 $D(A)$ 上存在余边界 mock-Lie 双代数结构。对于$e_i \in A$，我们有

$$\begin{aligned}
\Delta_{D(A)}(e_i) &= \sum_j \big\{ e_i \bullet e_j \otimes f_j - e_j \otimes e_i \circ_{D(A)} f_j \big\} \\
&= \sum_j \big\{ e_i \bullet e_j \otimes f_j - e_j \otimes \big(L^*(e_i)f_j + \mathcal{L}^*(f_j)e_i \big) \big\} \\
&= \sum_{j,m} \big\{ e_i \bullet e_j \otimes f_j - \langle f_j, e_i \bullet e_m \rangle e_j \otimes f_m - \langle f_j \diamond f_m, e_i \rangle e_j \otimes e_m \big\} \\
&= -\sum_{j,m} \langle f_j \diamond f_m, e_i \rangle e_j \otimes e_m \\
&= -\Delta_A(e_i).
\end{aligned}$$

因此， $i_1 :\ A \to A \oplus A^*$ 是 mock-Lie 双代数同态。类似地， $i_2 :\ A^* \to A \oplus A^*$ 也是 mock-Lie 双代数同态，因为 $\Delta_{D(A)}(f_i) = \Delta_{A^*}(f_i)$。 □

注记 4.2. 由定理 4.5 给出的上述 mock-Lie 双代数结构， $A \oplus A^*$ 称为 A 的双。我们将其记作 $D(A)$。

5 $\mathcal{O}$-算子、mock-Lie 代数与 mock-Lie Yang-Baxter 方程

本节中，我们用 $\mathcal{O}$-算子来诠释 mock-Lie Yang-Baxter 方程的解（见[28]）。设 V是一个向量空间。对于任意的 $r \in V \otimes V$, r ，都可以按如下方式视为从 V^* 到 V的映射：

$$\langle u^*, r(v^*)\rangle = \langle u^* \otimes v^*, r\rangle, \quad \forall u^*, v^* \in V^*, \tag{5.1}$$

其中， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是向量空间 V与对偶空间 V^*之间的普通配对。若张量$r \in V \otimes V$使上述诱导线性映射可逆，则称其为非退化的。此外，任意可逆线性映射 $T\colon V^* \to V$都会在 V上诱导一个非退化双线性型 $\omega(,)$，其定义为

$$\omega(u, v) = \langle T^{-1}(u), v\rangle, \quad \forall u, v \in V. \tag{5.2}$$

定义5.1. [11] mock-Lie 代数$(A, \cdot)$上的辛形式是满足以下条件的斜对称非退化双线性型 ω

$$\omega(x \bullet y, z) + \omega(y \bullet z, x) + \omega(z \bullet x, y) = 0, \quad \forall x, y, z \in A. \tag{5.3}$$

赋予辛形式的 mock-Lie 代数称为辛 mock-Lie 代数。

命题5.1. 设$(A, \bullet)$为一个 mock-Lie 代数，且 $r \in A \otimes A$ 为斜对称的。那么，当且仅当 r 满足以下条件时， r 是 A 中的 mock-Lie 杨–Baxter 方程的一个解

$$r(\xi) \bullet r(\eta) = r\big(L^*(r(\xi))\eta + L^*(r(\eta))\xi\big), \quad \forall \xi, \eta \in A^*. \tag{5.4}$$

证明。设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 A 的一组基， $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ 是其对偶基。由于 r 是斜对称的，我们可以设 $r = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} e_i \otimes e_j$, $a_{ij} = -a_{ji}$。假设 $e_i \bullet e_j = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k e_k$，其中$C_{ij}^k$是 mock-Lie 代数 A 关于基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$的结构系数，则可得

$$\begin{aligned}
r_{12} \bullet r_{13} &= \Big(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} e_i \otimes e_j \otimes 1\Big) \bullet \Big(\sum_{1\le p,q\le n} a_{pq} e_p \otimes 1 \otimes e_q\Big) \\
&= \sum_{1\le i,j,p,q,k\le n} C_{ip}^k a_{ij} a_{pq} e_k \otimes e_j \otimes e_q; \\
r_{13} \bullet r_{23} &= \sum_{1\le i,j,p,q,k\le n} C_{jq}^k a_{ij} a_{pq} e_i \otimes e_p \otimes e_k; \\
r_{12} \bullet r_{23} &= \sum_{1\le i,j,p,q,k\le n} C_{jp}^k a_{ij} a_{pq} e_i \otimes e_k \otimes e_q.
\end{aligned}$$

那么， r 是 A 中的 mock-Lie 杨–Baxter 方程的一个解，当且仅当

$$\sum_{1\le i,p\le n} \big(C_{ip}^k a_{ij} a_{pq} + C_{pi}^q a_{kp} a_{ji} - C_{ip}^j a_{ki} a_{pq}\big) e_k \otimes e_j \otimes e_q.$$

另一方面，由方程 (5.1)，可得 $r(e_j^*) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i = -\sum_{i=1}^n a_{ji} e_i$, $1 \le j \le n$。若取$\xi = e_j^*$, $\eta = e_q^*$并由方程 (5.4)可得

$$\sum_{1\le i,p\le n} \big(C_{ip}^k a_{ij} a_{pq} + C_{pi}^q a_{kp} a_{ji} - C_{ip}^j a_{ki} a_{pq}\big) e_k = 0.$$

因此，很容易看出 r 是 A 中的 mock-Lie 杨–Baxter 方程的解，当且仅当 r 满足式（5.4）。 □

例5.2. 设 $(A,\bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数。那么，零权 Rota-Baxter 算子是与伴随表示 (A,L) 相关联的 $\mathcal{O}$-算子（定义在 A 上），而 A 中 mock-Lie 杨–Baxter 方程的斜对称解是与表示 (A^*,L^*) 相关联的 $\mathcal{O}$-算子（定义在 A 上）。

推论5.3. 设 $(A,\bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数，且 $r\in A\otimes A$ 斜对称。假设在 A 上存在一个对称非退化不变双线性型 ω。令 $\phi:\ A\to A^*$ 为线性映射，对任意 $x,y\in A$，定义为 $\langle\phi(x)\ y\rangle=\omega(x,y)$。那么， r 是 mock-Lie 杨–Baxter 方程的解，当且仅当 $r\phi$ 是 A 上的零权 Rota-Baxter 算子。

证明. 对任意 $x,y\in A$，由于 $\phi(L(x)y)=L^*(x)\phi(y)$，我们有

$$\begin{aligned}\langle\phi(L(x)y),z\rangle&=\omega(x\bullet y,z)=\omega(y\bullet x,z)\\&=\omega(y,x\bullet z)=\langle L^*(x)\phi(y),z\rangle,\quad\forall x,y,z\in A.\end{aligned}$$

也就是说，表示 $(A,\ L)$ 与 $(A^*,\ L^*)$ 同构。令 $\xi=\phi(x)\ \eta=\phi(y)$，则由命题 5.1， r 是 中 mock-Lie 杨–Baxter 方程的解，当且仅当

$$\begin{aligned}r\phi(x)\bullet r\phi(y)=r(\xi)\bullet r(\eta)&=r\Big(L^*(r(\xi))\eta+L^*(r(\eta))\xi\Big)\\&=r\phi\Big(r\phi(x)\bullet y+x\bullet r\phi(y)\Big).\end{aligned}$$

因此结论成立。 □

设（A， $\bullet$）为一个 mock-Lie 代数。设（V， ρ）为 A 的表示，且 $\rho^*:\ A\to gl$（V^*）为对偶表示。线性映射 $T:\ V\to A$ 可视为 $A\otimes V^*\subset(A\ltimes_{\rho^*}V^*)\otimes(A\ltimes_{\rho^*}V^*)$ 中的一个元素，具体如下：设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 A 的一组基，设 $\{v_1,\cdots,v_m\}$ 为 V 的一组基， $\{v_1^*,\cdots,v_m^*\}$ 为 V^* 的对偶空间。令

$$T(v_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}e_k,\ i=1,\cdots,m.$$

由于作为向量空间， Hom（V， A）$\cong A\otimes V^*$，因此有

$$T=\sum_{i=1}^{m}T(v_i)\otimes v_i^*=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}e_k\otimes v_i^*\in A\otimes V^*\subset(A\ltimes_{\rho^*}V^*)\otimes(A\ltimes_{\rho^*}V^*).\tag{5.5}$$

定理5.4. 在上述记号下， $r=T-\tau$（T）是半直积 mock-Lie 代数（$A\ltimes_{\rho^*}V^*$）中 mock-Lie 杨–Baxter 方程的斜对称解，当且仅当 T 是与（V， ρ）相关联的 $\mathcal{O}$-算子。

证明。我们有

$$r=T-\tau(T)=\sum_{i=1}^{m}T(v_i)\otimes v_i^*-\sum_{i=1}^{m}v_i^*\otimes T(v_i),$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}r_{12}\bullet r_{13}&=\sum_{1\le i,j\le m}\Big(Tv_i\bullet Tv_j\otimes v_i^*\otimes v_j^*-\rho^*(Tv_i)v_j^*\otimes v_i^*\otimes Tv_j-\rho^*(Tv_j)v_i^*\otimes Tv_i\otimes v_j^*\Big);\\r_{12}\bullet r_{23}&=\sum_{1\le i,j\le m}\Big(-v_i^*\otimes Tv_i\bullet Tv_j\otimes v_j^*+Tv_i\otimes\rho^*(Tv_j)v_i^*\otimes v_j^*+v_i^*\otimes\rho^*(Tv_i)v_j^*\otimes Tv_j\Big);\end{aligned}$$

$$r_{13}\bullet r_{23}=\sum_{1\leq i,j\leq m}\Big(v_i^*\otimes v_j^*\otimes Tv_i\bullet Tv_j-Tv_i\otimes v_j^*\otimes\rho^*(Tv_j)v_i^*-v_i^*\otimes Tv_j\otimes\rho^*(Tv_i)v_j^*\Big).$$

根据对偶表示的定义，我们知道

$$\rho^*(Tv_j)v_i^*=\sum_{p=1}^m\langle v_i^*,\rho(Tv_j)v_p\rangle v_p^*.$$

Then

$$\begin{aligned}&\sum_{1\leq i,j\leq m}Tv_i\otimes\rho^*(Tv_j)v_i^*\otimes v_j^*=\sum_{1\leq i,j,p\leq m}\langle v_p^*,\rho(Tv_j)v_i\rangle Tv_p\otimes v_i^*\otimes v_j^*\\&=\sum_{1\leq i,j\leq m}T\Big(\langle v_p^*,\rho(Tv_j)v_i\rangle v_p\Big)\otimes v_i^*\otimes v_j^*=\sum_{1\leq i,j\leq m}T\Big(\rho(Tv_j)v_i\Big)\otimes v_i^*\otimes v_j^*.\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}r_{12}\bullet r_{13}&=\sum_{1\leq i,j\leq m}\Big(Tv_i\bullet Tv_j\otimes v_i^*\otimes v_j^*-v_i^*\otimes v_j^*\otimes T(\rho(Tv_j)v_i)-v_i^*\otimes T(\rho(Tv_j)v_i)\otimes v_j^*\Big);\\-r_{12}\bullet r_{23}&=\sum_{1\leq i,j\leq m}\Big(v_i^*\otimes Tv_i\bullet Tv_j\otimes v_j^*-T(\rho(Tv_j)v_i)\otimes v_i^*\otimes v_j^*-v_i^*\otimes v_j^*\otimes T(\rho(Tv_i)v_j)\Big);\\r_{13}\bullet r_{23}&=\sum_{1\leq i,j\leq m}\Big(v_i^*\otimes v_j^*\otimes Tv_i\bullet Tv_j-T(\rho(Tv_i)v_j)\otimes v_i^*\otimes v_j^*-v_i^*\otimes T(\rho(Tv_i)v_j)\otimes v_j^*\Big).\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&r_{12}\bullet r_{13}+r_{13}\bullet r_{23}-r_{12}\bullet r_{23}\\&=\sum_{1\leq i,j\leq m}\Big\{\Big(Tv_i\bullet Tv_j-T(\rho(Tv_i)v_j)-T(\rho(Tv_j)v_i)\Big)\otimes v_i^*\otimes v_j^*\\&\qquad+v_i^*\otimes v_j^*\otimes\Big(Tv_i\bullet Tv_j-T(\rho(Tv_i)v_j)-T(\rho(Tv_j)v_i)\Big)\\&\qquad+v_i^*\otimes\Big(Tv_i\bullet Tv_j-T(\rho(Tv_i)v_j)-T(\rho(Tv_j)v_i)\Big)\otimes v_j^*\Big\}.\end{aligned}$$

因此， r 是半直积 mock-Lie 代数 $(A\ltimes_{\rho^*}V^*)$ 中 mock-Lie 杨–Baxter 方程的一个解，当且仅当 T 是与 (V,ρ) 相关联的一个 $\mathcal{O}$-算子。 □

结合命题 5.1和定理 5.4，我们得到如下结论。

推论 5.5. 设 $(A,\bullet)$ 是一个 mock-Lie 代数，(V,ρ) 是 A的一个表示。令 $\widehat{A}=A\ltimes_{\rho^*}V^*$。设 $T:V\to A$ 是一个线性映射。则以下条件等价:

1. T 是与 (V,ρ) 相关联的 A 的一个 $\mathcal{O}$-算子。
2. $T-\tau(T)$ 是约当代数中的 mock-Lie 杨–Baxter 方程的斜对称解 $\widehat{A}$.
3. $T-\tau(T)$ 是与 $(A^*,L_{\widehat{A}}^*)$ 相关联的 mock-Lie 代数 $\widehat{A}$ 的 $\mathcal{O}$-算子。

注记 5.1. 上述 (1) 与 (3) 之间的等价性可通过直接证明得到，因此定理 5.4 由这一等价性和命题 5.1 得证。

以下结论揭示了 mock-pre-Lie 代数与带有辛形式的 mock-Lie 代数之间的关系：

命题5.6. 设 $(A, \bullet)$ 是带有辛形式 ω 的 mock-Lie 代数。那么 A 上存在一个相容的 pre-mock-Lie 代数结构 " $\cdot$ "，其定义如下：

$$\omega(x \cdot y, z) = \omega(y, x \bullet z), \quad \forall x, y, z \in A. \tag{5.6}$$

证明. 定义线性映射 $T\colon A \to A^*$，使得对任意 $x, y \in A$，有 $\langle T(x)\ y\rangle = \omega(x, y)$。对于任意 $\xi, \eta, \gamma \in A^*$，由于 T 可逆，存在 $x, y, z \in A$，使得 $Tx = \xi, Ty = \eta, Tz = \gamma$。于是 $T^{-1}\colon A^* \to A$ 是与 (A^*, L^*) 相关联的 A 的 $\mathcal{O}$-算子，因为对任意 $x, y, z \in A$，有

$$\begin{aligned}\langle T(x \bullet y), z\rangle &= \omega(x \bullet y, z) = \omega(y, x \bullet z) + \omega(x, y \bullet z)\\ &= \langle L^*(x)T(y), z\rangle + \langle L^*(y)T(x), z\rangle.\end{aligned}$$

根据命题 2.8，存在一个相容的 mock-pre-Lie 代数结构 " $\cdot$ " 上，其定义如下： A 给定为

$$x \cdot y = T^{-1}\big(L^*(x)T(y)\big), \quad \forall x, y \in A,$$

这意味着

$$\begin{aligned}\omega(x \cdot y, z) &= \langle T(x \cdot y), z\rangle = \langle L^*(x)T(y), z\rangle\\ &= \langle T(y), x \bullet z\rangle = \omega(y, x \bullet z), \quad \forall x, y, z \in A.\end{aligned}$$

证毕。 □

下面的推论给出了一种构造方法：从 mock-pre-Lie 代数出发，在某些 mock-Lie 代数中构造 mock-Lie 杨–Baxter 方程的解。

推论5.7. 设 $(A, \cdot)$ 是一个 mock-pre-Lie 代数。设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 A 的基，$\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ 是其对偶基。则

$$r = \sum_{i=1}^{n} (e_i \otimes e_i^* - e_i^* \otimes e_i) \tag{5.7}$$

是 mock-Lie 代数 $(A^{ac}) \ltimes_{\Theta^*} (A^{ac})^*$ 中 mock-Lie 杨–Baxter 方程的一个斜对称解。

证明。 由定理 5.4以及恒等映射 id 是一个 $\mathcal{O}$-算子这一事实可知，它属于与表示 相关联的 mock-pre-Lie 代数的子相邻 mock-Lie 代数 (A, Θ)。 □

参考文献

[1] M. AGUIAR，无穷小霍普夫代数，Contemporary Mathematics 267，美国数学会，(2000年) 1-29。2[2]S. ATTAN，Hom-(pre)-Jacobi-Jordan代数的表示与 O-算子。arXiv 预印本 arXiv:2105.14650（2021年）。3[3] A.L AGORE，和 G. MILITARU，关于一类交换代数，Linear Algebra and its Applications，（2015年）485，222-249。3[4] A.L AGORE，和 G. MILITARU，Jacobi-Jordan 代数的代数构造，Linear Algebra and its Applications，（2021年）630，158-178。5

[5] C. BAI，左对称双代数与经典杨-巴克斯特方程的一个类似物，《当代数学通讯》10(02)，（2008年），221-260。2[6] C. BAI，弗罗贝尼乌斯代数、Connes 余循环及其对偶性的双重构造，J. Non- commut. Geom.，4，（2010年），第475-530页。2[7] C. BAI，经典 Yang-Baxter 方程的统一代数方法，物理学杂志 A：数学与理论40（2007年），11073-11082。2[8] C. BAI、L. GUO 和 T. MA，Rota-Baxter 代数的双代数、弗罗贝尼乌斯代数与结合杨-巴克斯特方程，arXiv:2112.10928（2021年）。2[9] C. BAI、L. GUO、G. LIIU 和 T. MA，Rota-Baxter 李双代数、经典杨-巴克斯特方程与特殊 L-分 dendriform 双代数，arXiv:2207.08703 2[10] C. BAI、O. BELLIER、L. GUO 和 X. NI，运算的分裂、Manin 积与 Rota-Baxter 算子。《国际数学研究通知》，2013年(3)，485-524。2[11] A. BAKLOUTI、S. BENAYADI，辛 Jacobi-Jordan 代数，Linear and Multilinear Algebra。（2021年），69(8)，1557-1578。3，14[12] A. BAKLOUTI、S. BENAYADI、A. MAKHLOUF、S. MANSOUR，Jacobi-Jordan 代数的上同调与变形。ArXiv: 2109.12364（2021年）。8[13] I. BASDOURI、M. FADOUS、S. MABROUK、A. MAKHLOUF，泊松超双代数。arXiv 预印本 arXiv:2205.06184（2022年）。2[14] R.J. BAXTER，八顶点格点模型的配分函数。物理学年刊70（1972年）193-228。2[15] R.J. BAXTER，统计力学中的精确可解模型。Academic Press，伦敦，1982年。2[16] R. J. BAXTER，八顶点格点模型的配分函数，Ann. Phys. 70（1972年），193-228。2[17] D. BURDE，几何与物理学中的左对称代数和前李代数。Cent. Eur. J. Math. 4（2006年），323-357。2[18] D. BURDE、A. FIALOWSKI，Jacobi-Jordan 代数，Lin. Algebra Appl.495（2014年），586-594。1，3[19] V. CHARI、A. PRESSLEY，量子群指南，剑桥大学出版社，剑桥（1994年）。2[20] M. L. DASSOUNDO，前反柔性双代数。《代数通讯》49(9)（2021年），4050-4078。2[21] M. L. DASSOUNDO、C. BAI 和 M. N.HOUNKONNOU，反柔性双代数。《代数及其应用杂志》，（2021年）2250212。2[22] V.G. DRINFELD，李群、李双代数的哈密顿结构及经典杨-巴克斯特方程的几何意义。Soviet Math. Dokl.，27，（1983年），第68-71页。2

[23] M. FADOUS、S. MABROUK、A. MAKHLOUF，《关于 Hom-Lie 超双代数》。《代数通讯》47(1)（2019年），114-137。 2[24] C. E. HALIYA、G. D. HOUNDEDJI，《关于一种前 Jacobi-Jordan 代数：相关性质与双重构造》。 arXiv 预印本 arXiv:2007.06736（2020年）。 6、7[25] C. E. HALIYA、G. D. HOUNDEDJI，《具有对称不变非退化双线性形式的 Hom-Jacobi-Jordan 代数与 Hom-反结合代数》，《拟群及相关系统》29（2021年），61-88。 1[26] D. HOU、X. NI、C. BAI，《前 Jordan 代数》。《斯堪的纳维亚数学》（2013年），19-48。 2[27] S.A. JONI、G.C. ROTA，《组合学中的余代数与双代数》，《应用数学研究》61（1979年），93-139。 2[28] B.A. KUPERSHMIDT，《经典 r-矩阵究竟是什么》，《非线性数学物理杂志》6（1999年），448-488页。 14[29] A. MAKHLOUF、F. PANAITE，《Hom-双代数的 Yetter-Drinfeld 模》。《数学物理杂志》55(1)（2014年），013501。 2[30] T. MA、A. MAKHLOUF、S. SILVESTROV，《Rota–Baxter 余系统与余拟三角混合双代数》。《代数及其应用杂志》20(04)（2021年），2150064。 2[31] J.H.H. PERK、H. AU-YANG，《Yang-Baxter 方程》，arXiv:math-ph/0606053v1。 2[32] G. C. ROTA，《Baxter 算子导论》，载于：Gian-Carlo Rota 论组合学：导论性论文与评论，Joseph P. S. Kung 编，Birkh¨auser，波士顿，1995年。 2[33] C.N. YANG，《一维排斥性 δ 函数相互作用多体问题的一些精确结果》，《物理评论快报》19（1967年），1312-1315。 2[34] V. N. ZHELYABIN，《Jordan 双代数及其与李双代数的关系》。《代数与逻辑》36（1997年），1-15页。 2[35] V. N. ZHELYABIN，《Jordan D-双代数与 Jordan 代数上的辛形式》，《西伯利亚数学进展》10:2（2000年），142–150。 2[36] V. N. ZHELYABIN，《关于一类 Jordan D-双代数》，《圣彼得堡数学杂志》11（2000年），589–609。 2[37] P. ZUMANOVICH，《特殊与例外 mock-Lie 代数》，《线性代数及其应用》518（2017年），79-96。 1