arXiv:2301.13175v1 [math.CO] 30 Jan 2023

无 P_5图上的警察与强盗

Maria Chudnovsky[1]普林斯顿大学，普林斯顿（新泽西州）08544 Sergey Norin[2]麦吉尔大学数学与统计系，蒙特利尔，魁北克省，加拿大 Paul Seymour[3]普林斯顿大学，普林斯顿（新泽西州）08544 Jérémie Turcotte[4]麦吉尔大学数学与统计系，蒙特利尔，魁北克省，加拿大 2022年12月19日；修订于2023年1月25日

[1]由美国国家科学基金会 DMS-EPSRC 资助项目 DMS-2120644 和美国空军科学研究办公室资助项目 FA9550-22-1-0083 提供支持。[2]由加拿大自然科学与工程研究委员会探索资助提供支持。由加拿大自然科学与工程研究委员会研究资助计划提供支持。[3]由美国空军科学研究办公室资助项目 FA9550-22-1-0234 以及美国国家科学基金会资助项目 DMS-2154169 提供支持。[4]由加拿大自然科学与工程研究委员会博士研究生奖学金提供支持。由加拿大自然科学与工程研究委员会提供的 BESC D 奖学金支持。

摘要

我们证明，每个连通的 P_5-自由图的警察数至多为二，从而解决了 Sivaraman 猜想。为此，我们首先证明，每个独立数至少为三的连通 P_5-自由图 G 都包含一条由顶点 a-b-c依次组成的三顶点诱导路径，并且 c 的每个邻点也都与 a、b中的一个相邻。

1 引言

我们用 P_t 表示具有 t 个顶点的路径。关于 P_5-free 图，存在许多著名的未解决问题（如果图 G 没有与 H 同构的诱导子图，则称图 G 是 H-$free$ 的，而 $|G|$ 表示图 G的顶点数）。例如：

- Erdős-Hajnal [4] 猜想意味着，存在某个 $c > 0$，使得每个 P_5-free 图 G 都包含一个大小至少为 $|G|^c$ 的团或稳定集；
- Esperet 的一个猜想 [5] 意味着，存在某个 $c > 0$，使得每个 P_5-free 图 G 的色数至多为 $\omega(G)^c$，其中 $\omega(G)$ 是 G的团数；
- Hoàng 等人的一个猜想 [9] 称，存在某个 $c > 0$，有一个函数 f，使得对于每个k，都存在一个算法，用于判定一个 P_5-free 图 G 是否是 k-可着色的，且运行时间为 $f(k)|G|^c$。

本文研究关于无 P_5 图的另一个猜想，该猜想涉及警察与强盗游戏。在这个游戏中，有 s 名警察，每名警察都位于图的一个顶点上，逃犯也位于一个顶点上。每个回合中，首先每名警察移动到一个邻点，或留在原地；然后逃犯移动到一个邻点，或留在原地。如果在某一时刻，有警察与逃犯位于同一顶点，警察便获胜。警察可以共占顶点，且此游戏中双方都拥有完全信息。给定一个图 G，至少需要多少名警察？警察数 $c(G)$ 是能够抓捕逃犯的最少警察人数 G。只有一名警察参与的游戏最初由 Nowakowski 和 Winkler [15]以及 Quilliot [17]定义。多名警察参与的版本由 Aigner 和 Fromme [1]提出；他们特别证明了，任意连通平面图的警察数至多为三。

受 Andreae 的结果启发 [2]：对于任意图 H，禁止其作为图 minor 的连通图的警察数有界，Joret 等人 [11] 证明，连通H-自由图的警察数有界，当且仅当 H 是路径的不交并。特别地，他们证明，对于 $t \geq 3$，连通 P_t-自由图的警察数至多为 $t-2$。Sivaraman [18] 猜想，两个警察可以在连通 P_5-自由图中获胜；更一般地，对于 $t \geq 5$，连通P_t-自由图的警察数至多为 $t-3$。

关于警察数和禁用诱导子图的其他问题也受到研究，例如考察警察数与独立数之间的关系（换言之，即 tK_1-自由图）[16]，以及排除多个诱导子图 [10, 14, 19]。

然而，在这一领域，P_5-自由图的警察数问题受到的关注最多；人们研究了关于 P_5-自由图猜想的各种弱化形式。Sivaraman 和 Testa [20] 猜想了一个较弱的命题：连通 $2K_2$-自由图的警察数至多为二（$2K_2$，也写作 $2P_2$，是由两条边的不交并得到的图；它也可以看作一个四顶点圈的补图）。本文的第四作者 [21]证明了这一结论。Liu [12] 证明了这些问题的若干部分结果，Gupta、Mishra 和 Pradhan [7] 则证明，该猜想对 P_5-自由图的多个子类成立。Masjoody[13]猜想了一个较弱的命题：即使两个警察可能无法在 P_5-自由图中抓捕逃犯，他们也能将其困在一个顶点上。

在 th 本文证明了关于 P_5-自由图的警察数的 Sivaraman猜想 .

1.1. 如果 G 是一个连通的 P_5-自由图，那么 $c(G) \leq 2$。

我们采用的总体策略与本文第四作者在 [21]中用于界定 $2K_2$-自由图警察数的策略相似。首先，证明该类中的任意图都必须包含两个警察的一个可能获胜位置，即存在顶点 $a, b \neq c$ 使得 $N[c] \subseteq N[a] \cup N[b]$。然后，考虑该类中两个警察无法获胜的一个极小图，并利用其极小性迫使逃犯移动到 c，之后尝试最终将警察移动到 a, b ，并证明逃犯无法逃脱。

这一策略的第一部分由以下结果完成，我们将在第 3 节中证明该结果。

1.2. 若 G 连通且不含 P_5，并且 $\alpha(G) \geq 3$，则 G 中存在一条由三个顶点组成的诱导路径，其顶点依次为 a, b, c，且 c 的每个邻点都与 a, b 中的一个顶点相邻。

这里， $\alpha(G)$ 是 G 的独立数，也就是 $V(G)$ 的最大稳定子集的基数。设 a-b-c 是 G 中一条三顶点诱导路径上的顶点，顺序如上。若 a-b-c 满足： c 的每个邻点都与 a、b 中的一个顶点相邻，则称其为支配的，或称为支配 3-路径。因此，1.2 表明，每个满足 $\alpha(G) \geq 3$ 的连通 P_5-无图都有一条支配 3-路径。

1.2 中的条件 $\alpha(G) \geq 3$ 是必要的。容易看出，每个满足 $\alpha(G) = 2$ 的图 G 都是 P_5-无图；当且仅当其补图 H 的直径至多为二时，它没有支配 3-路径。因此，在省略条件 $\alpha(G) \geq 3$ 后，便有大量反例不满足 1.2。

第四作者证明的针对 $2K_2$-自由图的 1.2 的推广 [21]如下。

1.3. 若 G 是连通的且为 $2K_2$-自由图，且 $|G| \geq 3$ 和 G 均不是长度为五的圈，则存在互不相同的顶点 a, b, c，使得 ab 和 bc 是边（ ac 也可能是边），并且 c 的每个邻点都与 a, b 之一相邻。

这与 1.2 有三处不同，其中两处是弱化，一处是加强。首先，它当然假设 G 是 $2K_2$-自由的，而不是 P_5-自由的。其次， ac 可能是一条边。但第三，它不需要假设 $\alpha(G) \geq 3$。如果我们尝试修改 1.3，要求 $2K_2$-自由图 G中存在一条支配 3-路径呢? 结果仍然不成立，不过反例并不多；每个反例G 都满足 $\alpha(G) \leq 2$，而且很容易看出，这些反例都是围长为五的 Moore 图的补图。这些图的直径为二，围长为五，且每个顶点的度都相同，为 d；这样的图仅在 $d = 2$、3、7 时存在，此外也可能在 57 时存在。

为了证明 1.2，我们需要以下定义。称图 G为双联，如果

- 对于 G中的任意两个不相邻顶点 u、v ，恰有两个顶点同时与u、v相邻，且这两个顶点彼此相邻，并且
- G 没有基数为四的团。

若 $|G| > 1$，则称其为非平凡的。如果一个非平凡的双联图的补图是连通的，那么这个补图将是 1.2 的一个反例，因此我们关注双联图。事实上，我们将在第 3 节证明，1.2 的任何反例都有一个连通的诱导子图，其补图是一个非平凡的双联图；因此，整个问题归结为证明不存在这样的图。这将在第 2 节中证明。

策略的第二部分，即利用 1.2 通过两个警察抓捕逃犯，将在第 4 节完成。 $2K_2$-自由情形和 P_5-自由情形的证明有一个重要区别：逃犯一旦到达 c，在前一种情形下，我们可以确保逃犯永远不会离开 c；而在后一种情形下，这一点无法做到。

最后，我们用一些记号来结束本节。设 G 是一个图，我们始终假设它是简单且有限的。对于 $v \in V(G)$，我们用 $N(v)$ 表示 v（与 v 相邻的顶点集合）的邻域，用 $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ 表示 v 的闭邻域，用 $M(v) = V(G) \setminus N[v]$ 表示与 v 不同且不相邻的顶点集合。若图 G 的一个顶点与所有其他顶点相邻，则称其为全邻顶点。

若 $X, Y \subseteq V(G)$ 不相交，则称 X 与 Y 完全邻接，如果 X 中的每个顶点都与 Y 中的每个顶点相邻；若 X, Y 之间没有边，则称 X 与 Y 完全不相邻。若 $X = \{x\}$，则称 x 与 Y 完全邻接，如果 $\{x\}$ 与 Y 完全邻接，依此类推。

若 $X \subseteq V(G)$，则用 $G[X]$ 表示 G 在 X 上诱导的子图，并用 $G \setminus X$ 表示 $G[V(G) \setminus X]$。若 $X = \{v\}$，则用 $G \setminus v$ 表示 $G \setminus \{v\}$。

我们常用 x_1-x_2-...-x_k 表示一条路径，其中顶点 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 按此顺序排列。

2 双连接图

我们首先指出，双联图确实存在；例如，若 H 是一个围长至少为五的图，其中任意两个不相邻顶点恰有一个公共邻点，并且我们向 H 添加一个全邻接顶点，就得到一个双联图。我们将证明，除此之外不存在其他双联图；特别地，不存在非平凡的双联图具有连通补图。

我们需要以下众所周知的引理：

2.1. 设 H 是一个围长至少为五的图，并且任意两个不相邻顶点 u, v 恰有一个同时与二者相邻的顶点。若 H 的补图是连通的，则 H 中任意两个顶点的度相同。

证明。由于 H 的补图是连通的，只需证明 H 中任意两个不相邻顶点的度相同。因此，设 u, w 不相邻。设 $N = \{v_1, \ldots, v_k\}$ 为 u 的邻点集合；对 $1 \le i \le k$，设 N_i 为 v_i 中除 u 外的邻点集合。因此，集合 $\{u\}, N, N_1, \ldots, N_k$ 两两不交，且其并集为 $V(H)$。设 $w \in N_k$ 即可。对于所有 $j \in \{1, \ldots, k-1\}$，w 在 N_j 中有一个邻点（因为它与 v_j 的距离为二），且恰有一个这样的邻点（因为 H 的围长至少为五）；并且在 $N \cup \{u\}$ 中恰有一个邻点；因此 w 的度恰为 k。这就证明了 2.1。 ∎

我们还需要一些关于强正则图的结果。如果一个图有 n 个顶点、每个顶点的度为 k、任意两个相邻顶点恰有 a 个公共邻点，且任意两个不相邻顶点恰有 c 个公共邻点，则称该图为参数为 (n, k, a, c) 的强正则图。因此，摩尔图就是参数为 $(n, k, 0, 1)$ 的强正则图，其中 n、k 为某些数。首先，我们需要一个前面提到的关于摩尔图的结果，该结果归功于 Hoffman 和 Singleton [8]：

2.2. 只有当 $n = k^2 + 1$ 和 $k = 2$，3，7 以及可能的 57 时，才存在参数为 $(n, k, 0, 1)$ 的强正则图。

其次，我们需要以下结果（见 Godsil 和 Royle [6] 的引理 10.3.2 和 10.3.3）：

2.3. 如果存在参数为 (n, k, a, c) 的强正则图，那么 $2k = (n-1)(c-a)$ 或 $(a-c)^2 + 4(k-c)$ 是完全平方数。

现在我们证明：

2.4. 如果 G 是一个双联非空图，那么 G 有一个全邻接顶点。

证明。 如果 u、v 不同，令 $R(u,v)$ 表示同时与 u、v 相邻的所有顶点的集合；因此，如果 u、v 不相邻，则 $|R(u,v)| = 2$，且其两个成员相邻。为方便起见，我们称"$R(u,v)$ 是一条边"。我们注意到，G 的诱导圈没有四边形（因为对于此类圈的一对对立顶点u、v，$R(u,v)$ 不是一条边）。因此，G 是 C_4-自由的，其中 C_4 是长度为四的圈。为导出矛盾，我们假设 G 没有全邻接顶点。四阶团 是指基数为四的团。

(1) 对于每个 $v \in V(G)$，$G[N(v)]$ 的补图是连通的。

假设并非如此。于是，存在 $N(v)$ 的一个划分 (X,Y)，其中 X、$Y \neq \emptyset$ 满足 X 完全邻接于 Y。由于 G 是 C_4-自由的，X、Y 中至少有一个是团，不妨设为 X；令 $x \in X$。于是，x 与 $N(v)$ 中的所有其他顶点相邻，因此不妨设 $X = \{x\}$ 和 $Y = N(v) \setminus \{x\}$。由于 G 没有四阶团，Y 是一个稳定集。由于 x 不是全邻接顶点，存在 $z \in V(G)$ 不与 x 相邻。因此$z \notin N[v]$。但此时 $R(v,z)$ 是 Y 的子集，因而不是一条边，矛盾。这证明了 (1)。

(2) 对于每个 $v \in V(G)$，$G[N(v)]$ 中的所有顶点在 $G[N(v)]$中具有相同的度。

$G[N(v)]$没有长度为三的圈，因为 G是 K_4-自由的；而 $G[N(v)]$是 C_4-自由的，因为 G是 C_4-自由的。因此，$G[N(v)]$的围长至少为五。若 u与 $w \in N(v)$ 不相邻，则 $R(u,w)$由 v以及 $N(v)$中的恰好一个顶点组成；因此，u和 w在 $G[N(v)]$中恰有一个公共邻点。由 (1) 和 2.1，这证明了 (2)。

由 (2) 以及 G 是双联的这一事实可知，对于每个顶点 v，存在 k_v，使得 $G[N(v)]$ 是参数为 $((k_v)^2 + 1, k_v, 0, 1)$ 的摩尔图。特别地，对于 v 的每个邻点 u，都有 $|R(u,v)| = k_v$。由此可知，对于邻点 u 和 v的每一对，都有 $k_u = k_v$；又由于 G 是连通的，存在 k，使得对于每个 v都有 $k_v = k$。因此，G是参数为 $(n, k^2+1, k, 2)$ 的强正则图，其中 n 由 k 确定，但其具体取值无关紧要；根据 2.2，有 $k \in \{2, 3, 7, 57\}$。应用 2.3，可得以下结论之一：

- $2(k^2+1) = (n-1)(2-k)$；但这是不可能的，因为 $k \geq 2$。
- $(k-2)^2 + 4((k^2+1) - 2) = k(5k-4)$ 是一个完全平方数；但当$k = 2$、3、7、57 时并非如此。

这一矛盾证明了 2.4。 ∎

3 寻找支配 3-路径

我们来证明 1.2，具体重述如下。

3.1. 如果 G 是一个连通的、不含 P_5 的图，且 $\alpha(G) \geq 3$，那么 G 中存在一条支配 3-路径。

证明。 我们假设 G 是定理的一个反例，且 G 极小。因此，G 是连通的且不含 P_5，满足 $\alpha(G) \geq 3$，并且 G 中不存在支配 3-路径，也没有真诱导子图满足这些性质。我们将证明 G 的补图是双联的，并说明这会导致矛盾。我们从以下结论开始：

(1) 不存在两个相邻顶点 u, v 满足 $N(u) \subseteq N[v]$。

假设存在两个这样的顶点 u, v。若存在一个顶点 w 与 v 相邻但与 u 不相邻，那么 w-v-u 就是支配的，矛盾；因此 $N[u] = N[v]$。令 G' 为删除 u 后得到的图。那么 G' 连通、不含 P_5，且满足 $\alpha(G') \geq 3$，因此根据 G 的极小性，G' 中存在一条支配 3-路径 a-b-c。这条路径在 G 中并非支配的，因此 u 与 c 相邻，但与 a, b 不相邻。然而，此时 $v \neq a, b, c$，因此 v 与 c 相邻，但与 a, b 不相邻，这与 a-b-c 在 G' 中是支配的相矛盾。由此证明了 (1)。

(2) 对于每个 $v \in V(G)$ 以及 $G[M(v)]$, 的每个连通分量 C，没有顶点 $u \in N(v)$ 完全邻接于 $V(C)$。

因为如果 u 是这样的顶点，取 $w \in V(C)$；那么 v-u-w 是支配的，矛盾。这证明了 (2)。

(3) 对于每个 $v \in V(G)$， $G[M(v)]$ 非空且连通。此外， $N(v)$ 中的每个顶点在 $M(v)$ 中都有一个邻点。

由 (1)， $M(v) \neq \emptyset$。假设 C_1, C_2 是 $G[M(v)]$ 的不同连通分量。由于 G 连通，对于 $i = 1, 2$，存在 $u_i \in N(v)$，它在 $V(C_i)$ 中有一个邻点。由 (2)，对于 $i = 1, 2$， u_i 在 $V(C_i)$ 中既有邻点又有非邻点；又由于 C_i 连通，存在 C_i 的一条边 $a_i b_i$，使得 u_i 与 a_i 相邻，而与 b_i 不相邻。如果 u_1 在 $V(C_2)$ 中有一个邻点，我们不妨设 $u_1 = u_2$，但此时 b_1-a_1-u_1-a_2-b_2 是 P_5 的一个副本，矛盾。因此 u_1 在 $V(C_2)$ 中没有邻点；同理， u_2在 $V(C_1)$ 中也没有邻点。如果 u_1, u_2 不相邻，则 b_1-a_1-u_1-v-u_2 是 P_5 的一个副本；如果 u_1, u_2相邻，则 b_1-a_1-u_1-u_2-a_2 是 P_5 的一个副本。无论哪种情况都导致矛盾。这证明了第一个断言。对于第二个断言，令 $u \in N(v)$；那么由 (1)， u在 $M(v)$ 中有一个邻点。这证明了 (3)。

(4) 对每个 $v \in V(G)$， $G[M(v)]$ 都没有支配 3-路径。因此 $\alpha(G) = 3$.

设 a-b-c 是 $G[M(v)]$ 的一条支配 3-路径。我们断言， a-b-c 在 G 中也具有支配性。为证明这一点，只需证明 c 的每个不属于 $M(v)$ 的邻点 u 都与 a、b 中的一个相邻。否则， a-b-c-u-v 就是 P_5 的一个副本，矛盾。这证明了 (4) 的第一个断言。对于第二个断言，设 $\alpha(G) \geq 4$，并选取属于一个大小为四的稳定集的 $v \in V(G)$。那么 $G[M(v)]$ 有一个大小为三的稳定集；由 (3)，它是连通的；而正如我们刚才证明的，它没有支配 3-路径，这与 $|G|$ 的极小性矛盾。这证明了 (4)。

(5) 对于每条边 uv，如果 $w \in N(u) \setminus N[v]$ 且 C 是 $G \setminus (N(u) \cup N(v)$ 的一个连通分量，那么 w 与 $V(C)$ 完全邻接或完全不相邻。

假设不然；那么 C 中存在一条边 ab，使得 w 与 a 相邻而不与 b相邻。但此时v-u-w-a-b 是 P_5的一个副本，矛盾。这证明了（5）。

(6) 如果 v属于一个大小为三的稳定集，那么对于每条边 uv， $G \setminus (N(u) \cup N(v))$ 恰有两个连通分量，且二者都是完全图。

显然它至多有两个连通分量，因为 $\alpha(G) = 3$；同理，如果 $G \setminus (N(u) \cup N(v))$ 有两个连通分量，那么它们都是完全图。因此，我们只需证明 $G \setminus (N(u) \cup Nv)$ 至少有两个连通分量。

令 $C = G \setminus (N(u) \cup N(v))$。假设 C至多有一个连通分量。由 (1)， $N(u) \setminus N[v]$ 非空。令 $w \in N(u) \setminus N[v]$；那么，由于 v-u-w 不是支配的，可知 w 有一个邻点

属于 $V(C)$，因此由 (5) 可知其完全邻接于 $V(C)$。所以 C 非空，且 $N(u) \setminus N[v]$ 完全邻接于$V(C)$。现在，$M(v) = V(C) \cup (N(u) \setminus N[v])$，并且 $V(C)$ $N(u) \setminus N[v]$均非空。若存在一条诱导路径 a-b-c，其中 $a, c \in N(u) \setminus N[v]$ 且 $b \in V(C)$，则可知 a-b-c在 $G[M(v)]$,中是支配的，这与 (4) 矛盾；同理，不存在一条诱导路径 a-b-c，其中 $b \in N(u) \setminus N[v]$ 且$a, c \in V(C)$。因此，$V(C) \cup (N(u) \setminus N[v])$ 是一个团，这与 v 属于一个大小为三的稳定集相矛盾。这就证明了 (6)。

(7) 每个顶点都属于一个大小为三的稳定集；因此，对于每条边 uv, $G \setminus (N(u) \cup N(v))$，它恰有两个连通分量，且二者都是完全图。

令 X 为所有大小为三的稳定集的并。若 $X \neq V(G)$，则由于 G 连通，存在一条边 uv，其具有 $u \notin X$ 和 $v \in X$。但由 (6)，$G \setminus (N(u) \cup N(v))$ 恰有两个连通分量，且二者都是完全图，因此 u 属于一个大小为三的稳定集，这与假设矛盾。由此证明了 (7)。

(8) 对于每条边 uv, $G \setminus (N(u) \cup N(v))$，其由两个不相邻的顶点组成。

由 (7)，$G \setminus (N(u) \cup N(v))$ 恰有两个连通分量 C_1, C_2，且二者都是完全图。对于 $i = 1$，取 2，令 X_i 为 $N(u) \cup N(v)$ 中那些在 $V(C_i)$ 中有邻点的顶点所组成的集合。假设 $c_1, c_1' \in V(C_1)$ 互不相同。将 (7) 应用于边 $c_1 c_1'$，可得 $X_2 \subseteq X_1$（否则，同时与 c_1, c_1' 不相邻的顶点集会诱导一个连通子图）。因此，$N(u) \setminus N(v)$ 完全邻接于 $V(C_1)$。此外，再次将 (7) 应用于同一条边，可得 $N(u) \setminus N[v] \subseteq X_1$ 和 $N(v) \setminus N[u] \subseteq X_1$（因为对于每个 $w \in N(u) \setminus N[v]$，若 $w \notin X_1$，则 $\{v, u, w\}$ 会诱导一条三顶点路径，这与 (7) 矛盾）。

假设某个 $w \in N(u) \setminus N[v]$ 属于 X_2。那么根据 (5)，w 与 $V(C_2)$ 完全邻接，而同时与 w, c_1 不相邻的顶点集是包含 v 的 $N[v]$ 的子集（因为 w 与 $V(C_1 \cup C_2)$ 完全邻接，且 c_1 与 $N(u) \setminus N(v)$ 完全邻接）；因此，该子集诱导出一个连通子图，这与 (7) 矛盾。因此，$X_2 \subseteq N(u) \cap N(v)$。若 $c_2, c_2' \in V(C_2)$ 不同，则同时与 c_2, c_2' 不相邻的顶点集包含 u, v, w（其中 $w \in N(u) \setminus N[v]$），而这三个顶点诱导出一条路径，这与 (7) 矛盾。因此，$|C_2| = 1$, $C_2 = \{c_2\}$ 如此。选取与 c_2相邻的 $d \in N(u) \cap N(v)$；那么 u-d-c_2 是支配的，矛盾。由此证明了 (8)。

由 (8) 以及 $\alpha(G) = 3$ 可知，G 的补图是双联的；因此由 2.4，G有一个零度顶点，这与其连通相矛盾。这就证明了 3.1。 ∎

4 界定警察数

为了证明我们的主要结果，我们需要以下定义及其相关的两个引理。

我们称图 G 的子图 H 为 P_3-连通的，如果 H 是连通的，并且对于任意一对边 $e, f \in E(H)$，都存在一个边序列 $e = e_0, e_1, \ldots, e_k = f$，使得对于每个 $0 \leq i \leq k-1$，e_i 和 e_{i+1} 都是 G 中某个诱导 P_3 的两条边。注意，P_3- 连通这一性质并非 H 的内在性质，而取决于 G：尽管 H 不必是 G 的诱导子图，但定义中的边对必须在 G 中构成诱导路径，而不只是在 H 中构成诱导路径。

4.1. 若 H 是 P_5-自由图 G 的一个 P_3-连通子图，且 $u, v \in V(G) \setminus V(H)$ 满足$uv \in E(G)$，u 与 $V(H)$ 完全不相邻，并且某条边 $e \in E(H)$ 的端点都是 v 的非邻点，那么 v 与 $V(H)$ 完全不相邻。

证明。反设 v 在 $V(H)$ 中有一个邻点。由于 H 至少包含两个顶点（因为它包含 e），且是连通的，因此存在 $f \in E(H)$，其端点是 v 的邻点。设 $e = e_0, e_1, \ldots, e_k = f$ 是 P_3-连通性的定义中所给出的边序列（必然有 $k \geq 1$）。由于 v 与 e_0 的端点不相邻，却与 e_k 至少一个端点相邻，因此存在 e_i, e_{i+1}，使得 v 与 e_i 的端点不相邻（设为 x, y），但与 e_{i+1} 的另一端点相邻（设为 z）。根据该边序列的选取，x 与 z 不相邻。于是，u-v-z-y-x 是 G 中一个诱导的 P_5，这与假设矛盾。至此，4.1 的证明完成。

∎

4.2. 若 H 是连通图 G 的一个 P_3-连通子图，且 $v \in V(G)$，则以下情形之一成立：

(4.2.1) 存在 G 的一个 P_3-连通子图 H'，使得 $H \subseteq H'$ 且 $v \in V(H')$；或(4.2.2) 存在 G 的一个 P_3-连通子图 H'，使得 $v \in V(H')$，且某个 $u \in V(H')$ 在 H' 中完全邻接于 $V(H)$；或(4.2.3) v 完全邻接于 $V(H)$。

证明。设 Q 是 G 中一条最短路径，其一端为 v，另一端位于 $V(H)$ 中。设 $v = v_0$-v_1-$\ldots$-v_ℓ 是 Q 的顶点集，其中 $v_\ell \in V(H)$。若 $\ell = 0$，即 $v \in V(H)$，则 $H' = H$ 满足 (4.2.1)，因此我们假设 $\ell \geq 1$。

现在假设 $v_{\ell-1}$ 在 $V(H)$ 中有一个非邻点。由于 H 是连通的，我们不妨设Q、v_ℓ 的选取满足：对于某个 $w \in V(H)$，有 $v_\ell w \in E(H)$ 且 $v_{\ell-1} w \notin E(G)$。我们断言，在这种情况下，$H' = Q \cup H$ 满足 (4.2.1)；下面验证 H'是 P_3-连通的。由于 Q是最短路径，它必然是诱导的，因此 Q 是 P_3-连通的。我们还知道 H 是 P_3-连通的。由于 $v_{\ell-1}v_\ell \in E(Q)$和 $v_\ell w \in E(H)$是 G 中的一个诱导 P_3 的两条边，因此 $Q \cup H$ 是P_3-连通的，正如所要证明的那样。

剩下要考虑的是 $v_{\ell-1}$ 完全邻接于 $V(H)$ 的情形。若 $\ell = 1$，则 $v = v_{\ell-1}$，且 (4.2.3) 成立，因此我们可以假设 $\ell \geq 2$。令 $u = v_{\ell-1}$，并令 H' 为 G 的一个子图，其中 $V(H') = V(Q) \cup V(H)$ 且 $E(H') = E(Q) \cup \{uw : w \in V(H)\}$。我们断言 H' 满足 (4.2.2)。事实上，在 H' 中，u 完全邻接于 $V(H)$；而 H' 是 P_3-连通的，因为 Q 是 P_3-连通的，并且每条边 $uw \in E(H') - E(Q)$ 都与边 $v_{\ell-2}u = v_{\ell-2}v_{\ell-1} \in E(Q)$ 一起构成 G 中的一个诱导 P_3。至此，4.2 的证明完成。 ∎

现在我们准备证明 1.1。

证明。反设存在一个连通的 P_5-自由图 G，在该图上逃犯有躲避两个警察的获胜策略，并选取满足 $|V(G)|$ 最小的这样的 G。通过一系列断言，我们将获得该图的若干性质，并由此得到所需的矛盾。

(1) $\alpha(G) > 2$。

为证明 (1)，只需注意：若 $\alpha(G) \leq 2$，则存在一个大小至多为二的支配集，两个警察可以从该支配集开始游戏，并在下一回合获胜，这就产生了矛盾。

(2) 在 G 中存在一条支配路径 a-b-r。

这直接由 1.2 和 (1) 得出。在证明的其余部分，我们将始终指固定的支配路径 a-b-r。

(3) 对于每个 $v \in V(G)$， $N(v)$ 中没有顶点完全邻接于 $G[M(v)$的一个连通分量 $]$.

反设存在 $u \in N(v)$，以及 $G[M(v)]$ 的一个连通分量 C，使得 u 与 C 的每个顶点都相邻。首先注意到， $G \setminus C$ 是连通的，因为 $V(G)$ 中所有与 C 相邻的顶点 $\setminus C$ 都在 $N(v)$ 中。由 G 的极小性可知，两个警察在 $G \setminus C$ 上存在获胜策略。我们将利用这一策略，为两个警察在 G 上定义一个获胜策略，从而得到矛盾。在 G 上进行游戏时，如果逃犯位于 $x \in V(G) \setminus C$，我们就说逃犯的影子 位于 x；如果逃犯位于 C 的某个顶点，则影子位于v。特别地，逃犯的影子始终位于 $G \setminus C$。我们将证明，逃犯的每次移动都会使其影子作出有效移动，也就是说，在游戏的每个回合，影子要么停留在当前顶点，要么移动到一个相邻顶点。在某个回合，假设逃犯从 x_1 移动到 x_2 （特别地， $x_1x_2 \in E(G)$）。

- 如果 $x_1, x_2 \in C$，那么逃犯的影子留在 v，这是一个有效的移动。
- 如果 $x_1, x_2 \notin C$，那么逃犯的影子也从 x_1 移动到 x_2，这是一个有效的移动
- 如果 $x_1 \in C$ 且 $x_2 \notin C$，我们注意到必然有 $x_2 \in N(v)$。因此，影子从 v移动到 x_2 是一个有效的移动。
- 如果 $x_1 \notin C$ 且 $x_2 \in C$，那么 $x_1 \in N(v)$，因此影子从 x_1 移动到 v 是一个有效的移动。

考虑警察在 G 上的策略：遵循在 $G \setminus C$ 上的获胜策略来抓捕逃犯的影子。一旦警察抓捕了逃犯的影子，他们要么已经抓捕了逃犯（如果逃犯和它的影子位于同一个顶点），要么逃犯位于 C，而它的影子位于 v。在后一种情况下，抓捕影子后，至少有一名警察位于 v。随后，另一名警察最终可以移动到 u，并抓捕逃犯，因为 u 完全邻接于 C。注意，在此期间，逃犯无法离开 C，否则会立即被位于 v的警察抓捕。这证明了 (3)。

注意，(3) 的证明是一个收缩（同态的一种特殊类型）论证，这是研究警察与强盗游戏时的标准工具。Berarducci 和 Intriglia [3] 证明了一个相当一般的版本，与这里给出的版本很接近。

(4) 对于每个 $v \in V(G)$， $G[M(v)]$ 都是连通的。

根据 (3)，这恰 好就是证明支配 3-路径存在性时 (3) 的第一部分。

(5) 存在一种两个警察在 G 上的策略，能够保证逃犯为了避免被抓捕而移动到 r。

由 (2) 可知 $N[r] \subseteq N[a] \cup N[b]$。由于 $ab \in E(G)$，这意味着 $G \setminus r$ 是一个连通图。根据 G的极小性，两个警察在 $G \setminus r$上存在获胜策略。(5) 中警察的策略是在逃犯尚未进入 r之前，一直在 G 上执行这一策略。如果逃犯始终没有进入 r，那么它最终会被抓捕，因为此策略限制在 $G \setminus r$上时是获胜策略。因此，逃犯最终会移动到 r （或者选择 r 作为其初始位置）。这就证明了 (5)。

在证明的其余部分，我们将构造一种策略，让两个警察尝试在 G 抓捕逃犯。然而，由于 $c(G) > 2$，我们可以假设逃犯拥有并正在采用一种躲避抓捕的策略。警察的策略将从采用 (5) 中的策略开始，并令 $c_1, c_2 \in V(G)$ 表示逃犯移动到 r 后警察的位置。注意， $c_1 = c_2$ 是可能的。

(6) $c_1, c_2 \in M(r)$.

如果 (6) 不成立，两个警察中的一个就能在下一回合抓捕逃犯，这将构成矛盾。

（7）对于每个 $i \in \{1,2\}$，若 $c_i \in N[a]$，则 $c_{3-i} \notin N$（b）。

反设对于某些 $i \in \{1,2\}$、 $c_i \in N[a]$ 和 $c_{3-i} \in N$（b），上述结论不成立。于是警察可以在一个回合内从 $\{c_1, c_2\}$ 移动到 $\{a, b\}$。回合开始时逃犯位于 r，因此在其回合结束后必然位于 $N[r]$。由 (2)， $N[r] \subseteq N[a] \cup N[b]$，于是警察可以在下一个回合抓捕逃犯。矛盾由此证明了 (7)。

我们称 G 的子图 H 为一个圈套，如果

(H1) H 是 P_3-连通的，(H2) V（H） $\subseteq M$（r），(H3) 存在 $d_1d_2 \in E$（H），使得 $d_1 \in N[c_1]$ 且 $d_2 \in N[c_2]$，(H4) $a \in V$（H），且 (H5) V（H） $\cap M$（b） $\neq \emptyset$。

我们通过证明：如果存在一个圈套，那么两个警察就能抓捕逃犯；最后再证明圈套确实存在，来完成证明。

(8) 不存在圈套。

反设存在一个圈套 H。警察当前位于 c_1, c_2。按照 (H3)，警察移动到边 $d_1d_2 \in E(H)$ 的两个端点。由于 H 连通、至少有一条边，并且 $a \in V(H)$，存在一条与 a相接的边 $f \in E(H)$。由 (H1)，存在 H中的边序列 $d_1d_2 = e_0, e_1, e_2, \ldots, e_k = f$，使得对每个 $0 \leq i \leq k-1$， e_i和 e_{i+1}都是 G中某个诱导的 P_3的两条边。不妨设 $e_0, \ldots e_{k-1}$都不与 a相接。接下来的 k 个回合中，警察将沿着这条边序列移动。换言之，在 i个回合后（对于 $0 \leq i \leq k$），警察将分别位于边 e_i的两个不同端点。最后，警察将移动到 $\{a, b\}$。注意，由 (H2)， $b \notin V(H)$。我们指出，由于逃犯采用的是一种能够避免被抓捕的策略，它绝不会进入警察的闭邻域。

令 r' 为逃犯在 $M(b)$ 中访问的第一个顶点，并令 R 为逃犯此前所有位置组成的集合。注意到 $R \subseteq N[b]$。这样的 r' 存在，因为一旦有一名警察位于 b（这在上文所述的策略中总会发生），逃犯就必须移动到 $M(b)$，否则下一回合就会被抓捕。

我们声称 R 与 $V(H)$ 完全不相邻。反设 R 中至少有一个顶点与 $V(H)$ 中的某个顶点相邻。由 (H2)， r 在 $V(H)$ 中没有邻点，因此必定存在逃犯的连续两个位置 r_1、 $r_2 \in R$，使得 r_1 在 $V(H)$ 中没有邻点（且它本身不在 $V(H)$ 中），而 r_2 在 $V(H)$ 中至少有一个邻点。由于 $r_2 \in N[b]$，逃犯移动到 r_2时，警察不在 $\{a, b\}$ 上，因此他们分别位于 H 的一条边的两个不同端点上。这两个端点都是 r_2 的非邻点，因此由 4.1 可知， r_2 在 $V(H)$ 中没有邻点。这就产生了矛盾，从而证明了我们的断言。

若逃犯首次移动到 r'时，警察位于 H 的一条边上，则同样的论证可得， r' 在 V（H）中没有邻点；而由 (H4)，特别可知 $r'a \notin E$（G）。否则，逃犯移动到 r'时，警察位于 a、 b 上，因此 $r'a \notin E$（G）。于是，在所有情况下都有 $r'a \notin E$（G）。

由于 $N[r] \subseteq N[a] \cup N[b]$，可得 $r'r \notin E(G)$。由于 $G[R]$ 连通，且 r' 在 R 中有邻点，因此存在一条诱导路径 r_1-r_2-r'，使得 r_1、$r_2 \in R$。假设存在一条边 $xy \in E(H)$，使得 $r'x \in E(G)$，但 $r'y \notin E(G)$。那么 r_1-r_2-r'-x-y 是一条诱导的 P_5。因此，不存在这样的边。由于 H 连通且 $r'a \notin E(H)$（特别地，r' 不完全邻接于 $V(H)$），可得 r' 完全不邻接于 $V(H)$。由于 $ab \in E(G)$ 且 $a \in V(H)$，可得 b 并非与 H 完全不相邻。然而，由 (H5)，b 并非完全邻接于 H。由于 H 连通，存在 $xy \in E(H)$，使得 $bx \in E(G)$，但 $by \notin E(G)$。于是 r'-r_2-b-x-y 是一条诱导的 P_5。这个矛盾完成了 (8) 的证明。

仍需证明 G 中存在一个圈套，这就导出了矛盾。

(9) 存在一个圈套。

令 $G' = G[M(r)]$。由 (4)，G' 是连通的。令 P 是 G' 中一条端点为 c_1 和 c_2 的诱导路径。于是 P 是 P_3-连通的，并且 $c_1 = c_2$ 或 P 含有一条满足 (H3) 的边，因为它至多有三条边。

先假设 $c_1 \in M(b)$。将 4.2 应用于 G'，取 $H = P$ 和 $v = a$，要么可以找到满足 (4.2.1) 或 (4.2.2) 的子图 H'，要么得到 $c_1, c_2 \in N[a]$。在第一种和第二种情况下，H' 是一个圈套；其中只有性质 (H3) 需要稍费些功夫验证。若 H' 满足 (4.2.1) 且 $c_1 \neq c_2$，则如上所述，P 含有一条满足 (H3) 的边。若 H' 满足 (4.2.1) 且 $c_1 = c_2$，则对于 H' 中 c_1 的任意邻点 x，c_1x 都满足 (H3)；注意，由于 H' 的连通性，x 存在，除非 $|V(H')| = 1$，也就是说 $a = c_1 = c_2$，而这与 $c_1 \in M(b)$ 矛盾。若 H' 满足 (4.2.2)，且 $u \in V(H')$ 在 H' 中完全邻接于 $V(P)$，则 uc_1 满足 (H3)。在剩下的情况下，c_1，$c_2 \in N[a]$ 和 $G'[\{c_1, a\}]$ 是一个圈套。

因此，我们可以假设 $c_1, c_2 \in N(b)$。由 (7) 可知 $c_1, c_2 \notin N[a]$。由 (3) 可知存在 $d \in V(G') \cap M(b)$。首先假设 $\{c_1, c_2, d\}$ 不是一个大小为三的团。将 4.2 应用于带有 $H = P$ 和 $v = d$ 的 G'，可得 G' 的一个 P_3-连通子图 H^*，使得 $c_1, c_2, d \in V(H^*)$，且 H^* 包含一条端点为 c_1 和 c_2、至多有三条边的路径。事实上，若 (4.2.1) 或 (4.2.2) 成立，则 $H^* = H'$ 具有所需性质。若 (4.2.3) 成立，则 $H^* = G'[\{c_1, c_2, d\}]$ 要么是一个诱导的 P_2（若 $c_1 = c_2$），要么是一个诱导的 P_3；因为 d 与 c_1 和 c_2 相邻，而 $\{c_1, c_2, d\}$ 不是一个大小为三的团，所以 H^* 同样符合要求。

现在我们将 4.2 应用于 G'、$H = H^*$ 和 $v = a$。由于 c_1、$c_2 \notin N[a]$ 和 c_1、$c_2 \in V(H^*)$，a 并未完全邻接于 $V(H^*)$，且 (4.2.3) 不成立。因此，(4.2.1) 或 (4.2.2) 成立，也就是说，存在 G' 的一个 P_3-连通子图 H'，使得 c_1、c_2、d、$a \in V(H')$，并且 H' 仍包含一条端点为 c_1 和 c_2、至多有三条边的路径。容易验证，H' 是一个圈套。

剩下的情况是 $C = \{c_1, c_2, d\}$ 为一个大小为三的团。我们采用与 4.2 的证明类似的方法。设 Q 是一条从 a 到 C 的最短路径，其顶点为 $a = v_0$-v_1-$\ldots$-v_ℓ，其中 $v_\ell \in C$。由于 c_1、$c_2 \notin N[a]$，我们有 $a \notin C$，因此 $\ell \geq 1$。

首先假设 $\ell \geq 2$，并令 H 为由 $V(H) = V(Q) \cup C$ 定义的 G' 的子图，且

$$E(H) = E(Q) \cup \{v_\ell u : u \in V(C), v_{\ell-1}u \notin E(G')\} \cup \{v_{\ell-1}u : u \in V(C), v_{\ell-1}u \in E(G')\}$$

由于 Q 是 P_3-连通的，H 是连通的，并且 $E(H) - E(Q)$ 中的每条边都与边 $v_{\ell-2}v_{\ell-1}$ 或 $v_{\ell-1}v_\ell$ 在 G 中构成一个诱导的 P_3，因此 H 是 P_3-连通的。注意，$V(H) \subseteq V(G') = M(r)$ 和 $a, d \in V(H)$。下面说明应如何选择边才能满足 (H3)。如果 C 中至少有一条边的两个端点都属于 C，且该边属于 H，就选取这条边。否则，根据 H 的定义，$v_{\ell-1}$ 必然完全邻接于 C，因此可以选取 $c_1v_{\ell-1}$。所以，H 是一个圈套。

剩下的情况是 $\ell = 1$。在这种情况下， a 在 C 中有一个邻点，因此 ad 是从 a 到 C 的唯一一条边，因为 c_1, $c_2 \notin N[a]$。于是， $H = G'[\{a, d, c_1\}]$ 是 G' 中的一个诱导的 P_3，且边 dc_1 满足 (H3)。由此可知，在最后这种情况下， H 是一个圈套。

至此，(9) 的证明也就完成了，定理的证明亦然。 ∎

致谢

这项研究的部分工作是在 2022 年 12 月于贝莱尔斯研究所举办的第二届 2022 年巴巴多斯图论研讨会期间，以及在 2023 年 1 月于奥伯沃尔法赫数学研究所举办的组合数学研讨会期间完成的。

参考文献

[1] M. Aigner 和 M. Fromme。《警察与强盗游戏》。离散应用数学，8(1):1 – 12，1984。doi:10.1016/0166-218X(84)90073-8.[2] T. Andreae。关于在排除某个图 minor 的图上进行的追捕游戏。组合理论杂志 *B* 辑，41(1):37–47，1986年8月。doi:10.1016/0095-8956(86)90026-2.[3] A. Berarducci 和 B. Intrigila。图的警察数。应用数学进展，14(4):389–403，1993。doi:10.1006/aama.1993.1019.[4] P. Erdős 和 A. Hajnal。Ramsey 型定理。离散应用数学，25(1-2):37–52，1989年10月。doi:10.1016/0166-218X(89)90045-0.[5] L. Esperet。图染色、流与完美匹配。授衔论文，格勒诺布尔阿尔卑斯大学，2017。URL: https://theses.hal.science/tel-01850463/document.[6] C. Godsil 和 G. Royle。代数图论，数学研究生教材第207卷。Springer New York，纽约州纽约，2001。doi:10.1007/978-1-4613-0163-9.[7] U. K. Gupta、S. Mishra 和 D. Pradhan。禁用 P_5-自由图上的警察与逃犯，2022年11月。URL: http://arxiv.org/abs/2111.06079.[8] A. J. Hoffman 和 R. R. Singleton。关于直径为2和3的 Moore 图。*IBM* 研究与开发杂志，4(5):497–504，1960。doi:10.1147/rd.45.0497.[9]C. T. Hoàng、M. Kamiński、V. Lozin、J. Sawada 和 X. Shu。多项式时间内判定 k-可着色的 P_5-自由图。$Algorithmica$，57(1):74–81，2010年5月。doi:10.1007/s00453-008-9197-8.[10] R. Javadi 和 A. Momeni。爪形、无偶洞图上的警察与逃犯游戏，2022年1月。URL: http://arxiv.org/abs/2112.07503.[11]G. Joret、M. Kaminski 和 D. O. Theis。禁用（诱导）子图的图上的警察与逃犯游戏。离散数学论丛，5，2010年9月。doi:10.11575/cdm.v5i2.62032.

[12] M. Liu。禁用诱导子图的图的警察数。*arXiv: 1908.11478*，2019。URL: https://arxiv.org/abs/1908.11478.[13]M. Masjoody。限制余图中的逃犯，2020年9月。URL: http://arxiv.org/abs/2006.08941.[14] M. Masjoody 和 L. Stacho。具有一组禁用诱导子图的图上的警察与强盗。《理论计算机科学》，第186–194页，2020。doi:10.1016/j.tcs.2020.06.032.[15] R. Nowakowski 和 P. Winkler。图上的顶点间追逐。《离散数学》，43(2):235 – 239，1983。doi:10.1016/0012-365X(83)90160-7.[16]J. Petr、J. Portier 和 L. Versteegen。关于警察与强盗、独立数、支配数和直径的一则注记。《离散数学》，346(1):113175，2023年1月。doi:10.1016/j.disc.2022.113175.[17] A. Quilliot。第三阶段论文。博士论文，巴黎第六大学，1978。[18] V. Sivaraman。Gyárfás路径论证的一种应用。《离散数学》，342(8):2306– 2307，2019。doi:10.1016/j.disc.2019.04.020.[19] V. Sivaraman。无长洞图的警察数。*arXiv: 2001.00477*，2019年12月。URL: http://arxiv.org/abs/2001.00477.[20] V. Sivaraman 和 S. Testa。$2K_2$-自由图的警察数。*arXiv: 1903.11484*，2019。URL: https://arxiv.org/abs/1903.11484.[21] J. Turcotte。 $2K_2$-自由图上的警察与强盗。《离散数学》，345(1):112660，2022年1月。doi:10.1016/j.disc.2021.112660.