索博列夫的贝尔特拉米系数的极值性质与曲线泛函的畸变

Samuel L. Krushkal

Abstract. 拟共形分析应用及其数值方面的一个重要问题，是建立算法，以显式或近似方式确定与共形映射和拟共形映射内在相关的基本拟不变曲线泛函和解析泛函，例如它们的 Teichm¨uller 范数和格伦斯基范数、弗雷德霍姆特征值，以及相关拟圆的拟反射系数。

我们证明了一种新型一般定理，回答了这一问题；该定理适用于任意拟共形域中的单叶函数，并给出其应用。在圆盘映射的情形下，结果得以加强，并由此得到一种新型极值贝尔特拉米系数。

arXiv:2301.13357v1 [math.CV] 31 Jan 2023

2020年数学主题分类：主要分类：30C62，30C75；次要分类：30F60，32F45，32G15，46G20

关键词和短语：单叶函数、格伦斯基算子、拟共形延拓、Sobolev 空间、调和贝尔特拉米系数、拟圆、拟反射、普遍 Teichm¨uller 空间

1. 预备知识

1.1. 前言。几何复分析中一个重要且尚未解决的问题，是建立用于显式或近似确定基本曲线型泛函和解析泛函的算法。这些泛函与共形映射和拟共形映射内在相关，例如它们的 Teichm¨uller 范数和格伦斯基范数、弗雷德霍姆特征值，以及相关拟圆的拟反射系数。对于位势理论而言，这一点同样重要。然而，即使对于凸多边形，这个问题也尚未得到完全解决。

这个问题本身也具有重要意义，因为它与泰希米勒空间的几何以及逼近理论相关，对于拟共形分析的数值研究也至关重要。

本文研究不具有典范泰希米勒延拓的函数，并明确解决了所述问题，适用于一大类自然的、支集位于一般拟共形域中的贝尔特拉米系数；换言之，适用于在任意拟圆盘上具有拟共形延拓的单叶函数。研究结果得出了一种新型的极值贝尔特拉米系数。

1.2. 单叶函数的泰希米勒范数与格伦斯基范数。我们从以下单叶函数类 Σ_Q 开始： $f(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots$，定义在圆盘 $\mathbb{D}^* = \{z \in \widehat{\mathbb{C}}$ 内： $|z| > 1\}$ 可跨越边界单位圆 $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^*$ 作拟共形延拓，因此可延拓到整个黎曼球面 $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$。为了在局部

日期：2023年2月1日（SobolBel1.tex）。

关于 $\mathbb{C}$的一致收敛拓扑下获得紧性，必须添加第三个规范化条件，例如，$f(0) = 0$。

延拓的贝尔特拉米系数支撑于单位圆盘 $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$，并遍历单位球

$$\mathrm{Belt}(\mathbb{D})_1 = \{\mu \in L_\infty(\mathbb{C}) : \ \mu(z)|\mathbb{D}^* = 0, \ \ \|\mu\|_\infty < 1\}.$$

每个 $\mu \in \mathrm{Belt}(\mathbb{D})_1$ 都唯一确定一个 Beltrami方程$\overline{\partial} w = \mu \partial w$ 在 $\mathbb{C}$ 上的同胚解（ $\mathbb{C}$ 的拟共形自同构），该解满足规范化条件 $w^\mu \in \Sigma_Q$、 $w^\mu(0) = 0$。

这些函数的 Schwarzian导数

$$S_w(z) = \Big(\frac{w''(z)}{w'(z)}\Big)' - \frac{1}{2}\Big(\frac{w''(z)}{w'(z)}\Big)^2, \quad z \in \mathbb{D}^*$$

属于复巴拿赫空间 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbb{D}^*)$，该空间由圆盘 $\mathbb{D}^*$ 上双曲有界全纯函数构成，其范数为

$$\|\varphi\|_{\mathbf{B}} = \sup_{\mathbb{D}} (|z|^2 - 1)^2 |\varphi(z)|$$

并遍历 B 中的一个有界域，该空间刻画了万有 Teichm¨uller 空间 T。空间 B 是伯格曼空间 $A_1(\mathbb{D}^*)$ 的对偶空间，后者是 $L_1(\mathbb{D}^*)$ 的一个子空间，由 $\mathbb{D}^*$ 上的可积全纯函数（二次微分 $\varphi(z)dz^2$ ）构成。注意， $\varphi(z) = O(z^{-4})$ 在 $z = \infty$ 附近。Teichm¨uller 空间理论所需的结果可参见例如 [7], [8], [10]。

对任意 $f \in \Sigma_Q$，根据展开式定义其格伦斯基系数 α_{mn}

$$\log \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn} z^{-m} \zeta^{-n}, \quad (z, \zeta) \in (\mathbb{D}^*)^2, \tag{1}$$

其中取对数函数的主值分支。这些系数满足不等式

$$\Big| \sum_{m,n=1}^{\infty} \sqrt{mn}\ \alpha_{mn} x_m x_n \Big| \le 1 \tag{2}$$

对于 Hilbert空间 l^2 的单位球面 $S(l^2)$ 中任意序列 $\mathbf{x} = (x_n)$，其范数为$\|\mathbf{x}\| = \big(\sum |x_n|^2\big)^{1/2}$；反过来，不等式 (2) 对于 $\mathbb{D}^*$ 中的局部$_1$单叶函数的单叶性也足以成立（参见 [9], [23]）。

在所有将 f 拟共形延拓$\frown w^\mu(z)$ 到整个平面 $\mathbb{C}$ （构成 f等价类）的拟共形延拓中，其膨胀系数 $k(w^\mu) = \|\mu\|_\infty$ 的最小值 $k(f)$ 称为该函数的 Teichm¨uller 范数。因此，

$$k(f) = \tanh d_{\mathbf{T}}(\mathbf{0}, S_f),$$

其中 $d_{\mathbf{T}}$ 表示 T 上的 Teichm¨uller-Kobayashi 度量。该量不小于格伦斯基范数

$$\varkappa(f) = \sup \Big\{ \Big| \sum_{m,n=1}^{\infty} \sqrt{mn}\ \alpha_{mn}(f) x_m x_n \Big| : \ \mathbf{x} = (x_n) \in S(l^2) \Big\}$$

由 $\varkappa(f) \le k(f)$ 给出。对于大多数函数 f，我们有强不等式 $\varkappa(f) < k(f)$（此外，满足该不等式的函数构成了 Σ 的稠密子集），而范数相等的函数在许多应用中起着至关重要的作用。

只有当任意极值贝尔特拉米系数 μ_0 for f （即满足$\|\mu_0\|_\infty = k(f)$）满足以下条件时，这些范数才相等

$$\|\mu_0\|_\infty = \sup\left\{\left|\iint_{\mathbb{D}} \mu_0(z)\psi(z)dxdy\right| : \ \psi \in A_1^2(\mathbb{D}),\ \|\psi\|_{A_1(\mathbb{D})} = 1\right\} = \varkappa(f) \quad (z = x + iy). \tag{3}$$

这里， $A_1(\mathbb{D})$ 表示 $L_1(\mathbb{D})$ 中由可积全纯函数（即 $\mathbb{D}$ 上的二次微分 $\psi(z)dz^2$ ）构成的子空间，而 $A_1^2(\mathbb{D})$ 是其中由 $\mathbb{D}$ 上零点阶数均为偶数的 ψ 构成的子集，也就是说，由全纯函数的平方构成（例如参见 [11], [13], [16], [20]）。注意，每个 $\psi \in A_1^2(\mathbb{D})$ 都具有如下形式

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi}\sum_{m+n=4}^{\infty} \sqrt{mn}\ x_m x_n z^{m+n-2} \tag{4}$$

以及 $\|\psi\|_{A_1(\mathbb{D})} = \|\mathbf{x}\|_{l^2} = 1$，其中 $\mathbf{x}$ 属于 (x_n)。

1.3. 推广。Grunsky 不等式的方法已向多个方向推广，甚至推广到了具有有限个边界分支的带边黎曼曲面 X （例如参见 [23], [26]）。我们将讨论这些不等式在无界单连通双曲域中的情形。

设 $L \subset \mathbb{C}$ 是一条有向有界拟圆，将点 0 和 ∞ 分隔开。记其内部区域和外部区域分别为 D 和 D^* （因此 $0 \in D$, $\infty \in D^*$）。那么，若 $\delta_D(z)$ 表示 z 到 D 边界的欧几里得距离，而 $\lambda_D(z)|dz|$ 表示其高斯曲率为 -4 的双曲度量，则有

$$\frac{1}{4} \le \lambda_D(z)\delta_D(z) \le 1. \tag{5}$$

右侧不等式由施瓦茨引理推出，左侧不等式则由 Koebe 四分之一定理推出。

对于这样的区域 $D^* \ni \infty$，展开式 (1) 具有如下形式

$$-\log\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\beta_{mn}}{\sqrt{mn}\ \chi(z)^m\ \chi(\zeta)^n},$$

其中 χ 表示将 D^* 共形映射到圆盘 $\mathbb{D}^*$ 的共形映射，使得 $\chi(\infty) = \infty$, $\chi'(\infty) > 0$（参见 [23]）。

相应地，广义 Grunsky 范数定义为

$$\varkappa_{D^*}(f) = \sup\left\{\left|\sum_{m,n=1}^{\infty} \beta_{mn}\ x_m x_n\right| : \ \mathbf{x} = (x_n) \in S(l^2)\right\}.$$

现在考虑区域 D^* 中的单叶函数类 $\Sigma_Q(D^*)$，其在 $z = \infty$ 附近具有展开式 $f(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots$，并可拟共形延拓到补区域 D。与上述类似，我们要求这些延拓满足 $f(0) = 0$。它们的贝尔特拉米系数遍历球

$$\mathrm{Belt}(D)_1 = \{\mu \in L_\infty(\mathbb{C}) : \ \mu(z)|D^* = 0, \ \ \|\mu\|_\infty < 1\}.$$

系数 $\mu_0 \in \mathrm{Belt}(D^*)_1$ 在其所属类别中是极值的，当且仅当

$$\|\mu_0\|_\infty = \sup\left\{\left|\iint_{D^*} \mu_0(z)\psi(z)dxdy\right| : \ \psi \in A_1(D^*),\ \|\psi\|_{A_1} = 1\right\},$$

与式 (3) 类似，等式 $\varkappa_{\mathbb{D}^*}(f^\mu) = k(f^\mu)$ 成立，当且仅当

$$\|\mu\|_\infty = \sup\left\{\left|\iint_D \mu(z)\psi(z)dxdy\right| : \ \psi \in A_1^2(D),\ \|\psi\|_{A_1(D)} = 1\right\} = \varkappa_D(f).$$

此外，如果 f 的等价类是以 D^* 为基点的空间 T 中的一个施特雷贝尔点，这意味着该类包含 Teichm¨uller 极值延拓 $f^{k|\psi_0|/\psi_0}$，且 $\psi_0 \in A_1(D)$，那么必然有 $\psi_0 = \omega^2 \in A_1^2$（参见 [11], [16], [21], [28]）。施特雷贝尔点在任意 Teichm¨uller 空间中稠密，见 [8]。

对于任意拟圆盘 D，相应的集合 $A_1^2(D)$ 的刻画与式 (4) 类似，但方式更为复杂（见 [17]）。

假设 $\mu_0 \in \mathrm{Belt}(D)_1$ 在其等价类中是极值的，但不属于 Teichm¨uller 类型。若点 $z_0 \in \partial D$ 对 μ_0 是本质的（或称实质的），则对任意 $\varepsilon > 0$，都存在 z_0 的一个邻域 U_0，使得

$$\sup_{D^*\setminus U_0} |\mu_0(z)| < \|\mu_0\|_\infty - \varepsilon;$$

因此 最大膨胀 $k(w^{\mu_0}) = \|\mu\|_\infty$ 可通过趋近该点在 D 处取得 .

此外，存在一个序列 $\{\psi_n\} \subset A_1(D)$，使得 $\psi_n(z) \to 0$ 在 D 上局部一致收敛，但对于任意 n，$\|\psi_n\| = 1$，并且

$$\lim_{n\to\infty} \iint_D \mu_0(z)\psi_n(z)dxdy = \|\mu_0\|_\infty.$$

这类序列称为退化序列。

本质点的像是两条拟共形弧的公共点，它们可以是螺旋型的。

1.4. 弗雷德霍姆特征值与拟反射。Teichm¨uller 范数和格伦斯基范数与拟共形反射、弗雷德霍姆特征值以及拟共形曲线的其他拟不变量有着内在联系。我们简要概述主要概念；详情参见例如 [2], [12], [17], [22]。

拟共形反射（或拟反射）是球面 $\mathbb{C}$ 上反转方向的拟共形同胚，它们逐点保持某个（定向的）拟圆 $L \subset \mathbb{C}$，并交换其内部区域与外部区域。对 L 定义其反射系数

$$q_L = \inf k(f) = \inf \|\partial_z f/\partial_{\overline{z}} f\|_\infty,$$

取 在所有跨越 L 的拟反射中取下确界。由于 [2], [22], 膨胀系数 n

$$Q_L = (1 + q_L)/(1 - q_L) \geq 1$$

等于以下量

$$Q_L = (1 + k_L)^2/(1 - k_L)^2, \tag{6}$$

其中 k_L 是所有保向拟共形自同构 f_* 中将单位圆映到 L 的映射的最小膨胀系数，且 $k(f_*) = \|\partial_{\overline{z}} f_*/\partial_z f_*\|_\infty$。

膨胀系数为 Q_L 的反射是极值的。Ahlfors 确立了一个重要且非常实用的事实：任何拟圆也都存在一个具有某个系数 $C(q_L)$ 的 Lipschitz 连续拟反射（见 [2]）。

^有向光滑闭若尔当曲线 $L \subset \mathbb{C}$ 的弗雷德霍姆特征值 ρ_n 是其双层位势的特征值。这些值在许多应用中都至关重要。

最小正特征值 $\rho_L = \rho_1$ 与共形映射和拟共形映射自然相关，并且可对任意定向的闭约旦曲线 L 定义如下:

$$\frac{1}{\rho_L} = \sup \frac{|\mathcal{D}_G(u) - \mathcal{D}_{G^*}(u)|}{\mathcal{D}_G(u) + \mathcal{D}_{G^*}(u)},$$

其中， G 和 G^* 分别是 L的内部和外部； $\mathcal{D}$ 表示狄利克雷^积分，上确界取遍所有在 $\mathbb{C}$ 上连续且在$G \cup G^*$上调和的函数 u 。

ρ_L 的一个粗略上界由阿尔福斯不等式给出:

$$\frac{1}{\rho_L} \leq q_L,$$

其中， q_L 表示跨越 L [1]的拟反射的最小膨胀系数。

定量估计拟圆的弗雷德霍姆特征值 ρ_L 的一种基本工具是 K¨uhnau-Schiffert 定理 [20], [25], ，该定理指出，值 ρ_L 与 L外部区域的黎曼映射函数的格伦斯基范数 $\varkappa(f)$互为倒数。

对于所有函数 $f \in S_Q$ （即在圆盘 $\mathbb{D}^*$ 内单叶），若 $k(f) = \varkappa(f)$，则其精确显式值为

$$q_{f(\mathbb{S}^1)} = \frac{1}{\rho_{f(\mathbb{S}^1)}} = \varkappa(f). \tag{7}$$

1.5. 调和与伪调和贝尔特拉米系数。阿尔福斯-魏尔定理以施瓦济导数的形式强化了内哈里关于单叶性的经典结果：每个满足 $\|\varphi\|_{\mathbf{B}} < 2$ 的函数 $\varphi \in \mathbf{B}(\mathbb{D})$，都是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内某个单叶函数 $f(z)$ 的施瓦济导数；并且函数 f 可拟共形延拓到圆盘 $\mathbb{D}^*$ 上，其贝尔特拉米系数为

$$\mu_\varphi(z) = -\frac{1}{2}(|z|^2 - 1)^2 \varphi(1/\overline{z})(1/\overline{z}^4), \quad z \in \mathbb{D}^*; \tag{8}$$

见 [3], [4], [8]。

这一深刻结论以弱得多的形式推广到了任意拟圆盘。例如，下面是贝尔斯的一个结果，它是其更一般的延拓定理的特例，该定理见 [5]。

^引理**1**。 [5]设 L 是黎曼球面 $\mathbb{C}$ 上的一条拟圆，其内部为 D_L ，外部为 D_L^*。那么，对于某个 $\varepsilon > 0$，存在一个球 $V_\varepsilon = \{\varphi \in \mathbf{B}(D_L^*)$ 上的反全纯同胚 τ （满足 $\tau(0) = 0$），将其映入 $\mathbf{B}(D_L)$；使得 V_ε 中的每个 φ 都是某个单叶函数 f 的施瓦济导数，而该函数是黎曼球面 $\mathbb{C}$ 上某个拟共形自同构 f 在 D_L^* 上的限制。这个 f 可以选取为使其在 D_L 上的贝尔特拉米系数具有如下形式

$$\mu_{\widehat{f}}(z) = \lambda_D^{-2}(z)\overline{\psi(z)}, \quad \psi = \tau(\varphi). \tag{9}$$

鉴于这类贝尔特拉米系数与复结构的小平-斯宾塞变形理论之间的联系，如今称其为调和的。

本文将按其原始含义使用调和性这一概念，即仅用于拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 的解，并将（9）式所示类型的系数视为伪调和的。

2. 一般定理及其推论

我们的目标是描述使格伦斯基范数达到最大值的非泰希米勒型极值贝尔特拉米系数的特征。

我们将考察单叶函数 $f(z) \in S_Q(D^*)$，它们在边界拟圆 $L = \partial D^*$ 上的限制具有本质点，因此在 L 上不具有泰希米勒极值延拓。将这类 f 的集合记为 $S_Q^0(D^*)$。对于 $L = \mathbb{S}^1$，我们使用记号 S_Q^0。

固定 $p > 1$，并考察 $\mathrm{Belt}(D)_1$，的子集 $\mathcal{M}_p(D)$，该子集由定义映射 $f^\mu \in S_Q^0(D)$ 且满足以下条件的贝尔特拉米系数 μ 组成：

(i) $\mu \in L_\infty(D) \bigcap W^{1,p}(D)$，其中 $W^{1,p}(D)$ 是函数 μ 的 Sobolev 空间，这些函数属于 D，且其一阶分布导数属于 $L_p(D)$；

(ii) 当趋近于 D 的边界时，可取到数值 $\|\mu\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_D |\mu(z)|$；

(iii) 存在一条依赖于 μ 的子弧 $\gamma \subset \partial D$，使得当 z 从 D 内部趋近 γ 时，$\mu(z) \to 0$。

对于 $z_0 \in \partial D$，边界值 $\mu(z_0)$ 必须理解为 $\lim_{z \to z_0} \mu(z)$。注意，也可以通过趋近区域 D 的内点取到数值 $\|\mu\|_\infty$；此外，根据 $\mathbb{C}$ 上拟共形自同构的 H¨older^ 连续性，弧 γ 局部光滑，且 $\alpha > 0$ 依赖于 $\|\mu\|_\infty$。

本文的主要结果如下，即一般定理。

定理1. 对任意 $p > 2$，每个贝尔特拉米系数 $\mu \in \mathcal{M}_p(D)$ 都是其等价类 $[\mu]$ 中的极值的系数^，相应的 $\mathbb{C}$ 上的拟共形自同构 f^μ 满足

$$k(f^\mu) = \varkappa_{D^*}(f^\mu) = \|\mu\|_\infty. \tag{10}$$

在 $p > 1$ 的情况下，该定理有一个弱化版本，见第4节。

迄今为止，几何函数论中还没有关于一般拟共形域（不同于圆盘）的广义 Grunsky 范数显式表达式的结果。定理1给出了这方面的第一个一般性结果。

鉴于集合 $\mathcal{M}_p(D)$ 的假设，每个边界函数 $f^\mu|\partial D$ 必须至少有一个本质点，在该点处 $\|\mu\|_\infty$ 取得。由此可知，系数 μ 在其等价类中并非唯一的极值系数。

由上文所述可知，在单叶函数 f（以及 ∂D）具有足够高的边界正则性的情况下，定理1所描述的情形不会出现；例如，对于任意 $C^{2+\alpha}$ 光滑的 μ，映射 f^μ 在 $\mathbb{C}$ 上是 $C^{2+\alpha}$，并且根据 Strebel 框架映射判据 [8], [28], f^μ 的等价类包含唯一的 Teichm¨uller 系数 $\mu_0 = k|\psi_0|/\psi_0$，满足 $\psi_0 \in A_1(D)$，而该系数不可能具有本质边界点。

关于集合 $\mathcal{M}_p$ 的假设是自然的，不能用 μ 在边界点处的光滑性或非光滑性来替代。

当区域 D 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 时，可以利用上一节所述关于弗雷德霍姆特征值和反射系数的定量结果补充定理1（参见关系式（6）、（7））。

定理2. 对任意 $p > 2$，每个贝尔特拉米系数 $\mu \in \mathcal{M}_p(\mathbb{D})$在其等价类中都是极值的；此外，曲线 $L_1 = f^\mu(\mathbb{S}^1)$ 的反射系数和 Fredholm 特征值明确表示为

$$q_{L_1} = 1/\rho_{L_1} = \|\mu\|_\infty. \tag{11}$$

这里，μ 也只有在容许界内才可能是正则的。要证明这一点，假设 μ 属于 Sobolev 空间 W_1^p 且满足 $p > 2$ 是至关重要的。

对于伪调和贝尔特拉米系数，上述定理的假设可以放宽。

定理3. 对于任意满足单叶性容许条件、形式为(9)或(8)且满足 $\varphi = S_f$ 的伪调和贝尔特拉米系数 $\mu_\varphi(z)$，只要函数 $\lambda_D^{-2}(z)S_f(z)$ 的最大值在某个边界点处取得，并且 S_f 在 ∂D^* 的某个子弧 γ 上有界，等式(9)和(10)便成立。

对于这类系数，表示式 (8)、(9) 保证了 μ 所需的光滑性，而由 (5) 可知其在 γ 上消失。定理3的一个特例已在 [18]中得到。

3. 定理1的证明

为了证明满足给定条件 (i)、(ii)、(iii) 的贝尔特拉米系数 μ 在其等价类中是极值的，并且满足等式 (10)，我们证明它必定满足

$$\|\mu\|_\infty = \sup_{\|\psi\|_{A_1^2(D)}=1} \Big| \iint_D \mu(z)\psi(z)dxdy \Big|. \tag{12}$$

这个等式意味着，在与格伦斯基系数内在相关的一组阿贝尔二次微分上，$\|\mu\|_\infty$ 在 $L_1(D)$ 中取到。

根据索伯列夫嵌入定理，函数 $\mu(z)$ 可延拓为闭域 $\overline{D}$上的连续函数。假设 (ii) 意味着存在一点 $z_0 \in \partial D$，使得

$$|\mu(z_0)| = \|\mu\|_\infty \tag{13}$$

（一般情况下，$|\mu(z_0)| =$ 上极限$_{z \to \partial D} |\mu(z)|$。）

我们取半带的共形映射 $z = \chi(\zeta)$

$$\Pi_+ = \{\zeta = \xi + i\eta : \ \xi > 0, \ 0 < \eta < 1\}$$

到 D，使得 $\chi^{-1}(z_0) = \infty$，且弧 γ 端点的原像为 0 和 1，并将系数 μ 拉回为贝尔特拉米系数

$$\nu(\zeta) := \chi^*\mu(z) = (\mu \circ \chi)(\zeta) \, \overline{\chi'(\zeta)}/\chi'(\zeta) \tag{14}$$

在 Π_+上。水平线

$$l_\eta = \{\zeta = \xi + i\eta : \ 0 < \xi < \infty\}, \quad 0 < \eta < 1,$$

在此映射下变为 D 中的一些解析曲线，其端点位于 ∂D上。无穷远点 $\zeta=\infty$ 对于复合映射 $F^\nu=f^\mu\circ\chi$至关重要，并根据关于 μ 的假设以及由式 (14)，我们有

$$\lim_{\xi\to\infty}|\nu(\xi+i\eta)|=\|\nu\|_\infty=\|\mu\|_\infty.$$

关于系数 $\mu(z)$ 和共形映射 χ 的光滑性的假设意味着$\nu\in L_\infty\bigcap W_p^2(\Pi_+)$，并且极限函数

$$\nu(\zeta_0)=\lim_{\zeta\to\zeta_0\in\partial\Pi_+}\nu(\zeta),$$

在所有异于点 0、 i、 ∞ 的 $\zeta_0\in\partial\Pi_+$ 处都有定义。因此， $\nu(\zeta)$ 在虚轴的区间 $[0,i]$ 上有界，而且，

$$\nu(i\eta)=0,\quad 0\le\eta\le 1. \tag{15}$$

现在我们选取序列

$$\omega_m(\zeta)=\frac{1}{m}e^{-\zeta/m},\quad \zeta\in\Pi_+\ \ (m=1,2,...);$$

所有这些 ω_m 都属于 $A_1^2(\Pi_+)$，并且 $\omega_m(\zeta)$ 在 $\Pi_+\bigcap\{|\zeta|<M\}$ 上对任意 $M<\infty$ 一致成立。此外，$\|\omega_m\|_{A_1(\Pi_+)}=1$ （此外，$\left|\iint_{\Pi_+}\omega_m d\xi d\eta\right|=1-O(1/m)$），这表明 $\{\omega_m\}$ 是 Π_+ 的仿射水平拉伸的退化序列。

我们通过估计积分，证明该序列对于 ν也退化

$$I_m=\iint\limits_{\Pi_+}\nu(\zeta)\omega_m(\zeta)d\xi d\eta$$

当 m较大时。我们有

$$I_m=\int\limits_0^1 e^{-i\eta/m}d\eta\,\Big(\frac{1}{m}\int\limits_0^\infty\nu(\xi+i\eta)e^{-\xi/m}d\xi\Big). \tag{16}$$

(16)中的内层积分表示拉普拉斯变换的值

$$\mathcal{L}\nu=\int\limits_0^\infty\nu(t)e^{-st}dt$$

$\nu(\xi+i\eta)$在点 $s=1/m$处的值；定理的假设还意味着该变换对导数 $\partial\nu(\xi+i\eta)/\partial\xi$也存在，且该导数在 Π_+上可积。

分部积分并利用(15)，可得

$$\int\limits_0^\infty\frac{\partial\nu(\xi+i\eta)}{\partial\xi}e^{-\xi/m}d\xi=\frac{1}{m}\int\limits_0^\infty\nu(\xi+i\eta)e^{-\xi/m}d\xi-\nu(i\eta)=\frac{1}{m}\int\limits_0^\infty\nu(\xi+i\eta)e^{-\xi/m}d\xi \tag{17}$$

由于对任意 $s>0$,

$$\left|\frac{\partial\nu(\xi+i\eta)}{\partial\xi}\right|e^{-s\xi}<\left|\frac{\partial\nu(\xi+i\eta)}{\partial\xi}\right|,$$

勒贝格控制收敛定理给出

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{\partial\nu(\xi+i\eta)}{\partial\xi}e^{-s\xi}d\xi=\int_0^\infty \frac{\partial\nu(\xi+i\eta)}{\partial\xi}d\xi.$$

结合（15）和（17），可得

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\Big|\int_0^\infty \nu(\xi+i\eta)e^{-\xi/m}d\xi\Big|=|\nu(\infty)-\nu(i\eta)|=|\nu(\infty)|, \tag{18}$$

其中

$$\nu(\infty)=\lim_{\xi\to-\infty}\nu(\xi+i\eta).$$

由此可知，积分（16）的极限值为

$$\lim_{m\to\infty}\iint_{\Pi_+}\nu(\zeta)\omega_m(\zeta)d\xi d\eta=\int_0^1 d\eta\ \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\int_0^\infty \nu(\xi+i\eta)e^{-\xi/m}d\xi=\nu(\infty). \tag{19}$$

现在，通过应用逆共形映射 $\chi^{-1}(z):D\to\Pi_+$，我们返回初始域 D。相应的序列

$$\psi_m=(\omega_m\circ\chi^{-1})(\chi')^{-2},\quad m=1,2,\dots,$$

is a 是初始贝尔特拉米系数 μ 在 D上的退化序列，并且根据（19），

$$\lim_{m\to\infty}\Big|\iint_D\mu(z)\psi_m(z)dxdy\Big|=\lim_{m\to\infty}\Big|\iint_{\Pi_+}\nu(\zeta)\omega_m(\zeta)d\xi d\eta\Big|=|\nu(\infty)|. \tag{20}$$

鉴于假设 (13)，(20) 中的所有项都等于 $\|\nu\|_\infty=\|\mu\|_\infty$。这证明了等式 (12)，由此可知 μ 是其所属类中的极值的，且映射 f^μ 满足关系式 (10)。定理得证。

注意，在假设 $p>2$ 下， Π_+ 到 D 的共形映射 χ 在闭域 $\overline{\Pi_+}$ 上是 $C^{1,\,\alpha}$-光滑的，但不包括点 0、1、 ∞；由此可知，贝尔特拉米系数 (14) 在直线 l_η 上的限制 ν_η 属于 $W^{1,\,p}(l_\eta)$。于是， $W^{n,\,p}$ 函数的嵌入定理给出了这些限制的连续性，从而可知下列极限存在

$$\nu(0)=\nu_\eta(0)=\lim_{\xi\to 0}\nu_\eta(\xi)\quad\text{for all}\ \ \eta,$$

以及 $\nu_\eta(\infty)=\lim_{\xi\to\infty}\nu(\xi+i\eta)$。

这一说明指出了如何将上述证明推广到 $p>1$ （见说明 4.3。

4. 定理1和定理2的补充说明

4.1. 定理1表明，对于每个贝尔特拉米系数 $\mu_0\in\mathcal{M}_p(D)$，圆盘

$$\{t\mu_0/\|\mu_0\|_\infty:\ |t|<1\}$$

在球形 $\mathrm{Belt}(D)_1$ 中，它同时是 Teichm¨uller、Kobayashi 和 Carath´eodory 度量的测地线。它在投影 $\phi_{\mathbf{T}}:\ \mu\to S_{w^\mu}\in\mathrm{B}(D^*)$ 下映射到一个全纯

圆盘，位于万有 Teichm¨uller 空间 T 中，在该空间上，所有这些不变距离也彼此相等，尽管这个系数在其等价类中不一定是唯一的极值系数（T 中两个不同的 $t'\mu_0/\|\mu_0\|_\infty$ 和 $t''\mu_0/\|\mu_0\|_\infty$ 的像可以相同；此外，还存在具有 $\mu \in [\mu_0]$ 的 $\|\mu\|_\infty = \|\mu_0\|_\infty$）。

4.2. 等式（18）等价于拉普拉斯变换的陶伯定理。所有已知的此类定理也都要求原函数具有一定的光滑性。

这一与拉普拉斯变换的巧妙联系表明，对于定理1和2所给出的一大类贝尔特拉米系数，Teichm¨uller 范数和格伦斯基范数同时具有极值性且彼此相等。

4.3. 在对 D 和 μ 作出附加假设的情况下，定理1可以推广到 $p > 1$；例如，当区域 D 的边界是 $C^{1,\,\alpha}$-光滑的（$\alpha > 0$），并且在（ii）中，值 $\|\mu\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_D |\mu(z)|$ 在某点 $z_0 \in \partial D$ 处沿着 D 内任意路径趋近时均取到 $z \to z_0$，则上述证明可以修改为适用于 $\mu \in L_\infty(D) \bigcap W^{1,\,p}(D)$，其中 $p > 1$ 如下。

由于现在从 Π_+ 到 D 的共形映射 χ 在闭域$\overline{\Pi_+}$中除点0、1、∞外也属于 $C^{1,\,\alpha}$-光滑，因此贝尔特拉米系数(14)在直线 l_η 上的限制 ν_η 属于 $W^{1,\,p}(l_\eta)$。应用维数为 $n = 1$的嵌入定理，可得 $p > 1$ 的极限存在：

$$\nu_\eta(0) = \lim_{\xi \to 0} \nu_\eta(\xi) = 0 \quad \text{and} \quad \nu_\eta(\infty) = \lim_{\xi \to \infty} \nu(\xi + i\eta).$$

所示的(ii)变化表明，所有值 $\nu_\eta(\infty)$必定相同，且等于$\|\nu\|_\infty$。因此，可以再次应用关系式(18)-(20)，并推导出定理1的结论。

4.4. 定理1的结论可以推广到任意拟共形域，包括具有分形边界 L 的情形，具体如下：可以在半带 Π_+中取满足拉普拉斯变换的陶伯定理的贝尔特拉米系数 μ，也就是说，取那些使定理1证明中的论证成立的系数，并将这些系数 μ 拉回到 L的内部。

4.5. 单叶函数的典范拟共形延拓（其系数为 Teichm¨uller 型或（9）式的伪调和型 μ）是唯一的；这种唯一性与其解析性有内在联系。

涉及索博列夫空间中的贝尔特拉米系数的定理1，提供了一种区分其中某些具有唯一性的子集的可能性。例如，对于满足二阶一致椭圆型微分方程狄利克雷问题的（即使是弱）解的 μ，当 $\mathcal{L}u = 0$ 在 D 上取边界曲线 ∂D上的预定值 μ 时，该结论成立；特别是对于调和的 $\mu(z)$（其中 $\Delta\mu = 0$）也是如此。此外，在这种情况下，假设（ii）显然由最大值原理满足。

特别是，所有在某些边界子弧 γ 上消失的调和 μ（其中 $\Delta\mu = 0$）都是极值的，除非边界函数 $f^\mu|\partial D$ 满足施特雷贝尔框架映射条件（例如，它是 $C^{2+\alpha}$ 光滑的）。

4.6. 极值的拟共形映射理论起源于 [29]，如今在拟共形分析及其对几何函数论、Teichm¨uller 空间理论以及数学和数学物理其他领域的深刻应用中发挥着至关重要的作用。Teichm¨uller 型的典型极值贝尔特拉米微分 $\mu(z)d\overline{z}/dz$，具有 $\mu(z) =$

$|\psi(z)|/\psi(z)$ 由可积全纯二次微分 $\psi(z)dz^2$ 生成，自然地出现在许多问题中。如上所述，任何此类微分在其等价类中都是唯一的，并且此类映射 f^μ 在 $S_Q(D^*)$ 中稠密。关于唯一极值性，另请参见[6]。

具有相同 Teichm¨uller 范数和格伦斯基范数的单叶函数的极值拟共形延拓（因此由阿贝尔微分的平方决定）具有相似的特征。

Strebel [27] 给出了第一个非 Teichm¨uller 型极值拟共形映射的例子。最近，作者发现此类系数在 Teichm¨uller 空间理论的几何问题中有一项重要应用 [13] 。 [18] 中还给出了其他新型的非典范极值贝尔特拉米系数。本文延续了这一研究方向，而定理1尤其表明，此类系数的结构可能相当病态。

4.7. 由于量 $k(f^\mu)$ 和 $\varkappa_{D^*}(f^\mu)$ 分别关于 μ 和施瓦济导数S_{f^μ} 连续依赖（分别取 L_∞ 范数和 B 范数），上述定理的所有断言对在所述范数下收敛的序列 $\mu_n \to \mu_0$ 的极限函数均成立。

5. 推广

5.1. 定理1的改进。当区域 D 为单位圆盘 $\mathbb{D}$时，我们有以下对定理1和定理2的加强结果。其证明复杂得多。该证明基于 [17] 中的一个重要定理，而该定理的证明涉及关于高斯曲率、Grunsky不等式以及普遍Teichm¨uller空间复几何的深刻结果。

定理4。设贝尔特拉米系数 $\mu \in \mathrm{Belt}(\mathbb{D})_1$ 满足 $\mu \in L_\infty(D) \bigcap W^{1,p}(\mathbb{D})$，其中 $p > 2$为某个值，并假设值 $\|\mu\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{D}} |\mu(z)|$ 可通过趋近 z单位圆 $\mathbb{S}^1$ 而取得，并且在 $\mathbb{S}^1$的某个子弧 γ 上，有

$$\mu(z) \equiv q = \mathrm{const} \quad with \ \ |q| < \|\mu\|_\infty.$$

则， μ 在其所属类中是极值的，且相应的拟共形自同构 f^μ of $\mathbb{C}$满足等式

$$k(f^\mu) = \varkappa(f^\mu) = q_{f^\mu(\mathbb{S}^1)} = 1/\rho_{f^\mu(\mathbb{S}^1)} = \|\mu\|_\infty. \tag{21}$$

证明。记 $D = f^\mu(\mathbb{D})$ $D^* = f^\mu(\mathbb{D}^*)$，并考虑映射 g^c，它们在 D^* 上共形，并在 D 中具有常数拟共形伸缩 c。我们将这类映射视为区域 D 的仿射型变形，并将像的集合 $g^c(D)$ 视为 D的仿射类。每个映射 g^c 在 D 上具有与仿射映射相同的贝尔特拉米系数

$$\omega^c(w) = c_1 w + c_2 \overline{w} + c_3$$

其贝尔特拉米系数在 $\mathbb{C}$ 上满足 $\mu_{\omega^c}(w) = c_2/c_1 = c$ （因此 g^c 和 ω^c 在 $\omega \circ f^\mu(\mathbb{D})$ 上相差一个共形映射）。

考虑映射

$$f_{c_0}(z) = g^{-q} \circ f^\mu(z),$$

其中， $c_0 = -q$ 与 μ 在子弧 γ_0 上的取值一致，并且是映射 $g^{-q}(\omega)$的贝尔特拉米系数（该映射是仿射变形 g^q的逆映射）。

根据贝尔特拉米系数的链式法则， f_q 的贝尔特拉米系数为

$$\mu_{f_q}(z) = \frac{\mu(z) - q}{1 - q\,\overline{\mu(z)}}\,\frac{\overline{\partial_z f^\mu}}{\partial_z f^\mu}.$$

它在弧 $f^\mu(\gamma) \subset \partial D$ 上消失，因此映射 f_q 满足定理1和定理2关于圆盘 $\mathbb{D}$ 的假设，由此可得 f_q 的相应等式 (10) 和 (11)。

现在我们应用来自 [17]的下述定理。

定理A。对于任意满足 $\varkappa(f) = k(f) < 1$ 的函数 $f \in \Sigma_Q$ ，若其将圆盘 $\mathbb{D}^*$ 映射到有界拟圆盘 D 的补集，以及该区域的任意仿射型变形 g^c （其中 $|c| < 1$），都有以下等式

$$\varkappa(g^c \circ f) = k(g^c \circ f).$$

取 $f = f_q|\mathbb{D}^*$ 和 $c = q$，由定理A可得等式 (21)，从而完成定理4的证明。

5.2. 几何特征。如果贝尔特拉米系数 $\mu \in \mathcal{M}_p(D)$ $p > 2$ 是调和的，那么所有满足 $|t| < 1$ 的 $t\mu$ 也都是调和的。鉴于它们具有唯一极值性，像

$$\mathbb{D}_h(\mu_0) = \{\phi_{\mathbf{T}}(t\mu) : \ |t| < 1\}$$

是通用 Teichm¨uller 空间 T 中的一个全纯圆盘（没有奇点）。根据定理4，该圆盘在 T 上的 Teichm¨uller、Kobayashi 和 Carath´eodory 度量下都是测地线。这改进了备注4.1中的论断。

文献 [14] 证明，单叶函数的格伦斯基系数在空间 T 的切丛上生成一种 Finsler结构 $G_{\mathbf{T}}(\varphi, v)$，该结构受其典范Finsler结构 $F_{\mathbf{T}}(\varphi, v)$支配；后者生成该空间的 Teichm¨uller 度量。结构 $G_{\mathbf{T}}(\varphi, v)$ 以典范方式生成相应的可测无穷小 Finsler 度量 $\lambda_\varkappa$。并且，由于 [14], ，在任意极值的 Teichm¨uller 圆盘 $\mathbb{D}(\mu_0) = \{\phi_{\mathbf{T}}(t\mu_0)$ 上： $t \in \mathbb{D}\}$及其在 T 中的等距像上，等式成立

$$\tanh^{-1}[\varkappa(f^{r\mu_0})] = \int_0^r \lambda_\varkappa(t)dt.$$

所采用的论证应用于 [14] 的部分，对于调和测地圆盘 $\mathbb{D}_h(\mu)$同样有效 .

6. 说明性例子

我们通过以下例子说明上述定理。

例1：矩形。即使这一情形也长期悬而未决。取一个矩形P_4 ，其顶点为

$$A = 0, \quad B = a > 0, \quad C = a + ib \ (b > 0), \quad D = ib$$

并在 $0 \le x \le a$ 和 $0 \le y \le b$ 线段上定义两个绝对连续函数 $h_1(x)$和 $h_2(y)$，其导数为 $h_1'(x)$ $h_2'(y) \in L_p$, $p > 1$，且满足 $h_1(0) = 0$ ，并且两者

都是非递减的。因此， $h_1(x)h_2(y)$在 P_4的左侧为零。还假设 $h_1(x) < 1$, $h_2(y) < 1$ 并定义

$$\mu(z) = (1+i)h_1(x)h_2(y), \quad z = x + iy.$$

任何此类 μ 都满足定理1的假设。对应的 Beltrami 方程 $\partial_{\overline{z}} w = \mu(z)\partial_z w$ 在 $\mathbb{C}$ 上的解 $f^\mu(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, $|z| < 1$ 满足性质（10）。

将此函数与从圆盘 $\mathbb{D}$ 到 P_4 的共形映射复合，该映射由施瓦茨–克里斯托费尔积分给出

$$g(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(t-i)(t-\alpha)}},$$

其中，点 1、i、-1、α 是 P_4 在 $\mathbb{S}^1$上的顶点的原像，由此可得，$f^\mu \circ \chi$ 满足（10）和（11）。

这进一步加强了 [12] 关于矩形的弗雷德霍姆特征值的结果；这些结果是通过对普遍 Teich m¨uller 空间应用 Finsler几何获得的。

例2：椭圆。设 D 为焦点位于 -1、1 处且半轴为 a、b（$a > b$）的椭圆。在圆盘 D 上平方可积全纯函数构成的 Hilbert空间 $A_2(D)$ 中，一组标准正交基由以下多项式构成

$$P_n(z) = 2\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\,(r^{n+1} - r^{-n-1})\,U_n(z),$$

w这里 $r = (a+b)^2$ 和 $U_n(z)$ 是第二类 Chebyshev 多项式 ,

$$U_n(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,\sin[(n+1)\arccos z], \quad n = 0, 1, \ldots$$

（见 [24]）。那么，对于满足条件（i）、（ii）、（iii）的任意贝尔特拉米系数 μ，我们有以下等式:

$$\|\mu\|_\infty = \sup\left\{\left|\iint_D \mu(z)\sum_0^\infty c_n P_n(z)dxdy\right| : \left\|\sum_0^\infty c_n P_n(z)\right\|_{A_1(D)} = 1\right\} = k(f^\mu) = \varkappa_{D^*}(f^\mu).$$

例 3：解析曲边多边形。为简化公式，我们转而考虑在下半平面 $H^* = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ 上共形的 $\mathbb{C}$ 拟共形自同构 f^μ（而非圆盘）。它们的贝尔特拉米系数 μ 支撑于上半平面 $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$，并遍历球

$$\mathrm{Belt}(H)_1 = \{\mu \in L_\infty,\ \mu(z)|H^* = 0,\ \|\mu\|_\infty < 1\},$$

并且施瓦济导数 S_{f^μ} 属于空间 B(H^*)，该空间由 H 上的全纯二次微分 $\varphi(z)dz^2$ 构成，其范数为 $\|\varphi\|_{\mathbf{B}} = \sup_{H^*} |z - \overline{z}|^2|\varphi(z)|$。

取无界凸直线多边形 P_n，其有限顶点为 A_1、.....、A_{n-1} 和 $A_n = \infty$。记其在 A_j 处的外角为 $\pi\alpha_j$，使得 $\pi < \alpha_j < 2\pi$、 $j = 1$、.....、$n-1$，则

可得，下半平面 $H^*=\{z:\ \mathrm{Im}\, z<0\}$ 到$\widehat{}$补多边形 $P_n^*=\mathbb{C}\setminus\overline{P_n}$ 的共形映射 f_n 可由Schwarz-Christoffel积分实现

$$f_n(z)=d_1\int\limits_0^z(\xi-a_1)^{\alpha_1-1}(\xi-a_2)^{\alpha_2-1}...(\xi-a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1}d\xi+d_0,$$

其中 $a_j=f_n^{-1}(A_j)\in\mathbb{R}$和复常数 d_0,d_1；此处 $f_n^{-1}(\infty)=\infty$。其施瓦济导数等于

$$S_{f_n}(z)=\mathbf{b}'_{f_n}(z)-\frac{1}{2}\mathbf{b}^2_{f_n}(z)=\sum_1^{n-1}\frac{C_j}{(z-a_j)^2}-\sum_{j,l=1}^{n-1}\frac{C_{jl}}{(z-a_j)(z-a_l)},$$

其中 $\mathbf{b}_f=f''/f'$,

$$C_j=-(\alpha_j-1)-(\alpha_j-1)^2/2<0,\quad C_{jl}=(\alpha_j-1)(\alpha_l-1)>0.$$

将方程的正根记为 r_0

$$\frac{1}{2}\Big[\sum_1^{n-1}(\alpha_j-1)^2+\sum_{j,l=1}^{n-1}(\alpha_j-1)(\alpha_l-1)\Big]r^2-\sum_1^{n-1}(\alpha_j-1)\ r-2=0,$$

并定义

$$S_{f_n,t}=t\mathbf{b}'_{f_n}-\mathbf{b}^2_{f_n}/2,\ t>0.$$

根据定理3和 Ahlfors-Weill，任意满足 $0<r<r_0$ 的施瓦济导数 $rS_{f_n,\ r_0}$ 都生成一个单叶函数 $w_r:\ H^*\to\mathbb{C}$，其伪调和贝尔特拉米系数 $\nu_r(z)=-(r/2)y^2S_{f_n,\ r_0}(\overline{z})$ 在 H 中是其等价类中的极值的，并且

$$k(w_r)=\varkappa(w_{r\circ\sigma})=\frac{r}{2}\|S_{f_n,r_0}\|_{\mathbf{B}(H^*)},$$

其中， σ 是将 $\mathbb{D}^*$ 映射到 H^*的适当莫比乌斯映射。

关键在于，鉴于定理3所推出的伪调和系数 ν_r 具有极值性，当 $r>r_0$ 接近 r_0 时，施瓦济导数 $S_{f^{\nu_r}}$ 不可能属于由施瓦济导数构成的空间 T；这与贝尔斯嵌入中泰希米勒空间的星形性这一著名问题有关，参见 [14]及其中的参考文献。

像$f^{\nu_r}(H)$在 $0<r<r_0$下是具有分段解析边界的曲线多边形（特别是螺旋线）。

例 4：具有仿射型边的拟共形多边形。我们在单位圆上固定若干点 a_1、 a_2、.....、 a_n，按逆时针方向排列，并将圆盘 $\mathbb{D}$ 视为顶点位于这些点上的多边形。取函数 $u(\theta)=c_1e^{i\theta}+c_2e^{-i\theta}+c_3$，其中 $\arg a_1\le\theta\le\arg\ a_2$，复数 c_1、 c_2、 c_3 满足 $|u(\theta)|<1$，并将其延拓为 $[-\pi,\pi]$ 上的函数 $\widehat{u}(\theta)$；通过泊松积分，在圆盘 $\mathbb{D}$ 上定义调和函数 $\mu(z)$，使得 $|\mu(z)|<1$。该函数属于 $W^{1,\ p}$、 $p>2$，且其在半带 Π_+ 上的拉回与相应拉普拉斯变换的陶伯定理相容，从而得到等式 (20)，其中$\nu(\infty)=\|\mu\|_\infty$。我们将这个 μ 延拓为 $\mathbb{D}^*$上的零函数。

根据定理4，系数 μ 在其所属类中是极值的，相应的拟共形同胚 f^μ （ $\mathbb{C}$ 上的）满足关系式（21）。

References

[1] L. Ahlfors, 《关于诺伊曼–庞加莱积分方程的评注》, 《太平洋数学杂志》2（1952）, 271-280。[2] L.V. Ahlfors, 《拟共形映射讲义》, Van Nostrand, 普林斯顿, 1966。[3] L.V. Ahlfors 和 G. Weill, 《贝尔特拉米方程的唯一性定理》, 《美国数学会会刊》13（1962）, 975-978。[4] J. Becker, 《具有拟共形延拓的共形映射》, 《当代复分析论题》, 1979年达勒姆会议论文集（D.A. Brannan 和 J.G. Clunie 编）, Academic Press, 纽约, 1980, 第37-77页。[5] L. Bers, 《一个用于拟共形映射的非标准积分方程》, 《数学学报》116（1966）, 113-134。[6] V. Bo˘zin、N. Lakic、V. Markovi´c、M. Mateljevi´c, 《唯一极值性》, 《分析数学杂志》75（1998）, 299-338。[7] C.J. Earle、I. Kra 和 S.L. Krushkal, 《全纯运动与泰希米勒空间》, 《美国数学会汇刊》944（1994）, 927-948。[8] F.P. Gardiner 和 N. Lakic, 《拟共形泰希米勒理论》, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2000。[9]H. Grunsky, 《亚纯单叶映射函数的系数条件》, 《数学杂志》45（1939）, 29-61。[10] S.L. Krushkal, 《拟共形映射与黎曼曲面》, Wiley, 纽约, 1979。[11] S.L. Krushkal, 《格伦斯基系数不等式、卡拉泰奥多里度量与极值拟共形映射》, 《Commentarii Mathematici Helvetici》64（1989）, 650-660。[12] S.L. Krushkal, 《拟反射、弗雷德霍姆特征值与芬斯勒度量》, 《数学文摘》69（2004）, 221-224。[13] S.L. Krushkal, 《拟共形延拓与反射》, 载于《复分析手册：几何函数论》第II卷第11章（R. K¨uhnau 编）, Elsevier Science, 阿姆斯特丹, 2005, 第507-553页。[14] S.L. Krushkal, 《强化莫泽猜想、格伦斯基系数的几何与弗雷德霍姆特征值》, 《中欧数学杂志》5(3)（2007）, 551-580。¨S.L. Krushkal, 《泰希米勒空间的形状》, 《分析杂志》22（2014）, 69-76。[16] S.L. Krushkal, 《强化格伦斯基不等式与米林不等式》, 《当代数学》667（2016）, 159-179。[17] S.L. Krushkal, 《弗雷德霍姆特征值与多边形的拟共形几何》, 《数学科学杂志》252(4)（2021）, 472-501。DOI：10.1007/s10958-020-05175-4[18] S.L. Krushkal, 《调和贝尔特拉米系数的极值性》, 《数学》10 (14)（2022）, 2460。https://doi.org/10.3390/math10142460[19] R. K¨uhnau, 《格伦斯基类型的畸变定理与系数条件及其在拟共形映射中的应用》, 《数学新报》48（1971）, 77-105。[20] R. K¨uhnau, 《拟共形可延拓性、弗雷德霍姆特征值与格伦斯基系数条件》, 《芬兰科学院学报, A辑, 数学》7（1982）, 383-391。[21] R. K¨uhnau, 《格伦斯基系数条件何时足以保证 Q-拟共形可延拓性? 》, 《Commentarii Mathematici Helvetici》61（1986）, 290-307。[22] R. K¨uhnau, 《沿约旦曲线的尽可能共形的反射》, 《德国数学家协会年报》90（1988）, 90-109。[23] I.M. Milin, 《单叶函数与正交规范系统》, 《数学专著译丛》第49卷, 《Odnolistnye funktcii i normirovannie systemy》译本, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1977。[24] Z. Nehari, 《共形映射》, McGraw-Hill, 纽约, 1952。[25] M. Schiffer, 《弗雷德霍姆特征值与格伦斯基矩阵》, 《波兰数学年刊》39（1981）, 149-164。

[26] M. Schiffer 和 D.S. Spencer，《有限黎曼曲面的泛函》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1954年。[27] K. Strebel，《关于单位圆盘极值拟共形映射唯一性的问题》，《Commentarii Mathematici Helvetici》36（1962年），306-323页。[28] K. Strebel，《关于极值特希米勒映射的存在性》，《Journal d'Analyse Mathématique》30（1976年），464-480页。[29]O. Teichm¨uller，《极值拟共形映射与二次微分》，《普鲁士科学院数学与自然科学部论文集》，1939年 22（1940年），1-197页。

巴伊兰大学数学系，5290002 拉马特甘，以色列；以及弗吉尼亚大学数学系，夏洛茨维尔，VA22904-4137，美国