arXiv:2301.13041v1 [math.QA] 30 Jan 2023

有限 Gelfand-Kirillov 维数的单参数族的预 Nichols 代数

EMILIANO CAMPAGNOLO

Abstract. 在对角型编织向量空间中，存在一些族，其相应的 Nichols 代数是无限维的，但具有有限 Gelfand-Kirillov 维数，这些族称为单参数族。我们证明，对于这类具有连通图的有限 Gelfand-Kirillov 维数预 Nichols 代数，除少数例外外，必然是相应的 Nichols 代数。对于这些例外中的每一个，我们通过生成元与关系给出一个真预 Nichols 代数，并证明它就是相应的卓越 pre-Nichols 代数。

本文基本完成了对角型卓越预 Nichols 代数的确定，这是朝着具有有限 GK 维数的对角型预 Nichols 代数分类迈出的第一步。

1. Introduction

设 $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域。若 H 是 pointed Hopf 代数（即其余根基 H_0 与由群 G（H）中的群样元生成的子代数重合），且定义在 $\Bbbk$ 上，那么 H 的余根基滤过 $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ 是 Hopf 代数滤过，并满足 $H_0 = \Bbbk G$（H）。因此，相关分次对象 $\operatorname{gr} H$ 是分次 Hopf 代数，并存在 Hopf 代数态射 $\pi\colon \operatorname{gr} H \to \Bbbk G(H)$ 和 $\iota\colon \Bbbk G(H) \to \operatorname{gr} H$，其中 $\pi\circ\iota = \mathrm{id}$。根据 [R, §11.7], $\operatorname{gr} H \simeq \Bbbk G(H)\#R$，其中 $R = \bigoplus_{n\geq 0} R(n)$是 Yetter-Drinfeld 模范畴 ${}^{H_0}_{H_0}\mathcal{YD}$ 中的分次 Hopf 代数，且 $R(0) = \Bbbk 1$。令$V := R(1) \in {}^{H_0}_{H_0}\mathcal{YD}$： R 中由 V生成的子代数是V的 Nichols代数 $\mathscr{B}(V)$；它是在 ${}^{H_0}_{H_0}\mathcal{YD}$ 中的分次 Hopf 代数，并由 V唯一确定。

给定一个群 G，文献 H AS]中提出了一个用于分类有限维 pointed Hopf 代数的程序（称为提升方法） H，其满足 $G(H) \simeq G$。当 Gelfand-Kirillov 维数有限时，也有一个类似的程序，旨在回答以下问题：

(1) 分类所有 V上的 Yetter-Drinfeld 模 G，使得 GK 维数 $\mathscr{B}(V) < \infty$。(2) 对于上面得到的每个 V，计算所有 GK 维数有限的 V的后 Nichols 代数。(3) 找出所有 Hopf 代数 H，使得 $\operatorname{gr} H \simeq \mathcal{E}\#\Bbbk G$。

由 [AnG] 中的主要结果可知，每个具有有限 GK 维数的对角型 Nichols 代数都有有限根系。另一方面， [H] 对所有具有连通 Dynkin图和有限根系的编织向量空间 V 进行了分类。因此，结合这两个结果，当 V 为对角型时，我们回答了问题 (1)；也就是说，我们得到

Hopf 代数、Nichols 代数、Gelfand-Kirillov 维数。MSC2020：16T05、16T20、17B37、17B62。本研究得到 CONICET 的支持。

所有具有连通 Dynkin图且 GK 维数有限的对角型 Nichols 代数的分类。

对于对角型，(2) 中提出的问题等价于计算所有 GK 维数有限的 pre-Nichols 代数。[ASa、AnCSa、AnCSa2] 的主要结果给出了 Nichols 代数为有限维时关于 (2) 的答案：它们证明存在一个 pre-Nichols 代数 $\mathscr{B}$，使得其他每个有限 GK维 pre-Nichols 代数 V 都是 $\mathscr{B}$的商；也就是说，$\mathscr{B}$ 就是相应的卓越预 Nichols 代数。

本文完整回答了以下情形下的 (2)：V是一个对角型编织向量空间，使得 $\dim \mathscr{B}(V) = \infty$，但 GK 维数 $\mathscr{B}(V) < \infty$；这些编织向量空间通过将单参数族 [AAnY] 中的参数取为一个一般值而得到。其策略遵循论文系列 [ASa、AnCSa、AnCSa2]中的相同思想，但在本文中，我们描述了具有有限 GK 维数的 pre-Nichols 代数的整个偏序集，正如下面将要描述的，该偏序集只有一个或两个元素：

定理 1.1. 设 V 是一个有限维的对角型编织向量空间，其 Dynkin 图连通，且 $\dim \mathscr{B}(V) = \infty$，但 GK 维数 $\mathscr{B}(V) < \infty$。

(i) 如果 V不是 $\mathrm{A}_3(q|\{2\})$、$\mathrm{A}_3(q|\{1,2,3\})$ 或 $D(2, 1; \alpha)$ 型，且参数 q、r、s 中恰有两个不是单位根，那么 $\mathscr{B}(V)$是 V的唯一预 Nichols 代数，且其 GK 维数为 $< \infty$。(ii) 如果 V是 $\mathrm{A}_3(q|\{2\})$、$\mathrm{A}_3(q|\{1,2,3\})$ 或 $D(2, 1; \alpha)$ 型，且对应的图为 (4.3)、(4.4)、(4.5)，那么有限 GK 维数预 Nichols 代数的集合包含两个元素：$\mathscr{B}(V)$ 和 $\widehat{\mathscr{B}(V)}$；其中 $\mathscr{B}(V)$分别由 (4.1)、(4.2)、(4.6)、(4.7)、(4.8) 定义。

事实上，若 V如(i)所述，则根据定理4.1，$\mathscr{B}(V)$是唯一具有有限 GK 维数的预 Nichols 代数。

若 V 如(ii)所述，则 $\widehat{\mathscr{B}(V)}$ 根据命题4.2、4.4、4.6、4.8、4.10，$\mathscr{B}(V)$是卓越的。注意$\widehat{\ }$，对于备注4.3、4.5、4.7、4.9、4.11中所述的 z，$\mathcal{P}(\mathscr{B}(V)) = V \oplus \Bbbk\{z\}$，因此，保持 V不变的 $\mathscr{B}(V)$的唯一 Hopf 商代数是 $\mathscr{B}(V) = \mathscr{B}(V)/\langle z \rangle$。

这些结果与 [ASa、AnCSa、AnCSa2], 中的结果的区别在于：这里找到了所有具有有限 GK 维数的预 Nichols 代数；而对于 $\dim \mathscr{B}(V) < \infty$ 的情形，仍有待确定具有有限 GK 维数的预 Nichols 代数的整个偏序集。

本文的结构如下。第 2 节介绍本文其余部分所需的对角型 Nichols 代数基础理论。在第 3 节中，我们证明一系列关于对角型预 Nichols 代数的引理，这些引理类似于 [AnCSa, AnCSa2] 中的引理，并将用于主要结果的证明。第 4 节包含这些结果；在该节中，我们给出每种情形下的卓越预 Nichols 代数。在同一节中，我们还考虑非连通情形：当每个连通分支均如定理 1.1 所述时，我们能够确定整个偏序集。

2. Preliminaries预备知识

本节回顾有限 Gelfand-Kirillov 维数预 Nichols 代数（对角型）的理论中的一般方面和具体结果。关于 Nichols 代数的基础理论和记号，我们参考 [A]。

记号 ns. $\Bbbk^\times$的 N次单位根集合记为 $\mathbb{G}_N$。此外，$\mathbb{G}_\infty := \cup_{N \geq 0} \mathbb{G}_N$.

设 $\theta \in \mathbb{N}$。我们用 $\mathbb{I}_\theta = \{1, \dots, \theta\}$表示，并且当 θ 固定时简写为 $\mathbb{I}$。元素（a_1、a_2、$\cdots$、a_θ） $\in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$记为 $1^{a_1}2^{a_2}\cdots\theta^{a_\theta}$。对于每个 $i \in \mathbb{I}$，令 $\alpha_i = i^1$为 $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$的典范基中的第 i个元素。

关于 Hopf 代数的记号，我们参见 [R], ；关于 Gelfand-Kirillov 维数的定义和基本事实，参见 [KL]。

2.1. 卓越预 Nichols 代数。设 V是一个有限维编织向量空间。 V的预 Nichols 代数是指 $\mathscr{B}$，它是 $T(V)$ 关于一个由次数为 ≥ 2的元素生成的 $\mathbb{N}_0$-齐次理想的 Hopf 商代数；因此，存在规范满同态 $T(V) \twoheadrightarrow \mathscr{B} \twoheadrightarrow \mathscr{B}(V)$，它们由 V的恒等映射诱导。

设 $\mathfrak{Pre}(V)$ 是一个偏序集，其元素是 V 的预 Nichols 代数；当存在由 V上的恒等映射诱导的满同态 $\mathscr{B}_1 \twoheadrightarrow \mathscr{B}_2$ 时，定义偏序关系 $\mathscr{B}_1 \leq \mathscr{B}_2$。因此， $T(V)$ 是 $\mathfrak{Pre}(V)$ 中的最小元，而 $\mathscr{B}(V)$ 是 $\mathfrak{Pre}(V)$ 中的最大元。

我们用 $\mathfrak{Pre}_{\mathrm{fGK}}(V)$ 表示 $\mathfrak{Pre}(V)$ 的子偏序集，其中包含所有 GK 维数有限的 V预 Nichols 代数。注意，若 $\dim V > 1$，则 $T(V) \notin \mathfrak{Pre}_{\mathrm{fGK}}(V)$；当且仅当 $\operatorname{GKdim}\mathscr{B}(V) < \infty$时， $\mathfrak{Pre}_{\mathrm{fGK}}(V)$ 非空。若存在一个在 $\mathfrak{Pre}_{\mathrm{fGK}}(V)$ 上极小的预 Nichols 代数 $\mathscr{B}$，我们就称其为 V 的卓越预 Nichols 代数。

本文的主要结果确定了若干情形下的卓越预 Nichols 代数，其中 V 是对角型编织向量空间。

2.2. 有限 Gelfand-Kirillov 维数的对角型 Nichols 代数。本文沿用 [AnCSa2, §2], 中对角型 Nichols 代数的记号；相关定义和结果也可参见该文。例如，给定一个对角型编织向量空间 (V, c)，其编织矩阵为 $\mathfrak{q} = (q_{ij})_{i,j\in\mathbb{I}}$，我们将其对应的 Nichols 代数记为 $\mathscr{B}_\mathfrak{q}$。接下来，我们回顾后续章节中会用到的结果。

设 $(x_i)_{i\in\mathbb{I}}$为一组基，使得 $c(x_i \otimes x_j) = q_{ij}\, x_j \otimes x_i$、 i、 $j \in \mathbb{I}$。每个 Nichols代数$\mathscr{B}_\mathfrak{q}$都是 $\mathbb{N}_0^{\mathbb{I}}$-分次的，其中 $\deg x_i = \alpha_i$。根据 [Kh] $\mathscr{B}_\mathfrak{q}$，它具有一个生成元为 $\mathbb{N}_0^{\mathbb{I}}$-齐次的（截断）PBW基：齐次生成元的次数集合 $\Delta_+^\mathfrak{q}$ 不依赖于 PBW基，并称为 $\mathscr{B}_\mathfrak{q}$的正根集合。$\mathscr{B}_\mathfrak{q}$ 的 GK 维数与其正根之间存在密切关系；具体而言：

定理 2.1。 [AnG] 的 GK 维数 $\mathscr{B}_\mathfrak{q} < \infty$ 当且仅当集合 $\Delta_+^\mathfrak{q}$ 是有限的。

有限根系 Nichols代数的分类见 [H]。因此，若 GK 维数 $\mathscr{B}_\mathfrak{q} < \infty$，则 $\mathfrak{q}$ 的 Dynkin图出现在 [H 的表 1–4] 中。这些 Nichols 代数在 [AAn] 中按照相应根系的性质分为若干族：Cartan 型、超型、（超）模型和未确定型。此外，每个例子的生成元与关系表示也在 [AAn]中给出（遵循 [An2]）。

In t本文聚焦于满足 $\dim\mathscr{B}(V) = \infty$ 的那些来自 [H] 的 Nichols 代数 :
(a) Cartan 型 A_θ、 B_θ、 C_θ、 D_θ、 $E_{6,7,8}$、 F_4、 G_2，参数为 $q \notin \mathbb{G}_\infty$；(b) 超型 $\mathrm{A}_\theta(q|\mathbb{J})$、$\mathrm{B}_\theta(q|\mathbb{J})$、$\mathrm{D}_\theta(q|\mathbb{J})$、F(4) 和 G(3)，参数为 $q \notin \mathbb{G}_\infty$；以及$D(2, 1; \alpha)$，参数为 q、r、s，满足 $qrs = 1$ 且其中至少一个 $\notin \mathbb{G}_\infty$；(c) 模型 $\mathfrak{wk}(4)$、 $\mathfrak{br}(2)$，参数为 $q \notin \mathbb{G}_\infty$。

第 3 节中的证明反复引用 [H] 中 Nichols 代数的分类。为避免每次都查阅完整列表，我们在此给出一些关于满足 GK 维数 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}=\infty$ 的矩阵$\mathfrak{q}$ 的判据。

推论 2.2. 设 $\mathfrak{q}$ 满足 GK 维数$\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}<\infty$。则：
(1) [H，引理 20] $\mathfrak{q}$ 的图对所有 $N\geq 4$ 均不包含 N-环。(2) [H，引理 7(ii)] 若 i、j、$k\in\mathbb{I}$ 属于一个 3-环，则 $(q_{ii}+1)(q_{jj}+1)(q_{kk}+1)=0$ 和 $\widetilde{q}_{ij}\widetilde{q}_{jk}\widetilde{q}_{ki}=1$。此外，若 $q_{ii}=-1$ 且 q_{jj}、$q_{kk}\neq -1$，则 $q_{jj}\widetilde{q}_{ij}=q_{kk}\widetilde{q}_{ik}=1$。(3) [AAnH，命题 4.16] 该图不包含形如 $\overset{1}{\circ}\ \overset{p}{\text{———}}\ \overset{q}{\circ}$ 的子图 $p\neq 1$。

设 $\mathfrak{q}$ 满足 $\dim\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}<\infty$。在这种情况下，存在具有有限 GK 维数的真预 Nichols 代数$\widetilde{\ }$。一种可能性是 distinguished 前Nichols代数 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$，它在 [An3] 中被引入。关于 $\mathfrak{q}$ 的卓越 pre-Nichols 代数的确定见于 [ASa、AnCSa、AnCSa2] 的主要$\widetilde{\ }$结果，并且与 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 有关。也就是说：

定理2.3。如果 $\mathfrak{q}$ 不属于以下类型
(1) Cartan A_θ 或 D_θ，其中 $q=-1$；(2) Cartan A_2，其中 $q\in\mathbb{G}_3'$；(3) $\mathrm{A}_3(q|\{2\})$或$\mathrm{A}_3(q|\{1,2,3\})$，
其中 $q\in\mathbb{G}_\infty$；(4) $\mathfrak{g}(2,3)$，以及以下任一Dynkin图

$$d_1:\ \overset{-1}{\circ}\ \overset{\xi^2}{\text{———}}\ \overset{\xi}{\circ}\ \overset{\xi}{\text{———}}\ \overset{-1}{\circ},\qquad\qquad d_2:\ \overset{-1}{\circ}\ \overset{\xi}{\text{———}}\ \overset{-1}{\circ}\ \overset{\xi}{\text{———}}\ \overset{-1}{\circ},$$

$\widetilde{\ }$则 distinguished 预Nichols代数 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 是卓越的。
$\widehat{\ }$如果 $\mathfrak{q}$ 属于类型(2)、(3)或(4)，那么卓越预Nichols代数 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 是 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 的一个中心$\widetilde{\ }$扩张，分别在 [ASa，命题4.11]，[；AnCSa，命题5.5、5.9]；以及 [AnCSa2，命题4.2、4.3]，中有明确描述。

注2.4。设 $\mathfrak{q}$ 使得$\dim\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}<\infty$。如果 $x_\beta=0$ 是 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$的固定$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$表示中的一个关系，那么 $x_\beta\neq 0$ 属于 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 当且仅当 $q_{i\beta}=1$ 对所有 $i\in\mathbb{I}$成立。对于满足 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}\neq\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$的所有情形，证明可通过$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$直接检验得到。

3. Relations of finite GK-dimensional pre-Nichols algebra of $\mathscr{B}$

设 $\mathfrak{q}$ 是一个对角型编织矩阵，满足 $\dim\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}=\infty$ 且 GK 维数$\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}<\infty$。固定 $\mathscr{B}$ 一个 $\mathfrak{q}$ 的预 Nichols 代数，使得 GK 维数$\mathscr{B}<\infty$。本节证明 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 在 [AAn] 中的定义关系是否也在 $\mathscr{B}$ 中消失。每个关系将在一个单独的引理中展开，其证明遵循 [AnCSa, §3] 和 [AnCSa2, §3.2] 中的相同策略。

我们首先分析量子 Serre 关系。我们考虑两种情形：$m_{ij}=0$ 和$m_{ij}\neq 0$。

引理 3.1. 设 i、$j\in\mathbb{I}_\theta$ 满足 $m_{ij}=0$。如果 $\mathfrak{q}$ 不是 $\mathrm{A}_3(q|\{1,2,3\})$ 型，则 $x_{ij}=0$ 属于 $\mathscr{B}$。

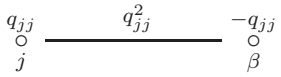
证明。假设 $x_\beta := x_{ij} \neq 0$。注意，由于 x_β 是 $\mathscr{B}_\mathfrak{q}$ 的最小次数定义关系， $x_\beta \in \mathcal{P}(\mathscr{B})$。此外

$$\widetilde{q}_{i\beta} = q_{ii}^2 \qquad \widetilde{q}_{j\beta} = q_{jj}^2 \qquad q_{\beta\beta} = q_{ii}q_{jj}$$

经检查，每个矩阵 $\mathfrak{q}$ 满足以下条件之一：

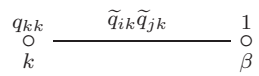
（I） $q_{ii} \notin \mathbb{G}_\infty$ 或 $q_{jj} \notin \mathbb{G}_\infty$。 （II） $q_{ii} = q_{jj} = -1$ 且存在 $k \in \mathbb{I}_\theta$, $k \neq \{i, j\}$ 使得 $\widetilde{q}_{ik}\widetilde{q}_{jk} \notin \mathbb{G}_\infty$。

假设（I）成立。不失一般性，我们假设 $q_{jj} \notin \mathbb{G}_\infty$。由于 Dynkin图是连通的，存在 $r \geq 1$ 和顶点 $i_1, i_2, ..., i_r$ ，使得$\widetilde{q}_{ii_1} \neq 1 \neq \widetilde{q}_{i_rj}$ ，并且对所有 $1 \leq s \leq r-1$都有 $\widetilde{q}_{i_si_{s+1}} \neq 1$ 。于是 $q_{ii} = -1$: 否则， W的 Dynkin图中的、由顶点 $\beta, i, i_1, i_2, ..., i_r, j$ 构成的子图是一个（$r+3$）-环，这与推论 2.2 (1)矛盾。因此，$\Bbbk x_j \oplus \Bbbk x_\beta$ 的 Dynkin图是



但该图不属于 [H，表 1]，，因此根据定理 2.1，GK 维数 $\mathscr{B}(W) = \infty$。另一方面，根据 [ASa，引理 2.8]，GK 维数 $\mathscr{B}(W) \leq$GK 维数 $\mathscr{B}$，从而得到矛盾。因此 $x_\beta = 0$ 属于 $\mathscr{B}$。

接下来假设 (II) 成立。由于 $\widetilde{q}_{k\beta} = \widetilde{q}_{ik}\widetilde{q}_{jk} \neq 1$， $\Bbbk x_\beta \oplus \Bbbk x_k$ 的 Dynkin图为

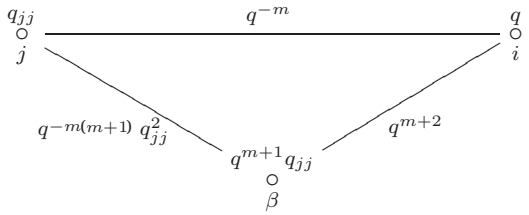


因此根据推论 2.2 (3)， $x_\beta = 0$ 。 □

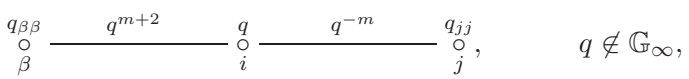
引理 3.2。设 i、 $j \in \mathbb{I}_\theta$ 满足 $m_{ij} > 0$ 和 $q_{ii}^{m_{ij}+1} \neq 1$。则 $(\mathrm{ad}_c\, x_i)^{m_{ij}+1}x_j = 0$ 属于 $\mathscr{B}$。

证明。假设 $x_\beta := (\mathrm{ad}_c\, x_i)^{m+1}x_j \neq 0$。如前一种情况， $x_\beta \in \mathcal{P}(\mathscr{B})$。令 $q = q_{ii}$ 和 $m = m_{ij}$。$\Bbbk x_i \oplus \Bbbk x_j \oplus \Bbbk x_\beta$ 的 Dynkin图为:

(3.1)



经观察可知， $q \notin \mathbb{G}_\infty$。若 $q^{-m(m+1)}q_{jj}^2 \neq 1$，则 (3.1) 是一个三角形，至多有一个顶点标记为 -1 且不满足推论 2.2 (2) 中的条件，这与假设矛盾。因此 $q^{-m(m+1)}q_{jj}^2 = 1$ ，且 $\Bbbk x_i \oplus \Bbbk x_j \oplus \Bbbk x_\beta$ 的 Dynkin图为



$$, \qquad q \notin \mathbb{G}_\infty,$$

它不属于 [H，见表 2]。因此 $x_\beta = 0$ 属于 $\mathscr{B}$。 □

接下来，我们讨论 PBW生成元的某些幂在 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 中湮灭的情形。

引理3.3。设 $i \in \mathbb{I}_\theta$ 为一个非Cartan顶点， $N =$ 的阶为 q_{ii}。则 $x_i^N = 0$ 属于 $\mathscr{B}$。

证明。类似于 [AnCSa中的引理3.1]。 □

引理3.4。设 i、 $j \in \mathbb{I}_\theta$ 满足 $q_{ii} = \widetilde{q}_{ij} = q_{jj} = -1$，且存在 $k \in \mathbb{I}_\theta - \{i, j\}$使得 $\widetilde{q}_{ik}^2 \widetilde{q}_{jk}^2 \neq 1$。则 $x_{ij}^2 = 0$。

证明。上述形式的 i、 j 仅在 $\mathfrak{wb}(4)$中出现。证明类似于[AnCSa中的引理3.17]。□

Now 我们研究与三角剖分的顶点相对应的生成元之间的一个定义关系 e.

引理3.5。设 $i, j, k \in \mathbb{I}_\theta$ 满足 $\widetilde{q}_{ij}, \widetilde{q}_{ik}, \widetilde{q}_{jk} \neq 1$。则

$$x_{ijk} - q_{ij}(1 - \widetilde{q}_{jk}) x_j x_{ik} + \frac{1 - \widetilde{q}_{jk}}{q_{kj}(1 - \widetilde{q}_{ik})} [x_{ik}, x_j]_c = 0 \ \textit{in} \ \mathscr{B}.$$

证明。与 [AnCSa 中的引理3.22] 类似。 □

后续引理讨论某些矩阵 $\mathfrak{q}$ 中出现的其他关系。我们会在每个引理的证明中指出，对于哪些族，这些关系是定义关系。

引理3.6。设 $i, j, k, \ell \in \mathbb{I}_\theta$ 和 $q \in \Bbbk - (\mathbb{G}_2 \cup \mathbb{G}_3)$ 满足

$$q_{\ell\ell} = \widetilde{q}_{k\ell}^{-1} = q_{kk} = \widetilde{q}_{jk}^{-1} = q^2, \quad q_{jj} = -1, \quad q_{ii} = \widetilde{q}_{ij}^{-1} = q^{-3}, \quad \widetilde{q}_{ik} = \widetilde{q}_{i\ell} = \widetilde{q}_{j\ell} = 1.$$

则 $[[[x_{ijk}, x_j]_c, [x_{ijk\ell}, x_j]_c]_c, x_{jk}]_c = 0$。

证明。上述顶点集仅在 $\mathfrak{q}$ 属于 F(4) 型时出现。证明与 [AnCSa 中的引理3.23] 类似。□

引理 3.7。设 i、 j、 $k \in \mathbb{I}_\theta$ 满足 $q_{jj} = -1$、 $\widetilde{q}_{ik} = \widetilde{q}_{ij}\widetilde{q}_{jk} = 1$ 和 $\widetilde{q}_{ij} \neq \pm 1$。若 $\mathfrak{q}$ 不是 $A_3(q|\{2\})$ 型，则 $[x_{ijk}, x_j]_c = 0$ 属于 $\mathscr{B}$。

证明。经检查， $\mathfrak{q}$ 满足以下条件之一：

(1) $q_{ii} = -1$ 或 $q_{jj} = -1$; (2) $q_{ii}q_{kk} = 1$，且存在 $\ell \in \mathbb{I}_\theta - \{i, j, k\}$ 使得 $\widetilde{q}_{i\ell} \neq 1 = \widetilde{q}_{j\ell} = \widetilde{q}_{k\ell}$; (3) $q_{ii}q_{kk} = 1$，且存在 $\ell \in \mathbb{I}_\theta - \{i, j, k\}$ 使得 $\widetilde{q}_{j\ell}^2 \neq 1 = \widetilde{q}_{i\ell} = \widetilde{q}_{k\ell}$; (4) $q_{ii}q_{kk} = 1$，且存在 $\ell \in \mathbb{I}_\theta - \{i, j, k\}$ 使得 $\widetilde{q}_{k\ell} \neq 1 = \widetilde{q}_{j\ell} = \widetilde{q}_{i\ell}$。

相应的证明类似于 [ASa，引理 3.13，3.14] □

引理 3.8. 设 i、 j、 $k \in \mathbb{I}_\theta$ 满足 $q_{ii} = q_{jj} = -1$、 $\widetilde{q}_{ij}^2 = \widetilde{q}_{jk}^{-1} \neq 1$ 和 $\widetilde{q}_{ik} = 1$。则 $[[x_{ij}, x_{ijk}]_c, x_j]_c = 0$ 属于 $\mathscr{B}$。

证明. 当 $\mathfrak{q}$ 为 $D_n(q|\mathbb{J})$、F(4) 或 G(3) 型时，会出现此关系。通过检验，要么 $q_{kk}^2 \neq 1$，要么 $\widetilde{q}_{ij}^3 \neq 1$。证明类似于 [AnCSa，引理 3.19]。□

引理 3.9. 设 i、 j、 k、 $\ell \in \mathbb{I}_\theta$ 满足 $q_{kk} = -1$、 $q_{jj}\widetilde{q}_{ij} = q_{jj}\widetilde{q}_{jk} = 1$、 $\widetilde{q}_{ik} = \widetilde{q}_{il} = \widetilde{q}_{j\ell} = 1$ 和 $\widetilde{q}_{jk}^2 = \widetilde{q}_{k\ell}^{-1} = q_{\ell\ell}$。则 $[[[x_{ijk\ell}, x_k]_c, x_j]_c, x_k]_c = 0$ 属于 $\mathscr{B}$。

证明。如上所述的一组顶点仅在 $\mathfrak{q}$ 属于 $D_n(q|\mathbb{J})$型时出现。证明与 [AnCSa，引理 3.21]的证明类似。□

引理 3.10. 设 i、j、$k \in \mathbb{I}_\theta$ 满足 $q_{ii} = q_{jj} = -1$、$\widetilde{q}_{ij}^{\,3} = \widetilde{q}_{jk}^{\,-1}$ 和 $\widetilde{q}_{ik} = 1$。那么 $[[x_{ij}, [x_{ij}, x_{ijk}]_c]_c, x_j]_c = 0$ 属于 $\mathscr{B}$。

证明。当 $\mathfrak{q}$ 为 G(3) 型时，才会出现上述顶点集。证明类似于 [AnCSa 的引理 3.26]。□

引理 3.11。设 i、j、$k \in \mathbb{I}_\theta$ 满足 $q_{ii} \notin \mathbb{G}_\infty$、$\widetilde{q}_{ik} = 1$、$q_{jj} = -1$、$\widetilde{q}_{ij} = q_{ii}^{-2}$、$\widetilde{q}_{jk} = q_{kk}^{-1} = -q_{ii}^{3}$。则

$$[x_i, [x_{ijk}, x_j]_c]_c - \frac{q_{ij}q_{kj}}{1 - q_{ii}^{-1}}[x_{ij}, x_{ijk}]_c - (q_{ii} + q_{ii}^2)q_{ij}q_{ik}x_{ijk}x_{ij} = 0 \qquad in\ \mathscr{B}.$$

证明。同样地，当 $\mathfrak{q}$ 为 G(3) 型时，才会出现上述顶点集。证明类似于 [AnCSa 的引理 3.27]。□

引理 3.12。设 i、j、k、$\ell \in \mathbb{I}_\theta$ 满足以下条件之一：

(i) $q_{kk} = -1$, $q_{ii} = \widetilde{q}_{ij}^{\,-1} = q_{jj}^2$, $\widetilde{q}_{k\ell} = q_{\ell\ell}^{-1} = q_{jj}^3$, $\widetilde{q}_{jk} = q_{jj}^{-1}$ *and* $\widetilde{q}_{ik} = \widetilde{q}_{i\ell} = \widetilde{q}_{j\ell} = 1$;

(ii) $q_{ii} = \widetilde{q}_{ij}^{\,-1} = -q_{\ell\ell}^{-1} = -\widetilde{q}_{kl}$, $q_{jj} = \widetilde{q}_{jk} = q_{kk} = -1$ *and* $\widetilde{q}_{ik} = \widetilde{q}_{i\ell} = \widetilde{q}_{j\ell} = 1$;

则 $[[x_{ijk\ell}, x_j]_c, x_k]_c = q_{jk}\ (\widetilde{q}_{ij}^{\,-1} - q_{jj})\ [[x_{ijk\ell}, x_k]_c, x_j]_c$ 属于 $\mathscr{B}$。

证明。假设 $x_\beta := [[x_{ijk\ell}, x_j]_c, x_k]_c - q_{jk}(\widetilde{q}_{ij}^{\,-1} - q_{jj})[[x_{ijk\ell}, x_k]_c, x_j]_c \neq 0.$

如(i)中的顶点集合仅在 $\mathfrak{q}$ 为 F(4) 型时出现。证明类似于 [AnCSa，引理 3.24]。

如(ii)中的顶点集合仅在 $\mathfrak{q}$ 为 $\mathfrak{wk}(4)$ 型时出现。证明类似于 [AnCSa2，引理 3.10 (ii)]。□

4. Eminent pre-Nichols algebras

在本节中，我们确定此处考虑的所有矩阵 $\mathfrak{q}$ 所对应的卓越预 Nichols 代数。在大多数情况下，Nichols 代数是卓越的，见定理4.1。对于每个例外情形，我们通过生成元与关系明确描述相应的预 Nichols 代数。

4.1. 平凡偏序集的 Nichols代数 $\mathfrak{Pre}_{\mathrm{fGK}}(V)$。设 $\mathfrak{q}$ 满足 GK 维数 $\mathscr{B}_\mathfrak{q} < \infty$且维数 $\mathscr{B}_\mathfrak{q} = \infty$。以下结果刻画了偏序集 $\mathfrak{Pre}_{\mathrm{fGK}}(V)$ 在哪些情况下只有一个元素，即 Nichols代数：

定理4.1. 设 $\mathfrak{q}$ 是一个编织矩阵，满足 GK 维数 $\mathscr{B}_\mathfrak{q} < \infty$、维数 $\mathscr{B}_\mathfrak{q} = \infty$，且 $\mathfrak{q}$ 的 Dynkin图是连通的。若 $\mathfrak{q}$ 不属于以下类型之一：

- $\mathrm{A}_3(q|\{2\})$ 或 $\mathrm{A}_3(q|\{1,2,3\})$，其中 $q \notin \mathbb{G}_\infty$,
- $D(2, 1; \alpha)$，其中 3 个参数中至少有 2 个不是单位根,

那么 $\mathscr{B}_\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{q}$的卓越 pre-Nichols 代数。因此，$\mathscr{B}_\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{q}$的唯一有限 GK 维预 Nichols 代数。

证明。证明与 [AnCSa2 的定理 3.1], 类似，并使用 [AnCSa2 的注记 3.2] 以及 § 3 中相应的引理。□

4.2. 超 A 型的卓越预 Nichols 代数：例外情形。若 $\mathfrak{q}$ 为 $\mathrm{A}_3(q|\{2\})$ 型或 $\mathrm{A}_3(q|\{1,2,3\})$ 型，且 $q \notin \mathbb{G}_\infty$，则可得到与 $\dim \mathscr{B}_{\mathfrak{q}} < \infty$ 时相应情形类似的结果：

命题4.2. 若 $\mathfrak{q}$ 属于 $\mathrm{A}_3(q|\{2\})$ 型，则商

$$\widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}} = T(V)/\langle x_2^2, x_{13}, x_{112}, x_{332}\rangle, \tag{4.1}$$

是 $\mathfrak{q}$ 的卓越预 Nichols 代数，其基为

$$B = \left\{x_3^a x_{23}^b x_2^c x_{12^23}^d x_{123}^e x_{12}^f x_1^g : b,c,e,f \in \{0,1\},\ a,d,g \in \mathbb{N}_0\right\}$$

其中 $x_{12^23} = [x_{123}, x_2]_c$。因此 GK 维数为 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}} = 3$。

证明。类似于 [AnCSa 的命题5.5]。 □

注4.3. 此处，$z = x_{12^23}$ 在 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 中是 q-中心的原始元。令 $\mathcal{Z}$ 为由 z 生成的 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 的子代数。则 $\mathcal{Z} \hookrightarrow \mathscr{B}_{\mathfrak{q}} \twoheadrightarrow \mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 是分次编织 Hopf 代数的扩张。

命题 4.4. 若 $\mathfrak{q}$ 是类型 $\mathrm{A}_3(q|\{1,2,3\})$，则商

$$\widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}} = T(V)/\langle x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_{213}, [x_{123}, x_2]_c\rangle. \tag{4.2}$$

是 $\mathfrak{q}$ 的卓越预 Nichols 代数，其基为

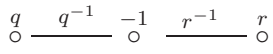
$$B = \left\{x_3^a x_{23}^b x_2^c x_{13}^d x_{123}^e x_{12}^f x_1^g : a,c,e,g \in \{0,1\},\ b,d,f \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

因此 GK 维数为 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}} = 3$。

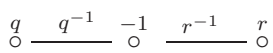
证明。类似于 [AnCSa，命题 5.9]。 □

备注 4.5. 此处，$z = x_{213}$ 在 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 中是 q-中心的原始元。令 $\mathcal{Z}$ 为由 z 生成的 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 的子代数。则 $\mathcal{Z} \hookrightarrow \mathscr{B}_{\mathfrak{q}} \twoheadrightarrow \mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 是分次编织 Hopf 代数的扩张。

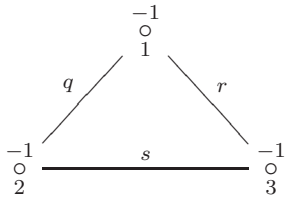
4.3. 类型 $D(2,1;\alpha)$ 的卓越预 Nichols 代数：例外情形。类型 $D(2,1;\alpha)$ 的图表由三个参数 q、r、s 决定，并满足 $qrs = 1$。令 $\mathfrak{q}$ 为类型 $D(2,1;\alpha)$ 的矩阵，使得其参数 q、r、s 中恰有两个不是单位根。即，设 $M =$ 阶为 q，$N =$ 阶为 r，$L =$ 阶为 s。我们讨论以下情形：

(4.3) 

$M < \infty \quad N,\ L = \infty$

(4.4) 

$L < \infty \quad M,\ N = \infty$

(4.5) 

$M < \infty \quad N,\ L = \infty$

在本小节的其余部分，我们将引入一个预 Nichols 代数，并证明它是每个图所对应的显著代数。

4.3.1. 类型 $D(2,1;\alpha)$，其 Dynkin图为 (4.3)。在这种情况下，Nichols代数 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 具有如下表示

$$x_2^2=0,\qquad x_{13}=0,\qquad x_{112}=0,\qquad x_{332}=0,\qquad x_1^M=0,$$

命题 4.6. 设 $\mathfrak{q}$ 为类型 $D(2,1;\alpha)$，其 Dynkin图为 (4.3)。则代数 *ra*

$$\widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}}=T(V)/\langle x_2^2,x_{13},x_{112},x_{332}\rangle \tag{4.6}$$

是 $\mathfrak{q}$的一个卓越预 Nichols 代数，其基为

$$B=\{x_3^{n_1}x_{23}^{n_2}x_2^{n_3}x_{12^23}^{n_4}x_{123}^{n_5}x_{12}^{n_6}x_1^{n_7}:n_2,n_3,n_5,n_6\in\{0,1\}\},$$

其中 $x_{12^23}=[x_{123},x_2]_c$，且 GK 维数为 $\widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}}=3$。此外，若 $\mathcal{Z}$ 是由 x_1^M张成的代数，则 $\mathcal{Z}\hookrightarrow\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}\twoheadrightarrow\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 是分次编织 Hopf 代数的扩张。

证明。设 I 为 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$的定义理想。根据 [AnCSa2，注 3.2] （将 J 视为定义 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$的 Hopf理想）， I 的每个生成元都是原始元，因此 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 是一个预 Nichols 代数。

设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathfrak{q}$ 的一个预 Nichols 代数，且 GK 维数 $\mathscr{B}<\infty$。根据引理 3.1、3.2、3.3， $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 的每个定义关系在 $\mathscr{B}$中都为零。于是，典范投影 $T(V)\twoheadrightarrow\mathscr{B}$ 诱导出一个满射 Hopf 代数映射 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}\twoheadrightarrow\mathscr{B}$。因此，要证明 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$，只需证明 GK 维数 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}<\infty$。

根据 [An2 定理 3.1]的证明， B 是 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$的一组基。令 $\mathcal{Z}'=\mathscr{B}^{\mathrm{co}\,\pi}$，其中$\pi$： $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}\twoheadrightarrow\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 是典范投影。由于 $\mathcal{Z}\subseteq\mathcal{Z}'$，由 [AnCSa 引理 2.4] 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}}}&=\mathcal{H}_{\mathcal{Z}'}\mathcal{H}_{\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}}\geq\mathcal{H}_{\mathcal{Z}}\mathcal{H}_{\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}}\geq\\&\geq\frac{1}{1-t_1^M}\frac{(1-t_1^M)(1+t_1t_2)(1+t_1t_2t_3)(1+t_2)(1+t_2t_3)}{(1-t_1)(1-t_1t_2^2t_3)(1-t_3)}.\end{aligned}$$

另一方面， B 是 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$的一组基，因此

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}}}=\frac{(1+t_1t_2)(1+t_1t_2t_3)(1+t_2)(1+t_2t_3)}{(1-t_1)(1-t_1t_2^2t_3)(1-t_3)}$$

因此 $\mathcal{Z}=\mathcal{Z}'$， $\mathcal{Z}\hookrightarrow\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}\twoheadrightarrow\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 是分次编织 Hopf 代数的扩张，且GK 维数 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}=3$。□

注记 4.7. 此处， $z=x_1^M$在 $\widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}}$中是 q-中心的原始元。

4.3.2. 类型为 $D(2,1;\alpha)$、Dynkin图为 4.4。设 $\mathfrak{q}$ 为类型 $D(2,1;\alpha)$且 Dynkin图为 (4.4) 的 Nichols代数。Nichols代数 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 具有如下表示

$$x_{13}=0,\qquad x_2^2=0,\qquad x_{112}=0,\qquad x_{332}=0,\qquad x_{12^23}^L=0,$$

其中 $x_{12^23}=[x_{123},x_2]_c$。

命题 4.8. 设 $\mathfrak{q}$ 为类型 $D(2,1;\alpha)$且 Dynkin图为 (4.4) 的代数。则该代数 *ra*

$$\widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}}=T(V)/\langle x_2^2,x_{13},x_{112},x_{332}\rangle \tag{4.7}$$

是一个具有基的卓越预 Nichols 代数，属于 $\mathfrak{q}$

$$B=\{x_3^{n_1}x_{23}^{n_2}x_2^{n_3}x_{12^23}^{n_4}x_{123}^{n_5}x_{12}^{n_6}x_1^{n_7}:n_2,n_3,n_5,n_6\in\{0,1\}\}$$

因此 GK 维数为 $\widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}} = 3$。此外，如果 $\mathcal{Z}$ 是由 $x_{12^23}^M$ 张成的代数，那么 $\mathcal{Z} \hookrightarrow \widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}} \twoheadrightarrow \mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 是编织 Hopf 代数的保次数扩张。

证明。设 I 为 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$的定义理想。根据 [AnCSa2，第 3.2] 条注释（取 J 为定义 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 的 Hopf理想），I 的每个生成元都是原始元，因此 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 是一个预 Nichols 代数。

设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathfrak{q}$ 的一个预 Nichols 代数，满足 GK 维数 $\mathscr{B} < \infty$。根据引理 3.1、3.2、3.3，$\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 的每个定义关系在 $\mathscr{B}$中都为零。于是，典范投影 $T(V) \twoheadrightarrow \mathscr{B}$ 诱导出一个满射 Hopf 代数映射 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}} \twoheadrightarrow \mathscr{B}$。因此，要证明 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$，只需证明 GK 维数 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}} < \infty$。

根据 [An2 定理 3.1]的证明，B 是 $\widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}}$。令 $\mathcal{Z}' = \mathscr{B}^{\mathrm{co}\,\pi}$，其中$\pi$： $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}} \twoheadrightarrow \mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 是典范投影。由于 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}'$，由 [AnCSa 引理 2.4] 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}}} &= \mathcal{H}_{\mathcal{Z}'}\mathcal{H}_{\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}} \geq \mathcal{H}_{\mathcal{Z}}\mathcal{H}_{\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}} \geq \\ &\geq \frac{1}{1-(t_1t_2^2t_3)^M}\frac{(1-(t_1t_2^2t_3)^M)(1+t_1t_2)(1+t_1t_2t_3)(1+t_2)(1+t_2t_3)}{(1-t_1)(1-t_1t_2^2t_3)(1-t_3)}.\end{aligned}$$

另一方面，B 是 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$的一个基，因此

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}}} = \frac{(1+t_1t_2)(1+t_1t_2t_3)(1+t_2)(1+t_2t_3)}{(1-t_1)(1-t_1t_2^2t_3)(1-t_3)}$$

因此，$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}'$、$\mathcal{Z} \hookrightarrow \mathscr{B}_{\mathfrak{q}} \twoheadrightarrow \mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 是分次编织 Hopf 代数的扩张，并且GK 维数为 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}} = 3$。

□

注4.9。 $z = x_{12^23}^L$ 在 $\widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}}$中是 q-中心的原始元。

4.3.3. 类型为 $D(2, 1; \alpha)$，其 Dynkin图为4.5。设 $\mathfrak{q}$ 为类型 $D(2, 1; \alpha)$且 Dynkin图为(4.5)。Nichols代数 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 具有如下表示

$$x_2^2 = 0, \qquad x_2^2 = 0, \qquad x_3^2 = 0, \qquad x_{12}^M = 0,$$

$$x_{123} = q_{12}(1-s)x_2x_{13} - \frac{1-s}{q_{32}(1-r)}[x_{13}, x_2]_c.$$

命题4.10。设 $\mathfrak{q}$ 为类型 $D(2, 1; \alpha)$且 Dynkin图为(4.5)。由以下关系定义的代数$\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$

$$\begin{aligned}&x_1^2 = 0, \qquad x_2^2 = 0, \qquad x_3^2 = 0,\\ &x_{123} = q_{12}(1-s)x_2x_{13} - \frac{1-s}{q_{32}(1-r)}[x_{13}, x_2]_c.\end{aligned} \tag{4.8}$$

是 $\mathfrak{q}$的一个卓越预 Nichols 代数，其基为

$$B = \{x_3^{n_1}x_{23}^{n_2}x_2^{n_3}x_{123}^{n_4}x_{13}^{n_5}x_{12}^{n_6}x_1^{n_7} : n_1, n_3, n_4, n_7 \in \{0, 1\}\}$$

因此 GK 维数 $\widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}} = 3$。另外，如果 $\mathcal{Z}$ 是由 x_{12}^M 张成的代数，那么 $\mathcal{Z} \hookrightarrow \widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}} \twoheadrightarrow \mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 是编织 Hopf 代数的保次数扩张。

证明。设 I 是 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 的定义理想。根据 [AnCSa2，注 3.2]（取 J 为定义 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 的 Hopf 理想），I 的每个生成元都是原始元，因此 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 是预 Nichols 代数。

设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathfrak{q}$ 的一个预 Nichols 代数，且 GK 维数为 $\mathscr{B} < \infty$。根据引理 3.3、3.5，$\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 的每个定义关系都在 $\mathscr{B}$ 中消失。于是，典范投影 $T(V) \twoheadrightarrow \mathscr{B}$ 诱导出一个满射 Hopf 代数映射 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}} \twoheadrightarrow \mathscr{B}$。因此，为证明 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$，只需证明 GK 维数为 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}} < \infty$。

根据 [An2 的证明，定理 3.1]，B 是 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 的一个基。设 $\mathcal{Z}' = \mathscr{B}^{\mathrm{co}\,\pi}$，其中 π：$\mathscr{B}_{\mathfrak{q}} \twoheadrightarrow \mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 是典范投影。由于 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}'$，由 [AnCSa，引理 2.4]，我们得到

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}}} = \mathcal{H}_{\mathcal{Z}'}\mathcal{H}_{\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}} \geq \mathcal{H}_{\mathcal{Z}}\mathcal{H}_{\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}} \geq$$
$$\geq \frac{1}{1-(t_1t_2)^M}\frac{(1-(t_1t_2)^M)(1+t_1)(1+t_1t_2t_3)(1+t_2)(1+t_3)}{(1-t_1t_2)(1-t_1t_3)(1-t_2t_3)}.$$

另一方面，B 是 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 的一个基，因此

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}}} = \frac{(1+t_1)(1+t_1t_2t_3)(1+t_2)(1+t_3)}{(1-t_1t_2)(1-t_1t_3)(1-t_2t_3)}$$

因此 $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}'$，$\mathcal{Z} \hookrightarrow \mathscr{B}_{\mathfrak{q}} \twoheadrightarrow \mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$ 是分次编织 Hopf 代数的扩张，并且 GK 维数为 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}} = 3$。□

注 4.11. $z = x_{12}^M$ 在 $\widehat{\mathscr{B}}_{\mathfrak{q}}$中是 q-中心的原始元。

4.4. Dynkin图不连通的 Nichols 代数。设 $\mathfrak{q}$ 满足 GK 维数 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}} < \infty$、维数 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}} = \infty$，且 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$的 Dynkin图满足.....我们考虑$\mathbb{I} = \cup_{d\in C}\mathbb{I}^{(d)}$，使得$\mathbb{I}^{(d)} = \{j_{(1)}, j_{(2)}, ..., j_{(k_d)}\}$ 是 $\mathfrak{q}$ 的图的某个连通分支的顶点集合。因此，$V_d = \langle x_j | j \in \mathbb{I}^{(d)}\rangle$ 是 V 的编织子空间，并将 V_d 的编织矩阵记为 $\mathfrak{q}_d$。

以下注记由秩 3 分类得出，将有助于证明本节的主要定理。

注 4.12. 若 $V = \Bbbk_1 + \Bbbk_2 + \Bbbk_3$是一个编织矩阵为 $\mathfrak{q}$的向量编织空间，且 GK 维数 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}} < \infty$、维数 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}} = \infty$，并且 $\mathfrak{q}$的 Dynkin图是一个 3-环，则它满足以下条件：

- 至少有两个顶点的标签为 -1。
- 如果某个顶点的标签不是 -1，那么该标签不是单位根。
- 如果 $q_{11} \neq -1$，那么 $\widetilde{q}_{12} = \widetilde{q}_{13} = q_{11}^{-1}$或 $\{\widetilde{q}_{13}, \widetilde{q}_{12}\} = \{q_{11}^{-1}, q_{11}^{-2}\}$。

定理 4.13。设 $\mathfrak{q}$ 是一个编织矩阵，使得 GK 维数 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}} < \infty$，并满足以下条件

- 对于所有 $d \in C$，要么 $|k_d| \geq 2$，要么 $|k_d| = 1$，其中 $q_{ii} \neq 1$、$i \in \mathbb{I}^{(d)}$，
- 对于所有 $d \in C$，$\dim \mathscr{B}_{\mathfrak{q}_d} = \infty$，

于是，由生成元 x_i、$i \in \mathbb{I}$ 及以下关系定义的预 Nichols 代数 $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}}$：

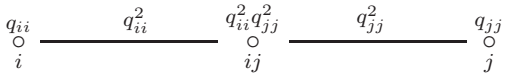
(a) $\mathscr{B}_{\mathfrak{q}_d}$、$d \in C$的定义关系，

(b) $x_{ij}=0$ 如果 $i\in\mathbb{I}^{(a)}$、 $j\in\mathbb{I}^{(b)}$、 $a\neq b$。

$\widehat{\ }$是 $\mathfrak{q}$的卓越 pre-Nichols 代数，并且同构于 $\underline{\bigotimes}_{d\in C'}\mathscr{B}_{\mathfrak{q}_d}$。

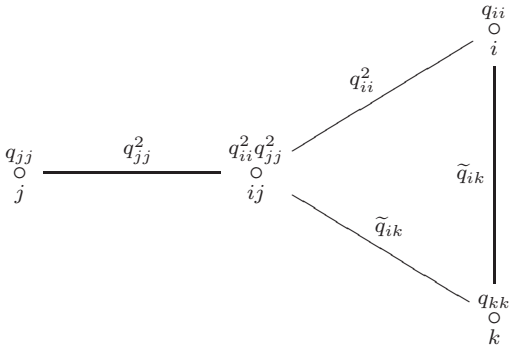
证明。令 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{B}$的一个有限 GK 维数预 Nichols 代数。注意，根据§3 [AnCSa，第 §3] 节以及 [AnCSa2，第 3.2], 节中的引理，(a) 中的关系在 $\mathscr{B}$中成立；事实上，对于某个 a ，它们的支集包含于 $\mathbb{I}^{(a)}$ 中，并且编织向量子空间 V_a 的 Dynkin图是连通的。

为了证明关系 (b) 在 $\mathscr{B}$ 中成立，我们以类似于 §3的方式进行。令 i、 $j\in\mathbb{I}$如 (b) 中所述，我们必须 $x_{ij}\in\mathcal{P}(\mathscr{B})$。假设 $x_{ij}\neq 0$ 在 $\mathscr{B}$中，那么编织向量空间 W 的 Dynkin图：$=\Bbbk x_j+\Bbbk x_j+\Bbbk x_{ij}$ 是



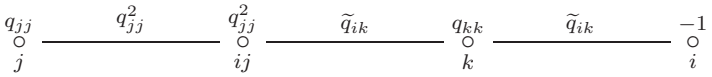
假设 $|k_a|=|k_b|=1$，则 q_{ii}、 $q_{jj}\notin\mathbb{G}_\infty$，因为 $\dim\mathscr{B}_{\mathfrak{q}_a}=\dim\mathscr{B}_{\mathfrak{q}_b}=\infty$。由于$q_{ii}^2$是边的一个标记，根据秩 3 分类，我们有 $q_{ii}^2=-1$ ，或者存在 $m\in\{1,2,3\}$使得 $q_{ii}^mq_{ii}^2=1$。由于 $q_{ii}\notin\mathbb{G}_\infty$ ，我们得到矛盾，并得出 $|k_a|>1$或 $|k_b|>1$。

假设 $|k_a|>1$。令 $k\in\mathbb{I}^{(a)}$ 满足 $\widetilde{q}_{ik}\neq 1$，$W=\Bbbk x_k+\Bbbk x_i+\Bbbk x_j+\Bbbk x_{ij}$ 的 Dynkin图为



若 $q_{ii}\neq -1$ ，则 $\Bbbk x_k+\Bbbk x_i+\Bbbk x_{ij}$ 的 Dynkin图是一个 3-环，并由备注可知，$q_{ii}^2q_{jj}^2=q_{kk}=-1$。经观察， W 唯一可能的类型是 F(4)，但这是不可能的，因为在这种情况下我们有 $q_{ii}=q\notin\mathbb{G}_\infty$ 和 $\widetilde{q}_{ik}=q^{-1}=q^2$。由此得到矛盾，因此 $q_{ii}=-1$。

$\Bbbk x_j+\Bbbk x_k+\Bbbk x_i+\Bbbk x_{ij}$ 的 Dynkin图为



注意，根据秩 4 分类，上述图中的每个标记都满足：它不是单位根，或者等于 -1。因此可得 $\widetilde{q}_{ik}$、q_{jj}、 q_{jj}^2、 $q_{kk}\notin\mathbb{G}_\infty-\mathbb{G}_2$。所以我们有 $q_{jj}^2\neq -1$ 否则 $q_{jj}\in\mathbb{G}_4-\mathbb{G}_2$。再次根据秩 4 分类，如果相邻的顶点和边具有相同的标记，那么它属于类型 $\mathfrak{wk}$(4)，且所提及的标记等于 -1。后者导致矛盾，因为顶点 ij 与边 $\{j,ij\}$ 相邻，且 $q_{jj}^2\neq -1$。

由于先前的矛盾，我们有 $x_{ij} = 0$，这就证明了我们想要证明的结论。□

注4.14. 如果 $\mathfrak{q}$ 如定理 4.13 中所述，那么我们可以计算具有有限 GK 维数的分次预 Nichols 代数的偏序集。该偏序集的元素将由 $\widehat{\ }$参数化，其中 $\underline{\bigotimes}_{d\in C}\mathscr{B}_d$满足 $\mathscr{B}_d = \mathscr{B}_{\mathfrak{q}_d}$ 或 $\mathscr{B}_d = \mathscr{B}_{\mathfrak{q}_d}$。

致谢 我感谢 Iv´an Angiono 提出这个问题，并感谢他阅读我们的工作。

References

[A] N. Andruskiewitsch. *An Introduction to Nichols Algebras*。载于《数学与物理学中的量子化、几何与非交换结构》。A. Cardona、P. Morales、H. Ocampo、S. Paycha、A. Reyes 编，Springer（2017），135–195。[AAn] N. Andruskiewitsch, I. Angiono。 *On Finite dimensional Nichols algebras of diagonal type*。《数学科学通报》7（2017），353–573。[AAnH] N. Andruskiewitsch、I. Angiono 和 I. Heckenberger。*On finite GK-dimensional Nichols algebras over abelian groups* **271**, 1329 2021 。《美国数学学会回忆录》，编号（）。[AAnY] N. Andruskiewitsch、I. Angiono 和 M. Yakimov。 *Poisson orders on large quantum groups*。arXiv:2008.11025。[AnCSa] *Finite GK-Dimensional pre-Nichols algebras of super and standard type* 2009 04863 I. Angiono、E. Campagnolo、G. Sanmarco。。arXiv:。。[AnCSa2] *Finite GK-dimensional pre-Nichols algebras of (super)modular and unidentified type* 2110 11217 I. Angiono、E. Campagnolo、G. Sanmarco。。arXiv:。。《非交换几何杂志》，即将刊出。*Braided Hopf algebras arising from matched pairs of groups*，《纯粹与应用代数杂志》182（2003），119–149。[AS] N. Andruskiewitsch 和 H.-J. Schneider。 *On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras* **171** 2010 1 23 ，《数学年刊》（），–。[ASa] N. Andruskiewitsch 和 G. Sanmarco。*Finite GK-dimensional pre-Nichols algebras of quantum linear spaces and of Cartan type* **8** 2021 296 329 。《美国数学学会汇刊》B辑（），–。[An1] I. Angiono。 *Nichols algebras with standard braiding*，《代数与数论》3（2009），35-106。[An2] I. Angiono。 *On Nichols algebras of diagonal type*，《莱因应用数学杂志》683（2013），189–251。[An3] I. Angiono。 *Distinguished Pre-Nichols algebras*，《变换群》21（2016），1-33。[AnG] I. Angiono、A. Garc´ıa Iglesias。。arXiv:。。*Finite GK-dimensional Nichols algebras of diagonal type and finite root systems* 2212 08169 。[H]。 *Classification of arithmetic root systems*，《高等数学》220（2009），59–124。[Kh] V. Kharchenko, *A quantum analog of the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem*。《代数与逻辑》38（1999），259–276。[KL] G. Krause、T. Lenagan。 *Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension*。《数学研究生教程》22。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2000年。x+212 页。[R] D. E. Radford, *Hopf algebras*。《结与万物丛书》49。World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.，新泽西州哈肯萨克，2012年。xxii+559 页。*Email address*: emiliano.campagnolo@mi.unc.edu.ar