arXiv:2301.13037v1 [econ.TH] 30 Jan 2023

皇家游行：双边匹配中的激励、效率与公平性

Sophie Bade* Joseph Root†

2023年1月

摘要

我们研究激励相容且有效的双边匹配机制集合。在额外假设“性别中立性”下，我们对所有此类机制进行分类；该假设确保双方受到对称对待。所有群体策略无关、有效且性别中立的机制都是递归的，其结果按轮次依次决定。每一轮选出两名代理人，双方各一名。这些代理人要么是“默认匹配”，要么是“默认不匹配”。前一种情形下，任一被选中的代理人都可以单方面迫使另一人和自己匹配；后一种情形下，只有双方都同意时，他们才能彼此匹配。无论哪种情形，如果这对代理人没有彼此匹配，那么双方各自从剩余代理人中获得自己的首选。作为刻画中的一个重要步骤，我们首先证明，在单边匹配中，所有群体策略无关且有效的机制都是序贯独裁。由此可立即推论，不存在个体理性、群体策略无关且有效的单边匹配机制。

1 引言

Gale and Shapley（1962）以婚姻市场为例，开创了对双边匹配问题中稳定性的研究：在该市场中，每位男性与一位女性匹配。若不存在一对未婚男女彼此更愿意选择对方，而非各自的匹配伴侣，则该匹配被视为稳定。Gale and Shapley（1962）证明，稳定匹配总是存在。然而，Roth（1982）指出，稳定性与激励相容性相互冲突：任何稳定机制都可被操纵。

面对这一困境，关于双边匹配的浩瀚文献通常会牺牲激励相容性，以换取稳定性。[1] 在本文中，我们反其道而行之：忽略稳定性，转而研究激励相容机制。对于代理人能够轻易地在彼此之间重新安排匹配的情形而言，稳定性尤其是一项重要标准（Abdulkadiroglu and S¨onmez 2013）。然而，在许多情形下，联盟偏离可能难以组织。例如，注册约会应用的人这样做，是因为他们发现自己很难在现实生活中找到约会对象。在其他

*伦敦大学皇家霍洛威学院和马克斯·普朗克集体物品研究所，电子邮箱：so- phie.bade@rhul.ac.uk

†芝加哥大学经济学系，电子邮箱：jroot@uchicago.edu[1]例如参见 Roth and Sotomayor（1992）、Roth（2008）以及 Abdulkadiroglu and S¨onmez（2013）

情形下，中央规划者可能有权执行某一机制的结果。以英国的“乌克兰住房”计划为例，该计划将难民与接待家庭进行匹配。英国内政部可以将居留许可与算法确定的匹配对象挂钩。因此，即使某些家庭和难民希望偏离匹配，他们也可能无法做到。在这两种情形下，寻找具有强激励性质、且易于使用的机制，似乎都更加重要。

放弃稳定性后，我们为研究激励相容且有效的机制打开了大门。具体而言，我们寻找具有稳健激励性质的机制——即具有群体策略无操纵性的机制。如果不存在某个偏好剖面、代理人群体以及该群体的某种偏离，使得偏离后群体中的所有成员都至少同样满意（且其中一些成员严格更满意），则称该机制具有群体策略无操纵性。如果一个机制从不选择这样一种匹配：存在另一种选择可以使所有代理人都得到更好的结果，则称该机制是有效的。在双边匹配问题中，实现群体策略无操纵性和效率并不困难。只需将市场的一方认定为“对象”，然后使用分配问题中某种著名的群策略防操纵且有效的机制即可。[2]事实上，在某些情况下，将市场的一方对象化可能是恰当的。Abdulkadi˘glu 和 S¨onmez（2003）便令人信服地论证了，在学校选择问题中应将学校视为对象。然而，在先验上市场双方对称的情形下，人们可能会对将全部决策权赋予市场一方感到犹豫。事实上，我们可能希望要求市场双方受到平等对待。例如，没有理由区别对待约会应用中的男性和女性。同样，在“乌克兰住房”计划中，人们也可能希望赋予难民和接待家庭同等程度的发言权。

我们的“性别中立性”公理体现了这样一种理念：双方应受到平等对待。粗略地说，我们要求，如果将男性和女性的偏好互换，那么机制的结果也应随之互换。我们不仅要求整体机制中双方具有这种对称性，也要求每个“延续子机制”都具有这种对称性。“延续子机制”这一概念体现了机制可以是递归的这一理念。如果某个机制仅利用最初匹配的代理人的偏好进行初始匹配，而忽略所有其他代理人的偏好，那么剩余代理人就会面临这样的延续子机制，而我们也要求他们受到对称对待。

我们将所有群体策略无关、有效且具有性别中立性的机制刻画为“王室机制”。其运作方式如下：每一轮从市场的一方中选出一名代理人。这些“王室成员”要么是“默认匹配”，要么是“默认不匹配”。在前一种情形下，只要其中至少一人将另一人排在首选位置，王室成员就会彼此匹配；在后一种情形下，只有当双方都将对方排在首选位置时，王室成员才会彼此匹配。如果王室成员没有彼此匹配，他们就会从剩余代理人中选择各自的首选。只要至少还有6名代理人未匹配，这种由王室夫妇依次作出选择的过程就会继续。一旦只剩下4名代理人，就只有两种可能的匹配方式，但对于这些剩余代理人而言，有大量满足我们要求的（子）机制。

我们的pr oof 首先观察到，任何性别中立的双边机制都包含一个

[2]房屋分配问题中所有群策略防操纵且有效的机制集合由 Pycia 和 ¨Unver（2017）以及 Bade（2020）刻画。这一刻画从三个方面扩展了 Gale的顶级交易循环（Shapley 和 Scarf，1974年）：代理人可以“拥有”多所房屋（P´apai，2000年），代理人可以“经纪”房屋（Pycia 和 ¨Unver，2017年），并且当代理人和房屋恰好各有三个时，可能存在“辫子”（Bade，2020年）。

单边匹配机制，在该机制中，任何代理人都可以自由地与其他任一代理人匹配。为了直观理解这一结果，对男性和女性进行编号，使得 m_i 是在所要求的对称性下与女性 w_i 相对应的男性。如果我们将注意力限制在 m_i 和 w_i 宣布对称偏好的偏好剖面上，那么根据性别中立性，他们必然会得到对称的结果。因此，对于每个 i，对称机制要么将 w_i 和 m_i 彼此匹配，要么将他们分别与另一对对称对 m_j 和 w_j 中的成员匹配。因此，我们可以将对 (m_i, w_i) 视为单边匹配问题中的代理人。任意一对要么与自身匹配，这类似于该对保持单身；要么与另一对对称对交换伴侣，这可以被视为这两对之间的匹配。嵌入的机制继承了原机制的群体策略无操纵性和效率。这一点很有帮助，因为群策略防操纵且有效的机制对于单边匹配问题具有简洁的刻画。我们证明，所有这类机制都是"序贯独裁"，其中代理人序列中的代理人，即"独裁者"，依次选择剩余代理人中自己最偏好的代理人作为伴侣。这一刻画补充了 Root and Ahn（2020）的结果；后者发现，当不允许代理人保持单身时，也存在类似的结果。尽管结果相似，证明却截然不同。我们的证明源于对三代理人情形的分析，而 Root and Ahn（2020）排除了这一情形，因为其中要求所有代理人都必须匹配。在确立嵌入的单边机制是序贯独裁之后，我们看到，任何性别中立、有效且具有群体策略无操纵性的机制，在所有对称偏好剖面上都与王室机制一致。接下来，我们需要证明，对于非对称偏好剖面，同样的结论也成立。证明过程较为复杂，但归根结底，是要找到一条从任意非对称偏好剖面通向某个对称偏好剖面的路径，并沿着这条路径证明该机制与王室机制一致。

性别中立性可以被视为一项公平性要求。社会选择中的一个常见公平标准——完全对称性——要求以相同方式对待所有代理人，即机制的结果在对所有代理人进行任意双射重标记后保持不变。在许多环境中，完全对称性会与其他期望目标发生冲突。因此，Bartholdi、Hann-Caruthers、Josyula、Tamuz 和 Yariv（2021）将完全对称性弱化为：要求机制的结果仅在对代理人进行某一特定集合中的双射重标记后保持不变。从这一角度来看，我们对（弱）性别中立性的概念仅要求机制相对于其中一种此类重标记具有对称性。事实上，在双边匹配中，没有任何有效且群体策略无关的机制能够在多于两种重标记下保持不变。

面对实现对称性的这些限制，我们考虑随机化。我们首先表明，随机化并非万灵药。在我们的环境中，正如随机机制已得到充分研究的房屋分配问题一样，随机化可能导致效率低下。一种常见做法是通过以均等概率随机选择代理人在机制中的角色来"对称化"机制。例如，"序贯独裁"指代理人按照固定顺序依次选择自己的匹配；通过以均等概率随机选择选择顺序，可以将其对称化为"随机序贯独裁"。尽管序贯独裁具有效率，随机序贯独裁却可能效率低下。尽管如此，对称化后的机制仍保留了其所源自的确定性机制的激励性质。在房屋分配中，没有任何机制能够同时实现效率、激励相容性和对称性（Bogomolnaia and Moulin 2001）。另一方面，随机序贯独裁具备某种形式的效率：它选择一个由确定性结果构成的彩票，其中每种结果都

是有效的。因此，我们称随机序贯独裁具有事后效率。房屋分配领域的一个重大未决问题是，是否存在其他机制能够同时满足事后效率、激励相容性和对称性。我们证明，双边匹配存在多种此类机制。

本文其余部分安排如下。我们首先给出预备定义，然后介绍我们的结果。最后讨论我们的公理。文章最后将讨论随机机制。

2 预备知识

设 N 为代理人的有限集合。我们将同时研究“单边匹配”和“双边匹配”：在“单边匹配”中，任意代理人都可以与其他任意代理人匹配；在“双边匹配”中，匹配是二分的，因此代理人只能与市场另一侧的伴侣匹配。在双边匹配中，我们假设 N是两个集合 $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ 和 $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$的不交并。沿用 Gale and Shapley（1962）的称法，我们将 M 中的代理人称为“男性”，将 W 中的代理人称为“女性”。子匹配是由互不重叠的配对和单身代理人组成的（可以为空的）列表。配对是无序的，因此（m，w）和（w，m）都表示同一配对。在双边匹配的情形下，不允许出现单身代理人，且每个配对都必须由一名男性和一名女性组成。分别令 Σ_0^1 和Σ_0^2 表示单边和双边子匹配的集合。对于任意子匹配 ν，令 $N(\nu)$表示该子匹配中已匹配的代理人集合。匹配是列出每个代理人的子匹配。真子匹配是并非匹配的子匹配。我们也将匹配表示为 $\mu\colon N \to N$上的二阶双射（即 $\mu \circ \mu = \mathrm{id}$），因此，代理人 i与 j匹配，当且仅当 j 与 i匹配。每个配对必须由一名男性和一名女性组成这一要求，随后可表示为 $\mu(M) = W$。我们分别用 Σ^1和Σ^2 表示单边和双边匹配的集合。

假设代理人对其可能的伴侣具有严格偏好（全序）。在单边匹配中，每个代理人 i 对 N具有严格偏好 $\succsim_i$，其中 i 表示保持未匹配的选项。我们用 $x \succ_i y$ 表示 i 严格偏好与 x 匹配，而不是与 y匹配。我们用 $x \succsim_i y$ 表示 $x \succ_i y$ 或 $x = y$中的任一种。在双边匹配中，代理人的偏好范围涵盖市场的另一方。也就是说，每个 $m \in M$ 对 W 具有严格偏好 $\succsim_m$，而每个 $w \in W$ 对 M具有严格偏好 $\succsim_w$。偏好剖面是所有代理人的偏好列表（$\succsim_i$）$_{i\in N}$。令 Ω^1 和 Ω^2 分别表示单边匹配问题和双边匹配问题的偏好剖面集合。

对于任一上下文中的偏好 $\succsim_i$，将 top($\succsim_i$)定义为代理人 i最偏好的伴侣，将 bottom($\succsim_i$)定义为代理人 i最不偏好的伴侣。对于任意代理人 i，我们使用记号 $\succsim_i$：j_1、j_2、$\cdots$来表示一种任意偏好，其中 j_1排名第一，j_2 排名第二，依此类推。给定代理人子集S，我们将 $\succsim_S$ 写作仅针对 S中代理人的偏好剖面。给定偏好剖面 $\succsim$ 和某个$\succsim'_S$，我们将 $(\succsim'_S, \succsim_{-S})$写作这样的偏好剖面：其中来自 S 的每个代理人 i 宣布 $\succsim'_i$，而来自 $N \setminus S$ 的每个代理人 j 宣布 $\succsim_j$。

一个（匹配）机制是一个函数 $f\colon \Omega^k \to \Sigma^k$，其定义域为 $k = 1, 2$，它将每个偏好剖面映射为一个匹配。若不存在偏好剖面 $\succsim$、代理人群体 $S \subset N$以及 $\succsim'_S$ 使得 $f(\succsim'_S, \succsim_{-S})(i) \succsim_i f(\succsim)(i)$ 对所有 $i \in S$均成立，并且对某个

$j \in S$，则称该机制 $f(\succsim'_S, \succsim_{-S})(j) \succ_j f(\succsim)(j)$。也就是说，如果代理人的真实偏好由偏好剖面 $\succsim$所体现，则不存在任何代理人群体能够共同虚报，使该群体中的所有代理人都至少同样受益，且至少有一名代理人严格受益。[3] 给定偏好剖面 $\succsim$，若对于所有代理人 i，均有 $\nu(i) \succsim_i \eta(i)$，并且至少对一名代理人 j有 $\nu(j) \succ_j \eta(j)$，则称匹配 ν 帕累托支配匹配 η。若不存在帕累托支配匹配 ν，则称匹配 η 在偏好剖面 $\succsim$ 下是有效的。若对于每个偏好剖面 $\succsim$，$f(\succsim)$ 都是有效的，则称机制 f 是有效的。

现在我们转向公平性要求。非正式地说，如果存在一种跨双方反射偏好的方式，使得反射后机制选择的结果恰好是原结果的反射，那么该机制就是弱性别中立的。为正式定义弱性别中立性，固定一个 $\sigma \in \Sigma^2$。虽然 σ 是一个匹配，但在这里我们用它表示一种反射，机制在这种反射下表现出所需的对称性。因此，$\sigma(w_j) = m_i$ 的含义是，代理人 w_j 与代理人 m_i对称。我们用 σ按如下方式变换偏好和匹配。给定一个匹配 $\mu \in \Sigma^2$，在 σ 下，μ的反射 $\sigma * \mu$是满足以下条件的匹配：$(m, w) \in \sigma * \mu \iff (\sigma^{-1}(m)\ \sigma^{-1}(w)) = (\sigma(m)\ \sigma(w)) \in \mu$.[4]。等价地，对于在 μ中匹配的任意一对 (m, w)，$(\sigma(m)\ \sigma(w))$ 在 $\sigma * \mu$中相匹配。对于偏好剖面 $\succsim \in \Omega^2$，我们定义其反射 $\succsim' = \sigma(\succsim)$，使得 $j \succsim'_i j' \Leftrightarrow \sigma(j) \succsim_{\sigma(i)} \sigma(j')$。因此，如果在偏好剖面 $\succsim$中，男性 m偏好女性 w 而非女性 w'，那么根据反射偏好剖面 $\sigma(\succsim)$，女性 $\sigma(m)$偏好男性 $\sigma(w)$而非男性 $\sigma(w')$。性别中立性将确保对称代理人 i 和$\sigma(i)$受到同等对待：如果对所有 $\succsim \in \Sigma^2$.[5]都满足 $f(\sigma(\succsim)) = \sigma * f(\succsim)$，则机制 f 是弱性别中立的。

对于固定的对称性 σ，如果匹配 μ 以及相应的偏好剖面 $\succsim$分别等于它们的反射，则称它们是对称的，即 $\mu = \sigma * \mu$ 和 $\succsim = \sigma(\succsim)$。为简化记号，在考虑固定的弱性别中立机制 f 时，我们将男性和女性的集合$M = \{m_1, \ldots, m_n\}$和 $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$编号，使得对所有 j，$\sigma(w_j) = m_j$，其中 σ 是相对于其而言 f 弱性别中立的对称性。

例1. 假设 $M = \{Ad, Bob, Carl\}$ 和 $W = \{Ann, Beth, Connie\}$。令$\sigma = \{(Ann, Ad), (Beth, Bob), (Connie, Carl)\}$。其反射为

$$\mu = \{(Ann, Bob), (Beth, Carl), (Connie, Ad)\}$$

在 σ 下是匹配

$$\sigma * \mu = \{(Beth, Ad), (Connie, Bob), (Ann, Carl)\}$$

例如 $(Ann, Bob) \in \mu$ 意味着 $(\sigma(Ann)\ \sigma(Bob)) = (Ad, Beth) \in \sigma * \mu$。固定一个偏好剖面$\succsim$，使得 $\succsim_{Ad}$：$Connie$、$Beth$、Ann，并且除 Ad 外的所有代理人都按照字母顺序对伴侣进行排序。于是，反射偏好档案 $\succsim' = \sigma(\succsim)$ 满足 $\succsim'_{Ann}$：$Carl$、Bob、Ad

[3]事实证明，在此情形下，一个机制是群体策略无关的，当且仅当不存在规模为一或二的代理人群体能够通过联合虚报获利。更多讨论见 Alva（2017）和 Root and Ahn（2020）。[4]反射 $\sigma * \mu$ 是由函数 $\sigma \circ \mu \circ \sigma$给出的匹配。[5]注意，我们要求 σ 的阶为二。在以下意义上，这并不失一般性。也可以改为考虑任意双射 ρ：$N \to N$，使得 $\rho(M) = W$，并要求对所有 $\succsim$，$f(\rho(\succsim)) = \rho * f(\succsim)$。在这种情形下，由于 ρ 是一个置换，它属于对称群。因此它具有有限阶 k，使得 ρ^k 是恒等变换。由于 ρ 将所有男性匹配给女性，反之亦然，k 是偶置换。因此，$\rho^{k/2}$ 的阶为二。如果对所有 $\succsim$，$f(\rho(\succsim)) = \rho * f(\succsim)$，那么对于任意 m 和任意 $\succsim$，都有 $f(\rho^m(\succsim)) = \rho^m * f(\succsim)$。因此，$f(\rho^{k/2}(\succsim)) = \rho^{k/2} * f(\succsim)$，且 f相对于 $\rho^{k/2}$是弱性别中立的。

而所有其他代理人都按照字母顺序对所有可能的伴侣进行排序。

例2。以下是一个在$\sigma(w_j) = m_j$下具有弱性别中立性的机制示例。对于任意偏好剖面，将 m_1 和 w_1 与其首选进行匹配，除非二者发生冲突——即恰好有一方将另一方排在首选位置。在这种情况下，将二者分别与排除对方后的首选进行匹配。如果 m_1 和 w_1 彼此匹配，则对 m_2 和 w_2 重复这一过程，让他们从剩余代理人中进行选择。持续这一过程，直到出现一对 m_k 和 w_k，使得二者不选择彼此。假设m_k 与 w_j 匹配，且 w_k 与 m_l匹配。如果 $j < l$，则使用序贯独裁匹配剩余代理人，由男性作为独裁者，按照其索引顺序进行选择。如果 $j > l$，则使用序贯独裁匹配剩余代理人，由女性作为独裁者，按照其索引顺序进行选择。

虽然 f 在本例中具有弱性别中立性，但在 m_1 和 w_1进行大多数初始选择之后，男性和女性受到的待遇极不平等：在大多数初始选择之后，一方保留全部决策权，而另一方则被变成对象。一个不确定王室成员偏好的人可能会推断，自己成为独裁者或对象的主观可能性相等。对于此人而言，弱性别中立性可能已经足够。然而，一个掌握更多王室成员偏好信息的人，可能会认为这一机制极不公平。为避免这种不平等的待遇，我们要求“延续”子机制具有弱性别中立性，例如本例中由 m_1 和 w_1 的选择所引出的机制。

定义 1。如果存在一个针对 $N \setminus S$ 的偏好剖面 $\succsim_{-S}$，使得 $g(\succsim_S^*)(j) = f(\succsim_S, \succsim_{-S})(j) \in S$ 对所有 $\succsim_S$ 和 $j \in S$ 都成立，其中 $\succsim_S^*$ 是将 $\succsim_S$ 限制到 S 上所得的限制，则对于 S 中的代理人而言，匹配机制 g 是匹配机制 f 的延续子机制。

定义 2。如果对于每个 f 的延续子机制 g，双边匹配机制 $f\colon \Omega^2 \to \Sigma^2$ 都是弱性别中立的，则称其为性别中立的。

由于任何机制都是其自身的延续子机制，并且性别中立机制是弱性别中立的。

例 3 （例 2 续）。为了说明上文定义的机制 f 并非性别中立，注意到在 m_1 和 w_1 分别选择 w_3 和 m_2 作为其伴侣后，就为其他所有代理人产生了一个延续子机制。由于 w_1的伴侣（m_2）的索引低于 m_1的（w_3），其余匹配由所有女性的序贯独裁决定。由于串行独裁机制并非弱性别中立，因此整体机制并非性别中立。

在前面的例子中，在 m_1 与 w_1 对称匹配之后的延续子机制，在与原机制相同的对称性下是弱性别中立的。这一观察很容易推广：

引理1. 假设 f 是具有对称性 σ 的弱性别中立机制。假设 g 是 f 的延续子机制。称 g 作用于一个性别中立子匹配上。则 g 具有对称性 σ'，即将 σ 限制在 g 中代理人上的结果，因此是弱性别中立的。

3 结果与方法

我们刻画了群体策略无关、性别中立且有效的双边匹配机制这一类机制。作为一个关键引理，我们刻画了所有允许代理人保持未匹配状态的群体策略无关且有效的单边匹配机制。为简便起见，在这两个结果中，我们都忽略相关的特殊情形，并将其留待附录讨论。这些情形分别对应于双边匹配中恰有四名代理人，以及单边匹配中恰有两名代理人。之所以说它们是特殊情形，原因类似：二者都归结为恰有两种结果的社会选择问题。如引言所述，我们的刻画结果得到“王室机制”这一类机制。这些机制依次选择两名代理人，每一方选择一名，由他们根据以下两种机制之一选择其匹配对象：默认匹配（D）或默认不匹配（U）。这些代理人的确切顺序可以变化。因此，王室机制由这一顺序参数化，我们称之为“继承顺序”。

定义 3。继承顺序是一个函数 $\varphi\colon A \to (M \times W) \times \{D, U\}$，其中 A 是 Σ_0^2 的子集。令 $\varphi_1\colon A \to (M \times W)$ 和 $\varphi_2\colon A \to \{D, U\}$ 分别对应于 φ 的第一和第二个分量。继承顺序 φ 必须满足

1. $\emptyset \in A$

2. 如果 $\nu \in A$ 且 $\varphi_1(\nu) = (m, w)$，则 m、$w \notin N(\nu)$

3. 如果 $\nu \in A$ 且 $\varphi_1(\nu) = (m, w)$，则对于任意 $m'.w' \notin N(\nu)$，$\nu \cup \{(m, w'), (w, m')\}$ 与 A中的除四名或更少代理人之外的所有代理人匹配。

除了继承顺序之外，我们还需要为算法指定一个终止条件。令 χ 表示恰好包含四名代理人的群体策略无关、有效且性别中立机制的集合[6] 并令 Σ_2^T 表示 Σ_0^2 中恰好有四名代理人未匹配的子匹配集合。

定义 4。终止条件是一个映射 $\varphi_T\colon \Sigma_2^T \to \chi$。

给定继承顺序 φ 和终止条件 φ_T，王室机制 $R_{(\varphi,\varphi_T)}$使用以下算法选择匹配。

定义 5。给定继承顺序 φ、终止条件 φ_T 和偏好剖面 $\succsim$ 的王权算法分若干步骤进行：

初始化：设置 $\nu_0 = \emptyset$；如果机制中有三个或更多配偶，则转到步骤 1，否则转到步骤 T

步骤 k：代理人 $\varphi_1(\nu_{k-1})$ 被宣布为王室成员。如果 $\varphi_2(\nu_{k-1}) = D$ 那么，如果任一王室成员将另一方在 $N - N(\nu_{k-1})$ 中排在首选位置，则将二者匹配。如果 $\varphi_2(\nu_{k-1}) = U$ 王室成员只有在双方都将对方在 $N - N(\nu_{k-1})$ 中排在首选位置时才会匹配。如果王室成员未匹配，则分别与排除对方后的最偏好的配对对象进行匹配，在$N - N(\nu_{k-1})$中。令 ν_k 表示由此得到的子匹配。如果 ν^k 留下 6 对或更多配偶

[6]这些内容在附录章节 A中有所描述。

未匹配，则转到步骤 $k+1$。如果 ν^k 留下 4 名或更少未匹配的代理人，则转到步骤 T。
步骤 T：如果恰好有两名剩余代理人，则将他们匹配在一起，得到 ν^T。否则，使用机制 $\varphi_T(\nu^k)$ 为剩余的四名代理人寻找子匹配 $\overline{\nu}$。设 $\nu^T = \nu^k \cup \overline{\nu}$。返回 ν^T。

王室机制的最后一步是一种特殊情形，我们将在附录中讨论A。存在许多群体策略无关、有效且性别中立的机制。作为一个主要例子，考虑一致同意规则：该规则将其中一种匹配设为默认匹配，只有当全部四位代理人都更偏好另一种匹配而非默认匹配时，才选择另一种匹配。

定理1。一个双边匹配机制 $f : \Omega^2 \to \Sigma^2$ 只有在其为王室机制时，才是群体策略无关、有效且性别中立的。

定理1 并未刻画所有群体策略无关、有效且性别中立的机制，因为某些王室机制并不具有性别中立性。为说明这一点，考虑一种针对5对或更多配偶的王室机 f 制，其从 m_1开始， w_1 并将其设为王室夫妇。考虑王室夫妇选择 w_2 和 m_3 作为其伴侣，或选择 w_3 和 m_2作为其伴侣的情形。我们对王室机 m_l 制的定义只要求这些选择导向默认匹配或默认不匹配的步骤。然而，性别中立性要求的不仅如此：如果 w_k 在选择 w_2 和 m_3 之后成为王室夫妇，那么 $w_l = \sigma(m_l)$和 $m_k = \sigma(w_k)$就必须在选择 w_3 和 m_2之后成为王室夫妇。

为了定义中立王室机制，我们按机制中的夫妇数量进行归纳。首先规定，两个夫妇的所有王室机制构成的集合，包含附录 A. 中刻画的性别中立、有效且群体策略无关的机制。现在假设，最多包含 n 对夫妇的中立王室机制已经定义。为了定义适用于 $n+1$ 对夫妇的中立王室机制，固定一个作用于 σ 上的对称性 N，并采用标准假设 $\sigma(m_i) = w_i$对所有 i 均成立，且将（m_1， w_1）选作机制开始时的王室夫妇。

设（m_1， w_1）选择 m_k 和 w_l 作为各自的伴侣。如果这些选择关于σ是对称的，也就是说，如果 $k = l$，那么必须选择一个关于 σ 在未匹配代理人上的限制对称的中立王室机制，作为延续子机制。如果 $k < l$ ，我们可以自由选择任意中立王室机制 $f^{k,l}$，使其在子匹配 $\{（m_1， w_l）、（m_k， w_1）\}$ 上继续运行。如果 $k > l$ ，则必须遵循前一种情形中的选择。在这种情形下，我们必须使用王室机制 $\sigma * f^{k,l}$的一个置换；该置换与 $f^{k,l}$相同，只是每当男人 m出现在$f^{k,l}$中时，女人 σ（m）应在 $\sigma * f^{k,l}$中取代他的位置；每当女人 w出现在 $f^{k,l}$中时，女人 σ（w）应在 $\sigma * f^{k,l}$中取代她的位置。

推论 1。双边匹配机制 $f : \Omega^2 \to \Sigma^2$ 当且仅当它是中立特许权机制时，具有群体策略无关、有效且性别中立的性质。

证明较为复杂，因此我们将细节推迟到附录中。这里先概述论证。第一个关键洞见是注意到，在任何性别中立的双边机制中，都存在一个单边机制。按照惯例，假设对于所有 i， $\sigma(m_i) = w_i$ 。令 Ω^2_{symm} 表示对称偏好剖面的集合（即满足 $\sigma(\succsim) = \succsim$ 的 $\succsim$）。由于 $\sigma(\succsim) = \succsim$，性别中立性意味着 $f(\succsim) = \sigma * f(\succsim)$。于是，如果 $(m_i, w_j) \in f(\succsim)$，则 $(\sigma(m_i)\ \sigma(w_j)) = (w_i, m_j)$ 也成立。由此我们可以看出，给定任意对称的

偏好剖面 $\succsim$，对于任意一对 (m_i, w_i)，要么 m_i 和 w_i 在 $f(\succsim)$ 中匹配，要么他们与另一对对称对 (m_j, w_j) 交换伴侣。将每一对对称对 (m_i, w_i) 视为一个代理人，c_i 我们可以提取出一个单边匹配机制。我们将例如 (m_i, w_i) 与 (m_j, w_j) 之间交换伴侣解释为 c_i 与 c_j 之间的匹配，而将 m_i 与 w_i 之间的匹配解释为代理人 c_i未匹配。Root and Ahn（2020）证明了，所有群体策略无关且有效的单边机制都是序贯独裁。然而，他们不允许代理人保持未匹配，而这正是我们的关键要求。我们通过证明即使允许代理人保持未匹配，同样的结论仍然成立，来补充他们的刻画。

定义 6. 令 $N' = \{1, 2, \ldots, n\}$ 和 $N = \{m_1, \ldots, m_n\} \cup \{w_1, \ldots, w_n\}$。给定一个针对 N 的性别中立机制 f，我们定义一个针对 N' 的单边匹配机制 g，并将其称为针对 f 的诱导的单边机制。对于单边匹配市场中的任意 $\succsim$，令 $\succsim^*$ 为双边市场中的偏好剖面，其中当且仅当 $k \succsim_j l$ 对所有 j、k、l 成立时，$m_k \succsim^*_{w_j} m_l$ 和 $w_k \succsim^*_{m_j} w_l$。那么，对于任意 j，$g(\succsim)(j)$ 是满足 $f(\succsim^*)(m_j) = w_i$ 且 $f(\succsim^*)(w_j) = m_i$ 的代理人 i。

引理 2. 对于任意性别中立的双边匹配机制 f，如果 f 是群体策略无关且有效的，则其诱导的单边机制 g 也是群体策略无关且有效的。

证明。假设 f 是群体策略无关且有效的。我们首先证明 g 是有效的。考虑单边匹配市场中的任意偏好剖面 $\succsim$ 以及匹配 $g(\succsim)$。对于任意其他单边匹配 $\mu \neq g(\succsim)$，我们可以定义对称的双边匹配 ν，使得当且仅当 $\mu(j) = i$ 时，$\nu(m_j) = w_i$ 且 $\nu(w_j) = m_i$。由于 f 是有效的，必定存在某个 j，使得 $f(\succsim^*)(m_j) \succ^*_{m_j} \nu(m_j)$。然而，根据定义，我们于是有 $g(\succsim)(j) \succ_j \nu(j)$。因此，$\nu$ 不可能帕累托支配 $g(\succsim)$。

为证明 g 是群体策略无关的，任取一个偏好剖面 $\succsim$、一个代理人群体 S，以及满足 $g(\succsim) \neq g(\succsim'_S, \succsim_{-S})$的某个$\succsim'_S$。由于 f 是群体策略无关的，因此，在男性和女性中，存在某个与 S中某位代理人具有相同编号的 j，使得 $f(\succsim^*)(m_j) \succ_{m_j} f((\succsim'_S, \succsim_{-S})^*)(m_j)$，或者 $f(\succsim^*)(w_j) \succ_{w_j} f((\succsim'_S, \succsim_{-S})^*)(w_j)$。由定义可知，$g(\succsim) \succ_j g(\succsim'_S, \succsim_{-S})(j)$，因此 $\succsim'_S$并非联盟 S的有利偏离。由于联盟、偏离和原始偏好剖面均为任意选取，g 是群体策略无关的。

□

在陈述我们对单边匹配机制的刻画之前，先回顾一下顺序独裁的概念。

Defi定义7。选择顺序是一个函数 ϕ：$A \to N$，其中 A 是 Σ^1_0 的一个子集，并且

1. $\emptyset \in A$2. 如果 $\nu \in A$ 和 $\phi(\nu) = i$，那么 $i \notin N(\nu)$ 3. 如果 $\nu \in A$，$\phi(\nu) = i$ 和 $j \notin N(\nu)$，那么 $\nu \cup \{(i)\}$ 和 $\nu \cup \{(i, j)\}$ 要么属于 A，要么是匹配。

定义 8. 如果对于任意 $\succsim$，$f(\succsim)$ 都是由以下算法得到的匹配，则机制 f 是关于 ϕ 的顺序独裁：

步骤 1：代理人 $\phi(\emptyset)$ 与其最偏好的配对对象（包括其自身）匹配。令 ν_1 为这一子匹配。

步骤 $k \geq 2$：代理人 $\phi(\nu_{k-1})$ 与其最偏好的剩余匹配对象（包括其自身）匹配。令 ν_k 为匹配 $\nu_{k-1} \cup \{(\phi(\nu_{k-1})\}$ 若 $\phi(\nu_{k-1})$ 更愿意保持单身，或 $\nu_{k-1} \cup \{(\phi(\nu_{k-1}), j)\}$ 若 j 是 $\phi(\nu_{k-1})$ 最偏好的剩余匹配对象。如果 ν_k 是一个匹配，则停止并返回 ν_k。

定理2。单边匹配机制 $f: \Omega^1 \to \Sigma^1$ 是群体策略无关且有效的，当且仅当它是顺序独裁。

我们通过对代理人数量进行归纳法 来证明定理2。我们在一系列引理中证明，该结果对3名代理人成立。对于4名代理人，我们利用以下事实：当限制在每名代理人都将保持单身排在末位的情形时，我们面对的是一个关于3个备选项的经典社会选择问题。根据吉巴德-萨特思韦特定理，这一情形必须是独裁（Gibbard 1973）（Satterthwaite 1975）。我们证明，在这一受限问题中担任独裁者的代理人，在代理人可能更愿意保持单身而非与某些对象匹配的四名代理人问题中，也必须是独裁者。对于五名或更多代理人，不需要特殊处理。这一结果与 Root and Ahn（2020）的发现一致；他们在不允许代理人保持未匹配的情形下得出了类似的刻画。由于在顺序独裁中，代理人无法否决独裁者的选择，定理2 立即推出一个推论：

推论 2. 不存在同时满足个体理性、群体策略无关和有效性的单边匹配机制

既然我们已经观察到，性别中立机制等价于对称偏好剖面上的单边匹配机制，那么我们可以看到，在这些偏好剖面上，群体策略无关、性别中立且有效的机制必须与某个王室机制一致。概括来说，证明的其余部分可以归纳为以下步骤。对于任意偏好剖面 $\succsim$，我们找到一系列偏好剖面 $\succsim^0, \ldots, \succsim^m$，其中 $\succsim^m = \succsim$ 和 $\succsim^0$ 是对称的。接着我们论证，对于该序列中任意一对相邻偏好剖面 $\succsim^k, \succsim^{k+1}$，如果某个群体策略无关、有效且性别中立的机制在 $\succsim^k$ 处与某个王室机制一致，那么它在 $\succsim^{k+1}$处也必定如此。难点在于找到恰当的序列。

4 公理

定理中的刻画都不能删去任何一条公理 1 和 2。首先考虑定理 2 中对单边机制的刻画。注意，任何常值机制都是群体策略无关的，但并非有效。大多数有效机制都不是群体策略无关的。举例来说，定义一个从匹配集合到自然数的单射 R。然后将任意偏好剖面 $\succsim$ 映射到匹配 μ，使其在所有有效匹配中最小化 $R(\mu)$。

要证明该机制不是群体策略无关的，考虑一个仅有三名代理人的情形$\{1, 2, 3\}$。设 R 为匹配 {(1, 2)、(3)}、 {(1)、(2, 3)}、 {(1, 3)、(2)} 以及{(1)、(2)、(3)} 分别赋值 1、2、3 和 4。固定偏好剖面 $\succsim^*$，其中每名代理人都持有相同的偏好排序 $\succsim_i^*$，该排序将 3 排在 1 之上、将 1 排在 2 之上。由于每个匹配在 $\succsim^*$处都是有效的，机制选择 {(1, 2)、(3)}。

现在将代理人2的偏好修改为 $\succsim_2'$：3、2、1。由于此时代理人 1 和代理人 2 都更愿意单身，而不是彼此匹配，因此匹配 {(1, 2)、(3)} 不是有效的。由于 {(1)、(2, 3)} 是有效的，并且因为R({(1)、(2, 3)}) $= 2$，机制将（ $\succsim_2'$、 $\succsim_{-2}^*$）映射为 {(1) 、(2, 3)}。然而，代理人 2 严格偏好与代理人 3 匹配，而不是与代理人 1 匹配，因此该机制不是策略无关的。

定理1让事情变得更加有趣。将每个偏好剖面映射到匹配 σ 的常值机制（相对于该匹配， f 是性别中立的），不仅是群体策略无关的，而且也是性别中立的。显然，它不是有效的。对于一个性别中立且有效、但并非群体策略无关的机制f，我们像上文一样，固定一个一一映射 R，将性别中立匹配集合映射到自然数。为了定义 $f(\succsim)$，首先检查在 $\succsim$处是否存在任何对称有效匹配。如果存在，则从所有有效对称匹配的集合中选择使 $R(\mu)$最小的匹配。如果不存在，则使用某个固定的中立王室机制来计算 $f(\succsim)$。为了说明该机制是性别中立的，固定一个偏好剖面 $\succsim$。注意，在 $\succsim$ 处的有效对称匹配集合与 $\sigma(\succsim)$一致，并且对于任何对称匹配， $\sigma * \mu$ 都成立。因此，$\sigma * f(\succsim) = f(\succsim(= f(\sigma(\succsim)))$都等于所有匹配 $R(\mu)$中的最小值，其中这些匹配在 μ处是有效的（因此在 σ (σ)处也有效）。由于中立王室机制是性别中立的，在没有性别中立匹配在$\succsim$处有效这一替代情形下，$f(\succsim) = f(\sigma(\succsim))$也成立。$\succsim$ 并非群体策略无关这一事实，源于室友问题中的相应机制并非群体策略无关这一事实。 f [7]

如果我们放弃性别中立性，并将效率修改为只考虑市场一方的偏好，就得到由 (Pycia 和 Unver 2017) 和 (Bade 2020) 所刻画的有效且群体策略无关的单边匹配机制集合¨。当我们以弱性别中立性取代性别中立性时，证明仍然成立，直到我们证明一对王室夫妇必须被匹配或默认不匹配为止。然而，如果这对王室夫妇选择的伴侣 m 与 w不对称，延续子机制就未必对称。例2对此作了说明。

4.1 性别中立性与稳定性的不相容

稳定性与激励相容性之间的矛盾最早由 Roth（1982）阐述。这里我们表明，稳定性也与性别中立性相冲突。因此，稳定性迫使设计者在原本不存在不对称性的地方引入不对称性。

定理3。对于至少有三对夫妇的情形， f 不存在既性别中立又稳定的稳定机制。

证明。固定一个包含三对夫妇的匹配问题 $\{(m_1, w_1), (m_2, w_2), (m_3, w_3)\}$。假设 f 是一个关于 σ 性别中立的稳定机制。固定以下偏好

$\succsim_{m_1}$	$\succsim_{m_2}$	$\succsim_{m_3}$	$\succsim_{w_1}$	$\succsim_{w_2}$	$\succsim_{w_3}$
w_3	w_1	w_2	m_3	m_1	m_2
w_2	w_3	w_1	m_2	m_3	m_1
w_1	w_2	w_3	m_1	m_2	m_3

[7]如果 f 是群体策略无关的，那么它在对称偏好子域上也必须是群体策略无关的。现在考虑一个有三对夫妇的问题。若夫妇的偏好和函数 R 如室友问题的讨论中所述，我们会发现，第二对夫妇有动机谎报他们的偏好。

注意，存在两个稳定匹配

$$M-\text{optimal } = \{(m_1, w_3), (m_2, w_1), (m_3, w_2)\}$$
$$W-\text{optimal } = \{(m_1, w_2), (m_2, w_3), (m_3, w_1)\}$$

要看出不存在其他稳定匹配，请注意，在任何其他匹配中，至少有一对具有相同索引的代理人（m_i、w_i）彼此匹配。在这种情况下，有一个代理人 m_j 和一个代理人 w_j 分别将 w_i 和 m_i 排名最高。他们构成阻挡对。

由于 $\sigma(\succsim) = \succsim$，并且由于 f 相对于 σ、$f(\succsim)$ 是性别中立的，因此必须是对称的。然而，两个稳定匹配都不是对称的：在对 M 最优的稳定匹配中，（m_1、w_3）彼此匹配，但（$\sigma(m_1)$ $\sigma(w_3)$）=（w_1、m_3）并未彼此匹配。同样，在对 W 最优的稳定匹配中，（m_1、w_2）彼此匹配，但（$\sigma(m_1)$ $\sigma(w_2)$）=（w_1、m_2）并未彼此匹配。 □

5 采用随机化的双边机制

实现社会选择中公平性的一种典型方法是采用随机化。通过对代理人在机制中所扮演的角色进行随机化，可以将确定性机制对称化。例如，可以通过均匀随机地选择选择顺序，对序贯独裁进行对称化；在序贯独裁中，代理人按照固定顺序依次选择自己偏好的匹配对象。这就产生了一种机制，类似于房屋分配问题中所称的随机序贯独裁（RSD）机制。对称化机制保留了原机制的某些特征。如果原机制具有策略无关性，那么对称化版本也具有策略无关性[8]。另一方面，即使原机制是有效的，也不能保证对称化机制同样有效。例如，考虑以下偏好：

$\succsim_{m_1}$	$\succsim_{m_2}$	$\succsim_{m_3}$	$\succsim_{w_1}$	$\succsim_{w_2}$	$\succsim_{w_3}$
w_3	w_1	w_2	m_3	m_1	m_2
w_2	w_3	w_1	m_2	m_3	m_1
w_1	w_2	w_3	m_1	m_2	m_3

如果我们运行序贯独裁，并以均匀随机的方式选择选择顺序，就会得到以下随机分配。

	w_1	w_2	w_3
m_1	1/12	11/24	11/24
m_2	11/24	1/12	11/24
m_3	11/24	11/24	1/12

然而，以下随机分配为所有代理人带来了一阶随机改进。

	w_1	w_2	w_3
m_1	0	1/2	1/2
m_2	1/2	0	1/2
m_3	1/2	1/2	0

[8]也就是说，如实报告所得到的彩票，在一阶随机占优意义上优于通过任何虚报可能获得的其他彩票。

这是各种环境下随机机制中的一个常见问题（Echenique、Root 和 Sandomirskiy，2022）。在房屋分配中，Bogomolnaia 和 Moulin（2001）证明，这种情况不可避免：不存在同时满足效率、策略无关和对称性的机制。从某种意义上说，该机制是有效的：其结果可以分解为对有效确定性结果的彩票。这被称为事后效率。Bade（2020）证明，对众多有效且群体策略无关的房屋分配机制中的任意一种进行对称化，得到的都只能是随机序贯独裁。这一点，加上 Bogomolnaia 和 Moulin（2001）的不可能性结果，引发了人们对 RSD 是否是唯一兼具事后效率、策略无关和对称性的机制这一问题的兴趣。

对我们的王室机制进行对称化，可以对双边匹配中的同一问题给出否定答案。例如，当我们对一种在每轮中默认匹配王室成员的王室机制进行对称化时，在给定上述偏好的情况下，可以得到如下分配。

	w_1	w_2	w_3
m_1	$1/9$	$4/9$	$4/9$
m_2	$4/9$	$1/9$	$4/9$
m_3	$4/9$	$4/9$	$1/9$

注意，这三个分配矩阵是帕累托排序的，其中第二个矩阵支配随机序贯独裁，而随机序贯独裁又支配均匀默认匹配结果。随机序贯独裁与均匀默认匹配结果之间的排序是这一例子的产物；也存在帕累托排序相反的例子，而且一般而言，这两种随机分配无法进行排序。

参考文献

Abdulkadiroğlu, A., and T. Sönmez(2003)：“学校选择：一种机制设计方法”， *American economicreview*，93(3)，729–747。Abdulkadiroglu, A., and T. Sönmez(2013)：“匹配市场：理论与实践”， *Advances in Economics and Econometrics*，1，3–47。Alva, S.(2017)：“何时操纵只与一和二有关”， *Unpublished*。Bade, S.(2020)：“随机序贯独裁：唯一的选择”， *Mathematics of Operations Research*，45(1)，353–368。Bartholdi, L., W. Hann-Caruthers, M. Josyula, O. Tamuz, and L. Yariv(2021)：“公平投票规则”，*Econometrica*，89(2)，563–589。Bogomolnaia, A., and H. Moulin(2001)：“随机分配问题的新解决方案”， *Journal of Economictheory*，100(2)，295–328。Echenique, F., J. Root, and F. Sandomirskiy (2022)：“随机资源分配与社会选择中的效率”，*arXiv preprint arXiv:2203.06353*。Gale, D., and L. S. Shapley (1962)：“大学招生与婚姻稳定性”， *The American MathematicalMonthly*，69(1)，9–15。Gibbard, A. (1973)：“投票方案的操纵：一般结果”， *Econometrica: journal of the EconometricSociety*，第587–601页。Pápai, S. (2000)：“通过层级交换实现策略无关分配”， *Econometrica*，68(6)，1403–1433。Pycia, M., and M. U. Ünver(2017)：“激励相容分配与离散资源交换”， *TheoreticalEconomics*，12(1)，287–329。Root, J., and D. S. Ahn (2020)：“受约束分配机制中的激励与效率”， *arXiv preprintarXiv:2006.06776*。

Roth, A. E. (1982年): “匹配经济学：稳定性与激励”， *Mathematics of operations research*, 7(4), 617–628。(2008年): “延迟接受算法：历史、理论、实践与开放问题”， *international Journalof game Theory*, 36(3), 537–569。Roth, A. E., and M. Sotomayor(1992年): “双边匹配”， *Handbook of game theory with economic applications*, 1, 485–541。
Satterthwaite, M. A. (1975年): “策略无关性与阿罗条件：投票程序和社会福利函数的存在性与对应定理”, *Journal of economic theory*, 10(2), 187–217。Shapley, L., and H. Scarf (1974年): “关于核心与不可分割性”, *Journal of mathematical economics*, 1(1), 23–37。

双边匹配中四个代理人的情形

本节刻画四个代理人 $\{m_1, m_2, w_1, w_2\}$ 情形下所有群体策略无关、有效且性别中立的双边匹配机制。在这种情形下， Σ^2 只包含两种匹配： ν:={(m_1, w_1)、(m_2, w_2)} 以及 μ:= {(m_1, w_2)、(m_2, w_1)}。由于只有两种匹配，每个代理人恰好有两种偏好：该代理人要么偏好 ν ，要么偏好 μ。因此，偏好剖面 $\succsim$ 可以概括为集合 S ，即所有代理人 i 满足 $\nu(i) \succsim_i \mu(i)$。在当前情形下，将偏好剖面表示为这类集合 S 更为方便；这意味着机制现在将 N 的所有子集构成的集合映射到 $\{\mu, \nu\}$。

按照这种偏好剖面的表示方式，机制将 N 的所有子集构成的集合划分为 Λ^ν 和 Λ^μ ，其中约定 $f(S) = \nu$ 当且仅当 $S \in \Lambda^\nu$。因此，在只有两对夫妇的环境中，我们的三个目标转化为以下要求。

- 该机制 f 有效，当且仅当 $N \in \Lambda^\nu$ 且 $\emptyset \in \Lambda^\mu$。
- 该机制 f 具有群体策略无关性[9] 当且仅当 $S \in \Lambda^\nu$ 且 $S \subsetneq S'$ 意味着 $S' \in \Lambda^\nu$.
- 该机制 f 具有性别中立性，当 $S \in \Lambda^\nu$ 意味着 $\sigma(S) \in \Lambda^\nu$时。

因此，任何群体策略无关机制都可以表示为一个集合$\overline{\Lambda}^\nu \subset \Lambda^\nu$ ，其中包含所有极小集合 $S \in \Lambda^\nu$。

引理 3。以下集合列表 $\overline{\Lambda}^\nu$ ——除重命名外——穷举了所有有效、群体策略无关且性别中立的机制。

a) $\{S \mid |S| = x\}$ 当 $x = 1$、2、3、4时，b) $\{\{m_1, w_1, w_2\}, \{m_1, w_1, m_2\}, \{m_2, w_2\}\}$，c) $\{\{m_1, w_1, w_2\}, \{m_1, w_1, m_2\}\}$，d) 集合 $\{\{m_1, w_1\}\}$、$\{\{m_2, w_2\}\}$、$\{\{m_1, w_2\}, \{m_2, w_1\}\}$、$\{\{m_1, m_2\}, \{w_1, w_2\}\}$的任意子集。e) $\{\{m_1\}, \{w_1\}, \{m_2, w_2\}\}$f) $\{\{m_1\}, \{w_1\}\}$

a) 中列出的 4 种机制还是完全对称机制的完备子集。

为便于记号，引理3 包含了一定程度的重复计数。例如，当至少有两名代理人偏好某一匹配时选择 ν 的机制，就属于上述 a) 组和 d) 组。我们也可以通过指出 b) 组和 c) 组中列出的机制，在交换匹配 ν 和 μ后分别等价于 e) 组和 f) 组中的机制，来简化定义。f) 组中的机制是以 m_1 和 w_1 王室夫妇为$\{m_1, w_1\}$的默认匹配机制；而 d) 组中定义为 m_1 和 w_1 王室成员的机制，则是默认不匹配机制。

[9]事实上，在两种结果的情况下，群体策略无操纵性等价于个体策略无关性，因此，该条件对于机制具备策略无关性而言是必要且充分的。

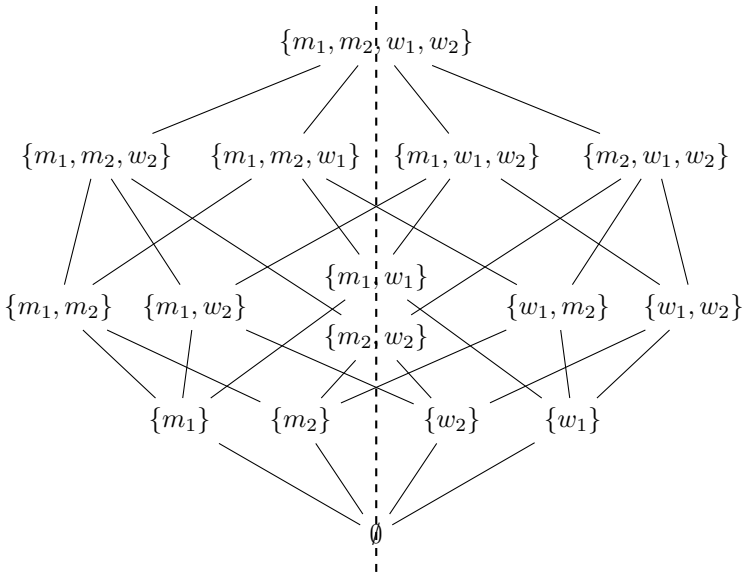


图1：四个代理人：任何性别中立的策略无关机制都可以表示为上述格中的一个节点集合，该集合向上封闭，并且关于竖直虚线的反射对称。

证明。对于每一种机制，群体策略无操纵性都由定义成立，因为在每种情形下，Λ^{ν} 都被定义为 $\overline{\Lambda}^{\nu}$ 中所有超集构成的集合。根据前面的论证，并结合以下观察，即对于这些子集列表中的任意一个，$\emptyset \notin \overline{\Lambda}^{\nu}$，每种机制都是帕累托最优的。最后，每种机制都是性别中立的，因为每个生成集都是性别中立的。

因此，我们只需证明上述列表是完备的。为此，首先考虑 $\overline{\Lambda}^{\nu}$ with$\{m_1, w_1, w_2\} \in \overline{\Lambda}^{\nu}$。根据性别中立性，$\sigma(\{m_1, w_1, w_2\}) = \{m_1, w_1, m_2\} \in \overline{\Lambda}^{\nu}$ 必然成立。由于$\{m_1, w_1, w_2\}$, $\{m_1, w_1, m_2\} \in \overline{\Lambda}^{\nu}$ $\{m_1, w_1, w_2\}$或 $\{m_1, w_1, m_2\}$的任何子集都不能属于 $\overline{\Lambda}^{\nu}$。因此，后者不能包含任何单元素集合。 $\{m_2, w_2\}$ 是唯一可以包含在 $\overline{\Lambda}^{\nu}$中的双代理人集合。总之，我们发现，包含一个三代理人集合的集合 $\overline{\Lambda}^{\nu}$ 恰好就是 a)、b) 和 c) 中列出的集合。交换代理人偏好中的 ν 和 μ 后，我们看到，包含一个单元素集合的集合 $\overline{\Lambda}^{\nu}$ 恰好就是 a)、e) 和 f) 中列出的集合。

最后，为了说明 d) 是由两个代理人集合生成的机制的穷尽列表，请注意，d) 列出了两个代理人集合的完整性别中立集合。 □

B 单边匹配中两个代理人的情形

假设 $N = \{1, 2\}$。只有两个代理人时，单边匹配中恰好有两种结果：匹配 {(1, 2)} 和匹配 {(1), (2)}。

定义9。如果存在某个代理人 k，使得对于所有 $\succsim$， f 是独裁，而 $f(\succsim)(k) = top(\succsim_k)$，则称机制为独裁。

定义 10。我们称机制 f 为一致同意规则：除非双方都将另一方排名最高，否则选择两个匹配中的一个。

引理 4。如果 $N = \{1,2\}$，则单边机制 $f : \Omega^1 \to \Sigma^1$ 具有群体策略无关性和有效性，当且仅当它是独裁或一致同意规则。

证明。由于 $N = \{1,2\}$，恰好存在两种匹配：一种将两个代理人配对，另一种让两人都保持单身。因此，当两个代理人意见一致时，机制当且仅当选择他们共同偏好的匹配才是有效的。这四种机制将两个代理人意见不一致的两种偏好剖面分别映射到两种不同的匹配。容易验证，这四种机制分别对应两种独裁制和两种一致同意规则，并且都是策略无关的。

□

C 定理的证明 2

C.1 序贯独裁有效且群体策略无关。

引理 5. 顺序独裁有效且群体策略无关。

证明。固定一个顺序独裁 $SD : \Omega^1 \to \Sigma^1$。假设 SD 无效或非群体策略无关。因此，假设存在某个偏好剖面 $\succsim$，并且要么存在一个匹配 μ 帕累托支配$SD(\succsim)$，要么存在一个群体 $S \subset N$ 和一个偏离 $\succsim'_S$，使得 S 的所有成员都弱偏好$SD(\succsim'_S, \succsim_{-S})$而非 $SD(\succsim)$，且该群体中的一些成员严格持有这一偏好。将 k^1 和k^2 定义为 $SD(\succsim)$-算法首次找到一个匹配，且该匹配分别不同于 μ和 $SD(\succsim'_S, \succsim_{-S})$时的轮次。如果在步骤 k^1 或 k^2 时只剩下两名代理人未匹配，我们便通过引理 4 得出矛盾。

因此，假设在步骤 k^1 和 k^2 之后，至少有三名代理人仍未匹配。设 i^1 和 i^2 是这些步骤中的独裁者，于是 $SD(\succsim)(i^1) \neq \mu(i^1)$，且 $SD(\succsim)(i^2) \neq SD(\succsim'_S, \succsim_{-S})(i^2)$。由于独裁者 i^x 会在步骤 k^x 与其排名最高的未匹配伙伴匹配，并且由于 $\mu(i^1)$ 和 $SD(\succsim'_S, \succsim_{-S})(i^2)$ 分别在步骤 k^1 和 k^2 仍保持可用，因此我们得到矛盾 $SD(\succsim)(i^1) \succ_i \mu(i^1)$ 以及 $SD(\succsim)(i^2) \succ_i SD(\succsim'_S, \succsim_{-S})(i^2)$。

□

C.2 子机制

对于任意两个不同的代理人 j、$k \in N$，分别将 Ω^{-j} 和 $\Omega^{-j,k}$ 定义为 Ω^1 对除代理人 j 和 j、k 之外所有代理人的限制。对于任意群策略防操纵且有效的机制 f，分别按如下方式在 Ω^{-j} 和 $\Omega^{-j,k}$ 上定义两个机制 f^{-j} 和 $f^{-j,k}$。对于所有 $\succsim^{-j} \in \Omega^{-j}$ 和 $i \in N \setminus \{j\}$，令 $f^{-j}(\succsim^{-j})(i) = f(\succsim)(i)$，其中 $\succsim$ 是任意满足以下条件的偏好剖面：(1) 将其限制于 $N - \{j\}$ 时得到 $\succsim^{-j}$；(2) 所有代理人 $i \neq j$ 将 j 排在末位，而代理人 j 将自己排在首选位置。类似地，对于所有 $\succsim^{-j,k} \in \Omega^{-j,k}$ 和 $i \in N \setminus \{j,k\}$，令 $f^{-j,k}(\succsim^{-j,k})(i) = f(\succsim)(i)$，其中 $\succsim$ 是任意满足以下条件的偏好剖面：(1) 将其限制于 $N - \{j,k\}$ 时得到 $\succsim^{-j,k}$；(2) 所有代理人 $i \neq j$、k 将 j 和 k 排在末位，而代理人 j 和 k 将彼此排在首选位置。为简化记号，以下省略偏好剖面 $\succsim^{-j}$ 和 $\succsim^{-j,k}$ 上标中的 $-j$ 和 $-j$、k；此时，$\succsim(\succsim)$ 表示将 f^{-j} 应用于 $\succsim$ 对除代理人 j 之外所有代理人的限制。

[10]也就是说，Ω^{-j} 是除 j 之外所有代理人的偏好剖面集合，并且 j 被排除在其他所有代理人的偏好之外。$\Omega^{-j,k}$ 类似，只是现在 j 和 k 被排除在外。

引理 6. 设 f 是一个群策略防操纵且有效的机制，j、$k \in N$ 是两个不同的代理人。则机制 f^{-j} 和 $f^{-j,k}$ 定义良好，且具有群策略无关性并且有效。此外，如果 $f(\succsim)(j) = j$，那么对于所有 $i \in N \setminus \{j\}$，$f(\succsim)(i) = f^{-j}(\succsim)(i)$；如果 $f(\succsim)(j) = k$，那么对于所有 $i \in N \setminus \{j,k\}$，$f(\succsim)(i) = f^{-j,k}(\succsim)(i)$。

证明。对于 f^{-j} 和 $f^{-j,k}$，论证是类似的，因此我们只对 f^{-j}进行证明。要看出 f 定义良好，请注意，对于任意 $\succsim^{-j}$ 以及任意满足上述条件的偏好档案 $\succsim$ 和 $\succsim'$（即，当限制于 $N - \{j\}$ 时，(1) 偏好档案 $\succsim$ 和 $\succsim'$ 给出 $\succsim^{-j}$；以及 (2) 所有代理人 $i \neq j$ 都将 j 排在末位，而代理人 j 在两个偏好档案中都将自己排在首选位置），$\succsim$ 和 $\succsim'$ 至多只能在 j的偏好排序上有所不同。然而，由于 f 是有效的，在这两种情形下，j 都会与自己匹配。根据群体策略无操纵性，其他所有代理人的匹配对象也必须保持不变。现在反设 f^{-j} 不是群体策略无关的。于是存在一个偏好档案 $\succsim^{-j}$、某个参与者联盟 S，以及代理人 S的一个偏好档案 $\succsim'_S$，使得对于 S中的所有 i以及对于 S中的某个 k，$f^{-j}(\succsim'_S, \succsim^{-j}_{-S})(i) \succsim_i f^{-j}(\succsim^{-j})(i)$，且 $f^{-j}(\succsim'_S, \succsim^{-j}_{-S})(k) \succsim_k f^{-j}(\succsim^{-j})(k)$。令 $\succsim^*_S$为代理人 S 的偏好档案，其中所有代理人都将 j 排在末位，而除此之外，其偏好排序与 $\succsim_S$ 相同。同样，令 $\succsim^{-j*}$ 为这样一个偏好档案：所有代理人都将 j 排在末位，除此之外，其偏好与 $\succsim^{-j}$ 相同。令 $\succsim_j$ 为 j 的任意偏好，其中 j 将自己排在首选位置。根据定义，对于所有 $i \neq j$，$f^{-j}(\succsim^{-j})(i) = f(\succsim_j, \succsim^{-j*})(i)$，并且 $f^{-j}(\succsim'_S, \succsim^{-j}_{-S})(i) = f(\succsim^*_S, \succsim_j, \succsim^{-j*}_{-S})(i)$。然而，这将导致 f违反群体策略无操纵性，矛盾。最后，效率直接由 f的效率推出。

□

C.3 证明的归纳结构

引理 7：如果每个适用于三个或更多代理人的有效且群体策略无关机制 $f : \Omega^1 \to \Sigma^1$ 都有一名独裁者，那么任何有效的群体策略无关机制都是顺序独裁。

证明。固定一个群策略防操纵且有效的机制 $f : \Omega^1 \to \Sigma^1$。如果只有两名代理人，那么根据引理 4，$f$ 是顺序独裁。如果代理人多于两名，那么根据假设，f 有一名独裁者 i，因此对于任意 $\succsim_.$，$f(\succsim) =$ 首选（$\succsim_i$）。如果将 i 与首选（$\succsim_i$）匹配后只剩一名代理人未匹配，则该代理人必须保持单身。否则，引理 6 意味着，选择代理人 1 后会得到一个群体策略无关且有效的子机制 f'。根据群体策略无关性，该子机制 f' 仅取决于代理人 i 的选择（而不取决于代理人 i 对其未选择选项的偏好排序，也不取决于代理人 $j \neq i$ 的偏好，而代理人 i 确实进行了选择）。如果有两名代理人未匹配，那么根据引理 4，f' 必定是独裁或一致同意规则，结论即得。如果有多于两名代理人未匹配，那么根据该引理中的假设，f' 有一名独裁者。继续进行归纳，我们最终会达到至多剩下两名代理人的情形。

□

根据引理7，只需证明每个拥有两个以上代理人的群体策略无关且有效的机制都存在一名独裁者。接下来的三个章节将分别证明，拥有 $n = 3$、$n = 4$ 和 $n \geq 5$ 名代理人的每个群体策略无关且有效的机制都存在一名独裁者。

C.4 三名代理人的情形

在本章节中，固定代理人$N = \{1,2,3\}$的一个群策略防操纵且有效的机制 $f : \Omega^1 \to \Sigma^1$，使得 Σ^1 仅包含四种匹配。如果任意两名代理人匹配，剩下的

代理人显然是单身。证明 f 必定是顺序独裁的关键在于“所有权”这一概念。称代理人 i 拥有代理人 j，如果代理人 i 总是可以选择与代理人 j匹配。形式上，$\text{top}(\succsim_i) = j$意味着 $f(\succsim_i, \succsim_{-i})(j) = i$，对所有 $\succsim_{-i}$均成立。在通过所有权引理8确立初步结果后，引理9证明 $i \in \{1,2,3\}$ 中的每个代理人都必须被拥有。随后，引理10排除了除一名代理人拥有所有代理人这一种结构之外的所有所有权结构。在本章节中，使用一些额外的记号会很有帮助。令 $\succsim^1, {}_i{}^2 : 1, 2, 3, \succsim^1, {}_i{}^3 : 1, 3, 2$，并令 $\succsim_i^1$表示一个首选为 $\succsim_i$的任意偏好，因此 $\succsim_i^1$ 等于 $\succsim^1, {}_i{}^2$ 或 $\succsim^1, {}_i{}^3$。类似地，令 $\succsim^1$,2, $\succsim^1$,3和 $\succsim^1$ 表示偏好剖面，其中所有代理人的偏好分别为 $\succsim^1, {}_i{}^2$, $\succsim^1, {}_i{}^3$ 和 $\succsim_i^1$。

第一个引理给出了确立所有权的充分条件。

引理 8. 代理人 j^* 拥有代理人 1，当且仅当 $f(\succsim^{1,\,2})(j^*) = f(\succsim^{1,\,3})(j^*) = 1$。

证明. 如果代理人 j^*拥有代理人 1，那么对于任意满足 $\text{top}(\succsim_{j^*}) = 1$ 的 $\succsim$， $f(\succsim)(j^*) = 1$ 都成立；特别地，$\succsim^{1,\,2}$ 以及 $\succsim^{1,\,3}$。

因此，假设对于某个代理人 j^*，有 $f(\succsim^{1,\,2})(j^*) = f(\succsim^{1,\,3})(j^*) = 1$。要使 j^* 拥有 1，只需证明对于所有 $\succsim^1$， $f(\succsim^1)(j^*) = 1$ 成立。为此，任取 $\succsim_{-j^*}$。定义两个代理人 $i \neq j^*$ 的 $\succsim_i'$，使得 $\text{top}(\succsim_i') = 1$ 且 $2 \succsim_i' 3 \Leftrightarrow 2 \succsim_i 3$。根据假设，$f(\succsim_{j^*}^1, \succsim_{-j^*}')(j^*) = 1$。群体策略无操纵性进而推出 $f(\succsim_{j^*}^1, \succsim_{-j^*}') = f(\succsim_{j^*}^1, \succsim_{-j^*})$，因此$f(\succsim_{j^*}^1, \succsim_{-j^*})(j^*) = 1$。

情形 1： $j^* = 1$。

情形 1.1： $f(\succsim^{1,\,2})(2) = 2$。那么， f的群体策略无操纵性意味着 $f(\succsim^{1,\,2}, \succsim_{-2}^1)(1) =1$。 f的策略无关性意味着 $f(\succsim^{1,\,3}, \succsim_{-2}^1)(2) \in \{2,3\}$，因此，根据群体策略无关性或可行性，分别可得 $f(\succsim^{1,\,3}, \succsim_{-2}^1)(1) = 1$。总之，对于任意 $\succsim^1$，我们得到 $f(\succsim^1)(j^*) = 1$，由此证明了该结论。

情形 1.2： $f(\succsim^{1,\,3})(3) = 3$。将情形 1.1 中的论证作必要变更后，我们得到$f(\succsim^1)(j^*) = 1$，对于任意 $\succsim^1$均成立。

情形 1.3： $f(\succsim^1, {}^2)(3) = f(\succsim^1, {}^3)(3) = 2$。因此，对于代理人 1 将保持单身排在首选，且 $\{2,3\}$ 中至少有一名代理人更愿意与另一名代理人匹配而非保持单身的任何偏好剖面，根据群体策略无关性， $f(\succsim^1, {}^2) = f(\succsim^1, {}^3)$ 也必须与 2 匹配 3。对于最后一种情形，即代理人 1 将保持单身排在首选，而另外两名代理人更愿意保持单身而非彼此匹配，先注意到 $f(\succsim_1^1, \succsim^1, {}_{-1}^2)$ 和 $f(\succsim_1^1, \succsim^1, {}_{-1}^3)$ 都将代理人 2 和 3 进行匹配。由策略无关性可得， $f(\succsim_1^1, \succsim^1, {}_2\succsim^1, 3\,3)(2) \in \{2,3\}$ 以及$f(\succsim_1^1, \succsim^1, {}_2\succsim^1, 3\,3)(3) \in \{2,3\}$。于是， f的效率意味着，在$f(\succsim_1^1, \succsim^1, {}_2\succsim^1, 3\,3)$中，代理人 2 和 3 均保持单身，因此再次有 $f(\succsim_1^1, \succsim^1, {}_2\succsim^1, 3\,3)(1) = 1$，综上 $f(\succsim^1)(1) = 1$。

情况2： $j^* \neq 1$。不妨设 $j^* = 2$ ，使得 $f(\succsim^{1,2})(2) = f(\succsim^{1,3})(2) = 1$。现在设$f(\succsim^*)(2) \neq 1$对某个 $\succsim^*$成立，且对于 $i = 1$、2、3， $\text{top}(\succsim_1^*)(i) = 1$。假设 $f(\succsim^1,2)(2) = f(\succsim^{1,3})(2) = 1$，结合群体策略无操纵性，可推出对于任意 $\succsim^1$， $f(\succsim^1,2\,1\,,\succsim_{-1}^1)(1) = 2$(A)，且 $f(\succsim^1,3\,3\,,\succsim_{-3}^1)(1) = 2$(B)。因此，要使 $f(\succsim^*)(1) \neq 2$成立，必须有 $\succsim_1^*=\succsim^1,3\,1$且 $\succsim_3^*=\succsim^1,2\,3$。情形 1： $f(\succsim^*)(1) = f(\succsim^1, 3\,1\,,\succsim_2^*,\succsim^1,2\,3\,)(1) = 3$。在这种情况下，由群体策略无操纵性可得 $f(\succsim^1,3\,1\,,\succsim_2^*,\succsim^1,2\,3\,) = f(\succsim^1,3\,1\,,\succsim_2^*,\succsim^1,3\,3\,)$，这与上文已确立的(B)矛盾。情形 1： $f(\succsim^*)(1) = f(\succsim^1,3\,1\,,\succsim_2^*,\succsim^1,2\,3\,)(1) = 1$。在这种情况下，由群体策略无操纵性可得 $f(\succsim^1,3\,1\,,\succsim_2^*,\succsim^1,2\,3\,) = f(\succsim^1,2\,1\,,\succsim_2^*,\succsim^1,2\,3\,)$，这与上文已确立的(A)矛盾。

□

引理 9。根据 f，每个代理人 $i \in \{1,2,3\}$ 都被拥有。

证明。 根据引理 8 （以及所有代理人的可互换性），只需证明 $f(\succsim^1, 2)(1) = f(\succsim^1, 3)(1)$。因此，假设有 $f(\succsim^1, 2)(1) \neq f(\succsim^1, 3)(1)$。

情形 1：代理人 1 在 $\succsim^1, 3$ 或 $\succsim^1, 2$ 中均不是单独一人，因此 $f(\succsim^1, 2)(1) \neq 1 \neq f(\succsim^1, 3)(1)$。

假设有 $f(\succsim^1,2)(3) = f(\succsim^1,3)(2) = 1$。 f 的群体策略无操纵性意味着 $f(\succsim^1,2) = f(\succsim^1,3\ 3, \succsim^1, {}^2_{-3})$，以及 $f(\succsim^1,3) = f(\succsim^1,2\ 2, \succsim^1,{}^3_{-2}) = f(\succsim^1,3\ 3, \succsim^1,{}^2_{-3})$。总之，我们得到矛盾$f(\succsim^1,2) = f(\succsim^1,3)$，这与以下假设相矛盾： $f(\succsim^1,2)$ 和 $f(\succsim^1,3)$ 分别将代理人 1 与代理人 2 和 3 匹配。因此，我们必须有 $f(\succsim^1,2)(2) = f(1, 3)(3) = 1$。

该证明通过说明 f 在 $\succsim$ 给出的偏好剖面下必须等于两个不同的匹配来导出矛盾

$$\succsim_1: 1, 3, 2$$
$$\succsim_2: 3, 1, 2$$
$$\succsim_3: 1, 2, 3$$

从 $f(\succsim^1, 2)(1) = 2$ 将代理人2的偏好改为 $\succsim_2$：3、1、2 开始。根据策略无关性$f(\succsim_2, \succsim^1, {}^2_{-2})(2) \in \{1, 3\}$。由于匹配 $\{(1)、(2, 3)\}$ 在 $(\succsim_2, \succsim^1, {}^2_{-2})$处帕累托支配匹配 $\{(1, 2)\ 3\}$，因此 $f(\succsim_2, \succsim^1, {}^2_{-2})$ 必须匹配代理人2和3。于是，群体策略无关性意味着 $f(\succsim_2, \succsim^1, {}^2_{-2}) = f(\succsim)$。另一方面，$f$的群体策略无关性，再结合 $\succsim^1, {}^3_1 = \succsim_1$ 这一观察可推出 $f(\succsim^1, 3) = f(\succsim)$。由于 $f(\succsim^1, 3)(1) = 3$，而我们在上文已经证明 $f(\succsim)(1) = 1$，因此产生矛盾。

情况2：代理人 1 单独位于 $\succsim^1、2$ 或 $\succsim^1、3$，但不能同时位于两处。不失一般性， $f(\succsim^1、2)(1) = 1$。

情况2.1。 $f(\succsim^1、2)(2) = 2$。群体策略无操纵性随后意味着 $f(\succsim^1、23, \succsim^1、{}^3_{-2})(1) = 1$。策略无关性推出 $f(\succsim^1、3)(2)$ 等于 2 或 3。于是我们得到 $f(\succsim^1、3)(1) = 1$（第一种情况下依据群体策略无操纵性，第二种情况下依据可行性），这与代理人 1 不单独位于 $\succsim^1、3$ 的假设相矛盾。

情况2.2 $f(\succsim^1、2)(2) = 3$。群体策略无操纵性随后意味着 $f(\succsim^1、2) = f(\succsim^1、23, \succsim^1、{}^3_{-3})$。由于 $f(\succsim^1、3) \neq f(\succsim^1、2) = f(\succsim^1、23, \succsim^1、{}^3_{-3})$，并且由于 $\succsim^1、23$ 和 $\succsim^1、33$ 仅在其对代理人 2 和 3 的偏好排序（第二位和第三位）上有所不同， $f(\succsim^1、3)(3) = 3$。因此，为使 $f(\succsim^1、3)(1) \neq 1$ 成立，我们必须有 $f(\succsim^1、3)(1) = 2$。

如上所述，该证明通过说明 f 将以下 $\succsim$ 映射到两个不同的匹配，从而导出了矛盾，

$$\succsim_1: 3, 1, 2$$
$$\succsim_2: 1, 2, 3$$
$$\succsim_3: 1, 3, 2.$$

策略无关性、 $\succsim^1$、$_2$ ^{2}=$\succsim_2$和 $f(\succsim^1$、$^2)(1) = 1$蕴含 $f(\succsim^1$、2 3、$\succsim_{-3})(1) \in \{1,3\}$。如果 $f(\succsim^1$、2 3、$\succsim_{-3})(1) = 1$，那么 f的群体策略无操纵性蕴含 $f(\succsim^1$、$^2) = f(\succsim^1$、2 3、$\succsim_{-3})$。由此产生矛盾，因为 $f(\succsim^1$、$^2)$处于 $(\succsim^1$、2 3、$\succsim_{-3})$，被 μ支配，且 $\mu(1) = 3$。因此， $f(\succsim^1$、2 3、$\succsim_{-3})(1) = 3$且 $f(\succsim^1$、2 3、$\succsim_{-3}) = \mu$。由于 f是策略无关的，并且由于 $\mu(3) = 1 =$首选($\succsim_3$) = 首选($\succsim^1$、2 3)，我们得到 $f(\succsim) = \mu$。从 $f(\succsim^1$、$^3)$开始，并注意到 $\succsim^1$、$_3$ ^{3}=$\succsim_3$，f的群体策略无操纵性导出了矛盾 $f(\succsim) = f(\succsim^1$、$^3) \neq \mu$。

□

引理10。机制 f 必须有一名独裁者。

证明。 根据引理 9 每个代理人都拥有某个代理人。假设存在一条“所有权链”，即代理人 i拥有 j而后者又拥有 k，其中 $\{1,2,3\} = \{i,j,k\}$。对于偏好剖面 $\succsim$，其中首选($\succsim_i$) = j和首选($\succsim_j$) = k，我们将得到矛盾(i， j)、(j， k) $\in f(\succsim)$。鉴于不可能存在这样的所有权链，我们只需考虑3种所有权结构（忽略重新命名）：1. 每个代理人都拥有自己。2. 代理人1拥有代理人2，代理人3拥有自己。3. 一名代理人拥有全部三名代理人。为证明第三种情形必然成立，我们排除前两种情形。

情形1：每个代理人都拥有自己。一个没有稳定匹配的经典室友问题示例可以用来导出矛盾。定义 $\succsim$ 如下：

$$\succsim_1: 2,3,1$$
$$\succsim_2: 3,1,2$$
$$\succsim_3: 1,2,3$$

由于 f 是有效的，至少有两名代理人必须匹配。假设 $f(\succsim)(1) = 2$ ，并考虑代理人 2 和 3 偏离到 $\succsim'_2$: 3, 2, 1 和 $\succsim'_3$: 2, 3, 1。由于每名代理人都拥有自己，$f(\succsim_1, \succsim'_{-1})(2) \succsim_2 2$且 $f(\succsim_1, \succsim'_{-1})(3) \succsim_3 3$。因此， $f(\succsim_1, \succsim'_{-1})$要么让所有代理人都保持单身，要么匹配代理人 2 和 3。由于后者帕累托支配前者，必有 $f(\succsim_1, \succsim'_{-1})(2) = 3$。由于$f(\succsim_1, \succsim'_{-1})(2) = 3 \succ_2 1 = f(\succsim)(2)$且 $f(\succsim_1, \succsim'_{-1})(3) = 2 \succ_3 3 = f(\succsim)(3)$，这与 f 的群体策略无操纵性相矛盾。作必要变更，同样的论证也排除了其余两种匹配。因此，不可能每名代理人都拥有自己。

情况2：代理人 1拥有代理人2，且代理人3拥有自己。将偏好剖面 $\succsim$ 分两步转化为($\succsim_2, \succsim'_{-2}$)，其中

$$\succsim_1: 3,2,1 \qquad \succsim'_1: 3,1,2$$
$$\succsim_2: 3,2,1$$
$$\succsim_3: 2,1,3 \qquad \succsim'_3: 2,3,1.$$

由于代理人 1 拥有代理人2， $f(\succsim)(1)$ 等于 2 或 3。后者必然成立，因为匹配 {(1, 2), ()}（在 $\succsim$）被 {(1, 3)(2)} 帕累托支配。根据群体策略无操纵性， $f(\succsim) = f(\succsim'_1, \succsim_{-1})$。现在将代理人3的偏好改为 $\succsim'_3$: 根据策略无关性，且由于代理人3拥有自己， $2 \succ_3 f(\succsim_2, \succsim'_{-2})(3) \succsim'_3 3$，因此 $f(\succsim_2, \succsim'_{-2})(3) = 3$。假设代理人3保持单身，那么根据

效率，代理人1和代理人2在 $f(\succsim_2, \succsim'_{-2})$ 也必须保持单身。由此产生矛盾，因为在 $(\succsim_2, \succsim'_{-2})$，将代理人2和代理人3匹配会帕累托支配 $f(\succsim_2, \succsim'_{-2})$。 □

C.5 四个代理人的情形

在本小节中，假设 $f\colon \Omega^1 \to \Sigma^1$ 是针对四个代理人的群策略防操纵且有效的机制。对于每个偏好剖面 $\succsim$，定义 $\overline{\succsim}$，使得每个代理人 i 将保持单身排序在末位，同时保持其他所有排序与 $\succsim$ 相同。称 Ω^1 为这类偏好剖面的子域，其中每个代理人都将保持单身排序在末位。不存在任何代理人保持单身的匹配集合为 $\overline{\Sigma}^1$。这样的匹配恰好有四个。

引理 11。 f 对 Ω^1 的限制 $\overline{f}$ 是独裁。

证明。由于 f 是群策略无关且有效的，其对 Ω^1 的限制也具有这些性质。由于 f 有效，且每个代理人都将保持单身排序在末位，因此根据 $f(\succsim)$，对于任意 $\succsim \in \Omega^1$，没有代理人会保持单身；我们可以将 $\overline{f}$ 表示为一个将 Ω^1 映射到 $\overline{\Sigma}^1$ 的机制。由于 $\overline{\Sigma}^1$ 包含三个匹配，每个匹配都完全由单个代理人的匹配所决定，因此我们面对的是一个经典的社会选择问题，其中有三个选项，四个代理人可以对这三个选项持有任意偏好。根据吉巴德-萨特思韦特定理 $\overline{f}\colon \Omega^1 \to \overline{\Sigma}^1$ 必须是独裁。 □

在本章节余下部分，设代理人 1 是 $\overline{f}$ 中 $\Omega^1 \to \overline{\Sigma}^1$ 的独裁者。

引理 12. 对于每个 $i \in \{1,2,3,4\}$， f^{-i} 都是顺序独裁。

证明。 根据 6 f^{-i} 对三个代理人是有效的且群体策略无关。根据前一章节，f^{-i} 是顺序独裁。 □

在本章节余下部分，假设代理人 2 是 f^{-1} 中的独裁者。

引理 13. 代理人 $i^* \in \{1,2\}$ 在 f^{-3} 和 f^{-4} 中都是独裁者。

证明。首先固定一个偏好剖面 $\succsim$，使得

$$\begin{aligned} \succsim_1&\colon\ 1,\cdot,\cdot,\cdot \\ \succsim_2&\colon\ 2,\cdot,\cdot,\cdot \\ \succsim_3&\colon\ 2,3,4,1 \\ \succsim_4&\colon\ 2,4,3,1 \end{aligned}$$

f的效率意味着 $f(\succsim)(1) = 1$，而引理 6 随即意味着 $f^{-1}(\succsim) \subset f(\succsim)$。由于 $\mathrm{top}(\succsim_2) = 2$，且代理人2是 f^{-1} 中的独裁者， $f(\succsim)(2) = f^{-1}(\succsim)(2) = 2$。根据效率，代理人3和代理人4也仍然保持单身。根据引理 6 $f(\succsim)$ 随后必须与 $f^{-3}(\succsim)$ 和 $f^{-4}(\succsim)$ 一致。由于 $f(\succsim)(4) = 4$，且由于 $2 \succsim_4 4$，代理人4不可能是 f^{-3} 中的独裁者。作必要变更，我们可以看到代理人3不可能是 f^{-4} 中的独裁者。

要证明 f^{-3} 和 f^{-4} 必须拥有同一位独裁者，固定 $\succ$ 使得

$$\begin{aligned}
&\succ_1\colon\ 1,2,\cdot,\cdot,\\
&\succ_2\colon\ 1,2,\cdot,\cdot,\\
&\succ_3\colon\ 3,\cdot,\cdot,\cdot,\\
&\succ_4\colon\ 4,\cdot,\cdot,\cdot.
\end{aligned}$$

由于 f有效，$f(\succ)(3) = 3$且 $f(\succ)(4) = 4$。根据引理 6，$f(\succ)(1) = f^{-3}(\succ)(1) = f^{-4}(\succ)(1)$。由于 $\text{top}(\succ_1) = \text{top}(\succ_2) = 1$，因此我们得到 $f^{-3}(\succ)(1) = f^{-4}(\succ)(1) = i^*$，所以 f^{-3} 和 f^{-4} 有相同的独裁者。 □

引理 14。在 f^{-j}中，对于 $j = 2$、3、4，代理人 1 是独裁者。

证明。固定 $\succ$ 和偏离 $\succ'$

$$\begin{aligned}
&\succ_1\colon 3,1,2,4 \quad \succ'_1\colon 3,4,1,2\\
&\succ_2\colon 3,2,1,4\\
&\succ_3\colon 2,1,3,4\\
&\succ_4\colon 4,\cdot,\cdot,\cdot \qquad \succ'_4\colon 1,4,\cdot,\cdot
\end{aligned}$$

根据效率，$f(\succ)(4) = 4$。根据引理 6 f^{-4}，$(\succ) \subset f(\succ)$。假设 1 不是 f^{-4}中的独裁者。因此，2 或 3 必定是 f^{-4}中的独裁者，于是我们得到 $f(\succ) = \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$。将代理人 1 和 4 的偏好改为$\succ'_1$,4，群体策略无关性意味着 $f(\succ'_1,4,\succ_2,3)(1) = 4$。根据效率，$f(\succ'_1,4,\succ_2,3)(2) = 3$。现在定义 $\succ''$，使其与$(\succ'_1,4,\succ_2,3)$相同，只是每个代理人都将保持单身排在末位。根据群体策略无关性，$f(\succ'_1,4,\succ_2,3) = f(\succ'')$。这会产生矛盾，因为 $\succ'' \in \overline{\Sigma}^1$，并且根据假设，在所有代理人都将保持单身排在末位的问题中，代理人 1 是独裁者。因此，代理人 1 必定是 f^{-4}中的独裁者。根据引理 13，代理人 1 也是 f^{-3}中的独裁者。

现在定义 $\succ$

$$\begin{aligned}
&\succ_1\colon\ 1,3,\cdot,\cdot,\\
&\succ_2\colon\ 2,\cdot,\cdot,\cdot\\
&\succ_3\colon\ 1,3,\cdot,\cdot,\\
&\succ_4\colon\ 4,\cdot,\cdot,\cdot.
\end{aligned}$$

根据效率，$f(\succ)(2) = 2$和 $f(\succ)(4) = 4$。根据引理，6 $f(\succ)$ 与 $f^{-2}(\succ)$ 以及$f^{-4}(\succ)$ 一致。由于代理人 1 是 f^{-4} 中的独裁者，$f^{-4}(\succ)(1) = 1 = f(\succ)(1) = f^{-2}(\succ)(1)$。后者意味着代理人3 不可能是 f^{-2} 中的独裁者。作必要变更，f^{-2} 的独裁者也不可能是代理人 4。因此，f^{-2} 的独裁者必定是代理人 1。 □

引理 15. 代理人 1 是 f 中的独裁者。

证明。我们需要证明，对于所有 $\succsim$， $f(\succsim)(1) =$ 首选$(\succsim_1)$。任取一个 $\succsim$。不失一般性，设首选$(\succsim_1) \in \{1,2\}$。如果 $f(\succsim)(k) = k$ 对于 $k = 3$ 或 $k = 4$，那么 $f^{-k}(\succsim) \subset f(\succsim)$。由于对于 $k = 3$，1 是 f^{-k} 中的独裁者，4 我们得到 $f^{-k}(\succsim)(1) = f(\succsim)(1) =$首选$(\succsim_1)$。因此，以下假设 $(3, 4) \in f(\succsim)$。

情形 1：首选$(\succsim_1) = 2$。假设我们有 $f(\succsim)(1) \neq 2$。

由于 $(3, 4) \in f(\succsim)$，因此 $f(\succsim)$ 必须等于 {(1)、(2)、(3, 4)}。根据群体策略无操纵性，不失一般性地假设

$$\begin{aligned}
\succsim_1&: \quad 2, 1, 3, \cdot, \\
\succsim_2&: \quad 2, \cdot, \cdot, \cdot \\
\succsim_3&: \quad 4, \cdot, \cdot, \cdot, \\
\succsim_4&: \quad 3, 4\cdot, \cdot, \cdot.
\end{aligned}$$

根据策略无关性， $f(\succsim_1', \succsim_{-1})(1) \in \{1, 3\}$ 对于 $\succsim_1'$: 2、3、1。如果 $f(\succsim_1', \succsim_{-1})(1) = 1$，那么群体策略无关性意味着 $f(\succsim_1', \succsim_{-1}) = f(\succsim)$，且 $f(\succsim_1', \succsim_{-1})$ 与 $f^{-2}(\succsim_1', \succsim_{-1})$ 一致。由此产生矛盾，因为代理人 1 作为 f^{-2} 中的独裁者，会选择代理人 3。因此我们必须有$f(\succsim_1', \succsim_{-1})(1) = 3$。效率随后意味着 $f(\succsim_1', \succsim_{-1})(4) = 4$，从而 $f(\succsim_1', \succsim_{-1})$ 与$f^{-4}(\succsim_1', \succsim_{-1})$一致。由此产生矛盾，因为代理人 1 作为 f^{-4} 中的独裁者，会选择代理人 2。

情况2：首选$(\succsim_1) = 1$。由于$(3, 4) \in f(\succsim)$， $f(\succsim)$随后必定等于 {(1, 2)，(3, 4)}。 . 根据群体策略无操纵性，不失一般性地假设 $\succsim$ 由下式给出

$$\begin{aligned}
\succsim_1&: \quad 1, 2, 3, \cdot, \\
\succsim_2&: \quad 1, 2\cdot, \cdot, \\
\succsim_3&: \quad 4, \cdot, \cdot, \cdot, \\
\succsim_4&: \quad 3, 4\cdot, \cdot, .
\end{aligned}$$

现在交换代理人 1 的偏好排序中代理人 2 和代理人 3 的位置，使得 $\succsim_1'$: 1, 3, 2。根据策略无关性， $f(\succsim_1', \succsim_{-1})(1) \in \{2, 3\}$。假设 $f(\succsim_1', \succsim_{-1}) = 2$，那么根据群体策略无操纵性，我们有 $f(\succsim_1', \succsim_{-1}) = f(\succsim)$。现在定义 $\succsim''$，使其与 $(\succsim_1', \succsim_{-1})$ 完全相同，唯一的区别是每位代理人都将保持单身排在其偏好排序的末位。根据群体策略无操纵性， $f(\succsim'') = f(\succsim_1', \succsim_{-1})$。这会导致矛盾，因为 $\succsim'' \in \overline{\Sigma}^1$，但 $f(\succsim'')(1) = 2 \neq$首选$(\succsim'')(1) = 3$。因此，我们必须有 $f(\succsim_1', \succsim_{-1})(1) = 3$。根据效率，代理人 2 和代理人 4 此时必须保持单身。由此产生矛盾，因为 $f(\succsim_1', \succsim_{-1})(1)$ 此时必须等于 $f^{-2}(\succsim_1', \succsim_{-1})(1) = 1$，因为代理人 1 是 f^{-2} 中的独裁者。

□

C.6 $n \geq 4$ 代理人的情形

本章节固定一个针对 $n+1$ 个代理人的群策略防操纵且有效的机制 f，并假设所有针对 n 个或更少代理人的此类机制都是序贯独裁。

引理16。如果代理人 1 是 f^{-2}中的独裁者，那么某位代理人 $j \in \{1,2\}$ 在 f^{-k}中对所有 $k \notin \{1,2\}$ 都是独裁者。

证明。假设代理人4是 f^{-3}中的独裁者。固定 $\succsim$ ，使得每位代理人 $i \neq 3$ 都将代理人1和3分别排在首位和末位，代理人 $i \neq 1$、3则将保持单身排在第二位和首位$(\succsim_3) = 3$。

$$
\begin{aligned}
\succsim_1&: \quad 1, \cdot, \cdot, \cdots, 3 \\
\succsim_2&: \quad 1, 2, \cdot, \cdots, 3 \\
\succsim_3&: \quad 3, \cdot, \cdot, \cdots \\
\succsim_4&: \quad 1, 4, \cdot, \cdots, 3 \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned}
$$

根据效率， $f(\succsim)$与 $f^{-3}(\succsim)$一致。由于代理人4是 f^{-3}中的独裁者，且首选$(\succsim_4) = 1$，我们有 $f(\succsim)(4) = 1$。根据效率， $f(\succsim)(i) = i$对所有 $i \notin \{1,4\}$都成立；特别地， $f(\succsim)(2) = 2$，因此 $f^{-2}(\succsim)$与 $f(\succsim)$一致。由于代理人1是 f^{-2}中的独裁者，我们得到矛盾： $f(\succsim)(1) = f^{-2}(\succsim)(1) = 1$。由于代理人3和4是在 $N \setminus \{1,2\}$中任意选取的， f^{-k} 中的独裁者对每个 $k \notin \{1,2\}$ 而言不是代理人1就是代理人2。

为说明对于每个 $k \notin \{1,2\}$， f^{-k} 必须拥有同一个独裁者，考虑偏好剖面 $\succsim$：代理人 1 和 2 都将代理人 1 和 2 排在第一和第二位，而任何代理人 $i \notin \{1,2\}$ 都将保持单身排在首选位置，因此

$$
\begin{aligned}
\succsim_1&: \quad 1, 2, \cdot, \cdot, \\
\succsim_2&: \quad 1, 2, \cdot, \cdot, \cdot, \\
\succsim_3&: \quad 3, \cdot, \cdot, \cdot, \\
\succsim_4&: \quad 4, \cdot, \cdot, \cdot, \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned}
$$

根据效率，对每个 $i \notin \{1,2\}$， $f(\succsim)(i) = i$。因此，对于每个$i \notin \{1,2\}$， $f(\succsim)$ 与 $f^{-i}(\succsim)$ 一致。根据上一段，某个代理人 $j \in \{1,2\}$ 是 j^{-3} 中的独裁者，因此 $f(\succsim)(j) = f^{-3}(\succsim)(j) = 1$。现在考虑任意一个 $k \notin \{1,2,3\}$。由于 $f(\succsim)$ 与 f^{-k} 一致，代理人 j 也必定是 f^{-k} 中的独裁者。

□

根据引理 16 某个代理人 j 是所有子机制 f^{-k}（带有 $j \neq k$）中的独裁者。在下文中，不失一般性地假设代理人 1 就是该代理人。

引理17。在 $f^{-j,k}$ 中，对于满足 $1 \notin \{j,k\}$ 的任意两个代理人 j、k，代理人 1 是独裁者。

证明。固定 $\succsim$，使得除代理人 1 外的两个代理人——比如代理人 2 和 3——将彼此排在首选位置，而第三个代理人——比如代理人 4——将自己排在首选位置。所有剩余代理人都将代理人 1 排在首选位置，并将代理人 2、3 和 4 排在末位。

$$
\begin{aligned}
\succsim_1&: \quad 1,\cdot,\ldots,2,3,4\\
\succsim_2&: \quad 3,\cdot,\ldots,\\
\succsim_3&: \quad 2,\cdot,\ldots,\\
\succsim_4&: \quad 4,\cdot,\ldots,\\
\succsim_5&: \quad 1,\cdot,\ldots,2,3,4\\
&\vdots\\
&\vdots\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

根据效率，$f(\succsim)$ 将代理人 4 与其自身匹配，并将代理人 2 和 3 彼此匹配。因此，$f(\succsim)$ 与 $f^{-4}(\succsim)$ 以及 $f^{-2,3}(\succsim)$ 一致。由于代理人 1 是 $f^{-4}(\succsim)$ 中的独裁者，$f(\succsim)(1) = 1$。由于$_{f^{-2,3}}(\succsim)$ 与 $f(\succsim)$ 一致，$f^{-2,3}(\succsim)(1) = 1$。由于在 $\succsim$ 中除代理人 4 外的所有代理人都将代理人 1 排在首选位置，$f^{-2,3}$ 中的独裁者必然是代理人 1 或代理人 4。交换代理人 4 和 5 后重复相同的论证，我们可知在 $f^{-2,3}$ 中，独裁者必然是代理人 1 或代理人 5。总之，代理人 1 必须是 $f^{-2,3}$ 中的独裁者。由于代理人 2 和 3 的选择是任意的，代理人 1 是任意 $f^{-j,k}$ 中的独裁者，其中$1 \notin \{j,k\}$。

□

引理18. 代理人 1 是 f 中的独裁者。

证明. 固定一个偏好剖面 $\succsim$。假设 $f(\succsim)(1) \neq$ 首选($\succsim_1$)。由于 $n \geq 5$，我们可以固定一个代理人 j 使得$\{j, f(\succsim)(j)\} \cap \{1, f(\succsim)(1),$ 首选($\succsim_1$)$\} = \emptyset$。如果 $j = f(\succsim)(j)$，那么 $f(\succsim)$ 与 $f^{-j}(\succsim)$ 一致。由于根据引理16，代理人 1 是 f^{-j} 中的独裁者，并且由于首选($\succsim_1$) $\neq j$，我们于是得到 $f(\succsim)(1) = f^{-j}(\succsim)(1) =$首选($\succsim_1$)。如果 $j \neq f(\succsim)(j)$，定义 $f(\succsim)(j) = k$。在这种情况下，$f(\succsim)$ 与 $f^{-j,k}(\succsim)$ 一致。由于根据引理17，代理人 1 是 $f^{-j,k}$ 中的独裁者，并且由于首选($\succsim_1$) $\notin \{j,k\}$，我们可以如上所述得出结论：$f(\succsim)(1) = f^{j,k}(\succsim)(1) =$ 首选($\succsim_1$)。 □

D 定理证明1

固定一个机制 $f: \Omega^2 \to \Sigma^2$。限制在域 Ω 上，$^2_{symm}$ 该机制 f 根据引理 2 和定理 2 是一个序贯独裁机制，其中一对配偶可以选择独处（彼此结婚），也可以与另一对配偶配对（交换伴侣）。回顾一下，f 相对于 σ 被假定为弱性别中立，即定义为 $\sigma(m_i) = w_i$ 对所有 i均成立。无损一般性地，设配偶（m_1，w_1）是嵌入式室友机制中的独裁者。我们称这对配偶为“王室

夫妇”，将所有其他代理人称为“平民”。证明的其余部分旨在说明，王室夫妇的权力同样适用于对称偏好。同时，我们必须证明，王室夫妇的利益发生任何冲突时（即一方希望王室成员结婚，而另一方不希望如此），这种冲突必须通过默认匹配协议或默认不匹配协议来调解。

对于引理19、20和21，固定一个对称偏好概况$\succsim^{sym}_{-m_1,w_1}$，适用于所有平民。

引理19。设 $\Omega^{l\,k}_{m_1,,w_1}$ 为所有偏好组成的集合，其中 m_1 和 w_1 分别将 w_l 和m_k排在首位。那么，要么

- $f(\succsim_{m_1,w_1},\succsim^{sym}_{-m_1,w_1})(m_1) = w_l$和 $f(\succsim_{m_1,w_1},\succsim^{sym}_{-m_1,w_1})(w_1) = m_k$对于所有$\succsim_{m_1,w_1}\in\Omega^{l\,k}_{m_1,,w_1}$，或者
- $f(\succsim_{m_1,w_1},\succsim^{sym}_{-m_1,w_1})(m_1) \neq w_l$和 $f(\succsim_{m_1,w_1},\succsim^{sym}_{-m_1,w_1})(w_1) = m_k$对于所有$\succsim_{m_1,w_1}\in\Omega^{l,k}_{m_1,w_1}$，或者
- $f(\succsim_{m_1,w_1},\succsim^{sym}_{-m_1,w_1})(m_1) = w_l$和 $f(\succsim_{m_1,w_1},\succsim^{sym}_{-m_1,w_1})(w_1) \neq m_k$对于所有$\succsim_{m_1,w_1}\in\Omega^{l\,k}_{m_1,,w_1}$。

证明。任取一个$\succsim_{m_1,w_1}\in\Omega^{l\,k}_{m_1,,w_1}$。

情形 1：$k = l$设 $\succsim'_{m_1} = \sigma(\succsim_{w_1})$，使得定理 2推出 $(m_1,w_k),(w_1,m_k) \in f(\succsim'_{m_1},\succsim_{w_1}\succsim^{sym}_{-m_1,w_1})$。由于 $f(\succsim'_{m_1},\succsim_{w_1},\succsim^{sym}_{-m_1,w_1})(m_1)$ =首选($\succsim'_{m_1}$) =首选($\succsim_{m_1}$)，群体策略无操纵性进而推出 $(m_1,w_k),(w_1,m_k) \in f(\succsim_{m_1,w_1},\succsim^{sym}_{-m_1,w_1})$。

情况2：$k \neq l$

设 $\succsim'_{m_1}$：w_l,w_k以及 $\succsim'_{w_1}$：m_k,m_l。根据群体策略无操纵性和情形 1，$f(\succsim'_{m_1,w_1},\succsim^{sym}_{-m_1,w_1})$要么让王室夫妇与其最偏好的伴侣结婚（情形 2.1），要么与 m_l 和 w_l结婚（情形 2.2），要么与 m_k 和 w_k 结婚（情形 2.3）。在情形 2.1 中，f 的群体策略无操纵性意味着$f(\succsim_{m_1,w_1},\succsim^{sym}_{-m_1,w_1})$为每位皇室成员匹配其首选。

对于情形 2.2，策略无关性意味着 $f(\succsim_{w_1},\succsim'_{m_1},\succsim^{sym}_{-m_1,m_1})(w_1) \neq m_k$。现在，由于 m_1可以交换位置，从而作出与 $\succsim_{w_1}$对称的申报，策略无关性和情形 1意味着 $f(\succsim_{w_1}\succsim'_{m_1},\succsim^{sym}_{-m_1,m_1})(m_1)\ \succsim'_{m_1}\ w_k$。然而，如果 $f(\succsim_{w_1},\succsim'_{m_1},\succsim^{sym}_{-m_1,m_1})(m_1) = w_k$，则会违反群体策略无关性，因为如果 w_1申报 $\sigma(\succsim_{m_1})$，她将获得其更偏好的 $\succsim_{w_1}\ m_k$。因此，必须有 $f(\succsim_{w_1},\succsim'_{m_1}\succsim^{sym}_{-m_1,m_1})(m_1) = w_l$。最后，根据对 m_1的策略无关性，我们有 $f(\succsim_{w_1},\succsim'_{m_1},\succsim^{sym}_{-m_1,m_1})(m_1) = f(\succsim_{m_1,w_1},\succsim^{sym}_{-m_1,m_1})(m_1) = w_l$。群体策略无关性进而意味着 $f(\succsim_{w_1},\succsim'_{m_1},\succsim^{sym}_{-m_1,m_1}) = f(\succsim_{m_1,w_1},\succsim^{sym}_{-m_1,m_1})$，从而

$$f(\succsim_{w_1},\succsim'_{m_1},\succsim^{sym}_{-m_1,m_1}(m_1) = f(\succsim_{m_1,w_1},\succsim^{sym}_{-m_1,m_1})(w_1) \neq m_k$$

按要求。

作必要变更，引理 2.2 的论证适用于情形 2.3。 □

引理 20。设 $\Omega^{*}_{m_1,w_1}$ 为王室成员的偏好集合，其中恰好一名王室成员将另一名王室成员排在首选位置。则对于所有 $\succsim_{m_1,w_1}\in\Omega^{*}_{m_1,w_1}$，a) 或 b) 成立

a) $(m_1,w_1) \in f(\succsim_{m_1,w_1},\succsim^{sym}_{-m_1,m_1})$.

b) $f(\succsim_{m_1,w_1},\succsim^{sym}_{-m_1,m_1})$ 将把一名平民排在首选位置的王室成员与该平民进行匹配。

证明。设 $\succsim'_{m_1}$：w_1、w_k以及 $\succsim'_{w_1}$：m_k，m_1对于 $k \neq 1$。由于不可能让两位王室成员都与其排名最高的伴侣匹配，引理19 表明，其中一位王室成员会获得其首选伴侣。

情形 1：$(m_1, w_1) \in f(\succsim'_{m_1,w_1}, \succsim^{sym}_{-m_1,m_1})$。那么，引理19意味着，对于任意满足 top$(\succsim''_{m_1}) = w_1$ 且 top$(\succsim''_{w_1}) = m_k$的$\succsim''_{m_1、\ w_1}$（包括将 m_1排在最后的 $\succsim'_{w_1}$），$(m_1, w_1) \in f(\succsim''_{m_1,w_1}\succsim^{sym}_{-m_1,w_1})$。随后，群体策略无操纵性意味着，对于任意满足 top$(\succsim_{m_1}) = w_1$的$\succsim_{m_1、\ w_1}$，$(m_1, w_1) \in f(\succsim_{m_1,w_1}, \succsim^{sym}_{-m_1,w_1})$。根据性别中立性，如果 top$(\succsim_{w_1}) = m_1$，并且 $\succsim_{m_1}$ 是任意偏好，我们还可得到$(m_1, w_1) \in f(\succsim_{m_1,w_1}, \succsim^{sym}_{-m_1,w_1})$。

情况2：$f(\succsim'_{m_1,w_1}, \succsim^{sym}_{-m_1,m_1})(w_1) = m_k$。如果对于某些$\succsim_{m_1、\ w_1}$，$(m_1, w_1) \in f(\succsim'_{m_1,w_1}, \succsim^{sym}_{-m_1,m_1})$，且 top$(\succsim_{m_1}) = w_1$、top$(\succsim_{w_1}) = m_l$，那么情形 1 将导致矛盾：$(m_1, w_1) \in f(\succsim'_{m_1,w_1}, \succsim^{sym}_{-m_1,m_1})$。因此，根据引理19，我们有$(w_1, m_l) \in f(\succsim_{(m_1,w_1)} \succsim^{sym}_{-m_1,w_1})(w_1) = m_l$。性别中立性随后蕴含该结果。

□

引理 21。设 top$(\succsim_{m_1}) = w_l$且 top$(\succsim_{w_1}) = m_k$。如果 $k = 1 = l$，或者如果 $k \neq 1 \neq l$、$f(\succsim_{m_1,w_1}, \succsim^{sym}_{-m_1,w_1})$与王室夫妇及其最偏好的伴侣匹配。

证明。若 $k = 1 = l$ 该结论可由引理 19证明的第一部分推出。因此设 $k \neq 1 \neq l$。根据引理 20 需要考虑两种情形。

情形 1：如果恰好有一名王室成员将另一名王室成员排序为第一，则王室成员会被匹配。考虑 $\succsim'_{m_1}$：w_l、w_1 以及 $\succsim'_{w_1}$：m_k、m_1。根据引理 19，至少有一名王室成员必须得到其首选伴侣。根据策略无关性，任何一名王室成员都不可能比另一名王室成员的结果更差。由于只有当 w_1与 m_1匹配时，m_1 才会与w_1匹配，因此我们得到 (w_1, m_k)、$(m_1, w_l) \in f(\succsim'_{m_1,\ w_1}, \succsim^{sym}_{-m_1,\ w_1})$；根据群体策略无关性，$f(\succsim_{m_1,\ w_1}, \succsim^{sym}_{-m_1,\ w_1}) = f(\succsim'_{m_1,\ w_1}, \succsim^{sym}_{-m_1,\ w_1})$。

情况2：若恰有一位王室成员将另一位排在第一位，则将平民排在第一位的王室成员会得到其首选匹配。考虑由.....得到的偏好

$$\succsim'_{m_1}: w_l, w_1, \qquad \succsim''_{m_1}: w_1, w_l$$
$$\succsim'_{w_1}: m_k, m_1, \qquad \succsim''_{w_1}: m_1, m_k$$

在其他条件均相同的情况下，由 $\succsim_{m_1}$ 和 $\succsim_{w_1}$ 导出。

由于我们处于情况2，因此有 $f(\succsim'_{m_1}, \succsim''_{w_1}, \succsim^{sym}_{-m_1,w_1})(m_1) = w_l$，且 $f(\succsim'_{w_1}, \succsim''_{m_1}, \succsim^{sym}_{-m_1,w_1})(w_1) = m_k$。根据群体策略无操纵性，我们进而得到$(m_1, w_l)$、$(w_1, m_k) \in f(\succsim'_{m_1}, \succsim'_{w_1}, \succsim^{sym}_{-m_1,w_1})(m_1)$。再次应用群体策略无操纵性，在各自的偏好排序中将对方从王室成员的排序中移除，得到(m_1, w_l)、$(w_1, m_k) \in f(\succsim_{m_1,w_1}, \succsim^{sym}_{-m_1,w_1})$，如所需。

□

前面三个引理针对所有平民的一个任意固定对称偏好概况$\succsim^{sym}_{-m_1\ ,w_1}$。我们证明，对于任何这样的固定偏好概况，王室成员必须按照默认匹配协议或默认不匹配协议进行匹配。下一个引理表明，对于平民的一个广泛偏好档案集合，如果他们的首选之间不存在冲突（也就是说，如果他们都想与平民结婚，或者都想彼此结婚），王室成员就会得到各自的首选。

引理 22. 固定 $\succsim$，使得所有平民配对中有一部分具有对称偏好，而其余平民都将王室成员排在偏好末位，但不一定具有对称偏好。设首选$(\succsim_{w_1})$为 $= m_k$，首选$(\succsim_{m_1})$为 $= w_l$。如果 $l = k = 1$ 或 $l \neq 1 \neq k$，那么 (m_1, w_l)、$(w_1, m_k) \in f(\succsim)$。

证明. 我们对不具有对称偏好的配对数量 m 使用归纳法。

归纳法的开始： $m = 0$ 使得$\succsim_{-m_1,\ w_1}$ 是对称的。在此情形下，根据引理21，该断言成立。

归纳步骤：假设该断言对于某个 $m < n$ 之前的情形均成立。固定一个任意的偏好剖面 $\succsim_{-m_1,\ w_1}$ 使得 $m+1$ 对夫妇具有（可能）不对称的偏好，将王室成员排在末位，并且其余 $n-m-1$ 对夫妇具有对称偏好。不失一般性地，假设 (m_2, w_2) 是一类不具有对称偏好的夫妇，并考虑 $\succsim'_{w_1}$： m_k、m_2。

情形 1： $k \neq 1 \neq l$。反设 $f(\succsim)(w_1) \neq m_k$。

情形 1.1：夫妇 (m_k, w_k) 不具有对称偏好。对于 $\succsim'_{m_k} = \sigma(\succsim_{w_k})$，bottom$(\succsim_{w_k}) = m_1$意味着 bottom$(\succsim'_{m_k}) = w_1$。由于 $(\succsim'_{m_k}, \succsim_{-m_k})$ 属于归纳假设所涵盖的范围，因此 $f(\succsim'_{m_k}, \succsim_{-m_k})(w_1) = m_k$。于是我们得到与策略无关性的矛盾，因为 $w_1 \neq f(\succsim)(m_k) \succ'_{m_k} f(\succsim'_{m_k}, \succsim_{-m_k})(m_k) = w_1 =$botto m$(\succsim'_{m_k})$。

情形 1.2 夫妇 (m_k, w_k) 确实具有对称偏好。根据策略无关性以及假设 $f(\succsim)(w_1) \neq m_k$，我们有 $f(\succsim'_{w_1}, \succsim_{-w_1})(w_1) \neq m_k$。根据情形 1.1，若 w_1 将 m_2 排在首位，她就会与 m_2 匹配（因为我们已假设 m_2 且 w_2 公布了不对称偏好）。因此，根据策略无关性， $f(\succsim'_{w_1}, \succsim_{-w_1})(w_1) = m_2$。现在考虑 $\succsim'_{m_2} = \sigma(\succsim_{w_2})$。由于夫妇 (m_2, w_2) 不具有对称偏好，末位$(\succsim_{m_2}) = w_1$。由此我们得到与策略无关性相矛盾的结论，因为 $(\succsim'_{w_1,m_2}, \succsim_{-w_1,m_2})$ 符合归纳法的假设，因此$f(\succsim'_{w_1,m_2}, \succsim_{-w_1,m_2})(w_1) = m_k$。后者意味着 m_2 可以通过将自己的偏好从 $\succsim_{m_2}$ 改为 $\succsim'_{m_2}$ 来改善匹配，从而避免与 $w_1 =$末位$(\succsim_{m_2})$匹配。

情形 1.1 和 1.2 证明了在情形 1 中，$(w_1, m_k) \in f(\succsim)$ 成立。根据性别中立性，$(m_1, w_l) \in f(\succsim)$ 也成立。

情况2：k=l=1。假设 $(m_1, w_1) \notin f(\succsim)$。如同情形 1 的证明，$2\ f(\succsim'_{w_1}, \succsim_{-w_1})(w_1) = m_2$。正如在该证明中一样，我们得到一个与策略无关性相矛盾的结论，因为如果 m_2 将其偏好与 w_2 对称化，他的处境会更好。

□

接下来的两个引理涉及王室成员将一对对称对 (m_i, w_i) 排名最高的情形。在这种情况下，对于平民的任意偏好剖面，王室成员都会与其首选匹配。

Le引理 23。固定 $\succsim$ ，使得王室成员彼此排名最高。于是， $f(\succsim)$ 与王室成员结婚 .

证明。反设不成立。将 $\succsim'_{-m_1,w_1}$ 定义为对 $\succsim_{-m_1,w_1}$ 的一种修改：把 m_1 和 w_1 移至所有代理人偏好排序的首位，其他方面保持不变。依次将每位平民 i 的偏好从 $\succsim_i$ 调换为 $\succsim'_i$。根据群体策略无关性，每次调换后，匹配要么保持不变，要么平民 i 与一位王室成员结婚。因此 $(m_1, w_1) \notin f(\succsim_{m_1,w_1}, \succsim'_{-m_1,w_1})$。假设 (m_1, w_i)、$(w_1, m_j) \in f(\succsim_{m_1,w_1}, \succsim'_{-m_1,w_1})$，且允许 $i \neq 1 \neq j$ 和 $i = j$。从 $\succsim'_{-m_1,w_1}$ 开始，通过将所有平民（ w_i, m_i, w_j 和 m_j 的排序中所列者除外）对王室成员的排序降至末位，定义一个新的偏好剖面 $\succsim''_{-m_1,w_1}$。此外，令 $\succsim'_{w_i}$： $= \sigma(\succsim_{m_i})$；如果 $i \neq j$，也令 $\succsim'_{m_j}$： $= \sigma(\succsim_{w_j})$，使配偶 (m_i, w_i) 以及（若不同）(m_j, w_j) 具有对称偏好，其中在 $f(\succsim_{m_1,w_1}, \succsim'_{-m_1,w_1})$ 中与王室夫妇匹配的代理人将该王室夫妇排在首位。根据群体策略无关性，这些改动均不会影响匹配，因此

$f\ (\succsim_{m_1,\ w_1},\ \succsim'_{-m_1,\ w_1})\ = f\ (\succsim_{m_1,\ w_1},\ \succsim''_{-m_1,\ w_1})$。然而，这会导致矛盾，因为$\succsim''_{-m_1,\ w_1}$已由引理 22 涵盖，因此 $(m_1, w_1) \in f(\succsim_{m_1,\ w_1}, \succsim''_{-m_1,\ w_1})$。

□

引理 24. 若 top($\succsim_{m_1}$) $= w_l$ and top($\succsim_{w_1}$) $= m_l$，则 $(m_1, w_l), (w_1, m_l) \in f(\succsim)$。

证明。固定王室成员的偏好，使他们将彼此排在第二位。假设 $f(\succsim)$ 未能让两位王室成员都与其排名最高的伴侣匹配。

观察 1：至少一位王室成员必须获得自己最偏好的伴侣。

根据前述引理和群体策略无操纵性，两位王室成员不可能都更喜欢彼此，而不是各自的匹配对象 $f(\succsim)(m_1)$ 和 $f(\succsim)(w_1)$。现在假设存在 $f(\succsim)(w_1) = m_1$。根据群体策略无操纵性，$f(\succsim) = f(\succsim_{m_1,\ w_1}, \succsim'_{-m_1,\ w_1})$，其中平民的偏好 $\succsim'_{-m_1,\ w_1}$由$\succsim_{-m_1,\ w_1}$推导得出：将王室成员移至每位平民偏好列表的末位，其他内容保持不变。由此产生矛盾，因为引理 22 已涵盖 $\succsim'_{-m_1,\ w_1}$，因此 $(m_1, w_1) \in f(\succsim_{m_1,\ w_1}, \succsim'_{-m_1,\ w_1})$。在唯一剩下的情形中，一位王室成员获得自己最偏好的伴侣。

观察 2：不失一般性，我们可以假设 bottom($\succsim_{m_l}$) $= w_1$，且 bottom($\succsim_{w_l}$) $= m_1$。

假设该结论不成立。具体而言，假设 $(m_1, w_l) \in f(\succsim)$，注意，以下论证经过必要变更后同样适用于另一种情形，即 $(w_1, m_l) \in f(\succsim)$。由于 $(w_1, m_l) \notin f(\succsim)$，根据群体策略无操纵性，我们可以不失一般性地假设 bottom($\succsim_{m_l}$) $= w_1$。现在定义 $\succsim'_{w_l}$：将 m_1 降至 w_l的偏好排序末位，同时相对于 $\succsim_{w_l}$保持其他一切不变。如果 $(m_1, w_l) \notin f(\succsim'_{w_l}, \succsim_{-w_l})$，则观察 1 蕴含 $(w_1, m_l) \in f(\succsim'_{w_l}, \succsim_{-w_l})$。

根据观察 1 和观察 2 以及群体策略无操纵性，我们可以假设，对于某个 $j \neq l$，$(m_1, w_l)(w_1, m_j) \in f(\succsim)$，top($\succsim_{m_j}$) $= w_1$，且对于所有 $i \neq j$，1 以及 bottom($\succsim_{m_i}$) $= w_1$，对于所有$i \neq 1$

现在将 m_1 在 w_j的排序中上移，使得 top($\succsim'_{w_j}$) $= m_1$，而其他部分相对于 $\succsim_{w_j}$ 保持不变。根据群体策略无操纵性，我们或者有 $f(\succsim) = f\succsim'_{w_j}, \succsim_{-w_j})$，或者 $(m_1, w_j) \in f(\succsim'_{w_j}, \succsim_{-w_j})$。现在定义$\succsim''_{m_j、\ w_j}$为两个性别中立的偏好 $\succsim''_{m_j} = \sigma(\succsim''_{w_j})$，使得 $\{m_j, w_j\}$ 中与平民匹配的代理人保持其偏好。根据群体策略无操纵性，$f(\succsim) = f(\succsim'_{w_j}, \succsim_{-w_j}) = f(\succsim''_{w_j,m_j}, \succsim_{-m_j,w_j})$。由于 $(\succsim''_{w_j,m_j}, \succsim_{-m_j,w_j})$已被引理 22 覆盖，因此产生矛盾。由此我们可以得出，(m_1, w_l)、$(w_1, m_l) \in f(\succsim)$。

为了完成证明，请注意，f 的群体策略无操纵性，加上 (m_1, w_l)、$(w_1, m_l) \in f(\succsim)$，意味着如果王室成员将彼此降至其偏好排序中的任意位置，他们仍会保留自己最偏好的伴侣。

□

引理 25. 如果首选($\succsim_{m_1}$) $= w_l$、首选($\succsim_{w_1}$) $= m_k$，且 $k \neq 1 \neq l$，那么(m_1, w_l)、$(w_1, m_k) \in f(\succsim)$.

证明。定义 $\succsim'_{w_1}$：m_k、m_l、$\succsim'_{m_1}$：w_l、w_k。其他条件保持不变。根据引理 24 和群体策略无操纵性，王室成员要么得到他们的首选，要么与 m_k 和 w_k 或 m_l 和 w_l结婚。因此，假设 (m_1, w_k)、$(w_1, m_k) \in f(\succsim'_{m_1,w_1}, \succsim_{-m_1,w_1})$。为平民定义$\succsim'_{-m_1、\ w_1}$，使得对于所有 $i \neq k$，top($\succsim'_{m_k}$) $= w_1$、$\succsim'_{w_k} = \sigma($ $\succsim'_{m_k}$)、bottom($\succsim'_{m_i}$) $= w_1$ 以及 bottom($\succsim'_{w_i}$) $= m_1$，其他条件保持不变。根据群体策略无操纵性，我们有 $f(\succsim'_{m_1,w_1}, \succsim_{-m_1,w_1}) = f(\succsim')$。由于$\succsim'_{-m_1,w_1}$是，产生矛盾。

由引理 22 涵盖，因此王室成员必须在 $f(\succsim')$中获得其首选。作必要变更，同样的论证排除了这样的情形：(m_1, w_l)、$(w_1, m_l) \in f(\succsim'_{m_1,w_1}, \succsim_{-m_1,w_1})$以及 $f(\succsim'_{m_1,w_1}, \succsim_{-m_1,w_1})$必须让王室成员与其首选匹配。将偏好排序中较不喜欢的伴侣 m_l 和 w_k 剔除后，群体策略无关性推出 $f(\succsim'_{m_1,w_1}, \succsim_{-m_1,w_1}) = f(\succsim)$。

□

引理 26. 对于任意固定的$\succsim_{-m_1,\ w_1}$ 王室成员要么是

- 默认匹配
- 默认不匹配
- 依次以独裁方式进行选择，m_1 先行
- 依次以独裁方式进行选择，w_1 先行

证明。由于在王室成员彼此排名最高，或双方都将平民排在首选时，这四种机制所得的选择均相同，因此我们着重讨论恰好有一名王室成员希望与另一名王室成员结婚的情形。具体而言，我们假设 top$(\succsim_{w_1}) = m_k$且 $\succsim_{m_1}$：w_1，w_l对于 $k \neq 1 \neq l$，并注意到，根据性别中立性，当 w_1希望与 m_1结婚时，论证同样适用。假设 $(m_1, w_1) \notin f(\succsim)$。根据引理 24 和 25，以及群体策略无操纵性，$f(\succsim)(m_1) \succsim_{m_1} w_l$。由于根据假设，$m_1$ 没有与他唯一更喜欢的对象 w_l 匹配，我们有 $f(\succsim)(m_1) = w_l$ 以及 $f(\succsim)(w_1) = m_k$

固定任意的$\succsim'_{m_1、\ w_1}$，其中有 $\succsim'_{w_1} = m_{k'}$、m_k和 $\succsim'_{m_1}$：w_1、$w_{l'}$对于 $l' \neq 1 \neq k'$。根据群体策略无操纵性，在不失一般性的情况下，我们可以在前一段中假设 $\succsim_{w_1}$：m_k、$m_{k'}$以及 $\succsim_{m_1}$：w_1、w_l、$w_{l'}$。根据策略无关性，$f(\succsim'_{m_1}、\ \succsim_{-m_1})(m_1) \in \{w_{l'}, w_l\}$。根据上述论证，$(m_1、\ w_{l'})$、$(w_1、\ m_k) \in f(\succsim'_{m_1}、\ \succsim_{-m_1})$。现在交换 w_1的偏好排序中的 m_k和 $m_{k'}$。根据策略无关性，$f(\succsim'_{m_1、\ w_1、\ \succsim_{-m_1、\ w_1}})(w_1) \in \{m_k, m'_k\}$。根据引理24和25以及群体策略无操纵性，$(m_1、\ w_{l'})$、$(w_1、\ m_{k'}) \in f(\succsim'_{m_1、\ w_1} \succsim_{-m_1、\ w_1})$。从女性 w_1的偏好排序中删去 m_k，我们看到，女性 w_1一旦如愿，便总能如愿（给定 $\succsim_{-m_1、\ w_1}$）嫁给一名平民。根据对称性，如果她一旦如愿，她也总能如愿嫁给 m_1。因此，在$\succsim_{-m_1}$和w_1 处，唯一可能的机制是两种串行独裁机制，以及默认匹配和默认不匹配。

□

引理27。王室成员要么默认匹配，要么默认不匹配。

证明。固定任意 $\succsim_{-m_1,w_1}$。根据引理26，王室成员要么匹配，要么默认不匹配，要么参与序贯独裁，其中一位王室成员先选择，另一位随后选择。假设平民的不同偏好档案由不同机制支配。固定两个这样的偏好档案，在这两个档案之间，机制随某一代理人的偏好而改变。不妨设该代理人是 m_2。因此，w_1和 m_1的选择机制在 $\succsim_{-m_1,w_1}$处遵循不同的规则，并且在（$\succsim'_{w_2}, \succsim_{-m_1,w_1,m_2}$）处也遵循不同的规则。

当两位王室成员要么将彼此排在首选，要么都将平民排在首选时，所有机制的结果都相同。因此，我们固定一个偏好剖面$\succsim_{m_1,\ w_1}$ 其中恰好有一位王室成员将一名平民排在首选，并规定在$\succsim_{-m_1,\ w_1}$ 想要与另一位王室成员结婚的王室成员获胜，而在$(\succsim'_{w_2}, \succsim_{-m_1,\ w_1,\ m_2})$中，两位王室成员与平民结婚。具体而言，假设 $\succsim_{m_1}$：w_1，w_l和$\succsim_{w_1}$：m_k，那么从$\succsim_{-m_1,\ w_1}$ 到$(\succsim'_{w_2}, \succsim_{-m_1,\ w_1,\ m_2})$的机制变更，就是从默认匹配或以 m_1 先行动的序贯独裁，变为默认不匹配或以w_1 先行动的序贯独裁。作必要变更，同样的论证也适用于$\succsim_{m_1,\ w_1}$ 使得 w_1 想要与

与 m_1 结婚，而后者又想与一名平民结婚的情形。总而言之，我们有$(m_1, w_1) \in f(\succsim)$，以及$(w_1, m_k)$、$(m_1, w_l) \in f(\succsim'_{m_2}, \succsim_{-m_2})$。

由于只要平民的偏好保持不变，机制就保持不变，因此不失一般性，我们可以假设 $m_k = m_2$使得 $f(\succsim'_{w_2}, \succsim_{-m_1,w_1,m_2})(m_2) = w_1$。根据群体策略无关性，对于任何 $\succsim^*_{m_2}$将 $f(\succsim)(m_2)$列为首选的情况，$f(\succsim) = f(\succsim^*_{m_2}, \succsim_{-m_2})$；而对于任何 $\succsim''_{m_2}$：$w_1, f(\succsim)(m_2)$，则有 $f(\succsim''_{m_2}, \succsim_{-m_1,w_1,m_2}) = f(\succsim'_{w_2}, \succsim_{-m_1,w_1,m_2})$。现在将王室夫妇的偏好改为 $\succsim'_{m_1}$：$w_1, f(\succsim)(m_2)$以及$\succsim'_{w_1}$：m_3。鉴于机制在$(\succsim^*_{m_2}, \succsim_{-m_1,w_1,m_2})$和$(\succsim''_{m_2}, \succsim_{-m_1,w_1,m_2})$处保持不变，我们得到

$$f(\succsim'_{m_1,w_1}, \succsim^*_{m_2}, \succsim_{-m_1,w_1,m_2}) = f(\succsim)$$
$$(m_1, f(\succsim)(m_2)), (w_1, m_3) \in f(\succsim'_{m_1,w_1}, \succsim''_{m_2}, \succsim_{-m_1,w_1,m_2}).$$

因此会与策略无关性相矛盾，因为 $f(\succsim'_{m_1,\ w_1},\ \succsim^*_{m_2},\ \succsim_{-m_1,\ w_1,\ m_2})$将 m_2与 $f(\succsim)(m_2)$匹配，而根据 $\succsim''_{m_2}$，m_2，这是其第二喜欢的妻子。反过来，由于

$$(m_1, f(\succsim)(m_2)), (w_1, m_3) \in f(\succsim'_{m_1,w_1}, \succsim''_{m_2}, \succsim_{-m_1,w_1,m_2})$$

后者既没有将 m_2 与他最喜欢的 $\succsim''_{m_2}$位妻子 w_1 匹配，也没有与他第二喜欢的 $f(\succsim)(w_2)$匹配。

总而言之，我们得出结论：皇室成员 m_1、w_1 选择伴侣所依据的机制，对于所有$\succsim_{-m_1,\ w_1}$都保持不变。根据性别中立性，当$\succsim_{-m_1,\ w_1}$ 具有性别中立性时，皇室成员必须采用对称机制。因此，两种串行独裁机制都不可能支配皇室成员的选择，由此可知，该机制要么是默认匹配，要么是默认不匹配。□

我们已经证明，存在一对王室夫妇，他们要么是默认匹配，要么是默认不匹配。性别中立性的概念意味着，给定这对王室夫妇的匹配对象后，剩余代理人将进入一种延续机制，而该机制必须相对于某种二阶对称性具有性别中立性。将相同的论证应用于这些子机制，可以得到第二对王室夫妇。如此继续下去，我们会得到一系列王室夫妇，直到只剩下四名代理人；此时我们的论证不再适用，可以采用A 节中描述的任意一种四代理人机制。