arXiv:2301.12966v1 [physics.data-an] 30 Jan 2023

时序网络的李雅普诺夫指数

Annalisa Caligiuri[1],Victor M. Egu´ıluz[1],Leonardo di Gaetano[2],Tobias Galla[1] 和 Lucas Lacasa[1*]

[1]跨学科物理与复杂系统研究所（IFISC），CSIC-UIB，西班牙帕尔马。
[2]网络与数据科学系，中欧大学，奥地利维也纳 1100。

*通讯作者。电子邮箱：lucas@ifisc.uib-csic.es;

摘要

通过将时序网络解释为潜在图动力系统的轨迹，我们引入了时序网络动力不稳定性的概念，并构建了一种用于估计时序网络轨迹的网络最大李雅普诺夫指数（nMLE）的度量方法。我们将非线性时间序列分析中的传统算法方法扩展到网络，展示了如何量化对初始条件的敏感依赖，并直接从单条网络轨迹估计nMLE。我们针对一系列呈现低维和高维混沌的合成生成网络模型验证了该方法，最后讨论了其潜在应用。

关键词：李雅普诺夫指数、时序网络、混沌、复杂系统

1 引言

时序网络（TNs） [1–3] 是其拓扑结构随时间变化的图。它们是最简的数学模型，用于概括复杂系统中各元素交互架构如何动态变化。TNs 已成功应用于从流行病传播[4] 、航空运输 [6] 到神经科学 [7] 等多个领域；研究表明，在网络上运行的重要动态过程（例如流行病 [4]、同步、搜索 [5]）以 TN 作为基底时，与以静态网络为基底的情况相比，会呈现出性质上不同的涌现模式。这些

2 时序网络的李雅普诺夫指数

当图上运行的动力学的时间尺度与网络内在演化的时间尺度相当，即不存在明显的时间尺度分离时，这些影响尤其值得关注。然而，从原则性视角考察网络内在动力学的研究相对较少。近期，有人提出了一项研究计划[8]，其中，时序网络应被解释为潜在“图动力系统”（GDS）的轨迹。GDS 为网络的时间演化提供了一个显式模型。类似于传统动力系统（其输出是标量或向量量组成的时间序列），GDS 的输出是网络的时间序列，即一个时序网络。

时序网络和 GDS 的动力学确实是当前正在研究的对象。例如，在 [8] 中，作者考察了如何将信号的自相关函数扩展到图论框架。他们探索了时序网络如何发生振荡，以及谐波模态和各种形态的衰减线性时间相关性如何出现。类似地，研究者也从不同角度研究了时间网络的记忆，包括将记忆形状这一概念 [9]作为传统时间序列中记忆的多维扩展（高阶马尔可夫链理论）。在这项工作中，我们进一步推进上述研究框架，考察时序网络中的动力学不稳定性和混沌量化问题。将时序网络解释为图空间中的轨迹后，我们旨在推广李雅普诺夫指数这一概念，使其成为对初始条件敏感性的量化指标。我们的目标是定义并测量网络整体的李雅普诺夫指数以及对初始条件的敏感依赖性。因此，我们的方法并非量化例如每条边的动力学中的混沌，而是量化整个网络集体动力学中的混沌。

由于应用中的时序网络通常是通过经验观测获得的，我们将网络李雅普诺夫指数的算法实现与推断严格限定于对单条（较长）时变网络轨迹的观测，而无需访问底层图动力系统（当然，如果可以直接访问 GDS，该框架同样适用）。因此，我们的算法实现可以被视为 Wolf 和 Kantz [10–12, 14]，提出的经典算法在网络层面的概念推广；这些算法最初旨在直接根据经验观测到的时间序列量化对初始条件的敏感依赖（另见 [13]中的类似奠基性工作）。

重要的是，任何新方法都需要经过验证。对我们而言，这并非易事，因为现有文献中并不常见时序网络的混沌概念。因此，本研究的第二个目标是提出混沌时序网络的合成生成模型，可将其用作模板，以验证我们为量化时序网络中的混沌性而开发的方法。这些方法经过验证后，便可应用于更广泛的领域和进一步的研究。

本文其余部分的组织结构如下。在第2 节中，我们介绍本文工作的理论背景并规定相关符号。我们推导最大李雅普诺夫指数（MLE）的网络类比形式，并概述一种算法实现，用于估计局部扩张率谱、轨迹平均值和体积平均扩张率，以及网络最大李雅普诺夫指数（nMLE）等量。在第3节中，我们首先考察相对简单的随机网络动力学案例，展示该方法在此情形下的工作方式。随后，在第4节中，我们介绍一种（低维）混沌时序网络生成模型。该模型使我们能够“真实地”获得其生成的网络轨迹的 nMLE。我们展示了所提出的方法能够从网络轨迹中推断 nMLE，并正确重构这一“真实”指数。我们还评估了当混沌网络轨迹受到一定程度的噪声污染时，nMLE 的估计会受到怎样的影响，并在此讨论如何估计负 nMLE。在第5节中，我们介绍另一种（高维）混沌时序网络生成模型。我们证明，生成的时序网络表现出对初始条件的敏感依赖性，并且 nMLE 会随着网络耦合参数的变化而呈现预期变化。在第6 节中，我们最后总结全文，并讨论该方法的潜在应用。

2 理论与方法

2.1 图动力系统的李雅普诺夫指数

在非线性时间序列分析中，动力系统的最大李雅普诺夫指数 λ_{MLE} 量化了两个初始时彼此接近的轨迹随时间分离的程度。更准确地说，可以设想动力系统的两个副本，它们在时间 $t = 0$ 从相距 d_0 的初始条件出发。然后定义

$$\lambda_{\mathrm{MLE}} = \lim_{t\to\infty} \lim_{d_0\to 0} \frac{1}{t} \ln \frac{d_t}{d_0}, \tag{1}$$

where d_t is the distan^{两者之间的距离} n th两个副本ies of th^{动力系统}m at time t.
实际上，距离 d_0 通常很小但并非为零，而极限 $d_0 \to 0$ 可能无法达到。事实证明，长时间极限 $t \to \infty$ 同样无法达到，因为 d_t 的增长受系统吸引子大小 [16]的限制。在这种情况下， d_t 的行为通常会经历一次交叉转变（发生在我们标记为 τ的时刻），从指数扩张阶段（$t < \tau$）转变为饱和阶段（$t > \tau$）。在后一个阶段， d_t会围绕吸引子的大小波动。我们将 τ 称为饱和时间。

在网络环境中，我们假设存在一个（有时未知的）图动力系统，用于决定图随时间的演化。我们聚焦于离散时间。此时，GDS 是一个映射，用于决定

一个网络在下一个时间步演化。为简单起见，我们假设顶点集合是固定的，且各顶点彼此可区分并带有标签。因此，只有这些顶点之间的边集合随时间演化。GDS 的一条轨迹由一系列网络快照构成。这些轨迹定义了系统生成的时序网络 [1, 3]。每条轨迹由邻接矩阵序列表示$\mathcal{S} = (A_t)^{t\geq 0}$， $A_t = \{a_{ij;\,t}\}$; $i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$其中 $a_{ij;\,t} = 1$如果顶点 i和 j 在时间 t相连，则取该值，否则为零（这种对称设定适用于简单无向网络；但该方法基本上同样适用于非简单网络和有向网络，不过距离的定义中可能需要采用不同的归一化因子，见下文）。因此，我们考虑的是具有 n 个节点的带标签无权网络。

目前尚不清楚，用于量化两个原本接近的网络轨迹之间偏差的距离的具体选择是否至关重要。我们推测，只要该距离基于完整的邻接矩阵，而不是其投影，结果就应当与具体度量无关。这一推测基于动力系统中的一个事实：对于底层范数的不同选择，MLE 具有不变性 $||.||$ [14, 16]。图距离有很多种 [18]。为简单起见，我们采用一种直观的距离定义，该定义基于两个网络之间边重叠的数量：给定两个具有相同节点数 n 以及邻接矩阵A 和 B的网络，

$$d(A, B) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}|, \tag{2}$$

其中 i 和 j 取值范围为 1 到 n[1]。在我们的设定中，网络是简单且无权的。特别地，当 A 和 B 具有相同数量的边时，式（2）中定义的距离确实是重连距离，即它等于将 A 转换为 B所需的唯一重连操作数量，因此 d 是一个取正整数值的函数。随后可以根据需要进一步对 d 进行归一化，使其定义在 $[0, 1]$, 上，正如我们稍后将展示的那样。更多细节请参见附录，其中我们还介绍了其他距离。

2.2 网络李雅普诺夫指数的推断

2.2.1 局部扩张率

当我们不知道 GDS 的机制，且只能获得邻接矩阵的（单条）离散时间网络轨迹 $\mathcal{S} = (A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots\ldots)$ 时，我们关注的是量化对初始条件的敏感依赖（尤其是 λ_{MLE}的网络版本，即我们在此称为 λ_{nMLE} 的量）。这类似于从单条时间序列中重构传统动力系统的最大李雅普诺夫指数的情形。该

[1]当网络是简单无向网络且具有相同数量的边时，使用前因子可以得到归一化距离；否则需要采用不同的归一化方法。

标准方法是使用 Wolf 算法或 Kantz算法 [10–12, 14]。其核心思想是寻找轨道中的复现，即在时间序列中寻找一些点：它们在时间上可能相隔较远，但在相空间中彼此接近。然后，监测这些点随时间产生的偏离。这里，我们将这种方法扩展到网络时间序列的情况，即时间网络。

我们首先固定一个来自 $\mathcal{S}$的元素 A_t ，其中 t 是时间上的任意一点。这个邻接矩阵将作为我们分析的"初始条件"。为了扩展Wolf算法，我们接着在 $\mathcal{S}$ 中寻找另一个元素 $A_{t'}$，其对应的时间 t'不同，并且满足 $d(A_t, A_{t'}) < \epsilon$；其中， ϵ 是分析开始前选定的较小的 阈值[2]。相空间中的这次复现使我们能够利用单条轨迹，探究两个相近的网络如何随时间逐渐分离。接着，我们设定 $d_0 := d(A_t, A_{t'})$作为初始距离。随后，我们分别跟踪 A_{t+k}和 $A_{t'+k}$在 $\mathcal{S}$中的演化，以测量距离随时间的变化，其中 $k = 1, 2, \ldots$。我们记作 $d_k = ||A_{t+k} - A_{t'+k}||$。不失一般性，我们总可以将后续距离表示为一系列局部扩张率 $\ell_1, \ell_2, \ldots$，

$$d_k = d_{k-1} \exp(\ell_k). \tag{3}$$

每个 ℓ_k 都可能为正（局部膨胀）、负（局部收缩）或零。方程（3）通常描述两个最初彼此接近的轨迹（$d_0 < \epsilon$）随时间相互偏离的情况。它 ℓ_k 可能取决于 k，因为轨迹经过吸引子的不同部分时，扩张率可能会发生变化 [14]。接下来，我们将轨迹平均扩张率ℓ 定义如下

$$\ell = \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{\tau} \ell_k = \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{\tau} \ln \frac{d_k}{d_{k-1}}, \tag{4}$$

其中， τ 是前文定义的饱和时间。由于我们考虑的是一条固定轨迹（而非一组轨迹），因此我们有

$$\ell = \frac{1}{\tau} \ln \frac{d_\tau}{d_0}. \tag{5}$$

如果 GDS 是遍历的（即单条足够长的轨道能够充分遍历整个图相空间），那么当 τ 足够大时， ℓ 将收敛于网络最大李雅普诺夫指数 λ_{nMLE}，且与初始邻接矩阵 A_t 的选择无关。然而在实践中， τ 将是有限的，因此我们不能直接假定 ℓ 能够完整描述长期行为，也不能假定其与初始条件 A_t无关。因此，它被解释为局部李雅普诺夫指数 [15], ，并且需要对不同初始条件 A_t 下的该量取平均值，详见下文。

[2]在实践中， $A_{t'}$ 被选为 ϵ半径球内距离 A_t 最近的网络。

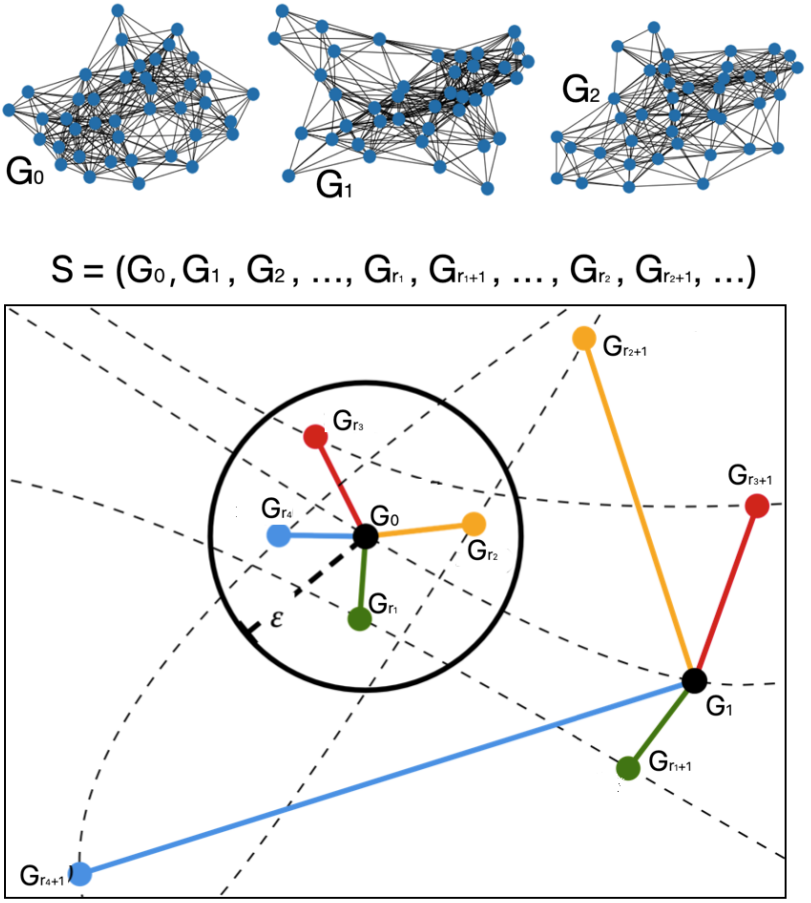

图 1 将时间网络 $\mathcal{S} = (G_0,\ G_1,\ G_2,\ ...)$ 示意为潜在图动力系统（GDS）的一条轨迹，并展示计算其网络最大李雅普诺夫指数（Kantz 版本） $\lambda^K_{\mathrm{nMLE}}$的方法。轨迹中的每个元素都是一个网络，即时间网络的一个快照。$\lambda^K_{\mathrm{nMLE}}$ 直接根据 $\mathcal{S}$ （即无需直接访问 GDS）估算：通过考察 $\mathcal{S}$ 中的复现，并量化不同网络快照周围的平均膨胀。在此示意图中，以任意一个 G_0 为中心固定半径为 ϵ 的球，并找到四次复现，其中 $d(G_0,\ G_r) < \epsilon$。对四次复现中的初始距离 $d(G_0,\ G_r)$ 取平均，并计算经过一个时间步后的平均距离 $d(G_1,\ G_{r+1})$。$\lambda^K_{\mathrm{nMLE}}$ 通过对时间、体积和不同初始条件 G_0 取平均来计算（详情见正文）。

2.2.2 Wolf 和 Kantz 方法：估计时序网络的最大李雅普诺夫指数

两条轨迹达到与吸引子大小同量级的距离所需的时间，取决于这两条轨迹最初彼此有多接近。换言之，饱和时间 τ 取决于 d_0，因此也取决于选择

阈值 ϵ。因此，极限 $d_0 \to 0$ 和 $\tau \to \infty$ 彼此相关。从概念上讲，我们希望轨迹在初始时尽可能接近，以便能够长时间监测扩张率，从而得到全局最大李雅普诺夫指数，而非局部李雅普诺夫指数。为此，我们需要足够长时间地跟踪扩张，同时还要避免距离受吸引子特征尺度限制的状态。

用于测量网络最大李雅普诺夫指数的广义沃尔夫方法。现在，我们构建 Wolf 方法的推广形式，以估计网络最大李雅普诺夫指数，并将其记为 $\lambda^W_{\mathrm{nMLE}}$。目标是计算 $\langle \ell \rangle = \langle \frac{1}{\tau} \ln \frac{d_\tau}{d_0} \rangle$，其中平均值取自对 A_t 和 $A_{t'}$ 的选择。实际操作中，我们考虑一组 w 个 A_t 的初始选择，并将其依次记为 $i = 1, \ldots, w$；对于每种选择，再取轨迹上的一个附加点 $A_{t'}$，使得 $d(A_t, A_{t'}) < \epsilon$。随后得到

$$\lambda^W_{\mathrm{nMLE}} = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{w} \ell(i), \tag{6}$$

其中 $\ell(i)$ 是轨迹平均扩张率 ℓ，针对第 i 个初始条件计算得到，依据公式（4）获得。

从算法角度来看，该方法的优点是无需固定 τ 的选择；我们能够根据在 $\mathcal{S}$ 中找到的具体 d_0，灵活地针对每个初始条件调整 τ。另一方面，该方法是逐点的，因为对于 A_t 的每一种选择，只考虑附近的单个 $A_{t'}$。因此，该方法不一定能够捕捉每个初始条件 A_t 周围的平均扩张率。

用于测量网络最大李雅普诺夫指数的广义坎茨方法。为了计算这样的平均扩张率（对于给定的 A_t 选择），对于固定的 A_t，需要对 $A_{t'}$ 在以 A_t 为中心、半径为 ϵ 的球中的选择所对应的扩张率进行平均。这种体积平均是坎茨的推广 [11, 12] Wolf 算法的基础，[10]，示意见图1。对于给定的初始条件 A_t，Kantz 方法提供轨迹平均和体积平均扩张率 $\langle \frac{1}{\tau} \ln \frac{d_\tau}{d_0} \rangle_{\mathrm{volume}}$。我们将 Λ 记为体积平均扩张率。对于固定的 A_t，可以按如下步骤通过算法获得该值。选择轨迹 $\mathcal{S}$ 中与 A_t 的距离均不超过 ϵ 的 N 个不同的 $A_{t'}$。将它们标记为 $j = 1$、...、...、N。对于每个 $A_{t'}$，随后根据公式（4）计算 $\ell(j)$。然后令

$$\Lambda(A_t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \ell(j), \tag{7}$$

其中，N 是我们在序列 $\mathcal{S}$ 中找到的、位于半径为 ϵ 且以 A_t 为中心的球内的初始条件数量。

实际上，Kantz 算法的执行方式略有不同。它不是先计算 $\ell(j)$，再对扩张率取平均，而是在距离层面直接计算 $A_{t'}$ 的平均值。也就是说，需要选择 N

如上所述的 $A_{t'}$，然后分别为每个 $j = 1$、.....、 N 和 $k = 0$、1、2、.....(k 取值至相关的截断时间) 获取 $d_k(j)$。然后令

$$\Lambda(A_t) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{N^{-1} \sum_{j=1}^{N} d_\tau(j)}{N^{-1} \sum_{j=1}^{N} d_0(j)}, \tag{8}$$

其中， τ 对所有 j 都是先验固定的。对数中的分子表示对球内 $A_{t'}$ （球以 A_t 为中心）的选择进行体积平均后得到的 d_τ，分母则是 d_0 的体积平均值。

需要强调的是，方程（7）和（8）在数学上并不相同，也不一定会得出相同的结果。虽然方程（7）允许针对每条轨迹调整精确值 τ （其取决于 d_0），但方程（8）要求我们在所有轨迹中使用统一的 τ 。后一个表达式考察以 A_t 为中心的初始小体积随时间的扩张；与方程（ 7 ）相比，它更能体现捕捉其底层非线性动力学的思路。因此，方程（8）是 Kantz方法的基础。

方程（ Λ）中的量仍是一个局部量，因为它是针对围绕 A_t 的固定选择所对应的相空间体积计算得出的。原则上，局部体积平均扩张率可能因相空间中的不同区域而异。因此，为了捕捉全局长期行为，我们还需要对 A_t 的选择进行平均，最终得到全局体积平均网络最大李雅普诺夫指数。

$$\lambda_{\mathrm{nMLE}}^{K} = \left\langle \frac{1}{\tau} \ln \frac{\langle d_\tau \rangle_{\mathrm{volume}}}{\langle d_0 \rangle_{\mathrm{volume}}} \right\rangle_{A_t}, \tag{9}$$

其中，我们将 $\langle \cdots \rangle_{A_t}$ 写作对初始条件 A_t 的平均值。实际上，这是通过对一组 w 个 A_t选项进行平均来实现的，即，

$$\lambda_{\mathrm{nMLE}}^{K} = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^{w} \Lambda(A_t^{(j)}) \tag{10}$$

其中 Λ（$A_t^{(j)}$ ）表示公式（8）中固定选择$A_t = A_t^{(j)}$ 的表达式。

我们注意到，饱和时间 τ 或球的半径ϵ 必须在进行一定的数值探索后再选定。事实上，当截断时间 τ 较大时，可以获得更好的李雅普诺夫指数估计。当初始距离 A_t 与$A_{t'}$ 之间较小时，情况便是如此，因此宜选择相对较小的 ϵ 值。然而， ϵ 值较小时，会使得在给定轨迹上寻找与 A_t 的距离至多为ϵ 的点 $A_{t'}$ 变得更加困难。实际上，需要在两者之间作出权衡。

总而言之，对于给定的时间网络轨迹（即一系列网络快照），我们首先在固定选择 A_t 和 $A_{t'}$ 的情况下，通过公式（3）测量局部扩张率 $\{\ell_k\}_{k=1}^{\tau}$ 。以这种方式获得的 ℓ_k 集合提供了有关局部扩张率波动的信息（对于固定的 A_t 和 $A_{t'}$），以及其轨迹平均值 ℓ。随后，我们可以沿两条可选路径继续进行。第一种方法是：（i）对不同初始条件 A_t [Eq. (6)]，的 ℓ 取平均，从而获得 Wolf 对网络最大李雅普诺夫指数的近似 $\lambda_{\mathrm{nMLE}}^{W}$。另一种方法是：（ii）对于每个初始条件$A_t$，先对 $A_{t'}$取平均。具体做法是计算体积的局部扩张 $\langle d_k \rangle_{\mathrm{volume}}$ ，然后在时间上对其取平均 [Eq. (8)]。接着，对 A_t 的不同选择重复这一过程，由此获得一个分布$P(\Lambda)$，用于描述网络相空间中不同点之间的波动。该分布的均值给出了 Kantz 对网络最大李雅普诺夫指数的近似 $\lambda_{\mathrm{nMLE}}^{K}$。

在接下来的章节中，我们将验证此方法在随机、低维和高维混沌时序网络中的有效性。

3 时间网络的白噪声等效物：独立同分布随机图

在讨论混沌动力学的情况之前，我们先简要讨论随机网络轨迹的情况，即时间上不存在相关性。此时，预期不会出现系统性的扩张或压缩，因此所得的李雅普诺夫指数应为零[3]。我们在此旨在验证这一点是否确实适用于我们提出的、用于估计时序网络李雅普诺夫指数的步骤。研究这一问题有多方面的意义，其中之一是，经验获得的时间序列可能看起来是随机的。此时，能够判断该轨迹是否与网络空间中的无关联随机轨迹相符，或是否与确定性混沌模型相符，就十分重要。

这里我们研究一个简单情形： $\mathcal{S}$ 是一列独立抽取的 Erd¨os-R´enyi 图，包含 n 个节点，且任意两个节点相连的概率为 p。这相当于时序网络中的白噪声，也就是说，时间网络呈现 δ 分布自相关函数 [8]。

与确定性 GDS 不同，网络轨迹上不同点之间的距离现在是随机变量。更准确地说，由于 $\mathcal{S}$ 中的所有元素都是 Erd¨os-R´enyi 图的邻接矩阵，因此这些矩阵的元素是伯努利变量，以 $1-p$ 的概率取值为零，以 p 的概率取值为一。对于相互独立的邻接矩阵 A 和 B， $|a_{ij} - b_{ij}|$ 的可能取值为零的概率为 $p^2 + (1-p)^2$, , 以及

[3]根据构造， $d_1 > d_0$ 由于我们强制 $d_0 < \epsilon$，因此为避免在 $k = 1$处出现伪膨胀，本节在估算有限李雅普诺夫指数时不考虑 d_0 ，也就是说，我们的起始时间为 $k = 1$。

取值为一的概率为 $2p(1-p)$。因此，我们有

$$d(A,B) \sim \text{Binomial}[n(n-1)/2, 2p(1-p)]. \tag{11}$$

式（11）在图 2的（a）面板中得到了数值验证。

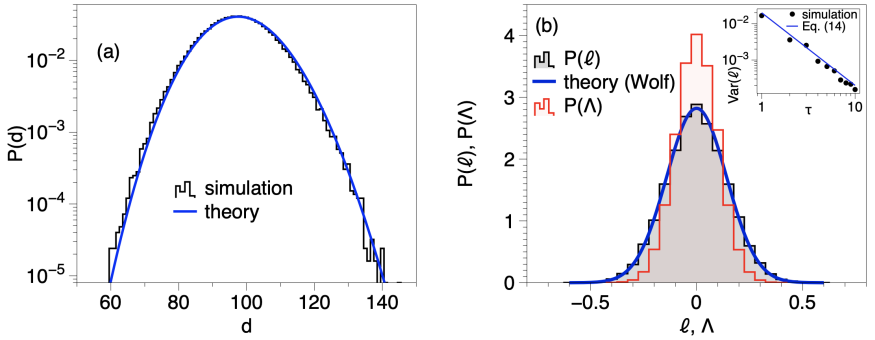

图 2（a）面板：独立同分布序列中连续网络之间距离的概率分布，其中网络为具有 $n = 100$ 个节点和 $p = 0.01$ 的 $|\mathcal{S}| = 10^5$ Erdős–Rényi 图（黑线）。图采用半对数坐标，因此高斯形状呈倒抛物线状，从而可以更清楚地观察尾部。蓝色实线为式（11）。（b）面板：与一组 $|\mathcal{S}| = 5 \cdot 10^4$ 独立同分布 ER 网络（$n = 100$、$p = 0.01$）相关的 $P(\ell)$（黑色）和 $P(\Lambda)$（红色），对应于 $\tau = 1$ 和 $w = \mathcal{O}(10^4)$ 初始条件。两种分布的均值（网络最大李雅普诺夫指数）对于两种方法都基本为零，但 Wolf 方法中围绕均值的离散程度更大。蓝色实线为理论预测，即均值为 0、方差如式（14）所示且满足 $\tau = 1$ 的高斯分布。（b）面板的插图显示，随着 τ 增大，ℓ 的方差如何减小（从而使围绕零网络最大李雅普诺夫指数的不确定性显著降低）：点表示在不同 τ 下、具有 $|\mathcal{S}| = 10^4$ 和 $w = 10^3$ 的不同数值模拟；蓝线为式（14）。

式（5）中的量 ℓ 由 $\ell = \frac{1}{\tau}(\ln\ d_\tau - \ln d_0)$ 给出。正如我们刚刚得出的结论，d_0 和 d_τ 是相互独立的二项随机变量，服从式（11）中的分布。对于大型网络（$n \gg 1$），该分布可近似为高斯分布，其均值为 $\mu = qn(n-1)/2$，方差为$\sigma^2 = q(1-q)n(n-1)/2$，其中我们记 $q \equiv 2p(1-p)$。令 $d_0 = \mu + \sigma z_0$，其中 z_0 为标准高斯随机变量，则有

$$\ln\ d_0 \approx \ln\left[\mu(1 + \frac{\sigma}{\mu} z_0)\right] = \ln\ \mu + \frac{\sigma}{\mu} z_0 - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\mu^2} z_0^2 + \ldots, \tag{12}$$

对 σ/μ 的幂级数展开后，其中后一个量的阶数为$\mathcal{O}(1/n)$。对 d_τ 也可以进行相同的展开，因此我们得到

$$\ell = \frac{1}{\tau}\left[\frac{\sigma}{\mu}(z_\tau - z_0) + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\mu^2}(z_0^2 - z_\tau^2)\right] + \ldots. \tag{13}$$

我们注意到，括号中的第二项在 $1/n$中属于次主导阶。因此， ℓ 在 $1/n$ 的最低阶近似下服从高斯分布，均值为零，方差为

$$\mathrm{Var}(\ell) = \frac{2}{\tau^2}\frac{\sigma^2}{\mu^2} = \frac{1}{\tau^2}\frac{4(1-q)}{qn(n-1)} \tag{14}$$

该理论已通过数值方法得到验证，在图2 的(b)面板中，我们绘制了$P(\ell)$，分别针对 $\tau = 1$ (外部面板)和方程14 ，以及递增的 τ (插图面板)。

对于 Λ (Kantz版本)，其直观上应比ℓ (Wolf版本)更快收敛，因为在这种情况下我们进行了两次平均，而不是一次，即 $P(\Lambda)$ 对于给定的τ，其方差应小于 $P(\ell)$。图2的(b)面板证实了这一点，其中我们还观察到，两种方法对网络最大李雅普诺夫指数都给出了相同的（正确）估计；在这种情况下，该值约为零（两种估计都在 10^{-6}量级）。注意，图2的主面板对应于 $\tau = 1$的情况，因此这是最坏情况：随着 τ 增加，Var(ℓ) 根据 [方程（14）] 而减小，围绕零值的不确定性也相应减小， [见图2(b)中的插图]。

我们无法为 $P(\Lambda)$ 找到闭式解，因为 ϵ-球内的平均值是随机变量，其分布明确取决于特定的初始条件 A_t：这一计算仍是一个开放问题。无论如何，我们得出结论：一个独立同分布的时间网络具有零最大李雅普诺夫指数，而该方法（两种变体）能够正确地估计出这一指数。

4 低维混沌网络

4.1 网络生成：字典技巧

为了能够在混沌动力学的背景下验证该方法，理想情况下，我们需要获得具有真实nMLE的混沌网络轨迹。由于目前尚无关于混沌GDS的通用理论，这一点很困难。为克服这一缺陷，本节将介绍一种方法：通过将在低维混沌映射中生成的低维混沌图空间时间序列进行符号化，构造混沌网络轨迹。图空间符号化方法最初在 [8] 中作为所谓的“字典技巧”提出，其步骤如下：

• 我们构建了一个网络字典 $\mathcal{D}$。这是一个网络集合，使我们能够将实值标量 $x \in [0,1]$[4] 映射为一个网络，从而在图空间中保留两个标量之间的距离。因此，集合 $\mathcal{D}$ 是有序的，并配备了一个度量，使得两个实值标量 $|x-x'|$ 之间的距离在图符号中得以保留。更具体地说，网络字典 $\mathcal{D} = (G_1、G_2、\ldots\ldots G_L)$ 满足 $d(G_p、G_q) \propto |p-q|$（随后可以根据字典的长度对 d 进行归一化，从而得到 $d \in [0,1]$）。

[4]我们不失一般性地选择区间 $[0,1]$ 。

•构建这样的网络字典后，任何一维时间序列都可以映射为网络序列。特别地，我们可以将具有已知最大李雅普诺夫指数的混沌时间序列映射为网络轨迹，并据此独立估计网络最大李雅普诺夫指数。

算法上，网络字典通过 $G_1 \sim \mathrm{ER}(p)$（参数为 p 的 Erd¨os-R´enyi 图）按顺序生成，随后通过重连一条边，迭代地从 G_k 构建G_{k+1}：该边（i）在算法此前的任何迭代中都未被重连；（ii）被重连至算法此前任何迭代中均不存在边的位置。很容易看出，这样的算法确保 $\mathcal{D}$ 为 $[0,1]$ 提供了形如 $[0,1] = \cup_{k=0}^{L-1}[k/L,(k+1)/L]$ 的划分，其中 L 是网络字典中的网络数量。因此，该网络字典具有度量性质，即字典中任意两个元素之间的重连距离，在足够大的细化 L 下，都可以任意接近原始区间中对应的实值标量。建立网络字典后，我们便可以通过将子区间 $[k/L,(k+1)/L]$ 中的点与符号 G_{k+1}匹配，将单位区间动力学生成的合成时序网络轨迹进行符号化。由此得到的时间网络$\mathcal{S}$ 在构造上继承了标量时间序列的性质，尤其可以用于生成混沌时间网络。

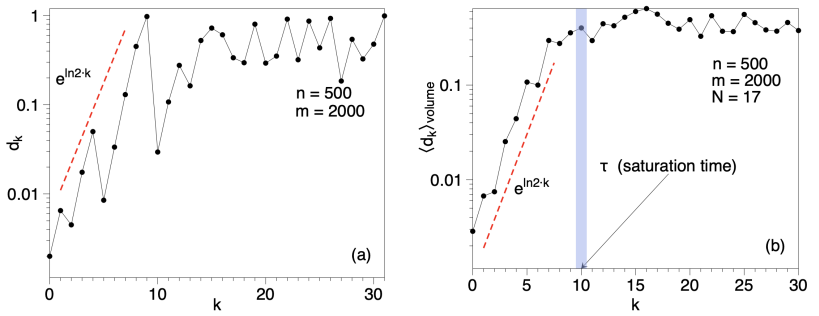

图 3 面板 (a)：两个初始时彼此接近、从 $\mathcal{S}$ 中采样得到的网络轨迹之间的距离 d_k 随迭代指标 k 变化的半对数图。可以看到，初期呈指数扩张的阶段之后是饱和阶段，尽管局部扩张率有很大波动。面板 (b)：体积平均距离 $\langle d_k \rangle_{\mathrm{volume}}$ 随时间 k 变化的情况；这些初始图条件 $N = 17$ 位于一个体积内，该体积以一个包含 $n = 500$ 个节点和 $m = 2000$ 条边的初始图为中心。网络动力学按照正文所述的逻辑斯蒂映射演化，其真实李雅普诺夫指数为 $\ln 2 \approx 0.693$。可以看到，包含这些图的体积平均而言以指数速度扩张，指数接近预期的 ln2，直到达到吸引子大小；这一时刻即饱和时间 $\tau \approx 10$。

4.2 逻辑斯蒂映射的结果

作为首次验证，我们考察完全混沌的逻辑斯蒂映射

$$x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t), \qquad x_t \in [0, 1], \tag{15}$$

生成混沌轨迹，其 $\lambda_{\mathrm{MLE}} = \ln 2 \approx 0.693$。使用字典技巧，我们从由方程（15）提取的信号生成一条时间网络轨迹 $\mathcal{S}$，由 $|\mathcal{S}| = 3000$ 个网络快照组成。在此验证中，网络包含 $n = 500$ 个节点和 $m = 2000$ 条边。

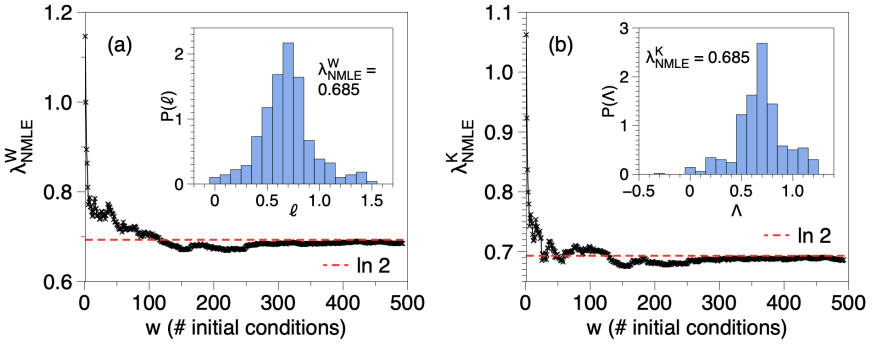

图 4 面板 (a)：采用 Wolf 方法（见正文）得到的 $\lambda^{W}_{\mathrm{nMLE}}$ 近似值，通过对 w 个随机抽取的初始条件［下的 ℓ 取平均计算得到，并将其表示为 w的函数。可以看到，随着 w 增大，该指数收敛于真实指数 ln2。插图 (a)：概率分布 $P(\ell)$，通过对从 $\mathcal{S}$中随机抽取的 $w = 500$ 组不同初始图条件下的 ℓ 进行估算得到。该经验分布的均值为 $\lambda^{W}_{\mathrm{nMLE}} = \langle\Lambda\rangle_{A_t} \approx 0.685$，非常接近真实指数 $\ln\ 2 \approx 0.693$。面板 (b)：与面板 (a) 相同，但采用 Kantz 方法（见正文）；我们计算了 w 组初始条件下的体积与轨迹平均膨胀率 Λ。两种情况下的收敛特性相似。

例如，在图 3 的面板 (a) 中，我们以半对数坐标绘制了（经过适当归一化的）距离 d_k 随迭代指标 k的变化，其中的两条初始接近的网络轨迹取样自 $\mathcal{S}$。我们可以看到一个初始的指数扩张阶段（其指数是对 ℓ的估计），随后进入饱和阶段，尽管距离函数表现出强烈的波动。为处理这些波动，在同一图的面板 (b) 中，我们绘制了体积平均膨胀 $\langle d_k\rangle_{\mathrm{volume}}$ 与 k 的关系，其中的球半径为 $\epsilon = 0.005$，球心位于 $\mathcal{S}$中的某个特定初始图。现在可以清楚地看到初始指数阶段，随后交叉转变为饱和阶段。交叉转变标志着饱和时间 τ，此时距离达到吸引子大小。请注意，指数扩张的斜率（即对 Λ的估计）接近 ln2，即真实的最大李雅普诺夫指数（MLE）。

图 4 展示了采用以下两种方法得到的网络最大李雅普诺夫指数估计值：Wolf 方法 [（a）图]和 Kantz 方法 [（b）图]。这些结果是对 ℓ （Wolf 方法）和 Λ （Kantz 方法）在 $w = 500$ 从以下条件中抽样得到的初始图条件 $\mathcal{S}$上取平均所得。在这两种情况下，当 $w \approx 100$时，平均值迅速趋于稳定，我们得到的估计值 $\lambda^{W}_{\mathrm{nMLE}} \approx \lambda^{K}_{\mathrm{nMLE}} \approx 0.685$非常接近真实值$\lambda_{\mathrm{MLE}} = \ln 2 \approx 0.693$。

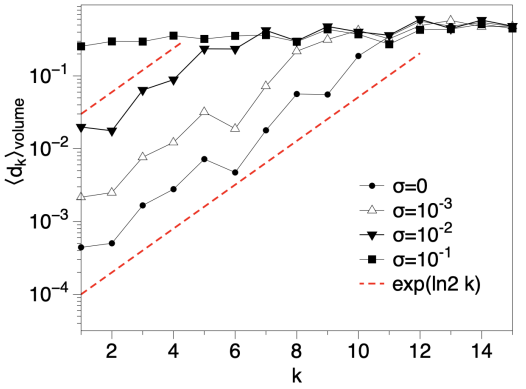

图5 体积平均距离 $\langle d_k \rangle_{\mathrm{volume}}$ 随时间的变化 k：网络动力学按照混沌逻辑斯蒂映射 $x_{t+1} = 4x_t($ $1 - x_t)$演化，并受到外源高斯噪声 $\mathcal{N}(0,\ \sigma^2)$的干扰，具体如正文所述；图中展示了四种不同的噪声强度0 10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} ， ， ， 。指数扩张阶段 —— 按预期，它始终对应同一个指数 ln 2—— 随着噪声强度增加而逐渐消失。

4.3 含噪混沌网络

为探究噪声污染如何使 nMLE 的估计变得复杂，我们使用网络字典生成一个时间网络 $\mathcal{S}$，具体由公式（15）通过字典技巧得到，其中在进行网络映射之前，原始混沌信号受到一定量的白高斯噪声污染 $\mathcal{N}$（0，σ^2）[5]。如第3节所述，我们通过舍弃$\langle d_0 \rangle$来计算 Λ，从而消除潜在的算法偏差。结果汇总于图5中。主要观察结果是，噪声污染往往会缩短指数阶段的持续范围（即饱和时间 τ 缩短）。当噪声量较小时，该阶段仍然可以观测到，且估计得到的 nMLE 仍与无噪声情形的结果一致。当噪声强度高于某一阈值时，噪声会有效掩盖混沌信号，因而无法再识别出指数阶段，最终表现为 nMLE 表观消失。这些结果符合直觉，也与含噪混沌时间序列中通常观察到的典型现象一致 [10], [11]。

[5]请注意，我们会舍弃使标量变量超出单位区间的噪声实现。

4.4 参数化逻辑斯蒂映射的结果

这里我们考虑逻辑斯蒂映射 $x_{t+1} = rx_t(1 - x_t)$。对于参数 $r > r_\infty$的每个取值，我们使用字典技巧生成具有所需混沌性特征的长网络序列 $\mathcal{S}_r$ ，并采用第 2 节中详述的方法，继续估计网络李雅普诺夫指数。在图 6 的面板 (a) 中，我们绘制了映射的 $\lambda^W_{\mathrm{nMLE}}$ 与 λ_{MLE} 的关系，其中参数 r取一系列值。在时序网络处于混沌状态的参数区域内，两者吻合得非常好。

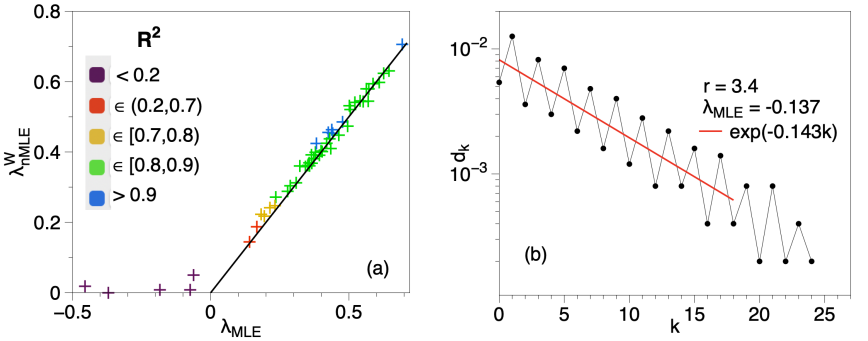

图 6 面板 (a)：散点图显示了 $\lambda^W_{\mathrm{nMLE}}$，其由通过字典技巧生成的时序网络 $\mathcal{S}_r$ 估计得到（见正文）；该时序网络源自逻辑斯蒂映射 $x_{t+1} = rx_t(1 - x_t)$，参数 r取一系列值，并与真实值 λ_{MLE}进行对比。实线表示完全吻合时的对角线 $y = x$，突出了在混沌区域内发现的良好吻合。图例给出了将 d_k 拟合为指数函数时的拟合优度度量 R^2 。该方法无法捕捉负李雅普诺夫指数（注意，在这些情况下，指数拟合的 R^2 非常差），但可以使用自相关函数 [8], 轻松识别出这些情况对应的是周期轨道；详情见正文。面板 (b)：使用两个由字典技巧从逻辑斯蒂映射生成的、初始状态彼此接近的时序网络，在 $r = 3.4$ 处估计负 nMLE（周期-2 轨道）；其中一个初始条件属于二周期吸引子，另一个位于吸引子之外（详情见正文）。

4.5 关于负李雅普诺夫指数的说明

经典方法通过 Wolf 和 Kantz 算法从单条轨迹估计最大李雅普诺夫指数——其构造基于轨迹的复现——无法捕捉负的最大李雅普诺夫指数。原因很简单：一旦进入周期吸引子，轨迹就会依次访问周期轨道中的每个元素，因此我们找不到彼此接近、但远离所关注初始条件的复现。因此，我们估计网络最大李雅普诺夫指数的方法出于同样的原因也无法在这种情况下发挥作用，如图 6(a) 所示。这一缺陷可以通过两种替代方法解决。

首先，众所周知，非周期时间序列的自相关函数会在时间序列的周期处达到峰值。有趣的是，最近的一项工作 [8]已经将一种估计自相关函数的方法付诸实施

时序网络，其中呈现周期性的时序网络可以通过网络版本的自相关函数得到良好表征。因此，从实际操作的角度来看，在尝试估计给定时序网络的网络最大李雅普诺夫指数（nMLE）之前，合理的做法是应用该程序 [8]并排除该时序网络具有周期性的可能性——这通常会[6]意味着网络最大李雅普诺夫指数为负值。一旦完成这一检验，再进行本文所介绍的网络最大李雅普诺夫指数分析是合理的。

其次，如果能够访问潜在图动力系统（GDS），确实可以估计负的网络最大李雅普诺夫指数，因为在这种情况下不需要采用 Wolf/Kantz 方法，而且可以通过 GDS 从接近的初始图条件生成时序网络。为说明这一点，在图 6 的（b）面板中，我们绘制了两个初始接近的网络按照逻辑斯蒂映射演化时的图距离；这里所取的映射参数值使轨道呈周期性（时序网络同样通过字典技巧生成）。一个初始条件设定在轨道元素之一处，另一个初始条件则是图空间中接近但位于周期性吸引子之外的网络。可以看到，初始距离呈指数级缩小，其斜率给出了网络最大李雅普诺夫指数的估计值；在本例中，该值为负，并且与理论结果吻合良好。

5 高维混沌网络

现在我们考虑时序网络中的高维混沌动力学。首先介绍一种基于耦合映射晶格（CML）的生成模型。这些模型是具有离散时间和连续状态变量的高维动力系统，广泛用于刻画不同场景下的复杂时空动力学 [20] ，例如湍流 [21, 25]、金融市场 [26]、生物系统 [27]或量子场论 [28]。

全局耦合映射（GCMs） [29] 是耦合映像格子的平均场版本，其中，耦合映像格子中实体之间的扩散耦合被全连接耦合所取代，以模拟平均场的作用。我们考虑一个包含 m 个实体的全局耦合映射，其形式为

$$x_i(t+1) = (1-\alpha)F[x_i(t)] + \frac{\alpha}{m}\sum_{j=1}^{m} F[x_j(t)],\ i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (16)$$

其中 $F(x) = 4x(1-x)$ $x \in [0,1]$，其中 $\alpha \in [0,1]$ 是平均场耦合的强度。在无耦合情形下 $\alpha = 0$，系统由 m个相互独立的完全混沌动力学组成。因此，其吸引子是高维的；由于有 m 个李雅普诺夫指数都等于 ln 2，因此我们有 $\lambda_{\mathrm{MLE}} = \ln 2$。

[6]存在一些病态情形，此时系统可能表现出看似周期性的行为，但最大李雅普诺夫指数并不为负。例如，当我们有一个由若干个带组成的非连通吸引子，以及一条周期性访问不同混沌带的轨迹时

在另一个极端，当完全耦合 $\alpha = 1$时，系统完全同 t 步（即对于任意时刻 x_i（t） $= x_j$（t），对所有 i, j），动力学便约化为一维动力学，且仍有 $\lambda_{\mathrm{MLE}} = \ln 2$。补充一点，事实上已知完全同步会在 $\alpha > 1/2$ [29]时发生。

在中等耦合下，系统呈现出若干不同的宏观相 [29]。其中包括弱耦合时的高维混沌$\alpha < 0.2$。这就是所谓的“湍流态”。有趣的是，对于具有扩散耦合的耦合映像格子，已经确立了一条标度律 [22]

$$\lambda_{\mathrm{MLE}} = \log 2 - \beta\alpha^{1/p}, \tag{17}$$

其中 p 表示 $F(x)$ 的非线性类型，即 $p = 2$ 对于逻辑斯蒂映射， $p = 1$ 对于帐篷映射，等等。全局耦合映射的结果则不那么明确。不过，当平均场耦合可以视为“热化的”（即独立于 x）[23, 24] 时，公式 (17) 对 $\beta = 1$成立。不过，已知这种热化仅适用于帐篷映射 ($p = 1$)，而不适用于逻辑斯蒂映射。

这里我们考虑范围 $\alpha \in [0, 0.2]$，即全局耦合映射的湍流态。我们将集合 $\{x_i\}_{i=1}^m$ 视为由 n 个节点和 $m = n(n-1)/2$ 条边构成的全连接无向网络骨架的（加权）边集。根据公式（16）计算出每条边 $\{x_i(t)\}_{t=1}^T$ 的时间序列后，我们按如下方式使用二符号生成划分，将每条边的活动二值化：值 $x_i(t) < 1/2$ 映射为符号 0，而$x_i(t) \geq 1/2$ 映射为符号 1[30]。请注意，使用生成划分可确保符号化（二值）序列保留原始信号 [31–33]的混沌性质。最后，我们将边的（二值）演化转换为随时间变化的邻接矩阵，从而构建一个时序网络 $\mathcal{S}$。对于弱耦合区域内的 α 值，我们预期该时序网络会表现出对初始条件的敏感依赖。

实际上，论文中提出的用于推断最大李雅普诺夫指数的 Wolf/Kantz方法，需要非常长的序列 $\mathcal{S}$，才能在具有较大 n的系统中观测到足够接近的复现。然而，在这里，我们可以通过公式（16）访问实际的底层图动力系统（GDS）。鉴于本节的目标是展示可以生成高维混沌网络并估计其网络最大李雅普诺夫指数（nMLE）的证据，我们可以使用 GDS 为任意所需的初始条件生成时间网络。因此，对于给定的初始条件 $\{x_i(0)\}_{i=1}^m$，我们构造一个受扰动的副本 $\{x_i'(0)\}_{i=1}^m$（其中 $|x_i'(0) - x_i(0)| < \epsilon$，取 ϵ为某个较小的值），分别为这两个初始条件生成时间网络，并跟踪这两个副本之间的网络距离随时间的变化。我们对 100 个副本重复此过程，以提取一个按体积平均的距离，然后再对 50 个不同的初始条件进行同样的处理。请注意，与上一节建立的模型不同，这里每个网络快照中的边数并不固定，因此网络相空间要大得多。同样，距离函数的归一化因子现在只是所有可能边的总数，即 n（$n-1$）/2。

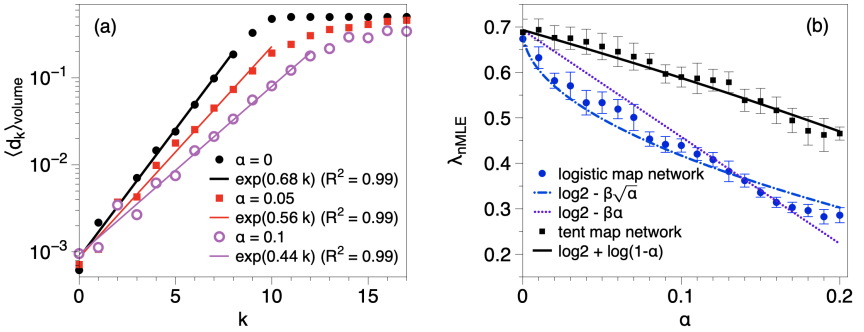

图 7 面板 (a)：体积平均距离的半对数图 $\langle d_k \rangle_{\text{volume}}$ 随时间步 k变化的关系图，针对从耦合常数为 $\alpha = 0$、0.05、0.1 的全局耦合映射模型中提取的一个时间网络。我们观察到一个指数阶段，对于耦合常数的每个取值，其指数均不同。实线为最佳指数拟合。面板 (b)：网络最大李雅普诺夫指数 λ_{nMLE} 相对于耦合常数 α的估计值，针对由逻辑斯蒂映射（蓝色圆点）和帐篷映射（黑色方块）的全局耦合映射生成的时序网络。对于每个 α，共考虑了 50 个初始条件，并对每个初始条件使用了一个包含 100 个点的球。误差棒表示对 50 个不同的时序网络实现取平均后的标准差。蓝线给出了逻辑斯蒂和帐篷耦合映像格子的理论预测 [式 (17)]，，而黑线给出了采用热化平均场的全局耦合映射的理论预测，该预测仅适用于帐篷全局耦合映射。

具有 $n = 100$ 个节点的网络结果如图 7 所示。在面板（a）中，我们绘制了 $\langle d_k \rangle_{\text{volume}}$ 随时间 k 的变化，取弱耦合区间内的三个不同耦合常数 $\alpha = 0$、0.05 和 0.1。在每种情况下，我们都发现了清晰的指数阶段。正如预期，非耦合阶段的指数 $\alpha = 0$ 确实等于 ln 2，这进一步验证了该方法。随着耦合值增大，有趣的是，网络最大李雅普诺夫指数（nMLE）似乎减小，而作为副作用，饱和时间 τ 增加。在图 7（b）中，我们以蓝点绘制了估计的 λ_{nMLE} 随耦合 $\alpha \in [0, 0.2]$ 的变化，确实显示出明显的下降趋势。这种下降可能是由于 m 个自由度现在以某种非平凡的方式发生耦合。蓝线表示根据公式（17）得到的逻辑耦合映射晶格（CMLs）和帐篷映射耦合映射晶格（CMLs）的理论预测。为完整起见，我们还对由帐篷映射构造的网络全局耦合映射（GCMs）重复了相同的分析，其中 λ_{MLE} 是显式已知的（黑线）：$F(x) = 1 - 2|x|$，其中 $x \in [-1, 1]$，并采用一个符号化划分，将 $x < 0$ 映射为符号 0，将 $x \geq 0$ 映射为符号 1。该情形的结果以黑色方块绘制在图 7（b）中

我们得出结论：(i)由此生成的时间网络呈现出高维混沌，其使用我们开发的方法重构的网络最大李雅普诺夫指数表现出预期行为；(ii)这项验证表明，该方法适用于边数随时间波动的时序网络，而不仅仅适用于位置随时间变化的时序网络。

6 讨论

在本研究中，我们提出将时序网络视为潜在图动力系统（GDS）的轨迹。这一解释自然引导我们探究这些轨迹是否会表现出对初始条件的敏感依赖，这是混沌行为的标志。我们提出了一种量化方法，并定义和计算了时序网络的网络最大李雅普诺夫指数（nMLE）。由于潜在图动力系统在实践中很少可用，我们的算法利用时序网络在图空间中的复现。该方法将 Wolf 和 Kantz 的经典方法推广到了网络。我们通过生成多个具有已知真实网络最大李雅普诺夫指数的合成 GDS，对该方法进行了验证。

从概念上讲，量化结构化对象（在我们的例子中是数学图）轨迹中的混沌，在某种程度上与量化（晶格）自旋系统的动力学稳定性有相近的思想。因此，我们的方法与统计物理学中的损伤扩展 [34] 和自重叠方法 [35] 以及它们在元胞自动机 [36]和随机布尔系统 [37]中的应用存在一些相似之处。

请注意，我们关注的是邻近条件下的指数扩张——即敏感依赖性——这是因为本文的目标之一，是从概念上提出混沌网络的存在，并在无需获取底层图动力系统的情况下，探索如何对观测到的时间网络中的这种确定性特征进行操作化测量。然而，我们的方法可以直接扩展到非指数发散，例如代数发散或其他形式，只需适当修改扩张率的定义，从而为量化其他类型的动力学不稳定性提供一种途径。

本文的出发点是将随时间演化的图视为一个整体对象，而非瞬时对象 [8], ，进而考察其在图空间中的演化。不过，对于（大型）现实世界中的时间网络而言，这种方法确实可能存在局限，因为在高维空间中通常难以观测复现。一种可能的解决方案是从网络中提取适当的标量变量，分别分析每个变量中对初始条件的敏感依赖，并得出共识。我们将这一方法留待未来研究。

请注意，在整个研究过程中，我们考察的都是带标签网络。采用这一选择是出于便利性和示意图展示的考虑，也因为时间网络通常带有标签；但我们认为，类似的方法同样适用于无标签时序网络，即按照某种图动力学随时间演化的图。在后一种情况下，每个网络快照不再能由单个邻接矩阵唯一表示，因为对矩阵的行和列进行置换后，仍可得到同样有效的描述。因此，显然需要使用在邻接矩阵的行和列置换下保持不变的图距离 [38]。例如，可以使用基于网络谱或图核的距离 [39]。我们将这一有趣的扩展留作未来研究的问题，以及

超越最大李雅普诺夫指数的完整李雅普诺夫谱量化 .

最后，我们还想补充一点：该方法不依赖于已知 GDS，而是直接根据时序网络轨迹估计 nMLE，这一事实使得我们能够在经验时序网络中研究这些问题。我们预计，该方法将在物理学、生物学、经济学和社会科学中具有一系列潜在的有趣应用——事实上，时序网络遍布这些学科——。这种方法对于那些我们无法获得“运动方程”、但有理由认为其背后存在某种确定性动力学的系统尤其具有吸引力，即物理系统；不过，该方法也可扩展到具有社会性或生物性介导交互的系统，例如：以时序邻近网络充分建模的鸟群 [40–42] 或人群行为[43],是否表现出混沌?

附录：图距离

考虑两个邻接矩阵 A 和 B，它们的元素均为二进制值（0 或 1），分别描述具有 n 个节点的两个简单无权图。所谓的编辑距离 [18]是一种矩阵距离，其定义为

$$d(A,B)=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}-b_{ij}|. \tag{18}$$

对象 $d(A,B)$ 统计 A 和 B 中不同条目的数量。

对于简单无向图（对称邻接矩阵），我们需要考虑到边的数量仅为邻接矩阵中正条目数量的一半，因此 $d(A,B)/2$ 度量一个图中存在但另一个图中不存在的边数。当且仅当 $A=B$ 时，我们有$d(A,B)/2=0$。同样容易看出，对于对称邻接矩阵 A 和 B，$d(A,B)/2$ 仅取整数值。如果 $A\neq B$，则$1\leq d(A,B)/2\leq n(n-1)/2$。当两个图除一条边外完全相同时，我们有 $d(A,B)/2=1$，其中该边存在于一个图中而不存在于另一个图中。

<escape>可以直接使用这种未归一化距离（正如我们在第 3 节中所做的那样），也可以随后采用不同的策略对其进行归一化处理，例如，可以将其除以 $d(A,B)$，$n(n-1)/2$（正如我们在第 5 节中所做的那样），或者，如果对 A 和 B 之间施加了进一步的限制（正如我们在第 4 节中所做的那样），则直接除以可能的最大距离。</escape>

如果我们进一步假设两个图具有相同数量的边，那么该下界无法达到，并且 $2\leq d(A,B)/2$ 当 $A\neq B$。

从第一个图到第二个图。因此可以定义重连距离

$$d(A,B)=\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}-b_{ij}|. \tag{19}$$

适用于简单图（即不含自环的图）。该量衡量在关联图为简单、无权、无向（对称邻接矩阵），且节点数和边数相同的情况下，将 A 转换为 B 所需的重连操作总数。

上述重连距离基于非重叠边的概念，即在一个图中存在、但在另一个图中不存在的边。因此，编辑距离和重连距离基于 $|a_{ij}-b_{ij}|$ 对不同边的处理，因而对边的存在与否赋予相同的重要性。也可以构造基于两个网络中共同存在的连接数量的距离度量。如果边 ij 同时存在于两个图中，那么 $a_{ij}b_{ij}=1$；否则，该乘积为零。可以证明，下列函数是一个距离 [19]:

$$d(A,B)=1-\frac{1}{2|E|}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}. \tag{20}$$

我们对第 4节中上述定义的距离进行了分析复现，结果（所得网络最大李雅普诺夫指数）一致。

致谢 感谢 Federico Battiston 在本研究初期提出的宝贵意见，也感谢 Emilio Hern´andez-Fern´andez、Sandro Mel- oni、Lluis Arola-Fern´andez、Ernesto Estrada、Massimiliano Zanin、Diego Paz´o 和 Juan Manuel L´opez 围绕本研究多个方面展开的有益讨论。AC 感谢 Maria de Maeztu计划（MDM- 2017-0711）和 AEI 的 FPI计划提供资助。LL 感谢 DYNDEEP 项目（EUR2021-122007）提供资助；LL 和 VME 感谢 MISLAND 项目（PID2020-114324GB-C22）提供资助。这两个项目均由西班牙科学与创新部资助。本研究还部分获得了由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助的 Mar´ıa deMaeztu 项目 CEX2021-001164-M 的支持。

参考文献

[1] P. Holme, J. Saram¨aki. 时序网络. 《物理学报告》 519, 3 (2012年): 97-125.

[2] N. Masuda 和 R. Lambiotte, 《时序网络指南》, 复杂性科学丛书第 4 卷。World Scientific（欧洲）, 2016 年。

22 时序网络的李雅普诺夫指数[3] P. Holme, J. Saram¨aki，编。时序网络理论第2卷。（纽约：施普林格，2019年）。[4] N. Masuda, P. Holme（编）。时序网络流行病学（新加坡：施普林格，2017年）。[5] N. Perra, A. Baronchelli, D. Mocanu, B. Gon¸calves, R. Pastor-Satorras, A. Vespignani。时变网络中的随机游走与搜索。《物理评论快报》109, 23（2012年）。[6] M. Zanin, L. Lacasa, M. Cea，计划网络中的动力学。混沌19, 2（2009年）。[7]Thompson, William Hedley, Per Brantefors, and Peter Fransson。从静态网络理论到时序网络理论：在功能性脑连接中的应用。《网络神经科学》1.2（2017年）：69-99。[8] L. Lacasa, J.P. Rodriguez, V.M. Eguiluz，网络轨迹的相关性，《物理评论研究》4, L042008（2022年）。[9] O.E. Williams, L. Lacasa, A.P. Millan, V. Latora。时序网络的记忆形态，《自然通讯》13, 499（2022年）。[10] A. Wolf, J.B. Swift, H. L. Swinney, L.A. Vastano，从时间序列确定李雅普诺夫指数，*Physica D* 16, 285（1985年）。[11] H. Kantz，一种估计时间序列最大李雅普诺夫指数的稳健方法，《物理学快报*A*》185, 77（1994年）。[12] M.T. Rosenstein, J.J. Collins, C.J. De Lucca，一种利用小型数据集计算最大李雅普诺夫指数的实用方法，*Physica D*65, 117（1993年）。[13] J. Kurths, H. Herzel。太阳时间序列中的一个吸引子。*Physica D* 25（1987年）。[14] H. Kantz, and T. Schreiber。非线性时间序列分析（剑桥大学出版社，2004年）。[15] E. Aurell, G. Boffetta, A. Crisanti, G. Paladin, and A. Vulpiani，大尺度上的可预测性：李雅普诺夫指数概念的扩展，*J. Phys. A Math. Gen.* 30（1997年）。[16] J.P. Eckmann, D. Ruelle，混沌与奇异吸引子的遍历理论，《现代物理评论》57, 3（1985年）。[17] E. D´ıaz-Franc´es, and F.J. Rubio。关于两个独立正态随机变量之比的分布存在正态近似的问题。

变量。*Statistical Papers*54, 2 (2013): 309-323.[18] P.Wills, F.G. Meyer. 图比较度量：实践者指南。*PLOS ONE* 15, 2 (2020).[19] R. Flanagan, L. Lacasa, E.K. Towlson, S.H. Lee, M.A. Porter，抗精神病药物对功能性脑网络群落结构的影响。*Journal of Complex Networks*, 7, 6 (2019) 932-960.[20] Kaneko, K. 时空混沌中的模式动力学：模式选择、缺陷扩散和模式竞争间歇性。 *Physica D* **34**, 1-41 (1989).[21] Kaneko, K. 耦合映射晶格理论及其应用（第12卷）。John Wiley & Son Ltd. (1993).[22] Yang, Weiming, E-Jiang Ding, and Mingzhou Ding. 耦合映射晶格中最大李雅普诺夫指数的普适标度律。《物理评论快报》76.11 (1996): 1808.[23]G. Perez, H.A. Cerdeira. 全局耦合系统中的不稳定性和非统计行为。*Physical Review A* 46, 12 (1992).[24] D. Velasco, J.M. L´opez, and D. Paz´o. 湍流全局耦合映射中李雅普诺夫指数的非普适大尺寸渐近行为。*PhysicalReview E* 104, 3 (2021).[25] Hilgers, A. and Beck, C., 作为流体动力学湍流级联模型的分层耦合映射晶格， *Europhys. Lett.* **45**, 552 (1999).[26] Hilgers, A. and Beck, C., 股票市场指数和外汇汇率的湍流行为， *Int. J. Bif. Chaos* **7**, 1855 (1997).[27] Bevers, M., Flather, CH.，利用基于细胞的耦合映射格在数值上研究栖息地破碎化对种群的影响， *Theor. Pop.Biol.* **55**, 61 (1999).[28] Beck, C. 作为暗能量模型的混沌标量场。*Phys. Rev. D***69**(12), 123515 (2004).[29] K. Kaneko, *Physica D* **41**, 137-172 (1990).[30] Ledrappier F.，区间上绝对连续不变测度的一些性质，*Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1 (1981).[31] Crutchfield J.P. and Packard N.H.，一维映射的符号动力学：熵、有限精度和噪声，*Internat. J. Theoret. Phys.* 21 (1982).

24 时序网络的李雅普诺夫指数[32] Beck C. and Schlogl F.,混沌系统热力学 (剑桥大学出版社, 1993年)[33] Collet P. and Eckmann J.P., 区间上的迭代映射: 作为动力系统 (物理学进展, Birkhauser, 1980)[34] Stanley, H. E., Stauffer, D., Kertesz, J., & Herrmann, H. J. 二维伊辛模型中的扩散现象动力学。《物理评论快报》59, 20 (1987年)。2326.[35] Ferrera, A., Luque, B., Lacasa, L., and Valero, E. 自重叠作为伊辛模型中的一种分析方法。*Physical Review E*, 75, 6 (2007) 061103.[36] Bagnoli, F., R.Rechtman, andStefanoRuffo. 元胞自动机中的损伤扩散与李雅普诺夫指数。《物理学快报*A*》172, 1-2 (1992): 34-38.[37] B. Luque and R.V. Sole, 随机布尔网络的李雅普诺夫指数, 《物理学*A*》284 (2000).[38] C. Godsil, and G.F. Royle. 代数图论(施普林格科学与商业媒体, vol 207, 2001).[39] S.V.N. Vishwanathan, N.N. Schraudolph, R. Kondor, and K.M. Borg- wardt. 图核。《机器学习研究杂志》11 (2010): 1201-1242.[40] Mora, Thierry, Aleksandra M. Walczak, Lorenzo Del Castello, Francesco Ginelli, Stefania Melillo, Leonardo Parisi, Massimiliano Viale, Andrea Cav- agna, and Irene Giardina. 鸟群中的局部平衡。《自然·物理》12, 12 (2016): 1153-1157.[41] Bialek, William, Andrea Cavagna, Irene Giardina, Thierry Mora, Edmondo Silvestri, Massimiliano Viale, and Aleksandra M. Walczak. 自然鸟群的统计力学。《美国国家科学院院刊》109, 13 (2012年): 4786-4791.[42]Cavagna, Andrea, Alessio Cimarelli, Irene Giardina, Giorgio Parisi, Raffaele Santagati, Fabio Stefanini, and Massimiliano Viale. 椋鸟群中的无标度关联。《美国国家科学院院刊》107, 26 (2010): 11865-11870.[43] Helbing, Dirk. 交通及相关自驱动多粒子系统。《现代物理评论》73, 4 (2001): 1067.