arXiv:2301.13158v1 [math.GN] 30 Jan 2023

选择原理及其书中证明

Boaz Tsaban

Abstract. 我为以下每个基本定理提供简化证明。 -
gardding 选择原理:

(1) 作者与 Zdomskyy 提出的拟正规收敛定理，断言空间上的连续函数空间的一种重要性质实际上在该空间的博雷尔像下得以保留。(2) Peng 提出的 Scheepers 图最后定理，完成了该图中所有可证明的蕴含关系。(3) Telg´arsky 提出的 Menger 博弈定理，确定了在 Menger 覆盖性质的博弈版本中，Bob 何时拥有获胜策略。(4) Carlson 提出的 Rothberger 覆盖性质可加性的一个下界。这些简化后的证明带来了若干新结果。

献给 Adina

1. Introduction

选择原理的研究统一了源自维数理论（Menger 和 Hurewicz）、测度论（Borel）、收敛性质（Cs´asz´ar– Laczkovicz）以及函数空间（Gerlits–Nagy 和 Arhangel'ski˘ı）的诸多概念；这些概念经后来的数学家在大量研究中加以分析和发展，尤其是自 Just、Miller、Scheepers 和 Szeptycki 于 1996年发表论文以来 [9]。这些统一后的概念包括许多经典类型的实数特殊子集、函数空间中的局部性质，以及较近期出现的各种收敛性质。

选择性拓扑覆盖性质构成了选择原理的核心。这些覆盖性质通过 Scheepers 图（图1）相互关联。这是一幅

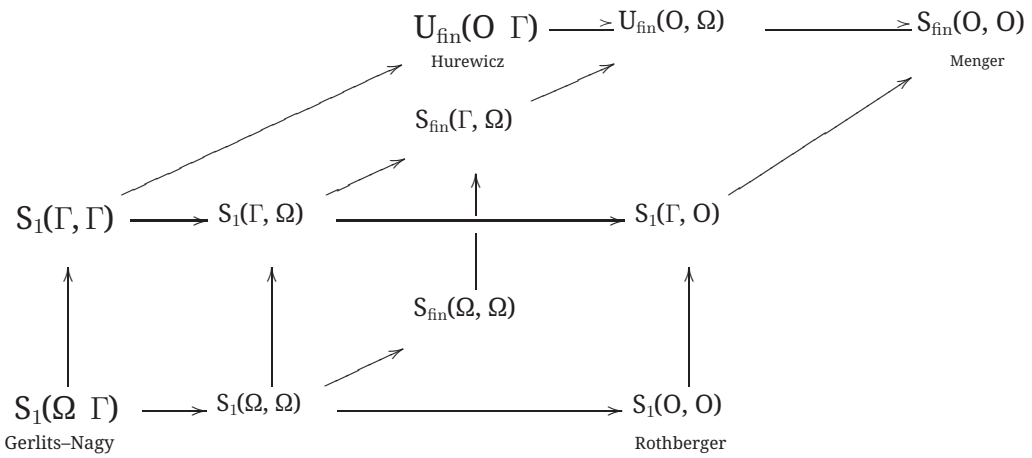


Figure 1. Scheepers 图

2020年数学主题分类。主要分类：37F20；次要分类：26A03、03E75。1

展示各种覆盖性质及其相互蕴含关系的图。图中的性质按如下方式得到。

对于集合族 A 和 B，令 $S_1(A, B)$ 表示以下命题：对于族 A 中元素构成的每个序列，我们可以从序列的每一项中选取一个元素，并由此得到族 B 中的一个元素。当 $A = B = O(X)$，即拓扑空间X的开覆盖族时，我们得到 Rothberger 性质（1941年），也就是 Borel强零测度的拓扑版本。若空间 X 满足 $S_1(O, O)$，即断言 $S_1(O(X), O(X))$ 成立，我们就称之为满足该性质；其他选择性性质也类似。

将上述定义中的“一个”替换为“有限多个”，即可得到假设 $S_{fin}(A, B)$。根据 Hurewicz（1925年）的一个观察，性质 $S_{fin}(O, O)$ 等价于 Menger基性质，这是一种维数型性质。进一步允许我们对选出的有限子集取并集，即可得到性质 $U_{fin}(A, B)$——这对某些类型的覆盖很重要。出于技术上的原因，该性质并不考虑 A 类型的所有覆盖，而只考虑那些没有有限子覆盖的覆盖。

如果覆盖中的任何成员都不覆盖整个空间，但空间的每个有限子集都被覆盖中的某个成员覆盖，那么该空间的覆盖就是一个 ω-覆盖。对于空间 X，$\Omega(X)$ 是该空间的开 ω-覆盖族。点余有限覆盖是指一种无限覆盖，其中空间的每个点都属于除有限多个成员以外的所有成员。 $\Gamma(X)$ 是空间 X 的开点余有限覆盖族。

将上述选择原理应用于覆盖类型 O、Ω 和 Γ，我们得到其他重要性质，例如 Hurewicz 性质 $U_{fin}(O\ \Gamma)$（1925年）。我们还得到 Gerlits–Nagy γ-性质 $S_1(\Omega\ \Gamma)$（1982年），它刻画了具有逐点收敛拓扑的连续实值函数函数空间 $C_p(X)$ 的 Fr´echet–Urysohn 性质：如果一个拓扑空间中某个集合的闭包内的每个点实际上都是该集合中某个序列的极限，那么这个拓扑空间就是 Fr´echet–Urysohn 空间。空间 X 与 $C_p(X)$ 之间的这种对偶性，还将此前由 Arhangel’skiĭ、Bukovsk´y、Sakai 等人发现的 $C_p(X)$ 的各种紧致度和收敛性质，转化为选择覆盖性质 $S_{fin}(\Omega, \Omega)$、$S_1(\Gamma, \Gamma)$ 和 $S_1(\Omega, \Omega)$。在第2节中，我们将给出这一类最重要结果之一的一个出人意料的简单证明。尽管该结果本身没有明确涉及选择覆盖性质，但其证明却大量运用了这些性质。

如果每个开覆盖都有一个可数子覆盖，那么拓扑空间就称为 Lindel¨of 空间。例如，所有实数集都是 Lindel¨of 空间。由于所有选择原理都涉及可数序列，这一理论主要研究 Lindel¨of 空间。对于 Lindel¨of 空间，Scheepers 图是对由此引入的所有性质进行分类的结果；每个性质都等价于图中的某个性质 [9]。长期以来，人们一直不确定能否在图中的这些性质之间建立其他蕴含关系。第 3 节将讨论这个问题最近令人惊讶的解决方案。

Menger 覆盖性质 $S_{fin}(O, O)$ 是 Scheepers 图中历史最悠久、最一般且应用最广泛的性质。起初，Menger 猜想他的性质与 σ-紧性一致。尽管这一猜想后来被证明是错误的 [20]，，但该性质的博弈版本确实刻画了 σ-紧性。第 4 节将给出这一深刻结果的一个非常直观的证明。

在第 5 节中，我们探讨它与组合集合论的联系。我们将说明，只需掌握选择原理的基础知识，便可轻松得出 Rothberger 性质可加性的一个非平凡下界。

《The Book》是 Paul Erd˝os 创作的一个广为流传的神话：一本超限书籍，收录了所有定理最简洁的证明。我愿意相信，这里给出的证明与《The Book》中的证明相似……或者至少与它的某些初稿中的证明相似。

2. The Quasinormal Convergence Theorem

所谓实集，是指每个开集都是既开又闭集的可数并的拓扑空间。例如，实数线的全不连通子集，尤其是康托尔空间 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 的子集，都具有这一性质。一般而言，具有本节所讨论的任一性质的完全正规空间都是实集。

设 X 是一个实集。X 上的实值函数序列 $f_1, f_2, \ldots$ 拟正规收敛到实值函数 f，是指存在趋于 0 的正实数 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$，使得对每个点 $x \in X$，都有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon_n$$

除有限多个 {v1} 外拟正规收敛推广了一致收敛 .

实集 X 是 QN空间，当且仅当定义在 X上的每个逐点收敛到 0 的连续实值函数序列都准正规收敛到 0。等价地，空间 $C_p(X)$ 中的收敛是准正规收敛。

QN空间曾由 Bukovsk´y、Rec law、Repick´y、Scheepers、Nowik、Sakai 和 Hale˘s [21, 等人深入研究，相关参考文献见]。这一性质及其他类似性质在连续像下保持不变；而在作者与 Zdomskyy [21] 发表论文之前的所有研究结果 [21,都表明，这些性质在博雷尔像下并不保持不变。因此，下述定理 9] 令人惊讶。

贝尔空间 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 由最终支配关系 $\leq^*$ 赋予拟序：$f \leq^* g$ 若$f(n) \leq g(n)$ 对所有除有限多个之外的 n都成立。贝尔空间 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 的子集 Y 若关于最终支配有界，则称其为有界。

定理2.1（拟正规收敛定理）。对于实集 X，以下断言等价：

(1) 集合 X 是一个 QN空间。(2) 集合 X 在贝尔空间 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 中的每个 Borel 像都是有界的。

定理中的第二个性质广为人知，也很容易应用：在涉及这些概念的证明中，所需的最自然变换总是很容易看出是 Borel 的。因此，该定理对 QN空间的研究产生了巨大影响：首先，许多以往复杂精巧的论证得以用简单直接的论证取代。其次，许多此前被分别考察的性质，后来被证明是等价的。因此，这一定理解决了所有与这些性质有关的问题 [21]。

拟正规收敛定理的原始证明冗长而复杂，其中一些部分难以理解。后来，Bukovsk´y 和 ˇSupina [5, §4] 发表了一个更自然的证明。受 Gerlits 和 Nagy 的一篇论文 [7]，启发，我发现了以下这个出人意料地简单的证明。建立拟正规收敛定理时，所有所需的证明要素都已具备。以下引理为证明提供了关键。

对于空间 X，令 $\mathrm{PF}(X)$ 表示 X 中所有可数无限点有限开集族的集合。

引理 2 .2. 设 X 是一个拓扑空间。以下断言等价：

(1) 空间 X 在贝尔空间 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 中的每个博雷尔像都是有界的。(2) 空间 X 满足 $\mathsf{S}_1(\mathrm{PF},\mathrm{PF})$。

证明。令 $\mathsf{F}(X)$（分别地，$\mathsf{B}(X)$）表示集合 X 的可数闭覆盖（分别地，Borel 覆盖）族，令 $\mathsf{F}_\Gamma(X)$（分别地，$\mathsf{B}_\Gamma(X)$）表示集合 X 的无限闭点余有限覆盖（分别地，Borel 点余有限覆盖）族。性质 (1)、$\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathsf{B},\mathsf{B}_\Gamma)$ 和 $\mathsf{S}_1(\mathsf{B}_\Gamma,\mathsf{B}_\Gamma)$ 等价于 [17, 定理 1]。对于一个开集族 $\mathcal{U}$，有 $\mathcal{U}\in\mathsf{PF}(X)$ 当且仅当

$$\{U^{\mathsf{c}}:U\in\mathcal{U}\}\in\mathsf{F}_\Gamma(X).$$

由此可得 $\mathsf{S}_1(\mathsf{PF},\mathsf{PF})=\mathsf{S}_1(\mathsf{F}_\Gamma,\mathsf{F}_\Gamma)$。

(1) $\Rightarrow$ (2)：显然，$\mathsf{S}_1(\mathsf{B}_\Gamma,\mathsf{B}_\Gamma)$ 蕴含 $\mathsf{S}_1(\mathsf{F}_\Gamma,\mathsf{F}_\Gamma)$。 ()

2 $\Rightarrow$ (1)：Bukovsk´y–Rec law–Repick´y 的一个定理 [4, 推论 5.3]断言 t

$$\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{F},\mathrm{F}_\Gamma)=\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{B},\mathrm{B}_\Gamma).$$

通常的论证 [16, 命题 11] 表明，$\mathsf{S}_1(\mathsf{F}_\Gamma,\mathsf{F}_\Gamma)$蕴含$\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathsf{F},\mathsf{F}_\Gamma)$：如果 $\{C_n:n\in\mathbb{N}\}\in\mathsf{F}(X)$且不存在有限子覆盖，那么$\{\bigcup_{k=1}^n C_k:\ n\in\mathbb{N}\}\in\mathsf{F}_\Gamma(X)$。□

如果对于任意一列收敛到同一点的序列 $s_1,s_2,\ldots$，都存在一个序列 s，使得对所有自然数 n，集合$\mathrm{im}(s_n)\setminus\mathrm{im}(s)$都是有限的，那么拓扑空间 Y具有 Arhangel'skiĭ 性质 α_1。这一性质由集合的性质（序列的像）定义，而非由序列定义。固定一个双射 φ: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$。对于满足每个 n都有 $s_n=(s_{(n,1)},s_{(n,2)},\ldots)$的序列 $s_1,s_2,\ldots$，定义

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty}s_n:=(s_{\varphi(1)},s_{\varphi(2)},\ldots).$$

由于序列的收敛性不依赖于其元素的排列顺序，因此对我们而言，使用哪个双射 φ 并不重要。序列 $\bigsqcup_{n=1}^{\infty}s_n$ 收敛于点p，当且仅当每个序列 s_n 都收敛于 p，并且对于 p的每个邻域 U，都有 $\mathrm{im}(s_n)\subseteq U$，除有限多个 n之外均成立。

引理 2.3. 设 Y 是一个 α_1 空间。对于空间Y中收敛于同一点 p的每个序列 s_1、s_2、.....，存在 s_n的尾段 t_n （$n\in\mathbb{N}$），使得序列$\bigsqcup_{n=1}^{\infty}t_n$ 收敛于 p。

证明。存在一个序列 s，使得对于所有自然数n，集合 $\mathrm{im}(s_n)\setminus\mathrm{im}(s)$ 都是有限的。通过转到一个子序列，我们可以假设 $\mathrm{im}(s)\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{im}(s_n)$。设 $s=(a_1、a_2、.....)$。对于每个自然数 n，由于序列 s_n收敛于点 p，除 p 之外的每个元素在序列 s_n 中至多出现有限次。因此，序列 s_n 存在一个尾段 t_n，使得

$$\mathrm{im}(t_n)\subseteq\{a_k:k\geq n\}\cup\{p\}.$$

设 U 是 p的一个邻域。存在一个自然数 N，使得

$$\mathrm{im}(t_n)\subseteq\{a_k:k\geq n\}\cup\{p\}\subseteq U$$

对所有自然数 $n\geq N$都成立。因此，直和 $t:=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}t_n$收敛到点$p$。□

Sakai [13, 定理 3.7]和 Bukovsk´y–Hale˘s [3, 定理 11] 证明，实集 X 是 QN空间，当且仅当空间 $\mathsf{C}_{\mathrm{p}}(X)$ 是一个 α_1 空间。因此，拟正规收敛定理可以表述并证明如下。

定理 2.4。对于实集 X，以下断言等价：

(1) 空间 $C_p(X)$ 是一个 α_1 空间。(2) 集合 X 在贝尔空间 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 中的每个 Borel 像都是有界的。

证明。(2) $\Rightarrow$ (1)：这是显而易见的推论。为完整起见，我们重述其证明 [21, 定理 9]。

设空间 $C_p(X)$ 中的序列 s_1、s_2、... 收敛到函数 $f \in C_p(X)$。对于每个自然数 n，假设

$$s_n = (f_1^n, f_2^n, f_3^n, \dots).$$

定义博雷尔函数 $\Psi\colon\ X \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，如下：

$$\Psi(x)(n) := \min\left\{ k : (\forall m \geq k)\ |f_m^n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

设 $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是像集 $\Psi[X]$ 的一个 $\leq^*$-界。那么序列

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty} (f_{g(n)}^n, f_{g(n)+1}^n, f_{g(n)+2}^n, \dots)$$

收敛到函数 f。

(1) $\Rightarrow$ (2)：这是主要推论。根据引理 2.2，只需证明集合X 满足 S_1(PF, PF)。令 $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2,\dots \in$ PF(X)。通过对点有限覆盖进行抽稀，我们可以假设它们两两不相交 [16, 引理 4]。对于每个集合 $U \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$，令 $\mathcal{C}_U$为一个由既开又闭集组成的可数族，且 $\bigcup \mathcal{C}_U = U$。对于每个自然数 n，令

$$\mathcal{V}_n := \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} \mathcal{C}_U.$$

每个集合 $C \in \mathcal{V}_n$ 至多包含在有限多个集合 $U \in \mathcal{U}_n$中。因此，族 $\mathcal{V}_n$ 是无限的且点有限。令 s_n 为该族的一个双射枚举

$$\{\, \chi_V : V \in \mathcal{V}_n \,\}.$$

序列 s_n 属于 $C_p(X)$，并收敛到常值函数 0。

由于空间 $C_p(X)$ 是 α_1，对于每个 n，序列 s_n 都有一个尾段 t_n，使得序列 $s := \bigsqcup_{n=1}^{\infty} t_n$ 收敛到 0。对于每个自然数 n，选取一个集合 $U_n \in \mathcal{U}_n$，满足$\mathcal{C}_{U_n} \subseteq \mathrm{im}(t_n)$。那么族 $\{\, U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是无限的且点有限。□

对于集合 $X \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$，Gerlits 和 Nagy（以及独立地，Nyikoˇs）如下定义一个空间 T(X)。令 $\{0,1\}^*$ 表示由集合 $\{0,1\}$ 中元素组成的有限序列的集合。令 $X \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$。对于每个点 $x \in X$，令 $A_x \subseteq \{0,1\}^*$ 表示点 x 的初始段集合。令 $X \cup \{0,1\}^*$ 为一个拓扑空间，其中集合 $\{0,1\}^*$ 中的点都是孤立点；对于每个点 $x \in X$，其邻域基由集合 $\{x\} \cup B$ 给出，其中 B 是集合 A_x 的一个余有限子集。令 T(X) 为该空间的一点紧化，并令 ∞ 为紧化点。

Gerlits 和 Nagy 证明了：如果集合 $X \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 是 Siepi´nski 集，那么空间 T(X) 是 α_1；而如果空间 T(X) 是 α_1，那么集合 X 是一个 σ-集 [7, 定理 4] 。下面的定理统一并改进了这些结果。事实上，贝尔空间中 Siepi´nski 集的每个 Borel 像都是有界的，而在贝尔空间中具有有界 Borel 像的每个集合都是一个 σ-集 [17, 及其中的参考文献]。

定理 2.5。设 $X \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$。以下断言等价：

(1) 空间 T(X) 是一个 α_1 空间。(2) 集合 X 在贝尔空间 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 中的每个 Borel 像都有界。

证明。对于一个有限序列 $s \in \{0,1\}^*$，令 $[s]$ 为康托尔空间 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 中由所有扩展 s 的函数组成的基本开闭子集。在空间 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 中，每个开集都是基本开闭集的不交并。集合 $\{0,1\}^*$ 中的序列 a_1、a_2、.....在空间 T(X) 中收敛到 ∞，当且仅当集合 $\{[a_n] : n \in \mathbb{N}\}$ 在空间 X [7] 中是点有限的。定理 2.4 的证明中的论证同样适用。□

3. The Scheepers Diagram Last Theorem

Scheepers 图 1 中的各项蕴含关系都相当容易证明，而其他几乎所有可能的蕴含关系都已通过反例 [9] 排除。只剩下两个尚未解决的问题：$\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O},\Omega)$ 是否蕴含 $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Gamma,\Omega)$？如果不蕴含，$\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}\ \Gamma)$ 是否蕴含 $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Gamma,\Omega)$？ [9, 问题 1 和 2]。近三十年来，人们一直认为剩下的两个可能蕴含关系都可以被否定。直到 Peng 提出一种全新的方法来否定选择覆盖性质 [12]，之间的蕴含关系，这些问题才得以解决。但结果并非如人们所料：证明 $\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O},\Omega)$ 不蕴含 $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Gamma,\Omega)$ 后，Peng 试图否定最后一个尚存的可能蕴含关系，却未能成功。对失败原因的深入考察使他找到了一条证明最后一个可能蕴含关系的途径 [12, 定理 23]。Peng 的结果确立了 Scheepers 图的最终形式（图 2）。

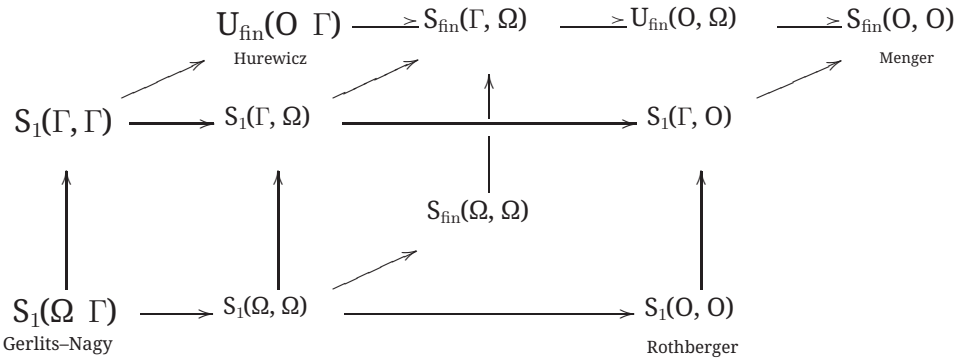


Figure 2. 最终 Scheepers 图

Peng 对最后一个蕴含的证明颇为复杂。下面给出的证明提炼了 Peng 论证的核心，并用一些关于选择覆盖性质的简单且便于引用的观察取代了其他部分。

设 k 为一个自然数。空间的一个覆盖称为 k-覆盖，若该覆盖中的任何成员都不覆盖整个空间，但空间的每个 k-元子集都被该覆盖中的某个成员覆盖。因此，当且仅当它对所有自然数k都是 k-覆盖时，该覆盖才是 ω-覆盖。对于空间 X 和自然数 k，令 $\mathsf{O}_k(X)$ 表示该空间的开 k-覆盖族。

引理 3.1. 设 Π 是一个选择原理，A 是一种开覆盖。以下断言等价：

(1) Π(A, Ω)。(2) 对每个自然数 k，都有 Π(A, O_k)。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)：显然。

(2) $\Rightarrow$ (1)：设 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ 是 A 中的一个序列。将该序列拆分为无穷多个互不相交的序列。对每个自然数 k，将 $\Pi(A, O_k)$ 应用于第 k 个序列，得到一个 k-覆盖 $\mathcal{V}_k$。那么 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{V}_k$ 是一个 ω-覆盖，符合所需性质$\Pi(A, \Omega)$。□

定理 3.2（Peng [12, 定理 23]）。Hurewicz 性质 $U_{fin}(O\ \Gamma)$ 蕴含 $S_{fin}(\Gamma, \Omega)$。

证明。设 X 是一个 Hurewicz 空间。根据引理 3.1，只需证明对于所有自然数 k，$S_{fin}(\Gamma, O_k)$ 均成立。固定一个自然数 k。

设 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ 是 $\Gamma(X)$ 中的一个序列。通过转而考虑可数无限子覆盖，我们可以枚举

$$\mathcal{U}_n = \{ U_m^n : m \in \mathbb{N} \}$$

for 每个 n。对于每个 n 和 m，我们可以用更小的集合 s 替换集合 U_m^n et

$$U_m^1 \cap U_m^2 \cap \cdots \cap U_m^n,$$

因此我们可以假设

$$U_m^1 \supseteq U_m^2 \supseteq U_m^3 \supseteq \cdots$$

对所有自然数 m 均成立。细化覆盖 $\mathcal{U}_n$ 仍属于 $\Gamma(X)$。

令 $g_0(m) := m$ 对所有 m 均成立。我们通过归纳定义递增函数 $g_1, \ldots, g_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$。令 $l < k$，并假设函数 g_l 已定义。对于自然数 n, m 和 i，令

$$\begin{aligned} V_i^{l,n} &:= \bigcap_{m=i}^{g_l(i)} U_m^n; \\ W_m^{l,n} &:= \bigcup \{ V_i^{l,n} : n \le i, g_l(i) \le m \}. \end{aligned}$$

对于每个 l 和 n，集合 $W^{l,n}_{,m}$ 随着 m 递增，并覆盖空间 X。根据 Hurewicz 性质，存在一个递增函数 $g_{l+1} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得

$$\{ W^{l,n}_{g_{l+1}(n)} : n \in \mathbb{N} \} \in \Gamma(X).$$

这就完成了归纳构造。

我们将证明

$$\{ U_m^n : n \in \mathbb{N}, m \le g_k(n) \} \in O_k(X).$$

令 $x_1, \ldots, x_k \in X$。由于 $\{ W^{l,n}_{g_{l+1}(n)} :$ 对于所有 $l = 0, \ldots, k-1$，都有 $n \in \mathbb{N} \} \in \Gamma(X)$，因此存在一个自然数 N，使得

$$x_1, \ldots, x_k \in W^{l,n}_{g_{l+1}(n)}$$

对于所有 $l = 1, \ldots, k$ 以及所有 $n \ge N$。固定一个数 $n_0 \ge N$。

由于 $x_1 \in W^{k-1}_{,g_k\ n_0\ ()}$，存在 n_1，使得 $n_0 \le n_1, g_{k-1}(n_1) \le g_k(n_0)$ 并且

$$x_1 \in V_{n_1}^{k-1,n_0} = \bigcap_{m=n_1}^{g_{k-1}(n_1)} U_m^{n_0}.$$

由于 $x_2 \in W^{k-2}_{,g_{k-1}\ n_1()}$，存在 n_2，其满足 $n_1 \le n_2, g_{k-2}(n_2) \le g_{k-1}(n_1)$，并且

$$x_2 \in V_{n_2}^{k-2,n_1} = \bigcap_{m=n_2}^{g_{k-2}(n_2)} U_m^{n_1} \subseteq \bigcap_{m=n_2}^{g_{k-2}(n_2)} U_m^{n_0}.$$

由于 $x_3 \in W^{k-3}{}_{,g_{k-2}}{}^{n_2}{}_{n_2()}$，存在 n_3，其满足 $n_2 \le n_3, g_{k-3}(n_3) \le g_{k-2}(n_2)$，并且

$$x_3 \in V^{k-3,n_2}_{n_3} = \bigcap_{m=n_3}^{g_{k-3}(n_3)} U^{n_2}_m \subseteq \bigcap_{m=n_3}^{g_{k-3}(n_3)} U^{n_0}_m.$$

$$\vdots$$

由于 $x_k \in W^{0}{}_{,\ g_1}{}^{n_{k-1}}{}_{n_{k-1}()}$，存在 n_k，使得 $n_{k-1} \le n_k = g_0(n_k) \le g_1(n_{k-1})$ 且

$$x_k \in V^{0,n_{k-1}}_{n_k} = U^{n_{k-1}}_{n_k} \subseteq U^{n_0}_{n_k}.$$

由此可得 $x_1, \dots, x_k \in U^{n_0}_{n_k}$，以及 $n_k \le g_k(n_0)$。 □

定理 3.2 的证明确立了一个更强的结果。为此，我们需要以下定义和引理。空间 X 的一个无限覆盖称为 ω-可分组的（对于自然数 k，称为 k-可分组的），如果该覆盖可以划分为有限部分，使得对于每个有限（分别为 k 元）集合 $F \subseteq X$，以及划分中除有限多个以外的部分 $\mathcal{P}$，都存在一个集合 $U \in \mathcal{P}$，满足 $F \subseteq U$ [10]。令 $\Omega^{\rm gp}(X)$（分别为 $\mathsf{O}^{\rm gp}_k(X)$）表示空间 X 的开 ω-可分组（分别为 k-可分组）覆盖所成的族。

引理 3.3. 设 Π 是一个选择原理，A 是一种开覆盖。以下断言等价：

(1) $\Pi(\mathrm{A}, \Omega^{\rm gp})$; (2) 对每个自然数 k，都有 $\Pi(\mathrm{A}, \mathsf{O}^{\rm gp}_k)$。

证明. 证明与引理 3.1 的证明类似，只需注意，如果对于所有 k，$\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 都是一个 k-可分组覆盖，那么它就是 ω-可分组的。这很容易由以下事实推出：对于 $\mathbb{N}$ 的可数族 $\{\mathcal{P}_k : k \in \mathbb{N}\}$ 个有限集划分，存在 $\mathcal{P}$ 个将 $\mathbb{N}$ 划分为有限集的划分，它最终比所有给定的划分都粗；也就是说，对于每个 k，划分 $\mathcal{P}$ 中除有限多个成员外，其余每个成员都包含划分 $\mathcal{P}_k$的一个成员。□

Koˇcinac 和 Scheepers 证明了，如果空间 X 的所有有限次幂都是 Hurewicz 空间，那么该空间的每个开 ω-覆盖都是 ω-可分组的。结合 Peng 定理 3.2，我们得到：如果空间 X 的所有有限次幂都是 Hurewicz 空间，那么该空间满足 $\mathsf{S}_{\rm fin}(\Gamma, \Omega^{\rm gp})$。以下定理表明，对有限次幂的假设并非必要。

在定理中，我们还提到了 $\mathsf{S}_{\rm fin}(\Gamma, \Lambda^{\rm gp})$。如果开覆盖中的每个点都属于其中无穷多个成员，则称该开覆盖为大型开覆盖。令 $\Lambda(X)$ 表示空间 X 的大型开覆盖族。若存在将开覆盖划分为有限部分的一种划分，使得对于每个点 $x \in X$，以及该划分中除有限多个部分 $\mathcal{P}$ 外的所有部分，都有 $x \in \bigcup \mathcal{P}$，则开覆盖 $\mathcal{U}$ 属于 $\Lambda^{\rm gp}(X)$ [10]（也记作 $\beth(\Gamma)$，具体记法取决于上下文 [14]）。

定理 3.4。以下断言等价：

(1) $\mathsf{U}_{\rm fin}(\mathsf{O}\ \Gamma)$; (2) $\mathsf{S}_{\rm fin}(\Gamma, \Omega^{\rm gp})$; 以及 (3) $\mathsf{S}_{\rm fin}(\Gamma, \Lambda^{\rm gp})$。

证明. (1) $\Rightarrow$ (2)：上文给出的 Peng 定理 3.2 的证明表明，对于给定的数 k，对每个 k-元素集 F，都存在一个自然数 N，使得对每个$n \ge N$，有限集 $\mathcal{F}_n = \{U^n_m$ 中都有一个元素：$m \le g_k(n)\}$，它包含集合 F。通过对点余有限覆盖进行稀化，我们可以假设它们两两不相交 [16,

引理 4], , 因此有限集 $\mathcal{F}_n$ 也如此。因此， $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n \in \mathsf{O}_k^{\mathrm{gp}}$ 。这证明了对所有 k， $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Gamma, \mathsf{O}_k^{\mathrm{gp}})$ 成立。应用引理 3.3。

(2) ⇒ (3)： $\Omega^{\mathrm{gp}} \subseteq \Lambda^{\mathrm{gp}}$。

(3) ⇒ (1)：这个蕴含关系是标准的，应当已为人所知。为完整起见，我们给出证明。假设空间 X 满足 $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Gamma, \Lambda^{\mathrm{gp}})$。只需证明它满足 $\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\Gamma, \Gamma)$。给定 $\Gamma(X)$ 中的一个序列 $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$,...，我们可以（如同定理 3.2 的证明中那样）假设这些覆盖随 n变得越来越细。应用 $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Gamma, \Lambda^{\mathrm{gp}})$ 可得到一个覆盖$\mathcal{U} \in \Lambda^{\mathrm{gp}}$，其各部分为 $\mathcal{P}_n$ （对于 $n \in \mathbb{N}$），从而证明了这一点。

设 $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{U}_1$ 是一个被 $\mathcal{P}_1$细化的有限集。令 n_2 为满足 $\mathcal{P}_{n_2} \subseteq \bigcup_{n=2}^{\infty}\mathcal{U}_n$的极小者，并令$\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{U}_2$ 为一个被 $\mathcal{P}_{n_2}$细化的有限集。令 n_3 为满足 $\mathcal{P}_{n_3} \subseteq \bigcup_{n=3}^{\infty}\mathcal{U}_n$的极小者，并令 $\mathcal{F}_3 \subseteq \mathcal{U}_3$为一个被 $\mathcal{P}_{n_3}$细化的有限集。如此继续，我们得到对于$n \in \mathbb{N}$的有限集 $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ ，满足 $\{\bigcup \mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\} \in \Gamma(X)$。□

Ko˘cinac 和 Scheepers 证明了 $\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathsf{O}\ \Gamma) = \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Omega\ \Lambda^{\mathrm{gp}}) = \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Lambda, \Lambda^{\mathrm{gp}})$ [10, 定理 14]。然而， $\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathsf{O}\ \Gamma) \neq \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Omega, \Omega^{\mathrm{gp}})$：后一性质等价于在所有有限次幂中满足 $\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathsf{O}\ \Gamma)$ [10, 定理 16], ，而这是一种严格强于 $\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathsf{O}\ \Gamma)$ [9,定理 2.12] 的性质。

4. 当 Bob 在 Menger 博弈中拥有获胜策略时

Menger [11] 猜想，他的性质 $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathsf{O}, \mathsf{O})$ 蕴含 σ-紧性。虽然他的猜想后来被证明是错误的 [20, 及其中的参考文献], ，但一个密切相关的断言是正确的。Menger 博弈 [8], $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}(\mathsf{O}, \mathsf{O})$ 是与 Menger 性质 $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathsf{O}, \mathsf{O})$ 相关联的博弈。该博弈在拓扑空间 X上进行，每个自然数 n对应一局。在每一局中，Alice 选取空间的一个开覆盖 $\mathcal{U}_n$ ，Bob 则选择一个有限集 $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$。如果$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$ 是空间的一个覆盖，则 Bob 获胜；否则 Alice 获胜。Telg´arsky [18] 证明，如果 Bob 在度量空间上进行的 Menger 博弈中拥有获胜策略，那么该空间是 σ-紧的。

Scheepers [15, 定理 1] 利用 H-闭集的概念，直接证明了Telg´arsky 定理。我们将从 Scheepers 的证明中去掉 H- 闭集的概念和闭包运算，从而得到一个更清晰的证明。此外，还可以去掉对空间的分离性假设。

若拓扑空间 X 的子集 K 的每个针对整个空间 X 的开覆盖 $\mathcal{U}$ 都有一个覆盖该集合 K 的有限子覆盖，则称该子集相对紧。集合 K 相对紧，当且仅当其闭包是紧的。

引理 4.1. 设 κ 为一个基数。若空间 X 是至多 κ 个相对紧集的并集，则它也是至多 κ 个紧集的并集。

证明. 若 $X = \bigcup_{\alpha<\kappa} K_\alpha$，则 $X = \bigcup_{\alpha<\kappa} \overline{K_\alpha}$。 □

设 X 的拓扑有一个基 $\mathcal{B}$ ，令 $\mathsf{O}_{\mathcal{B}}(X)$ 表示 $\mathcal{B}$ 的子集族，其中每个子集都覆盖空间 X。

引理 4.2. 设 X 是一个具有基 $\mathcal{B}$ 的拓扑空间，且 σ 是定义在族 $\mathsf{O}_{\mathcal{B}}(X)$ 上的函数，使得对于每个覆盖 $\mathcal{U} \in \mathsf{O}_{\mathcal{B}}(X)$， $\sigma(\mathcal{U})$ 都是 $\mathcal{U}$ 的有限子集。那么集合

$$K := \bigcap_{\mathcal{U}\in \mathsf{O}_{\mathcal{B}}(X)} \bigcup \sigma(\mathcal{U})$$

是相对紧的。

证明。设 $\mathcal{U}$ 是 X 的一个开覆盖。设 $\mathcal{V} \in \mathrm{O}_{\mathcal{B}}(X)$ 是一个细化覆盖 $\mathcal{U}$ 的覆盖。于是 $K \subseteq \bigcup \sigma(\mathcal{V})$，并且存在一个有限集 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$，使得 $\bigcup \sigma(\mathcal{V}) \subseteq \bigcup \mathcal{F}$。□

Scheepers 定理 [15, 证明了以下关于度量空间的定理。如果 Bob 在空间 X上进行的 Menger 博弈中拥有获胜策略，那么空间 X 是 Menger 空间，尤其是 Lindel¨of 空间。如果 X 此外还是度量空间，那么该空间是第二可数的。

定理 4.3. 设 X 是第二可数拓扑空间。如果 Bob 在空间 X上进行的 Menger 博弈 $\mathrm{G}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O}, \mathrm{O})$ 中拥有获胜策略，那么空间 X 是 σ-紧的。

证明. 我们沿用 Scheepers 证明中的步骤，并去除不必要的部分。设 σ 是 Bob 的获胜策略。固定空间 X的拓扑的一个可数基 $\mathcal{B}$。设 $\mathbb{N}^*$ 为自然数的有限序列组成的集合。我们考虑 Alice 从族 $\mathrm{O}_{\mathcal{B}}(X)$ 中选择覆盖的所有可能对局。

由于基 $\mathcal{B}$是可数的，族 $\{\sigma(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathrm{O}_{\mathcal{B}}\}$ (Bob 可能作出的第一步响应) 也是可数的。选取元素 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots \in \mathrm{O}_{\mathcal{B}}$，使得

$$\{\sigma(\mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\} = \{\sigma(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathrm{O}_{\mathcal{B}}\}.$$

通过归纳，对于给定的自然数 n 和每个序列 $s \in \mathbb{N}^n$，该族

$$\{\sigma(\mathcal{U}_{s_1}, \mathcal{U}_{s_1,s_2}, \ldots, \mathcal{U}_s, \mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathrm{O}_{\mathcal{B}}\}$$

是可数的。选择元素 $\mathcal{U}_{s,\,1}$、$\mathcal{U}_{s,\,2}$、$\ldots \in \mathrm{O}_{\mathcal{B}}$，使得

$$\{\sigma(\mathcal{U}_{s_1}, \ldots, \mathcal{U}_s, \mathcal{U}_{s,n}) : n \in \mathbb{N}\} = \{\sigma(\mathcal{U}_{s_1}, \ldots, \mathcal{U}_s, \mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathrm{O}_{\mathcal{B}}\}.$$

这就完成了我们的归纳构造。

根据引理 4.2，对于每个序列 $s \in \mathbb{N}^*$，集合

$$K_s := \bigcap_{1}^{\infty} \bigcup \sigma(\mathcal{U}_{s_1}, \ldots, \mathcal{U}_s, \mathcal{U}_{s,n})$$

是相对紧的。根据引理 4.1，只需证明 $X = \bigcup_{s \in \mathbb{N}^*} K_s$。

假设某个元素 $x \in X$ 不属于 $\bigcup_{s \in \mathbb{N}^*} K_s$。

(1) 由于 $x \notin K_{()}$，存在 m_1 使得 $x \notin \bigcup \sigma(\mathcal{U}_{m_1})$。(2) 由于 $x \notin K_{m_1}$，存在 m_2 使得 $x \notin \bigcup \sigma(\mathcal{U}_{m_1,\,m_2})$。(3) 由于 $x \notin K_{m_1,\,m_2}$，存在 m_3 使得 $x \notin \bigcup \sigma(\mathcal{U}_{m_1,\,m_2,\,m_3})$。(4) 等等。

于是，对局

$$\mathcal{U}_{m_1}, \sigma(\mathcal{U}_{m_1}), \mathcal{U}_{m_1,m_2}, \sigma(\mathcal{U}_{m_1,m_2}), \mathcal{U}_{m_1,m_2,m_3}, \sigma(\mathcal{U}_{m_1,m_2,m_3}), \ldots$$

以 Bob 输掉告终；这就产生了矛盾。 □

设 α 是一个序数。超限门格尔博弈 $\mathrm{G}_{\mathrm{fin}}^{\alpha}(\mathrm{O}, \mathrm{O})$ 的定义与普通的 Menger 博弈相同，唯一的区别是，现在每个序数 $\beta < \alpha$ 都对应一局。显然，如果 $\alpha_1 < \alpha_2$，且 Bob 在 α_1-Menger 博弈中有获胜策略，那么 Bob 在 α_2-Menger 博弈中也有获胜策略：他可以在前 α_1 局中使用获胜策略，然后任意进行对局。因此，以下定理比定理 4.3 更强，并且不对拓扑空间 X 作任何假设。

拓扑空间的权是其拓扑的基的最小基数。

定理 4.4. 设 X 是一个权为 κ 的拓扑空间。当且仅当空间 X 是至多可表示为 κ 个紧集的并集时，Bob 在游戏 $\mathrm{G}_{\mathrm{fin}}^{\kappa}(\mathrm{O}, \mathrm{O})$ 中有获胜策略。

证明. ($\Rightarrow$) 证明与定理 4.3 的证明相同，只是这里我们从一个基数为 κ 的基开始。

($\Leftarrow$) 在第 α 局中，Bob 覆盖第 α 个紧集。 □

推论 4.5。设 X 是权为 κ 的拓扑空间。若 Bob 在 Menger 博弈中有获胜策略，则空间 X 是至多 κ 个紧集的并集。□

推论 4.5 的逆命题不成立：基数为 κ 的离散空间的权为 κ，且它是 κ 个紧集（单点集）的并集。该空间不是 Lindel¨of 空间，因此不是 Menger 空间，所以 Bob 在此空间上进行的 Menger 博弈中没有获胜策略。

对于空间 X，令 O(X) 表示满足 $\bigcup_{U\in\mathcal{U}}\overline{U}=X$ 的开集族 $\mathcal{U}$。若空间 X 满足 S_{fin}(O, O)，则称其为几乎 Menger。对于正则空间，几乎 Menger 等价于 Menger [1]。下文讨论的其他概念也类似。因此，本节其余部分主要与非正则空间有关。几乎 Menger 博弈是与性质 S_{fin}(O, O) 相关联的博弈。相应的几乎 Lindel ¨of 概念是经典概念，几乎紧空间的概念也是如此：若空间 K 的每个开覆盖 K 都有一个有限子集 $\mathcal{F}$，使其并集稠密，则称该空间为几乎紧空间。这一概念在文献中有多种名称。对于豪斯多夫空间，已知它等价于豪斯多夫闭，即在所有豪斯多夫超空间中都是闭集。

若空间 X 中的集合 K 满足：对于空间 X 的每个开覆盖，都存在一个有限子集 $\mathcal{F}$，使得 $K\subseteq\bigcup_{U\in\mathcal{F}}\overline{U}$，则称 K 相对几乎紧。证明每个几乎紧空间都是 H-闭的标准证明表明，豪斯多夫空间中的每个相对几乎紧集在该空间中都是闭集。然而，下面的定理不需要任何分离公理假设。由于下面定理的证明取自 Scheepers 论证的第一部分，我们将此定理归于 Scheepers。

定理 4.6（Scheepers）。设 X 是一个第二可数拓扑空间。以下断言等价：

(1) Bob 在空间 X 上进行的游戏 G_{fin}(O,O) 中有获胜策略。(2) 空间 X 是相对几乎紧集的可数并集。

证明。(2) $\Rightarrow$ (1)：这很容易。

(1) $\Rightarrow$ (2)：这是 Scheepers 定理 1] 论证的一部分 [15, 。为求完整并便于核验，我们在此给出证明。

逐字重复定理 4.3 的归纳构造。完成后，为每个序列 $s\in\mathbb{N}^*$ 定义：

$$K_s:=\bigcap_{n=1}^{\infty}\ \bigcup_{U\in\sigma(\mathcal{U}_{s_1},\ldots,\mathcal{U}_s,\mathcal{U}_{s,n})}\overline{U}.$$

该 s et K_s 相对几乎紧。还需证明 $X=\bigcup_{s\in\mathbb{N}^*}K_{s\circ}$

假设某个元素 $x\in X$ 不属于 $\bigcup_{s\in\mathbb{N}^*}K_{s\circ}$

(1) 由于 $x\notin K_{()}$，存在 m_1，使得 $x\notin\bigcup_{U\in\sigma(\mathcal{U}_{m_1})}\overline{U}$。(2) 由于 $x\notin K_{m_1}$，存在 m_2，使得 $x\notin\bigcup_{U\in\sigma(\mathcal{U}_{m_1,m_2})}\overline{U}$。(3) 由于 $x\notin K_{m_1,\ m_2}$，存在 m_3，使得 $x\notin\bigcup_{U\in\sigma(\mathcal{U}_{m_1,m_2,m_3})}\overline{U}$。(4) 依此类推。

那么这局对局

$$\mathcal{U}_{m_1},\sigma(\mathcal{U}_{m_1}),\mathcal{U}_{m_1,m_2},\sigma(\mathcal{U}_{m_1,m_2}),\mathcal{U}_{m_1,m_2,m_3},\sigma(\mathcal{U}_{m_1,m_2,m_3}),\ldots$$

被 Bob 输掉了；这就产生了矛盾。 □

与更一般的定理 4.4 和推论 4.5 类似的断言也成立。定理 4.6 在第二可数空间的情形下，回答了 Babinkostova、Pansera 和 Scheepers 的问题 [1, Question 26(2)]。

5. The additivity of Rothberger's property

令 add($\mathcal{N}$) 表示满足以下条件的族 $F \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 的最小基数：不存在函数$S\colon \mathbb{N} \to [\mathbb{N}]^{<\infty}$，使得对所有 n，$|S(n)| \leq n$；并且对于每个函数 $f \in F$，对除有限多个 n 之外的所有情形，都有$f(n) \in S(n)$。

记号 add($\mathcal{N}$) 的由来可由 Bartoszyński 和 Judah 的一个结果解释 [2, 定理 2.11]：基数 add($\mathcal{N}$) 是由实数构成的勒贝格零测集族中，使其并集不是勒贝格零测集的族的最小基数。一般而言，某个性质的可加性，是满足该性质的集合族中，其并集不满足该性质的族的最小基数。以下定理由 Bartoszyński 和 Judah [2, 定理 2.9] 归功于 Carlson。

定理 5.1（Carlson）。设 $\kappa < \text{add}(\mathcal{N})$。若一个 Lindelöf 空间是至多 κ 个满足 $\text{S}_1(\text{O, O})$ 的空间的并集，则该空间 X 满足 $\text{S}_1(\text{O, O})$。也就是说，对于 Lindelöf 空间，$\text{add}(\mathcal{N}) \leq \text{add}(\text{S}_1(\text{O, O}))$。

这个定理是选择原理中一个简单基本事实的直接推论。我们需要以下几个引理。

设 A 和 B 是开覆盖的类型。若一个拓扑空间 X 满足 $\text{S}_n(\text{A, B})$，则对于所有$\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2,\dots \in \text{A}(X)$，都存在有限集 $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{U}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{U}_2$,...，使得 $|\mathcal{F}_n| \leq n$ 对于所有 n，且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n \in \text{B}(X)$。

Garcia-Ferreira 和 Tamariz-Mascarua [6, 引理 3.12] 在 $\text{A} = \text{O}$ 的情形下证明了以下观察结果。

引理 5.2（[20, 定理 A.1]）。设 A 是一种可数覆盖，且任意一对 A 型覆盖都有一个 A 型共同加细。那么 $\text{S}_n(\text{A,O}) = \text{S}_1(\text{A,O})$。

引理 5.3（民间结果）。如果一个空间 X 满足 $\text{S}_1(\text{A, O})$，那么对于 $\text{O}(X)$ 中的每个序列 $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2,\dots$，都存在元素 $U_{m_1} \in \mathcal{U}_{m_1}, U_{m_2} \in \mathcal{U}_{m_2},\dots$，使得对于每个点 $x \in X$，我们都有$x \in U_{m_n}$ 对无穷多个 n成立。

证明。照例，我们将开覆盖序列拆分为无穷多个互不相交的序列，并分别对每个子序列应用性质 $\text{S}_1(\text{A,O})$。□

定理 5.4。设 A 是一种可数覆盖，且任意一对 A 型覆盖都有一个 A 型共同加细。那么 $\text{add}(\mathcal{N}) \leq \text{add}(\text{S}_1(\text{A, O}))$。

证明。设 $\kappa < \text{add}(\mathcal{N})$ 和 $X = \bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$，其中每个空间 X_α 都满足 $\text{S}_1(\text{A, O})$。由引理 5.2，只需证明空间 X 满足 $\text{S}_n(\text{A,O})$。

令 $\mathcal{U}_n = \{U_m^n\colon m \in \mathbb{N}\} \in \text{A}(X)$，其中 $n \in \mathbb{N}$。对于每个序数 $\alpha < \kappa$，由于空间X_α 满足 $\text{S}_1(\text{A,O})$，存在一个函数 $f_\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得对于每个点 $x \in X_\alpha$，我们有

$$x \in U^n_{f_\alpha(n)}$$

对于无穷多个 n。

存在一个函数 $S\colon \mathbb{N} \to [\mathbb{N}]^{<\infty}$，满足对于所有 n，$|S(n)| \leq n$，且对于每个 $\alpha < \kappa$，我们有

$$f_\alpha(n) \in S(n)$$

除有限多个 n 外均成立。因此 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ U_m^n\colon \ m \in S(n) \} \in \text{O}(X)$。 □

根据对该主题的广泛调查， [19], 以下第二项中的结果似乎是新的。

推论 5.5。

(1) 对于 Lindel¨of 空间，$\mathrm{add}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{add}(\mathsf{S}_1(\mathsf{O},$ $\mathsf{O}))$。(2) $\mathrm{add}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{add}(\mathsf{S}_1(\Gamma, \mathsf{O}))$。

证明。(1) 由于这些空间是 Lindel¨of，我们可以只考虑可数覆盖，并且定理 5.4 的假设成立。

(2) 点余有限覆盖的可数无限子集也是点余有限覆盖。因此，我们可以只考虑可数点余有限覆盖。众所周知，任意一对点余有限覆盖都有一个共同加细，且该共同加细也是点余有限覆盖。事实上，设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是可数点余有限覆盖。将它们枚举为 $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$。于是 $\{U_n \cap V_n : n \in \mathbb{N}\} \in \Gamma(X)$。定理 5.4 适用。□

我们可以从这种证明方法中提取更多信息。若拓扑空间 X 满足 $\mathsf{U}_n(\Gamma, \Gamma)$ [20]，则对于所有 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots \in \Gamma(X)$，都存在有限集 $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{U}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{U}_2, \ldots$，使得 $|\mathcal{F}_n| \leq n$ 对所有 n 均成立，并且 $\{\bigcup \mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\} \in \Gamma(X)$。这一性质严格介于 $\mathsf{S}_1(\Gamma, \Gamma)$ 与 $\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathsf{O}\ \Gamma)$ [20, 定理 3.3 和 3.8] 之间。

定理 5.6. $\mathrm{add}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{add}(\mathsf{U}_n(\Gamma, \Gamma))$。

证明。设 $\kappa < \mathrm{add}(\mathcal{N})$ 且 $X = \bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$，其中每个空间 X_α 都满足 $\mathsf{U}_n(\Gamma, \Gamma)$。只需证明空间 X 满足 $\mathsf{U}_{n^2}(\Gamma, \Gamma)$，其中第 n 个选取的有限集的基数至多为 n^2 [20, 引理 3.2]。

设 $\mathcal{U}_n = \{U^n_m : m \in \mathbb{N}\} \in \Gamma(X)$，其中 $n \in \mathbb{N}$。对每个 $\alpha < \kappa$，由于空间 X_α 满足 $\mathsf{U}_n(\Gamma, \Gamma)$，存在一个函数 $S_\alpha \colon \mathbb{N} \to \prod_n [\mathbb{N}]^{\leq n}$，使得对每个点 $x \in X_\alpha$，我们有

$$x \in \bigcup_{m \in S_\alpha(n)} U^n_m$$

对无穷多个 n 成立。

存在一个函数 $S \colon \mathbb{N} \to \prod_n [\mathbb{N}]^{\leq n}$，使得对所有 n，$|S(n)| \leq n$，并且对每个 $\alpha < \kappa$，我们有

$$S_\alpha(n) \in S(n)$$

除有限多个 n 外，对所有 n 都成立。对每个自然数 n，设 $F_n := \bigcup S(n)$。那么对所有 n，$|F_n| \leq n^2$，且 $\{\bigcup_{m \in F_n} U^n_m : n \in \mathbb{N}\} \in \Gamma(X)$。□

致谢。这是我历经一段漫长而艰难的时期后撰写的第一篇论文。我感谢一路上所有帮助和鼓励我的人，也感谢他们支持我此后重返正轨。最重要的是，我感谢我的妻子 Adina，感谢她的信任、支持与耐心。

References

[1] L. Babinkostova，B. Pansera，M. Scheepers，弱覆盖性质与无限博弈，Topology and its Applications 159 (2012)，3644–3657。[2] T. Bartoszy´nski，H. Judah，关于实数线最小贫瘠集覆盖的协终性 II，Proceedings of the American Mathematical Society 123 (1995)，1879–1885。[3] L. Bukovsk´y，J. Hale˘s，QN空间、wQN空间与覆盖性质，Topology and its Applications 154 (2007)，848–858。

[4] L. Bukovsk´y，I. Rec law，M. Repick´y，不能区分实函数逐点收敛与拟正规收敛的空间，Topology and its Applications 41 (1991)，25–41。[5] L. Bukovsk´y，J. ˇSupina，拟正规收敛的序列选择原理，Topology and its Applications 159 (2012)，283–289。[6] S. Garcia-Ferreira，A. Tamariz-Mascarua，快速超滤子与 Id-扇紧致性的一些推广，Tsukuba Journal of Mathematics 19 (1995)，173–185。[7] J. Gerlits，Zs. Nagy，关于 Fréchet 空间，《巴勒莫数学学会会刊》第二辑，增刊 18 (1988)，51–71。.[8] W. Hurewicz，关于博雷尔定理的一种推广，《数学杂志》24 (1925年)，401–421。[9] W. Just，A. Miller，M. Scheepers 和 P. Szeptycki，开覆盖的组合学 II，Topology and its Applications 73 (1996年)，241–266。[10] L. Koˇcinac，M. Scheepers，开覆盖的组合学（VII）：可群化性，《数学基础》179 (2003)，131–155。.[11] K. Menger，点集论中的若干覆盖定理，《维也纳科学院会议报告》133 (1924)，421–444。¨Y. Peng，Scheepers 猜想与 Scheepers 图，《美国数学会会刊》，即将发表。[12] M. Sakai， $C_p(X)$ 的序列选择性质，Topology and its Applications 154 (2007)，552–560。[14] N. Samet，M. Scheepers，B. Tsaban，Hurewicz型选择假设的分割关系，Topology and its Applications 1562009，616–623。[15] M. Scheepers，Telg´arsky 定理的直接证明，Proceedings of the American Mathematical Society 123 (1995)，3483–3485。[16] M. Scheepers，开覆盖的组合学 I：Ramsey理论，Topology and its Applications 69 (1996)，31–62。[17] M. Scheepers，B. Tsaban，博雷尔覆盖的组合学，Topology and its Applications 121 (2002)，357–382。[18] R. Telg´arsky，关于 Topsoe博弈，《斯堪的纳维亚数学》54 (1984)，170–176。[19] B. Tsaban，覆盖性质的可加数，载于：《拓扑学中的选择原理与覆盖性质》（L. Koˇcinac 编），《数学笔记》18，那不勒斯第二大学，卡塞塔，2006，245–282。[20] B. Tsaban，Menger 与 Hurewicz 问题：《The Book》中的解答及其改进，《当代数学》533 (2011)，211–226。[21] B. Tsaban，L. Zdomskyy，遗传Hurewicz空间与 Arhangel'skiˇı 层合并，《欧洲数学会杂志》12 (2012)，353–372。

Boaz Tsaban, Department of Mathematics, Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel电子邮箱地址：tsaban@math.biu.ac.il