arXiv:2301.13167v1 [math.LO] 30 Jan 2023

具有有向余极限的可及范畴的范畴性谱的完整分类

Christian Esp´ındola

摘要

在假设奇异基数假设（SCH）的前提下，我们给出具有有向余极限的大型可及范畴中可能出现的所有范畴性谱（以内在大小表示）的完整分类，并明确给出最终范畴性的阈值基数。这也包括一个特例：首次对完全处于 ZFC 中的抽象初等类（抽象初等类）给出了范畴性谱的完整分类。更具体地说，我们有：

定理。设 $\mathcal{K}$ 是一个具有有向余极限的大型 κ-可及范畴。假设奇异基数假设 SCH（仅当对单态射的限制不是抽象初等类时）。那么范畴性谱 $\mathcal{C}at(\mathcal{K}) = \{\lambda \geq \kappa : \mathcal{K}$ 是 λ-范畴性的$\}$ 是以下情形之一：

1. $\mathcal{C}at(\mathcal{K}) = \emptyset$。2. $\mathcal{C}at(\mathcal{K}) = [\alpha, \beta]$ 对于某些 α，$\beta \in [\kappa, \beth_\omega(\kappa)]$。3. $\mathcal{C}at(\mathcal{K}) = [\chi, \infty)$ 对于某些 $\chi \in [\kappa, \beth_{(2^\kappa)^+}]$。

这特别解决了抽象初等类的 Shelah 范畴性猜想。分类中的三种情形各自都有例子，表明它们确实会出现。

1 引言

这篇短文是作者在 [Esp22] 中工作的续篇；在该文中，Shelah 最终范畴性猜想的一个推广（[She09]引言中的猜想 4.2）在具有有向余极限的可及范畴这一更一般的背景下得到了证明。在这类模型范畴中所有态射都是单态射时，Shelah 表示定理的一个类似形式将它们表示为某种无限量词逻辑的投射类；对于该逻辑，即使是模型存在性的 Hanf 数，在 ZFC 中也没有已知的显式上界（唯一已知的上界是一个强紧基数；事实上，在 ZFC 的某些模型中，$\mathcal{L}_{\omega_1}$的 Hanf 数$_{\omega_1}$ 超过了第一个可测基数）。

然而，对于具有有向余极限的可及范畴这一特殊情形，我们将证明可以找到 ZFC 模型存在性 Hanf 数的界限。Grossberg 强调，明确给出最终范畴性现象的阈值基数同样十分重要。现在，我们打算结合相同的框架与 [Esp22], 的结果，以及 Morley 方法，给出可证明的最佳显式阈值。Shelah 范畴性猜想要求证明，在 ZFC中，AEC $\mathcal{K}$ 的最终范畴性阈值为$\beth_{(2^{LS(\mathcal{K})})^+}$ (见 [She09]引言中的猜想 4.3 b)）。我们将在此证明这一猜想。Shelah 在 [Vas19] 中提到的一个例子表明，这一阈值已是最佳可能。

假设 SCH，我们还将证明 Shelah 范畴性猜想在更一般的可及范畴及有向余极限语境下的直接推广。如果 $\mathcal{K}$ 是这样一个范畴，我们证明：若 $\mathcal{K}$ 在某个 $\lambda \geq \beth_{(2^{LS(\mathcal{K})})^+}$ 中具有范畴性（即，在某个足够大的内在大小下，它至多只有一个对象，且在同构意义下唯一），那么对于每个 $\lambda' \geq \beth_{(2^{LS(\mathcal{K})})^+}$，$\mathcal{K}$ 都具有 λ'-范畴性。在考察公理化 SCH 的无穷理论 $\mathbb{T}$ 的模型 $\mathcal{L}_{\kappa,\theta}$ 的基数时

该结果在 SCH 条件下蕴含以下莫利范畴性定理的无穷版本：

定理 1.1。（无穷理论的莫利范畴性定理）设 ϕ 是一个 $\mathcal{L}_{\kappa,\theta}$ 句子，其模型范畴以及 $\mathcal{L}_{\kappa,\theta}$-初等嵌入具有有向余极限。设 S 为满足上确界至少为 θ 、但不是上确界小于 θ的基数的后继基数的基数类。假设奇异基数假设的弱化形式 $SCH_{\theta,\geq 2^{<\theta}}$成立。那么，如果 ϕ对某个属于 S的 $\lambda \geq \beth_{(2^\kappa)^+}$ 是 λ-范畴性的，则 ϕ 对每个属于 S的 $\lambda' \geq \beth_{(2^\kappa)^+}$ 都是 λ'-范畴性的。此外：

1. 如果有向余极限是具体的，我们可以省去假设 $SCH_{\theta,\geq 2^{<\theta}}$ ，并令 S 为所有基数构成的类。
2. 如果 ϕ是紧致的，且我们范畴中的态射是 $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$-初等嵌入，则可以用 κ替换 $\beth_{(2^\kappa)^+}$ 。

这里 $SCH_{\theta,\ \geq 2^{<\theta}}$ 定义为“对于所有 $\mu \geq 2^{<\theta}$ ，存在一个基数集 $\lambda_i \leq \mu$ 在下方无界μ ，使得对于每个 i, $\nu^{<\theta} \leq \lambda_i$ 对于所有 $\nu < \lambda_i$”，参见 [LRV19]中的注 2.3。此外，我们从[Esp22] 得知，有一些例子表明，类 S 中的例外情况是必需的。

定理 $\theta = \omega$ 中的情形 1.1 是针对 $\mathcal{L}_\kappa$的 Shelah 范畴性猜想ω，因为在这种情况下$SCH_{\omega,\ \geq 2^{<\omega}}$ 可在 ZFC中证明。当有向余极限是具体的时，由于我们限制在单态射上，所得结果就是针对抽象初等类的 Shelah 范畴性猜想，因为 $SCH_{\theta,\ \geq 2^{<\theta}}$ 也可以用 [Esp22]的方法去掉。当 ϕ 是紧致的情形（即它具有如下性质：ϕ 与任意一组一阶有限公式相容，当且仅当它与其每个有限子集相容，参见 [Kei14]）恰好是莫利范畴性定理（针对可数一阶理论）和谢拉范畴性定理（针对不可数一阶理论）的一个真推广。无穷逻辑的紧致句子构成的类远比这两个特例宽泛，因为它们包括（但不限于）所有合取句子（即只有合取式是无穷的、而析取是有限的句子）。因此，定理 1.1将这些猜想和结果广泛推广到了无限量词理论领域，并为已知的一阶有限理论定理提供了新的证明。

事实证明，存在有向余极限，才能实现流畅的分类理论。为此，主要工具是定理 3.2；它同时拓展了 Shelah 的工作$\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ ，表明在弱广义连续统假设（$WGCH$）下，前 ω 个基数上的范畴性蕴含处处具有范畴性（见 [She09]）。我们在此去除了集合论假设，并将这一结果推广到抽象初等类，但代价是要求前 $\beth_\omega$ 个基数上具有范畴性。Shelah 和 Villaveces 在 [SV04], 中的例子表明，这似乎已接近最优，因为他们证明，对于任意 $n \in \omega$ ，范畴性都可能在 $\beth_n(\lambda)$ 以上失效，尽管在 L¨owenheim-Skolem 数 λ 以上的前 n 个基数上仍成立（不过，范畴性是否一直成立到 $\beth_n(\lambda)$，或者这个间隔是否还能进一步缩小，仍未有定论）。定理 3.2 还运用了高维 amalgamation 性质，并通过一个简单的范畴论证明表明这些性质是范畴性的推论，从而简化了 [?]中的方法。

最后，我们陈述抽象初等类的范畴性谱分类，在 ZFC 中，并且在假设 SCH 的条件下，也适用于具有有向余极限的可及范畴（需要集合论假设，以确保存在谱包含基数的一个尾段）。这使用了引理 2.1，其若干较弱版本已在抽象初等类的相关文献中出现。我们在此给出一个范畴论证明，其中一个依据是代数理论的某种 Lawvere 对偶形式。该证明将结果推广到具有有向余极限的 μ- 抽象初等类，并大大简化了针对抽象初等类给出的论证，从而可以通过对双重否定拓扑的一项观察，在无需使用合并的情况下推出最终范畴性。

需要提醒的是，我们特别强调，作者此前论文 [Esp22] 中的所有方法、结果和记号在本文中均默认适用，因此建议读者先通读该论文，再继续阅读这篇续篇。

2 饱和性与稳定性

我们先陈述以下一个本身也很有意义的引理：

引理 2.1. 设 $\mathcal{K}$ 是一个具有有向余极限和合并的 μ-抽象初等类，并且对每个$\rho < \kappa$都是 ρ-稳定的。那么，κ-饱和模型在有向余极限下封闭。

证明。考虑托普斯 $\mathbf{Set}^{[\mathbb{T}_\kappa^B]_\lambda/[M,-]} \cong \mathbf{Set}^{\mathcal{K}^B_{\geq\kappa},\ <\lambda}/[M,-] \cong \mathbf{Set}^{M/\mathcal{K}^B_{\geq\kappa},\ <\lambda}$（其中$\mathcal{K}^B_{\geq\kappa},\ <\lambda$由$\mathcal{K}_{\geq\kappa},\ <\lambda$ 中的模型及其所有 κ-布尔同态组成，而 $\mathbb{T}_\kappa^B$ 是 $\mathbb{T}_\kappa$，再加上 κ-相干公式对应的所有排中律实例）。我们有一个稳定满射 $\mathbf{Set}^{M/\mathcal{K}^B_{\geq\kappa},\ <\lambda} \twoheadrightarrow \mathbf{Set}^{M/\mathcal{K}_{\geq\kappa},\ <\lambda}$；这一点可先通过考虑稳定满射 $\mathbf{Set}^{\mathcal{K}^B_{\geq\kappa},\ <\lambda} \cong \mathbf{Set}^{[\mathbb{T}_\kappa^B]_\lambda} \twoheadrightarrow \mathbf{Set}^{[\mathbb{T}_\kappa]_\lambda} \cong \mathbf{Set}^{\mathcal{K}_{\geq\kappa},\ <\lambda}$看出。然后我们考虑到切片 $\mathbf{Set}^{\mathcal{K}_{\geq\kappa},\ <\lambda} \longrightarrow \mathbf{Set}^{[\mathbb{T}_\kappa]_\lambda/[M,-]} \cong \mathbf{Set}^{M/\mathcal{K}_{\geq\kappa},\ <\lambda}$的拉回函子；这是一个几何态射，我们沿其直接像取以下（伪）拉回：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Set}^{\mathcal{K}^B_{\geq\kappa},\ <\lambda} & \twoheadrightarrow & \mathbf{Set}^{\mathcal{K}_{\geq\kappa},\ <\lambda} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{Set}^{[\mathbb{T}_\kappa^B]_\lambda/[M_i,-]} & \twoheadrightarrow & \mathbf{Set}^{[\mathbb{T}_\kappa]_\lambda/[M_i,-]} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{Set}^{[\mathbb{T}_\kappa^B]_\lambda/[M,-]} & \twoheadrightarrow & \mathbf{Set}^{[\mathbb{T}_\kappa]_\lambda/[M,-]}
\end{array}$$

（伪）拉回恰好是 $\mathbf{Set}^{[\mathbb{T}_\kappa^B]_\lambda/[M,-]} \cong \mathbf{Set}^{M/\mathcal{K}^B_{\geq\kappa},\ <\lambda}$，这可利用切片的泛性质加以验证。更一般地，如果现在有一个嵌入序列$M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow M$，其有向余极限为 M，那么 $\mathbf{Set}^{M/\mathcal{K}_{\geq\kappa},\ <\lambda}$ 将是由 $\mathbf{Set}^{M_i/\mathcal{K}_{\geq\kappa},\ <\lambda}$ 构成并由这些嵌入诱导的链的极限。由于拉回保持极限，这意味着 $\mathbf{Set}^{M/\mathcal{K}^B_{\geq\kappa},\ <\lambda}$ 将是由 $\mathbf{Set}^{M_i/\mathcal{K}^B_{\geq\kappa},\ <\lambda}$构成的链的极限；特别地（考虑从预层到 Set 的保持极限和余极限的函子），切片 $M/\mathcal{K}^B_{\geq\kappa},\ <\lambda$ 的柯西完备化是 $\mathcal{C}at$ 中切片 $M_i/\mathcal{K}^B_{\geq\kappa},\ <\lambda$ 的柯西完备化的（伪）极限（反过来请注意，切片的柯西完备化等价于柯西完备化 $\mathcal{K}^B_{\geq\kappa},\ <\lambda$的切片）。

注意，对于任何包含 P、大小至少为 κ 的 κ-小模型 P和 κ-几何模型理论 $\mathbb{S}_\kappa$，在 κ^+-托普斯及 κ^+- 几何态射构成的 2- 范畴中，沿满射 $s : \mathbf{Set}^{[\mathbb{S}_\kappa^B]_{\kappa^+}} \twoheadrightarrow \mathbf{Set}^{[\mathbb{S}_\kappa]_{\kappa^+}}$ 对 $\mathbf{Set}^{[\mathbb{S}_\kappa]_{\kappa^+}}$ 的双重否定子拓扑斯 $\mathcal{S}$ 取拉回，所得必定是 $\mathcal{S}$ 本身，因此 $\mathcal{S}$ 嵌入 $\mathbf{Set}^{[\mathbb{S}_\kappa^B]_{\kappa^+}}$。此外，这个嵌入是稠密的：取 $\mathbf{Set}^{[\mathbb{S}_\kappa^B]_\kappa}$ 中一个非零的次终对象A；那么它在某个模型 M 中也非零，而该模型依稠密性必定嵌入大小为 κ 的模型中。接着，若 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{S}$ 的模型范畴，那么 $\mathbf{Set}^{\mathcal{M}_\kappa^B}$ 中的 κ^+-相干句子 $\psi = \lim^{ev_{\phi_i}}$（其中 $\lim^{ev_{\phi_i}} \cong [M,-]$ 属于 $\mathbf{Set}^{\mathcal{M}_\kappa}$）在 $\mathbf{Set}^{\mathcal{M}_\kappa^{sat}}$ 中非零，且它蕴含 A，因此后者也非零（从而在 $\mathcal{S}$ 中非零，正如我们所述）。还要注意，作为这个证明的一个附带结果，双重否定与 $\mathbf{Set}^{\mathcal{M}_\kappa^B}$ 中的 κ^+-小合取式可交换。

现在假设所有 M_i 都是 κ-饱和的。不失一般性，我们还可以假设$\kappa = \delta^+$ 是后继基数，因为对于极限 κ，饱和模型是较小的饱和

模型的有向余极限。现在证明 M 必定是 κ-闭的（因此也是 κ-饱和的）。考虑一个嵌入 $f: M \longrightarrow N$；由于 $\mathcal{K}$ 相对于某个 δ-饱和子模型 P上的伽罗瓦类型是 ρ-稳定的，它相对于同类的 κ-布尔类型也是 ρ-稳定的。因此，将 [Esp22] 中的省略类型定理应用于大小至少为 κ且包含 P, $\mathbb{S}^B_\kappa$ 的模型的 κ-布尔理论，可知 $\mathsf{Set}[\mathbb{S}^B_\kappa]_\kappa$中 $(\mathbf{x}\ \top)$ 的所有子对象格都是原子的，因而是布尔的。另一方面，注意到 $\mathsf{Set}[\mathbb{S}_\kappa]_\kappa$ 是二值的，因为它是 $\mathsf{Set}[\mathbb{S}_\delta]_\kappa$的子拓扑斯；而后者等价于切片 $\mathsf{Set}^{\mathcal{K}_\delta}/\phi_P$，其中 ϕ_P是对应于 P的图的 κ-几何存在句。该句是二值的，因为 ϕ_P 是一个原子，正如 $\mathcal{K}_\delta$ 中的每个模型都嵌入到 P一样。因此，$\mathsf{Set}[\mathbb{S}^B_\kappa]_\kappa$ 中的上述子对象格与 $\mathsf{Set}[\mathbb{S}_\kappa]_\kappa$中的子对象格相同，这尤其意味着 $\mathsf{Set}[\mathbb{S}^B_\kappa]_\kappa$是二值的。由此可立即推出，余极限余投影及其与$f$ 的复合都是 κ-布尔的，因此我们得到 κ-布尔嵌入 $M_i \longrightarrow N$，它们在切片 $N/\mathcal{K}^B_{\geq\kappa,<\lambda}$ 与 $M_i/\mathcal{K}^B_{\geq\kappa,<\lambda}$ 之间诱导出一个锥。根据极限的泛性质，存在一个诱导函子 $N/\mathcal{K}^B_{\geq\kappa,<\lambda} \longrightarrow M/\mathcal{K}^B_{\geq\kappa,<\lambda}$，它给出一个自然变换 $[N,-] \longrightarrow [M,-]$。根据 Yoneda，这必定对应于 $\mathcal{K}^B_{\geq\kappa,<\lambda}$ 中的一个态射 $M \longrightarrow N$；由于它必定是 f，可知 f 是 κ-闭的，正如我们要证明的那样。

□

3 范畴性与驯性

我们首先证明，在任何具有合并且没有极大模型的 μ-抽象初等类中，若其在足够大的基数上具有范畴性，则它具有最终驯性。我们考虑[Esp22], 第8节中的相同设定，为方便起见，在此重述。给定一个 μ-抽象初等类 $\mathcal{K}$，其洛文海姆–斯科伦数为 $\mathrm{L}^{\ddot{}}$，且 κ，按照 Baldwin-Boney-Vasey 的做法，我们添加一个 $\mu \leq \kappa^+$小元数谓词 κ^+，使其在模型 P 中的解释由某个大小为 M 的模型的底层结构在 N 中的像组成；该模型通过κ -抽象初等类中的一个态射嵌入其中。这种特定的扩张产生一个同构的抽象初等类，并具有如下性质：态射与子结构嵌入一致。此外，其大小至少为 M 的模型可以如下公理化；为此，我们进一步用符号 μ扩展语言 κ： $\subseteq$

$$\top \vdash_{\mathbf{x}} \exists \mathbf{y} \left(\bigvee_{M_0 \in S} \psi_{M_0}(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \wedge P(\mathbf{y}) \right)$$

$$\top \vdash_{\mathbf{xy}} (\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \wedge P(\mathbf{x}) \wedge P(\mathbf{y})) \longrightarrow \bigvee_{(M_0,M_1)\in T} \psi_{(M_0,M_1)}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

$$\top \vdash_{\mathbf{xy}} (P(\mathbf{y}) \wedge \psi_{(M_0,M_1)}(\mathbf{x},\mathbf{y})) \longrightarrow P(\mathbf{x})$$

$$\top \vdash_{\mathbf{xy}} \mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \leftrightarrow \bigwedge_{i\in I} \bigvee_{j\in J} x_i = y_j$$

这里， S 是大小为 κ的模型所成子范畴的骨架， T 是由满足以下条件的有序对（M_0， M_1）构成的集合：存在 μ-抽象初等类中的一个态射，且 M_0、 $M_1 \in S$；而 ψ_{M_0}、 $\psi_{M_0,\ M_1}$是扩展语言中原子公式和否定原子公式的合取式，使得 ψ_{M_0}(z)成立，当且仅当z与 M_0同构；$\psi_{M_0,\ M_1}$(z, w)成立，当且仅当(z, w)与（M_0， M_1）同构。

现在假设在 κ 处具有范畴性，我们可以为一个与之同构的 μ-抽象初等类建立公理化，并且完全通过 $(2^\kappa)^+$-$Reg_\neg$ 片段中的序列来改写它。这是一阶逻辑的一个直觉主义片段，其中不含析取；它由 $(2^\kappa)^+$-正则片段加入 $\bot$ 得到，同时还加入公理 $\bot \vdash_{\mathbf{x}} \phi$ 以及使其成为否定算子的 $\neg$ 公理。事实上，在上面的第一个序列中，由于我们在 κ 处具有范畴性，析取便简化为单个析取项；而上面的最后三个序列具有如下的一般形式

的全称句 $\forall z \bigvee_{i\in I}\bigwedge_{j\in J}\psi_{ij}$，且每个这样的句子都等价于序列集 $\{\exists z\ \bigwedge_{i\in I}\neg\psi_{if(i)} \vdash \bot\}_{f\in J^I}$。

$(2^\kappa)^+$-$Reg_\neg$ 片段包含不含符号 $\neg$ 的 $(2^\kappa)^+$-$Reg_\bot$ 子片段。任何 $(2^\kappa)^+$-$Reg_\neg$ 理论的句法范畴 $\mathcal{C}$，都可以通过研究其 $(2^\kappa)^+$-$Reg_\bot$ 模型的范畴 $\mathcal{K}^r_{\geq(2^\kappa)^+}$来考察（这些模型是 $\mathcal{C}$ 的 $(2^\kappa)^+$-$Reg_\bot$ 内部理论的模型，也称为该 $(2^\kappa)^+$-$Reg_\neg$ 理论的 $(2^\kappa)^+$-$Reg_\bot$ 莫利化）。特别是，相对于扩展签名，这些模型是 $(2^\kappa)^+$-正则模型；该扩展签名中额外包含一个命题符号 $\bot$，并且对每个否定原子公式 $\neg R$ 都包含一个谓词符号 S。该理论的公理包含通过在每个 $(2^\kappa)^+$-$Reg_\neg$ 公理中将 $\neg R$ 形式地替换为 S 而得到的所有公理，此外还包含所有形如 $\bot \vdash_{\mathbf{x}} \phi$ 和 $R\wedge S \vdash_{\mathbf{x}} \bot$ 的公理。

如果 $(\mathcal{C})^r_{\lambda^+}$ 是具有与 $\mathcal{C}$ 的 $(2^\kappa)^+$-$Reg_\bot$ 理论相同公理的 λ^+-$Reg_\bot$ 理论的句法范畴，那么其 λ^+-分类拓扑斯 $\mathcal{S}h((\mathcal{C})^r_{\lambda^+},\tau)$（其中 τ 是 λ^+-$Reg_\bot$ 覆盖）将与预层托扑 $\mathbf{Set}^{\mathcal{K}^r_{\geq(2^\kappa)^+,\leq\lambda}}$ 精确等价。这可视为 [Esp22] 中定理 4.1 的一个特例，只要 λ 足够大即可。特别是，嵌入 $(\mathcal{C})^r_{\lambda^+}\longrightarrow\mathbf{Set}^{\mathcal{K}^r_{\geq(2^\kappa)^+,\leq\lambda}}$ 将保持 $\neg$，因为它可以识别为 Yoneda嵌入；该嵌入保持可能存在的拉回函子的任何右伴随，参见 [BJ98]）。

利用 $(2^\kappa)^+$-$Reg_\bot$ 逻辑的紧致性，也很容易验证典范函子$F\colon \mathcal{C}\longrightarrow(\mathcal{C})^r_{\lambda^+}$ 同样保持 $\neg$。因为若给定一个 λ^+-正则句子 $\exists x\ \bigwedge_{i<\lambda}\phi_i$，且我们在 λ^+-$Reg_\bot$ 逻辑中有 $\exists y\ \bigwedge_{i<\lambda}\phi_i\wedge R\vdash_{\mathbf{x}}\bot$，那么必定存在某个 $(2^\kappa)^+$-正则句子 $\exists_{i\in T}y_i\bigwedge_{i\in T}\phi_i$，以及一个大小至多为 2^κ 的子集$T\subset\lambda$，使得在 $(2^\kappa)^+$-$Reg_\bot$ 逻辑中有 $\exists_{i\in T}y_i\bigwedge_{i\in T}\phi_i\wedge R\vdash_{\mathbf{x}}\bot$，由此即可得出我们的结论。

事实上，由此可得求值函子 $ev:\mathcal{C}\longrightarrow\mathbf{Set}^{\mathcal{K}^r_{\geq(2^\kappa)^+,\leq\lambda}}$，即 Yoneda嵌入与 F的复合，保留 $\neg$，[1] 这尤其意味着，S 在预层托扑中的解释恰好就是 $\neg R$。请注意，若在上述 $(2^\kappa)^+$-$Reg_\neg$ 公理化中加入所有原子公式的排中律实例，就能得到（一个同构副本的）μ-抽象初等类的公理化；这一事实将在下文用到：

定理 3.1. 设 $\mathcal{K}$ 是一个具有有向余极限、在 κ 和 $\lambda>2^\kappa$ 中均具有范畴性的 μ-抽象初等类。那么 $\mathcal{K}$ 是 $(2^\kappa,<\lambda)$- 驯性的。

证明。首先注意，我们可以将大小为 λ 的模型 M 取作 $\mathcal{K}_{\geq(2^\kappa)^+,<\lambda}$ 的怪兽模型，因为根据 [Esp22]，的论证，我们在那里有合并。现在，M 中的伽罗瓦类型对应于 λ^+-几何句法类型，如 [Esp22] 所示（事实上，M_0 上的伽罗瓦类型对应于包含完备公式的句法类型，该完备公式实现了由 M_0 的底集所给出的元组的类型）。因此，只需证明：形如 $\exists x\phi(x, d, c)$ 的 λ-相干存在句，其中常元 c 来自子模型 M_0，即该类型的参数集，d 是有限元组，而 ϕ 是原子公式的合取，在 M 中成立，当且仅当每个 $(2^\kappa)^+$- 小近似 $\exists x'\psi(x', d, c')$ 都在那里成立。现在假设后一个条件成立。令 N 为一个包含 c 和 d 的 $(2^\kappa)^+$-纯子模型，并考虑如下理论：对在 $Reg_\neg$ 逻辑中公理化 $\mathcal{K}$ 的序列进行 $(2^\kappa)^+$-$Reg_\bot$ 莫利化，加入 N 的图、表达带有来自 N 的常元的那些否定存在句在那里成立的序列，以及表达 $(2^\kappa)^+$-小近似 $\exists x'\psi(x', d, c')$ 成立的序列。显然，每个 $(2^\kappa)^+$-小子集都有一个模型（即怪兽模型的显然扩张），因此整个理论有一个 $(2^\kappa)^+$-$Reg_\bot$ 模型。这意味着存在一个从 $N\longrightarrow S$ 到 $(2^\kappa)^+$-$Reg_\bot$ 模型 $\exists x\phi(x, c)$ 的 $(2^\kappa)^+$-纯嵌入。通过与 [Esp22], 中 Grossberg猜想的证明类似的证明，我们可以看到，M 关于 $\mathcal{K}^r_{\geq(2^\kappa)^+,<\lambda}$ 中的 $(2^\kappa)^+$-纯嵌入是内射的，因此我们得到 $\exists x\phi(x, d, c)$ 必须在那里成立，正如我们所要证明的那样。

□

[1]也可以直接证明这一事实，利用 $(2^\kappa)^+$-$Reg_\bot$ 逻辑的紧致性，并采用证明 Joyal定理中的相同论证。根据该定理，当 $Mod(\mathcal{C})$ 是 Heyting范畴 $\mathcal{C}$ 的相干模型范畴时，$ev:\mathcal{C}\longrightarrow\mathbf{Set}^{Mod(\mathcal{C})}$ 保留全称量化。作者在其博士论文中针对更一般的无析取片段详细论证了这一点。

假设在一个充分大的初始段中具有范畴性，我们还可以推出驯性：

定理 3.2. 设 $\mathcal{K}$ 是一个具有有向余极限的 μ-抽象初等类，且对 $\kappa \leq \mu < \beth_\omega(\kappa)$ 是 μ-范畴性的。那么 $\mathcal{K}$ 是 2^κ-驯性的。特别地，在 $[\kappa, \beth_\omega(\kappa))$ 中的范畴性意味着在 κ 以上处处具有范畴性。

证明. 首先注意，在定理 3.1 之前的整个分析都可以推广到这样的情形：我们知道对于 $\kappa \leq \mu < \chi := \beth_\omega(\kappa)$， μ 中具有范畴性。在这种情况下，可以通过为每个 $\mu < \chi$ 添加一个 μ^+-元谓词 P_μ，并按上述公理化过程进行，从而在 χ^+-$Reg_\neg$ 逻辑中得到公理化。令 $\mathbb{T}^r$ 为以下无析取片段中的理论的 χ^+-$Reg_\perp$ 莫利化：对于大小至少为 χ 的模型的 χ^+-$Reg_\neg$ 公理化，我们加入公理 $\bigwedge_{i<\chi} \neg\neg\phi_i \vdash_{\mathbf{x}} \neg\neg \bigwedge_{i<\chi} \phi_i$ 的所有实例，其中 ϕ_i 是 $< \chi$-$Reg_\perp$ 公式。再令 $\mathcal{K}^B_{,\geq^r_\chi,<\lambda}$ 为其由大小至少为 χ 且小于 λ 的 χ^+-$Reg_\perp$ 模型构成、以 χ-布尔同态为态射的范畴。只需证明子拓扑斯 $\mathbf{Set}^{\mathcal{K}_{\geq\chi},<\lambda} \hookrightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{K}^B_{,\geq^r_\chi,<\lambda}}$ 是稠密的。正如我们从 [Esp22], 中关于 Grossberg猜想的证明所知，这个子拓扑斯同样是通过加入由排中律实例生成的 λ-拓扑而得到的，因此只需证明序列 $\bigwedge_{i<\lambda} \neg\neg\phi_i \vdash_{\mathbf{x}} \neg\neg \bigwedge_{i<\lambda} \phi_i$ 在 $\mathbf{Set}^{\mathcal{K}^B_{,\geq^r_\chi,<\lambda}}$ 中成立；为此，进一步只需证明 $\mathcal{K}^B_{,\geq^r_\chi,<\lambda}$ 具有有向上界。由于它对上确界至少为 χ^+ 的链有上界，只需考虑上确界小于 χ^+ 的链。设 $\{M_i\}_{i<\alpha}$ 是这样一条链；我们需要证明存在一个模型包含链中各图的并。根据 χ^+-$Reg_\perp$ 紧致性，不失一般性可假设链中所有模型的大小至多为 χ；此时只需取一个 χ^+-饱和模型作为有向上界。[2] 为了说明这样的模型存在，我们将在下一段证明 $\mathcal{K}^B_{,\chi^r}$ 在 χ 处具有合并。另一方面，注意到 $\mathbf{Set}^{\mathcal{K}^B_{,\chi^r}}$ 的双重否定子拓扑斯满足 $\mathbb{T}^r$ 中的所有序列，这是由于加入公理化中的公理所致；并且它有一个 χ^+-点，因为它分类一个 χ^+-$Reg_\perp$ 理论：它是将 $\mathbb{T}^r$ 对所有表达态射 $[M,-] \longrightarrow [M',-]$ 为满射的序列取商而得到的。因此，若 M 是双重否定子拓扑斯的一个 χ^+-点，即 $\mathbb{T}^r$ 的一个 χ^+-饱和模型，那么显然 M 是所给链的一个有向上界，正如我们所需。

接下来只需证明我们的论断。这可通过如下论证看出：利用 $\mathbb{T}^r_n := \mathbb{T}^r \cap \mathcal{L}_{\beth_n(\kappa)^+}$ 大小为 $\beth_n(\kappa)^+ < \chi$ 的模型的 3-合并，以及 $\beth_n(\kappa)^+$-纯态射。首先，在 $\beth_n(\kappa)^+$-相干范畴的学说中，对构成合并图的模型的理论取推出，并在每一层将其弱初始模型作为合并对象，即可得到 3-合并；该推出必定是一致的，因为合并成立。由于每个推出的 $\beth_n(\kappa)^+$-理论都由 $\beth_n(\kappa)^+$-$Reg_\perp$ 公理公理化，因此它们都有弱初始模型 M_n。我们来看看能否选择它们之间的同态，使之构成一个有向图，且其余极限图 D 与 $\mathbb{T}^r$ 一致。事实上，最小弱初始模型的图与 $\mathbb{T}^r$ 一致，因此它有一个模型 M；于是，只需将其中所包含的大小为 $\beth_{n-1}(\kappa)^+$ 的弱初始模型的图，也加入每个推出的 $\beth_n(\kappa)^+$-理论中：这样便得到一个典范同态，并且我们可以再次利用这些模型的弱初始性，依次将它们嵌入 M。因此， M 就是所需的合并对象。证明至此完成。

□

4 抽象初等类的 Shelah 范畴性猜想

现在来看下面的结果：

定理 4.1.（抽象初等类的 Shelah 范畴性猜想）。设 $\mathcal{K}$ 是一个抽象初等类。若 $\mathcal{K}$ 在某个 $\lambda \geq \beth_{(2^{LS(\mathcal{K})})^+}$ 中具有范畴性，则对于每个 $\lambda' \geq \beth_{(2^{LS(\mathcal{K})})^+}$， $\mathcal{K}$ 都是 λ'-范畴的。

[2] 如果链的上确界大于 ω，那么在极限层级，我们利用弱初始模型的存在性：这些模型属于该层级以下模型之并的 χ^+-$Reg_\perp$ 理论。

证明。假设对于某个 $\lambda \geq \beth_{(2^{LS(\mathcal{K})})^+}$，该抽象初等类具有 λ-范畴性。考虑 $\mathbf{Set}^{\mathcal{K}_\kappa}$ 的双重否定子拓扑斯，它对应于稠密拓扑，其中 $\kappa = LS(\mathcal{K})$。首先注意，稠密拓扑由如下覆盖生成：$\{M \longrightarrow N_i\}$，其中 N_i 与 M具有相同的基数，并且对于任意大的模型 N，任何 $M \longrightarrow N$都可以与其中一个 $M \longrightarrow N_j$作 amalgamation。事实上，这样选择态射足以包含所有覆盖 $\{M \longrightarrow N_i\}_{i\in I}$；对于某个划分 $I = J \cup K$，$\{[N_j, -] \rightarrowtail [M, -]\}_{j\in J}$对应于并为 ϕ 的存在量词 ν-相干句子，而 $\{[N_k, -] \rightarrowtail [M, -]\}_{k\in K}$对应于并为 $\neg\phi$ 的句子。这保证了层拓扑斯是布尔的（因此它就是双重否定子拓扑斯）。显然，大小为 λ 的模型必定是它的一个点，所以布尔代数的亚终对象中存在一个类型，它对应于在大小为 λ 的模型中成立的句子。由于它也是布尔的，因此是原子的，故该类型由一个子对象 $S \rightarrowtail 1$孤立。由此可知，S 上的切片是一个二值布尔拓扑斯，其中所有 κ^+-点都彼此 $\mathcal{L}_{\infty}$、κ-初等等价；此外，由于根据稳定性（这由在 λ 处的范畴性保证）存在一个大小为 κ^+ 的 κ^+-饱和模型，而任何此类模型都必定是该二值布尔子拓扑斯的一个 κ^+-点，因此任意两个此类 κ-点都同构。这意味着由切片子拓扑斯所分类的 $\mathcal{L}_{\kappa^{++}}$、$\kappa^+$-理论 κ^+定义了一个在 κ^+ 和 λ 处具有范畴性的 κ^+-抽象初等类。由引理 2.1，它必定在有向余极限下封闭，因此是一个抽象初等类。事实上，我们不需要使用合并，因为 κ^+-封闭模型恰好是双重否定子拓扑斯的 κ^+-点；若它们还满足与 κ^+-饱和模型相同的句子，就会经由切片拓扑斯分解，因而是 κ^+-饱和的。根据定理 3.1 和 3.2，它对于 $\chi = 2^\kappa$ 是 χ-驯的，因此在真类基数中具有范畴性。由 [Esp22]，得到的同样论证可知，在所有大于 κ^+ 的基数处都具有范畴性。根据抽象初等类的 Morley 遗漏类型定理[3]，我们得出结论：在某个 $\chi < \beth_{(2^{LS(\mathcal{K})})^+}$ 以上，该抽象初等类的每个模型都是 κ^+-饱和的。我们的定理得证。

□

这个阈值基数已是最优的，因为根据 Shelah 的一个例子（例如，参见[Vas19]中的事实 9.8），对于任意 ()，都存在一些抽象初等类，其模型的大小至多为 (())，但不存在更大的模型。这使得我们能够构造出最终范畴、但在(())以上不具范畴性的抽象初等类。Shelah 曾猜想，ω 这一特殊情形下的阈值也如此；这一猜想亦见于他在九十年代的研究中。

5 莫利范畴性定理的一个无穷逻辑扩展

现在我们可以继续讨论：

定理 1.1 的证明：假设我们有一个带有有向余极限的可达范畴 $\mathcal{K}$，它对某个 $\lambda \geq \beth_{(2^\kappa)^+}$ 在 S 中具有范畴性。根据 [BR12] 中的定理 4.5，$\mathcal{K}$ 是一个有限可达范畴的反射子范畴，$\mathcal{K}'$，而该范畴必定等价于某个 ω-几何理论的模型范畴；不失一般性，我们可以将可达范畴限制为单态射，因此可以假设 $\mathcal{K}'$ 的态射都是嵌入。两个范畴都可以用 μ-相干逻辑在 $\mu = LS(\mathcal{K})^+$ 中公理化。令 λ 为 S 中大于 $LS(\mathcal{K})$ 的第一个基数；由此可知，包含函子 $i : \mathcal{K}_{\geq\mu,<\lambda} \hookrightarrow \mathcal{K}'_{\geq\mu,<\lambda}$ 有一个左伴随 π。注意，计算 π 的方法是将 M 表示为有限可表示模型的有向余极限，并令 $\pi(M)$ 为 $\mathcal{K}$ 中同一图的有向余极限。进一步可知，$i^* : \mathbf{Set}^{\mathcal{K}'_{\geq\mu},<\lambda} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{K}_{\geq\mu},<\lambda}$ 是一个几何态射的逆像函子，而该几何态射是 π^*.[4] 的左伴随。为此，我们需要验证存在一个关于 F 和 G 自然的同构 $[i^*(F)\, G] \cong [F, \pi^*(G)]$。由于 i^* 保持余极限，只需令 $F \cong [A, -]$ 为一个可表示函子。于是，$[i^*(F)\ G]$ 中的一个元素是一个相容函数族 $[A, i(N)] \longrightarrow G(N)$，其指标由 $\mathcal{K}$-模型 N 给出；或者说，这等价于一个相容族 $[A, i(N)] \longrightarrow G(N)$，其指标由 $\mathcal{K}$-模型 N 给出

[3]这是将 Morley 方法应用于抽象初等类，以证明 [SM90] 中命题 3.3 的类似版本。[4]顺便一提，i^* 是 π^* 的右伴随 $\pi \dashv i$这一点也成立，因为它可由伴随关系 $\pi \dashv i$推出。

，也就是一个相容族 $[A, \pi(M)] \longrightarrow G(\pi(M))$，其指标由 $\mathcal{K}'$-模型 M 给出。但根据自然性，这后一族完全确定了一个相容族 $[A, M] \longrightarrow G(\pi(M))$（已知 $\pi(\pi(M)) = \pi(M)$），这与 $[F, \pi^*(G)$ 中的一个元素相同。还要注意，π^* 必定是一个嵌入，而且显然是稠密的，因此两个预层托普斯将具有相同的 λ-饱和模型。

现在考虑由 κ^+-饱和模型组成的 κ^+-抽象初等类 $\mathcal{K}''$。根据引理 2.1，我们可以看出，$\mathcal{K}''$ 继承了 $\mathcal{K}'$ 的具体有向余极限。此外，由于大小为 μ 的子模型上的伽罗瓦类型，对应于包含该子模型底集所满足的完备公式的 μ^+-几何类型，因此我们可以采用 [SM90] 中命题 3.5 的相同证明思路，从 $\mathcal{K}$ 在 λ 中的范畴性推出稳定性。为此，只需注意，通常的 Ehrenfeucht-Mostowski 模型 M（其中含有 λ 个不可分辨元）是由有限个不可分辨元的模型（这些模型也都是 $\mathcal{K}$ 的模型）构成的一个有向余极限（在 $\mathcal{K}$ 中）；它在某个子模型上省略一个类型，当且仅当 $\pi(M)$ 省略该类型。事实上，这个有向余极限（在 $\mathcal{K}''$ 中）必须嵌入每一个模型，而这些模型是模型之有向并的 Skolem 闭包；因此，若该类型在其中实现，就必然会在所有可能的 Skolem 闭包中实现，进而根据双重否定下的超限传递规则，该类型早已在有向并中实现（也就是说，在 M 中实现）。[5] 最后，将定理 4.1 应用于抽象初等类 $\mathcal{K}''$，由此可得其在每个 $\lambda \geq \kappa^+$ 中都具有范畴性；又由于将 Morley 遗漏类型定理应用于 $\mathcal{K}'$ 后可知，对某个 $\nu < \beth_{(2^\kappa}$，所有大小至少为 ν 的模型都属于 $\mathcal{K}''$，因此特别地，$\mathcal{K}$ 在 S 中大于 $\beth_{(2^\kappa)^+}$ 的那些基数上具有范畴性，正如我们所要证明的。

最后，我们考虑这样一种情形：定义模型范畴的句子是一个紧致句子，并且我们考虑那些一阶初等的嵌入。这是一个带有有向余极限、合并且没有极大模型的 μ-抽象初等类。相应的有限可达范畴 $\mathcal{K}'$ 届时也将具有合并性质且没有极大模型。正如我们上面已经证明的，$\mathcal{K}'$ 将是最终范畴的。由于根据引理 2.1 证明中的考察，我们有一个稳定满射 $\mathbf{Set}^{M/\mathcal{K}^B_{\geq\kappa},<\lambda} \twoheadrightarrow \mathbf{Set}^{M/\mathcal{K}_{\geq\kappa},<\lambda}$，每个模型 M 都有一个真 ω-纯（事实上是 ω-布尔）扩张，否则 $\mathbf{Set}^{M/\mathcal{K}^B_{\geq\kappa},<\lambda}$ 将是二值的且为布尔的，从而迫使 $\mathbf{Set}^{M/\mathcal{K}_{\geq\kappa},<\lambda}$ 成为二值的且为布尔的；但这是不可能的，因为 M 不是极大的。由此可知，每个模型都有一个 ω-纯态射映入大小为 λ的模型，因此每个这样的模型都是ω-饱和的；特别地，ω-相干公式的值不是 0 就是 1。根据 [Esp22], 第 9 节中的论证，任何形如 $\forall \mathbf{x}(\vartheta \longrightarrow \eta)$ 的句子，其中 ϑ 和 η 是 ω-相干的，若在 $LS(\mathcal{K})^+$-饱和模型中有效，则可在大小至少为$LS(\mathcal{K})^+$ 的模型的 $LS(\mathcal{K})^+$-分类拓扑斯中证明（注意，$\forall \mathbf{x}(\vartheta \longrightarrow \eta)$也将等价于一个 ω-相干公式，这可由紧致性论证看出，所使用的是句法范畴中全称量化的定义）。由此立即可以推出——正如 [Kei14] 中关于饱和模型里的合取公式的证明所示——任何 ω_1-相干公式都等价于其逼近的合取（特别地，ω_1-相干句子的值不是 0 就是 1）。因此，我们现在可以证明：形如 $\forall \mathbf{x}(\vartheta \longrightarrow \eta)$ 的句子，其中 ϑ 和 η 是 ω_1-相干的，若在 $LS(\mathcal{K})^+$-饱和模型中有效，则可在 $LS(\mathcal{K})^+$-分类拓扑斯中证明。继续这一过程，我们最终得到所有 $LS(\mathcal{K})^+$-相干句子的值不是 0 就是 1；这足以得到在 $LS(\mathcal{K})^+$处的范畴性，从而在 $LS(\mathcal{K})^+$以上的所有地方都具有范畴性。证明完毕。

6 范畴性谱的分类

最后，我们得到：

定理 6.1. 设 $\mathcal{K}$ 是一个带有有向余极限的大型 κ-可达范畴。假设奇异基数假设 SCH （仅当对单态射的限制不是抽象初等类时）。那么

[5] 由于我们的理论和类型是 λ-相干的，我们可以利用经典片段相对于相干片段的保守性消去双重否定

范畴性谱 $\mathcal{C}at(\mathcal{K}) = \{\lambda \geq \kappa : \mathcal{K}$ 是 λ-范畴性的$\}$，属于以下情况之一：

1. $\mathcal{C}at(\mathcal{K}) = \emptyset$。2. $\mathcal{C}at(\mathcal{K}) = [\alpha, \beta]$ 对于某个 $\alpha, \beta \in [\kappa, \beth_\omega(\kappa)$。3. $\mathcal{C}at(\mathcal{K}) = [\chi, \infty)$ 对于某个 $\chi \in [\kappa, \beth_{(2^\kappa)^+})$。

证明。我们的证明思路与 [Vas19]，中的思路遵循相同的指导原则，不同之处在于不使用合并假设，并且将 $WGCH$ 替换为 SCH，或者在抽象初等类中将其完全消除（代价是将 $\kappa^{+\omega}$ 替换为 $\beth_\omega(\kappa)$）。如果情况 1 不发生，首先假设存在某个范畴性基数 $\lambda \geq \beth_\omega(\kappa)$，并按照定理 4.1 的证明定义一个具有有向余极限、在 κ^+ 和 λ 中具有范畴性的 κ^+-抽象初等类。根据定理 3.1 和 3.2，它必定是 2^{κ^+}-驯性的，因此原本的 ϕ 的模型范畴也必定具有驯性，从而我们可以得出情况 3 发生。如果范畴性只发生在 $\beth_\omega(\kappa)$ 以下，那么根据 [Esp22] 中的证明，它必定是一个片段。事实上，采用定理 4.1 证明中的相同论证，我们并不需要合并。另一方面，通过构造理论树，使得那些 Γ 承认极大模型的理论不通过添加新的常元扩展到 Γ'，从而跳过构造的这一修改，可以去掉 [Esp22] 中定理 9.1 证明里的极大模型假设；最终，在理论树中，分支要么到达层级 λ，要么到达一个理论为经典理论的节点（对应于一个极大模型）。在这两种情况下，都可以证明排中律的实例在托普斯 $\mathbf{Set}[\mathbb{T}_{\kappa^+}]_{\kappa^+}$ 中成立，使其成为布尔托普斯。总而言之，范畴性不可能交替出现，因此我们处于情况 2，这就完成了证明。

□

从关于抽象初等类的文献中摘取的例子表明，分类中的三种情形都确实可能出现（例如，参见 [Vas19]中的例子）。非平凡情形是 2，它出现在 [SV04]中的 Shelah-Villaveces 例子里。

参考文献

[BJ98] Carsten Butz 和 Peter Johnstone，一阶理论的分类托普斯，《纯粹与应用逻辑年刊》91（1998），第 1 期，33–58。[BR12] Tibor Beke 和 Jir´ı Rosick`y，抽象初等类与可及范畴，《纯粹与应用逻辑年刊》163（2012），第 12 期，2008–2017。[Esp22] Christian Esp´ındola，Shelah 最终范畴性猜想的证明及其向具有有向余极限的可及范畴的推广，https://arxiv.org/abs/1906.09169（2022）。[Kei14] Jerome Keisler，无限长公式的有限近似，《模型论》，Elsevier，2014，第 158–169 页。[LRV19] Michael Lieberman、Ji˘r´ı Rosick´y 和 Sebastien Vasey，μ-抽象初等类中的内在大小，《纯粹与应用代数杂志》223（2019），第 10 期，4560–4582。[She09] Saharon Shelah，抽象初等类的分类理论，《逻辑研究：数理逻辑与基础》第 18 卷，College Publications，2009。[SM90] Saharon Shelah 和 Michael Makkai，$\mathcal{L}_{\kappa,\,\omega}$中理论的范畴性，以及 κ 一个紧基数，《纯粹与应用逻辑年刊》47（1990），第 1 期，41–97。[SV04] Saharon Shelah 和 Andr´es Villaveces，范畴性可能迟迟不成立，预印本。网址：http://arxiv. org/abs/math/0404258v1（2004）。[Vas19] Sebastien Vasey，大型抽象初等类的范畴性谱，《数学精选》25（2019），1–51。