arXiv:2301.13377v1 [math.AC] 31 Jan 2023

对称群不变商多项式环

ALEXANDRA PEVZNER

Abstract. 给定有限群 G 在某个交换基环 k 上的一个表示， *cofixedspace* 是该表示上群作用平凡的最大商。若 G 通过 k-代数自同构作用，则余不变空间是 G-不变量环上的一个模。当 G 的阶在基环中不可逆时，我们对这种模结构所知甚少。我们研究如下情形中的余不变空间： G 是作用在 n 个字母上的对称群，它通过置换变量作用于多项式环。当 k 的特征为零时，余不变空间同构于 n 个变量的对称多项式环的一个理想。在保持 n 变化的同时，将 k 在素整数 p 处局部化，会揭示这些理想中显著的规律。随着 n 增大，这些理想会在某种意义下保持稳定；而每当 n 达到 p 的倍数时，其复杂度便会跃升。

1. Introduction

设 k 是一个带单位的交换环。给定有限群 G 在 k 上的一个表示 U，可以关联两个自然的 kG-模，它们对应于 U，且 G 的作用是平凡的——不变空间 U^G 和余不变空间 U_G。不变空间是 U 中承载平凡 G 作用的最大 k- 子模，而余不变空间是 U 的承载平凡 G 作用的最大 k- 模商。作为 k- 模，不变空间和余不变空间几乎互为对偶，其中 $(U_G)^* \cong (U^*)^G$[1, 引理 2.21]。函子 $(-)^G$ 和 $(-)_G$ 在 kG-模上构成一个伴随对。

当 U 是一个 k-代数 S，且 G 通过 k-代数自同构作用于 S 时， S^G 与 S_G 之间的不对称性显而易见。不变空间 S^G 本身是一个环，称为不变量环；多年来，它的代数结构一直是交换代数和表示论的核心研究对象。另一方面，余不变空间不是环，但它是一个不变量环上的模。

余不变空间作为 S^G 上的模，其结构很大程度上取决于 $|G|$ 是否在 k 中可逆。在非模情形下，即当 $|G|$ 是 k 中的单位时，余不变空间是一个秩为一的自由 S^G-模。当 $|G|$ 不是单位时，人们对 S_G 作为 S^G-模的性质知之甚少。在 [8], 中，Lewis、Reiner 和 Stanton 证明了 S_G 在 S^G上的秩仍为一，并针对 $\mathbb{F}_q[x_1,\dots,x_n]_G$的希尔伯特级数提出了猜想，其中 G 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ 或其某个抛物子群。

本文研究当 $S=\mathrm{k}[x_1,\dots,x_n]$、 $G=\mathfrak{S}_n$且 $\mathrm{k}=\mathbb{Z}_{(p)}$或 $\mathrm{k}=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$时， S_G的 S^G-模结构。这里， $\mathbb{Z}_{(p)}$ 表示 $\mathbb{Z}$ 在素理想（p）处的局部化。当 $n\geq p$时，对于这些 k， $\mathfrak{S}_n$ 的作用是模的。众所周知，无论 k 如何，$\mathfrak{S}_n$-不变量环都是多项式环 $\mathrm{k}[e_1,\dots,e_n]$，其中 e_i是 x_1、.....、x_n中的次数为 i的初等对称多项式。我们的主定理明确描述了当 $p\leq n<2p$时， S_G 作为该多项式环上模的结构。

定理 1.1（主定理）。设 $p\leq n<2p$且令 $i=n-p$。那么余不变空间 $\mathbb{Z}_{(p)}[x_1,\dots,x_n]_{\mathfrak{S}_n}$与 $\mathbb{Z}_{(p)}[e_1,\dots,e_n]$ 的理想 $I^{\mathfrak{S}_n}$同构，该理想由下式给出：

$$I^{\mathfrak{S}_n}=\langle p,\ e_1e_p-e_{p+1},\ e_2e_p-e_{p+2},\ \dots,\ e_ie_p-e_{p+i},\ e_{i+1},\ \dots,\ e_{p-1}\rangle.$$

对于此范围内的 n，$I^{\mathfrak{S}_n}$的生成元构成一个正则序列，其次数为 0、1、.....、$p-1$模 p .

理想 $I^{\mathfrak{S}_n}$恰好是转移映射 $\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}_n}\colon S\to S^{\mathfrak{S}_n}$的像，该映射将多项式 $f\in S$映射为总和 $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma(f)$。对于任意 G，该映射的像一直是模不变理论研究中备受关注的对象；背景介绍见 [12]，而关于 GL_n(k) 的各种子群 G 对应的转移映射像的研究见 [5],[10],[11],[14] 。本文还描述了当 $p\leq n<2p$、 $G=\mathfrak{S}_n$ 且 k $=\mathbb{Z}_{(p)}$、 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 时转移映射的像。

Date：2023年2月1日。

为说明定理 1.1，我们写出 $\mathbb{Z}_{(5)}[e_1,\dots,e_n]$ 中 $p=5$ 和 $n\in\{5,6,7,8,9\}$ 对应的理想 $I^{\mathfrak{S}_n}$：

$$\begin{aligned}
I^{\mathfrak{S}_5} &= \langle 5,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\rangle\\
I^{\mathfrak{S}_6} &= \langle 5,\ e_1e_5-e_6,\ e_2,\ e_3,\ e_4\rangle\\
I^{\mathfrak{S}_7} &= \langle 5,\ e_1e_5-e_6,\ e_2e_5-e_7,\ e_3,\ e_4\rangle\\
I^{\mathfrak{S}_8} &= \langle 5,\ e_1e_5-e_6,\ e_2e_5-e_7,\ e_3e_5-e_8,\ e_4\rangle\\
I^{\mathfrak{S}_9} &= \langle 5,\ e_1e_5-e_6,\ e_2e_5-e_7,\ e_3e_5-e_8,\ e_4e_5-e_9\rangle.
\end{aligned}$$

理想 $I^{\mathfrak{S}_n}$ 遵循这样的规律：$I^{\mathfrak{S}_{p+j}}$ 可以通过将 $I^{\mathfrak{S}_{p+j-1}}$ 中的 e_j 生成元替换为 $e_je_p-e_{p+j}$得到。此外，这些理想总是由一个正则序列极小生成，且生成元的次数模 p相同。这意味着，$I^{\mathfrak{S}_n}$ 作为 $S^{\mathfrak{S}_n}$ 上的模，其最小自由分解具有相同的结构，且分次 Betti 数[1] $\beta_{i,\ j}^{S^{\mathfrak{S}_n}}(I^{\mathfrak{S}_n})$ 模 p相同。S_G 模结构的这种稳定性在 $0\le n<p$时显然成立：由于 S_G 是 S^G上的秩为 1 的自由模，余不变空间有一个次数为 0 的 S^G生成元，且没有零化子关系。当 $n\ge 2p$时，$I^{\mathfrak{S}_n}$ 的结构变得更复杂，$\mathbb{Z}_{(p)}[e_1,\dots,e_n]/I^{\mathfrak{S}_n}$ 不再是完全交环。然而，分次 Betti 数模 p 的稳定性依然成立。作为示例，下面给出了 $I^{\mathfrak{S}_4}$ 和 $I^{\mathfrak{S}_5}$ 分别作为$\mathbb{Z}_{(2)}[e_1,\dots,e_4]$ 和 $\mathbb{Z}_{(2)}[e_1,\dots,e_5]$上的模时的贝蒂表。

```
          0 1 2 3
total:    5 7 4 1
    0:    1 1 . .
    1:    1 1 1 .
    2:    1 2 1 .
    3:    1 1 1 1
    4:    . 1 1 .
    5:    . 1 . .
    6:    1 . . .
```

```
          0 1 2 3
total:    5 7 4 1
    0:    1 . . .
    1:    . 1 . .
    2:    1 1 . .
    3:    1 . 1 .
    4:    . 2 . .
    5:    1 . 1 .
    6:    . 1 1 .
    7:    . 1 . 1
    8:    . . 1 .
    9:    . 1 . .
   10:    1 . . .
```

与 $n<2p$ 的情形一样，极小生成元的次数模 2 后相同（事实上，模 4 后也相同），而较高同调次数中出现的次数移位模 4 后也相同。结合更多类似的结果，这些发现提示了以下猜想。

猜想 1.2. 设 k,m,n 为非负整数，且 $kp\le m,n<(k+1)p$。设 $I^{\mathfrak{S}_m}\subset\mathbb{Z}_{(p)}[e_1,\dots,e_m]$ 和 $I^{\mathfrak{S}_n}\subset\mathbb{Z}_{(p)}[e_1,\dots,e_n]$ 分别为多项式环中 m,n 个变量的 $\mathfrak{S}_m$ 阶和 $\mathfrak{S}_n$ 阶余不变空间。那么，对于固定的 $i\ge 0$，$I^{\mathfrak{S}_m}$ 和 $I^{\mathfrak{S}_m}$ 的贝蒂表中 i^{th} 列的次数移位模 p 后相同，且重数也相同。

1.1. 论文结构。在第 2 节中，我们介绍有限群表示的余不变空间背景，并引用关于余不变空间的 S^G-模结构的一般结果。在第 3 节中，我们讨论模转移映射及其像的已知情况。随后，我们将转移映射与特征零环上的余不变空间联系起来，并证明一个有用的基变换引理（引理 3.8）。第 4 节逐步介绍证明定理 1.1 所需的内容。Sylow p 子群的结构与理想 $I^{\mathfrak{S}_n}$ 中稳定性之间的关系尤为重要；这正是第 4.3 小节的主题。定理 1.1 在第 4.4 小节中得到证明。第 5 节讨论定理 1.1 在余不变空间和以 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 为系数的转移映射中的应用。第 6 节提供支持猜想 1.2 的数据，并将其更精确地重述为猜想 6.1。附录 A 专门验证：系数环为局部环的多项式环上的分次极小自由分解在同构意义下是唯一的。

[1]关于多项式环 $\mathbb{Z}_{(p)}[e_1,\dots,e_n]$ 上的分次极小自由分解在同构意义下唯一的说明，请参见附录 A。这使我们能够毫无歧义地使用“贝蒂数”一词。

ACKNOWLEDGMENTS

作者非常感谢 Victor Reiner 引介这一课题，并在课题各阶段持续给予指导。作者也感谢 Lukas Katth¨an 在课题初期所做的工作，以及 Ayah Almousa、Eddy Campbell、Patricia Klein、Monica Lewis、Andrew O'Desky、Michael Perlman、McCleary Philbin、Mahrud Sayrafi、Gregory Smith、David Wehlau 和 Jerzy Weyman 提供有益的参考资料并参与讨论。本文的所有计算均使用 Macaulay2 完成，并借助了 InvariantRing、LocalRings 和 SymmetricPolynomials 软件包。作者的研究部分得到了美国国家科学基金会 DMS-2053288 号资助的支持。

2. Background on cofixed spaces

2.1. 一般表示的余不变空间。

定义 2.1. 设 U 是一个有限生成的自由 k-模，且 G 是一个通过 U 上的 k-线性自同构作用于 U 的有限群。我们分别将不变空间 U^G 和余不变空间 U_G 定义为 k-模

$$U^G := \{u \in U : g(u) = u \text{ for all } g \in G\},$$
$$U_G := U/\operatorname{span}_{\mathbf{k}}\{u - g(u) : u \in U, g \in G\}.$$

不变空间和余不变空间满足以下性质：U^G 是 U 上使 G 平凡作用的最大子模，而 U_G 是 U 上使 G 平凡作用的最大商。它们也可以定义为

$$U^G = \operatorname{Hom}_{\mathbf{k}G}(\mathbf{k}, U), \quad \text{and}$$
$$U_G = \mathbf{k} \otimes_{\mathbf{k}G} U,$$

其中 k 是平凡的 kG-模。群同调和群上同调函子 $H_i(G, –)$ 和$H^i(G, –)$ 分别是 $(–)_G$ 和 $(–)^G$ 的左导出函子与右导出函子。当 U 是一个环时，不变空间因其在有限群不变量理论中的重要性而广为人知并受到深入研究。余不变空间在文献中较少出现，但有时会用于定义其他对象。例如，参见 [6,§3.1]，了解其在定义 FI-模稳定度中的作用；另见 [1, 第15]章，了解其在定义玻色福克函子中的作用。现在我们给出两个具体的不变空间和余不变空间示例，以帮助读者建立直观认识。

例 2.2。当 $U = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ 和 G 是 $\mathfrak{S}_n$ 的一个子群，并且通过置换变量作用时，U^G 和 U_G 是同构的自由 k-模，其 k-基为

$$U^G = \operatorname{span}_{\mathbf{k}}\left\{\sum_{\sigma \in G/G_\lambda} x^\lambda : \lambda \in \Lambda\right\},$$
$$U_G = \operatorname{span}_{\mathbf{k}}\left\{\overline{x^\lambda} : \lambda \in \Lambda\right\}$$

其中 Λ 是 U 中单项式关于 G 的一组完整轨道代表元，而 G_λ 表示单项式 x^λ 的稳定子子群。也就是说，不变空间以单项式的轨道和为 k-基，而余不变空间以单项式的轨道代表元为 k-基。当 $G = \mathfrak{S}_n$ 时，集合 Λ 可取为所有满足 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ 的整数向量（$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$）。

虽然 U^G 和 U_G 作为 k-模通常同构，但并非总是如此，下面的例子将说明这一点。

例 2.3。设 $V = \mathbb{F}_3[x, y]$，并令 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ 通过由 G 在以 x、y 为基的 $\mathbb{F}_3$-向量空间上的作用所诱导的环自同构作用于 V。G 的作用保持 V 上的标准分次。我们考虑 $U = V_4$，即 V 中 4 次齐次元素的 $\mathbb{F}_3$-张成空间；它作为一个 $\mathbb{F}_3$-向量空间由所有 4 次单项式生成。为方便起见，我们列出 G 的一个生成集：

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

U 中的任意元素若要在 A 和 B作用下不变，必须属于 $\mathbb{F}_3$张成的 $\{x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4\}$ 的线性空间；此外，若要在 C 作用下不变，还必须属于 $\mathbb{F}_3$张成的 $\{x^4 + y^4, x^2y^2\}$ 的线性空间。可以直接证明

任何在 D 作用下不变的 $\mathbb{F}_3$-线性组合 $a(x^4+y^4)+b(x^2y^2)$都必须满足 $a=b=0$。因此，$U^G=0$。

另一方面， U_G 是一个 1 维的 $\mathbb{F}_3$-向量空间。矩阵 A 和 B 给出 U_G中的关系$2x^3y=0$和 $2xy^3=0$。矩阵 C给出关系 $x^4-y^4=0$，与 $y^4=(x+y)^4$结合后得到 $x^4=y^4=0$。然而，将其他单项式涉及的关系取商后，所有生成矩阵及其逆映射作用于 x^2y^2 都会在 U_G 中导出平凡关系 $x^2y^2-x^2y^2=0$。我们将在命题 2.4 中看到，只需检查 x^2y^2 在群的生成元及其逆映射上的像即可。因此， U_G 是 1 维的，由 x^2y^2在 $\mathbb{F}_3$ 上的像张成。

2.2. 余不变空间作为不变量环上的模。当 U 是一个 k-代数 S 且 G 通过 k-代数自同构作用时，不变空间 S^G 是 S的一个子环，我们称之为不变量环。 S^G 在 S 上的乘法作用下降到商 S_G上，因为给定 $r\in S^G$、$f\in S$ 和 $g\in G$，我们有

$$r(f-g(f))=rf-rg(f)=rf-g(rf).$$

因此，余不变空间是不变量环上的一个模。以下命题见于 [8,命题 5.1], ，概述了关于在 S^G 上生成 S_G 的一些基本信息。由此可知， S_G 是一个有限生成的 S^G-模，因为根据 S 定理 1.3.1]， S 在 S^G [3, 上有限生成。

命题 2.4. 设 M 是 k-代数 R 上的一个模，且 G 是一个有限群，它通过 R-模自同构作用于 M。记 $M_G=M/N$，其中 $N=$ 张成$_{\mathbf{k}}\{m-g(m)\colon g\in G, m\in M\}$。设$\{m_i\colon i\in I\}\subseteq M$ 作为 R-模生成 M，且 $\{g_j\colon j\in J\}\subseteq G$ 作为群生成 G。那么，

(i) 像 $\{\overline{m}_i\colon i\in I\}$ 作为 R-模生成 M_G，且 (ii) 集合 $\{m_i-g_j(m_i)\ m_i-g_j^{-1}(m_i)\colon i\in I, j\in J\}$ 作为 R-模生成 N。

除了 S_G 关于 S^G 的有限生成性之外，Lewis、Reiner 和 Stanton [8, 命题 5.7] 还给出了 S_G 作为 S^G-模的秩。

命题 2.5. 设 S 是一个 k-代数和整环，有限群 G 通过 k-代数自同构作用于其上。那么，余不变空间 S_G 作为不变量环上的模具有秩一。

S 的结构 当 $|G|$ 是 k 中的单位时，$_G$ 关于 S^G 的结构变得非常简单。为此，我们使用 Reynolds 算子 $\pi^G\colon S\to S^G$，定义如下

$$\pi^G(f)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}g(f).$$

Reynolds 算子是一个 S^G-模映射，并且只要它有定义，就是到不变量环上的投影。

命题 2.6. 假设 $|G|$ 是 k 中的一个单位，且 G 如命题 2.5 所述作用于一个作为整环的 k-代数 S。那么余不变空间 S_G 是一个秩一自由 S^G-模。

证明。映射 π^G 可经由 S_G 分解，因为 S 中同属一个 G-轨道的任意两个元素在 π^G下的像相同。诱导映射 $S_G\to S^G$ 仍然是满射。该映射还是单射：给定 $f\in S^G$，在 π^G 下映到 f 的任意两个原像 h、$h'\in S$ 必属于同一个 G-轨道，因此在 S_G中相等。□

注 2.7. Aguiar 和 Mahajan 在 [1, 引理 2.20]中指出，当S 是平坦的 kG-模时， S_G 也是一个秩一自由 S^G-模；在这种情况下，映射 $|G|\pi^G$ 是一个同构。

当 $|G|$ 在 k 中不可逆且 S 不是 kG上的平坦对象时，对于 S_G 作为 S^G上的模的结构，我们所知甚少。

为了让读者了解当 $|G|$ 在 k 中不可逆时， S^G 作用如何变得非平凡，我们将在下面推导一个例子。

例 2.8。设 $S=\mathbb{F}_2[x_1,x_2,x_3]$，并令 $G=\mathfrak{S}_3$ 通过变量置换作用；这里 $\mathbb{F}_2$ 是含 2 个元素的域。不变环是多项式环 $\mathbb{F}_2[e_1,e_2,e_3]$，其中 e_i 是次数为 i 的初等对称多项式。根据命题 2.4， S 在 $S^{\mathfrak{S}_3}$ 上的生成集会降为 $S_{\mathfrak{S}_3}$ 在$S^{\mathfrak{S}_3}$上的生成集。一个广为人知的 S 在 $S^{\mathfrak{S}_3}$ 上的基是“子阶梯”单项式的集合，也称为 Artin 基 [2]；这些单项式 $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}x_3^{\lambda_3}$满足：对所有 i，都有 $0\le\lambda_i\le 3-i$。由于同一 $\mathfrak{S}_3$-轨道中的所有单项式在余不变空间中都相等，因此只需取指数向量弱递减的这类单项式

即可。这意味着 $\{1, x_1, x_1^2, x_1x_2, x_1^2x_2\}$ 的像生成了 $S^{\mathfrak{S}_3}$上的余不变空间。这不是一个最小生成集；注意

$$e_1 \cdot \overline{1} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} = 3\,\overline{x_1} = \overline{x_1},$$

因此， $\overline{x_1}$ 是多余的。类似地，可以证明 $\overline{x_1x_2} = e_2 \cdot \overline{1}$ 和 $\overline{x_1^2} = e_1^2 \cdot \overline{1}$。然而， $\overline{x_1^2x_2}$ 是一个极小生成元，因为 e_1、e_2和e_3 中的任意三次单项式，在 $x_1^2x_2$的 $\mathfrak{S}_3$-轨道中都有偶数个项。因此，$\{\overline{1}, \overline{x_1^2x_2}\}$ 是 $S_{\mathfrak{S}_3}$作为 $S^{\mathfrak{S}_3}$上的模的最小生成集。可以计算得，$\mathrm{Ann}_{S^{\mathfrak{S}_3}}(\mathbf{1}) = \langle e_1e_2 + e_3\rangle$，并且 $\overline{x_1^2x_2}$生成了 $S_{\mathfrak{S}_3}$的一个自由 $S^{\mathfrak{S}_3}$-子模。因此，余不变空间可分解为

$$\mathbb{F}_2[x_1, x_2, x_3]_{\mathfrak{S}_3} \cong \frac{\mathbb{F}_2[e_1, e_2, e_3]}{\langle e_1e_2 + e_3\rangle} \oplus \langle e_1e_2 + e_3\rangle$$

作为 $\mathbb{F}_2[e_1, e_2, e_3]$上的模。这个分解也可由定理 5.1 得出。

下一节中，我们将重点讨论 G 通过置换变量作用于多项式环 S 的情形。在这种情况下，我们可以使用转移映射（Reynolds 算子的一个倍数；它对所有 k 均有定义）来研究 S_G 作为 S^G-模的结构。当 G 是置换群时，关于转移映射的像已有更多重要结果，而这也与余不变空间的研究密切相关。

3. The cofixed space of a permutation representation

3.1. 转移映射。本文余下部分专门讨论 $S = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ 的情形。我们赋予 S 标准分次，使得对所有 i，$\deg(x_i) = 1$，并考虑保持分次结构的群作用。换言之， G 是 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个子群，它作用于向量空间 $V \cong \mathbf{k}^n$，其基为x_1、.....、 x_n，且该作用扩张至 $\mathrm{Sym}(V) \cong S$。

定义 3.1. 给定如上所述的 G、 S，定义转移映射 $\mathrm{Tr}^G_{\mathbf{k}}\colon S \to S^G$，其定义为

$$\mathrm{Tr}^G_{\mathbf{k}}(f) = \sum_{g\in G} g(f).$$

由于 $\mathrm{Tr}^G_{\mathbf{k}}$ 是 S^G-模的映射，其像是 S^G 的一个理想，记作 $I^G_{\mathbf{k}}$。当上下文已明确 k 时，我们可以省略下标，将转移映射记作 Tr^G，并将其像记作 I^G。

注 3.2. 转移映射可下降到商 S_G。它也可以更一般地定义为：对于G任意有限群以及 G 上的一个表示 U，其中底域为 k。这给出一个自然映射 $H_0(G,U) \to H^0(G,U)$，有时称为范映射，并用于 Tate 上同调的研究；参见 [4, §6.4]。

与 Reynolds 算子不同，转移映射对任意特征的 k 都有定义。当 $\mathrm{char}(\mathbf{k}) = 0$ but $|G| \notin \mathbf{k}^\times$时，容易看出 I^G 是 S^G的一个非零真理想；也就是说 $1 \notin I^G$but $|G| \in I^G$。当 k 是特征 p的域时，要看出 I^G 是 S^G 的一个非零真理想则更为微妙； [14, 定理 2.2] 中的证明要求 G 在 S 上的作用来自一个忠实表示 $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$。

单个元素 f 在转移映射下的像等于 $|G_f|(\sum_{f'\in G/G_f} f')$，其中 G_f 是 f 的稳定子。关于不变量理论背景下的转移映射，读者可参见 [12] 或 [15]。

当 G 是置换群时，Neusel 在 [11] 给出了转移映射像的一个与特征无关的生成集。该生成集包含所谓的特殊单项式，我们将在下文定义它们。

定义 3.3. 设 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ 为 $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ 中单项式 x^α 的指数向量。定义 $\lambda(\alpha)$ 为 α 的弱递减重排。若 $\lambda(\alpha)$ 满足以下条件，则称 x^α 为特殊单项式：

(i) 对每个 $1 \le j \le n$， $\lambda(\alpha)_j \le n - j$；(ii) 对每个 $1 \le j \le n-1$， $\lambda(\alpha)_j - \lambda(\alpha)_{j+1} \in \{0, 1\}$。

定理 3.4. [11, 定理 1.1] 设 G 为一个有限群，通过变量置换作用于 $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$。则转移映射的像由特殊单项式的转移生成。

注 3.5. Neusel 在 k 为任意特征的域时，通过对分拆上的支配序进行归纳，证明了定理 3.4。同样的论证适用于任意交换环 k，因此这里将其表述为这一一般形式。

例 3.6. $\mathbf{k}[x_1, x_2, x_3]$ 的特殊单项式为

$$1,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_1x_2,\ x_1x_3,\ x_2x_3,\ x_1^2x_2,\ x_1^2x_3,\ x_1x_2^2,\ x_2^2x_3,\ x_1x_3^2,\ x_2x_3^2.$$

当 x^α 和 x^β 处于同一个 G-轨道中时，$\mathrm{Tr}^G(x^\alpha) = \mathrm{Tr}^G(x^\beta)$。因此，当 $G = \mathfrak{S}_n$时，$\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}_n}$ 的像由指数向量弱递减的特殊单项式的转移生成；我们有时称其为特殊分拆。在 $\mathfrak{S}_n$上工作时，特殊单项式指的是指数向量弱递减的单项式。

当 k 的特征为正时，Campbell、Hughes、Shank 和 Wehlau 运用块基理论，在 [5, 定理 9.18], 中给出了转移像的另一种生成集。这个生成集同样由某些单项式的转移组成，而且一般而言并非最小生成集。我们将在第 4.1 节看到，定理 1.1 的最小生成集并非由单项式的转移给出。

3.2. 余不变空间与转移映射的关系。

命题 3.7. 假设 k 是零特征交换环。设 G 是一个有限群，通过置换表示作用于 $S = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$。那么，余不变空间同构于转移映射的像，并将其视为 S^G的一个理想。

证明。我们证明转移映射 $\mathrm{Tr}^G\colon S_G \to S^G$ 是单射。由于 S 有一个由单项式构成的 k-基，不变量环有一个由单项式轨道和构成的 k-基，即具有如下形式的一组基

$$\left\{ m_\lambda := \sum_{x^\alpha \in Gx^\lambda} x^\alpha : \lambda \in \Lambda \right\},$$

其中，Λ 是 G在 S中所有单项式的集合上的一组完备且无冗余的轨道代表元，而 Gx^λ表示 G在 x^λ上的轨道中的所有元素组成的集合。另一方面，余不变空间是一个自由 k-模，其 k-基为 $\{\overline{x^\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$，其中 $\overline{f}$ 表示 f 在 S_G中的像。转移映射将 $\overline{x^\lambda}$ 映到 $|G_\lambda| m_\lambda$，其中 G_λ 是 x^λ的稳定子。由于 k 是零特征，$\overline{x^\lambda}$ 在转移映射下的像非零。因此，$\overline{x^\lambda}$ 的像在 S^G中线性无关，从而可知转移映射 $S_G \to S^G$ 是单射。□

当 char(k) $= 0$ 时，转移映射是研究余不变空间的非常有用的工具。不过，我们也关注 k 具有正特征的情形。在下面的引理 3.8 中，我们证明，取余不变空间与基变换可交换。这使我们能够先在 $\mathbf{k} = \mathbb{Z}$（或 $\mathbf{k} = \mathbb{Z}_{(p)}$）上进行研究，再将系数环变为例如 $\mathbf{k} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。下面的引理由 Kattḧan [7] 发现并证明。有关基变换的注释，请参见 [16, 10.14]。读者应注意，我们打算将以下结果应用于 $k = \mathbb{Z}$或 $k = \mathbb{Z}_{(p)}$、$R = k[e_1, \ldots, e_n]$、$M = k[x_1, \ldots, x_n]$和 $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的情形。

引理 3.8（基变换引理）。设 $\varphi\colon k \to R$, $\psi\colon k \to K$ 是交换环的同态。我们将 $\psi\colon k \to K$ 视为基变换映射。设 M 是左 kG- 模，也是 R- 模，并且 R 与 kG 的作用可交换。由于 k 是交换的，将 M 视为一个 (kG, k)- 双模。于是

$$(k \otimes_{kG} M) \otimes_k K \cong k \otimes_{kG} (M \otimes_k K)$$

作为 $R \otimes_k K$-模；换言之，$M_G \otimes_k K \cong (M \otimes_k K)_G$ 作为 $R \otimes_k K$-模。

证明。由张量积的结合律，存在一个自然映射 $a : (k \otimes_{kG} M) \otimes_k K \to k \otimes_{kG} (M \otimes_k K)$，该映射定义良好，且是 k-模和 kG-模的同构 [16, 10.12]。接下来只需验证此映射保持源和目标上的 $(R \otimes_k K)$-模结构。我们说明 $R \otimes_k K$ 中的元素 $r \otimes y$ 如何作用于基本张量，其中 $x_0 \in k$、$m_0 \in M$、$y_0 \in K$:

$$\begin{aligned}(r \otimes y) \cdot ((x_0 \otimes m_0) \otimes y_0) &:= r(x_0 \otimes m_0) \otimes yy_0 \\ &= (x_0 \otimes rm_0) \otimes yy_0, \\ (r \otimes y) \cdot (x_0 \otimes (m_0 \otimes y_0)) &:= x_0 \otimes ((r \otimes y) \cdot (m_0 \otimes y_0)) \\ &= x_0 \otimes (rm_0 \otimes yy_0).\end{aligned}$$

因此，自然映射 a 也是一个 $S \otimes_R R'$-模映射，这正是我们所要证明的。 □

注 3.9. 在引理 3.8 的设定下，我们希望令 R 为某个群 G 在 $\mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]$ 中的 G-不变量环。一般而言，对于基变换环 K，$(R\otimes_{\mathbf{k}} K)^G = R^G\otimes_{\mathbf{k}} K$ 并不成立，因此引理 3.8 无法给出 $(M\otimes_{\mathbf{k}} K)_G$ 作为 $K[x_1,\dots,x_n]^G$ 上的模的结构信息。然而，对于在多项式环上具有标准作用的 $G=\mathfrak{S}_n$，不变量环在任意基环上的表示都相同。

引理 3.8 表明，我们可以先计算 $I_{\mathbb{Z}}^{\mathfrak{S}_n}\subset\mathbb{Z}[e_1,\dots,e_n]$，再取 $I_{\mathbb{Z}}^{\mathfrak{S}_n}/pI_{\mathbb{Z}}^{\mathfrak{S}_n}\cong I_{\mathbb{Z}}^{\mathfrak{S}_n}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，从而将 $M=\mathbb{F}_p[x_1,\dots,x_n]_{\mathfrak{S}_n}$ 理解为 $\mathbb{F}_p[e_1,\dots,e_n]$ 上的模。随着单项式 x^λ 的稳定子变大，理想 $I_{\mathbb{Z}}^{\mathfrak{S}_n}$ 可能会变得非常复杂。相反，我们在 $\mathbf{k}=\mathbb{Z}_{(p)}$ 上工作；在这种情况下，理想 $I_{\mathbb{Z}_{(p)}}^{\mathfrak{S}_n}$ 会简单得多（而且更有趣，定理 1.1 和猜想 1.2 对此作了说明），同时我们也可以用同样的方式推导出关于 M 的信息。

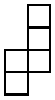
4. 定理证明

我们进一步专门考虑 $S=\mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]$ 且 $G=\mathfrak{S}_n$ 的情形。这里，不变量环 S^G 是多项式代数 $\mathbf{k}[e_1,\dots,e_n]$，其中 e_i 表示变量 x_1、.....、x_n 中的第 i^{th} 个初等对称多项式。对于每个满足 $0\le i\le p-1$ 的 $n=p+i$，我们将理想 J_n 定义为

$$J_n=\langle p,\ e_1e_p-e_{p+1},\ e_2e_p-e_{p+2},\ \dots,\ e_ie_p-e_{p+i},\ e_{i+1},\ e_{i+2},\ \dots,\ e_{p-1}\rangle\subset\mathbb{Z}_{(p)}[e_1,\dots,e_n].$$

为了证明定理 1.1，我们将先证明存在包含关系 $J_n\subseteq I^{\mathfrak{S}_n}$，且当 $n=p$ 时定理成立。随后，我们将利用 $\mathfrak{S}_n$ 的 p-Sylow 子群所具有的稳定性，以及 Shank 和 Wehlau 的一个结果 [14]，推导出 $I^{\mathfrak{S}_n}$ 的高度，这将是证明该定理的关键。除非另有说明，本节中令 $\mathrm{Tr}=\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}_n}=\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathbb{Z}_{(p)}}$。

注 4.1. 通过 Jacobi–Trudi 恒等式很容易看出，理想J_n 的每个生成元 $e_pe_j-e_{p+j}$ 都是与双列带状形状对应的斜舒尔多项式，其中第一列有 j 个方格，第二列有 p 个方格。例如，生成元 $e_2e_3-e_5$ 是舒尔多项式对应斜形 。



4.1. J_n 在 $I^{\mathfrak{S}_n}$中的包含关系。

命题 4.2. 给定 $n=p+i$ 和 $1\le i\le p-1$，定理 1.1 中的理想 J_n 包含于 $I^{\mathfrak{S}_n}$。

证明。我们将 J_n 的生成元分为三类，并证明每类生成元都属于 $I^{\mathfrak{S}_n}$:

(i) p, (ii) 对于 $i+1\le j\le p-1$, e_j，以及 (iii) 对于 $1\le j\le i$, $e_je_p-e_{p+j}$。

显然，$p\in I^{\mathfrak{S}_n}$，因为

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{p}{n!}\cdot 1\right)=\frac{p}{n!}\,\mathrm{Tr}(1)=p$$

并且$\frac{n!}{p}$ 在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 中可逆，其中 $n<2p\le p^2$。记 $\mathrm{Tr}(x_1\cdots x_j)=j!(p+i-j)!e_j$，可知 $e_j\in I^{\mathfrak{S}_n}$ 当且仅当 $j\le p-1$ 且 $p+i-j\le p-1$。这恰好是 e_j 属于 J_n 所需的条件。

当 $1\le j\le i$ 时，要证明 $e_je_p-e_{p+j}$ 属于转移的像更为复杂。对于任意分拆 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$，令 a_λ 为 λ 在 $\mathfrak{S}_n$ 中的稳定子的阶，其中 $\mathfrak{S}_n$ 按坐标置换作用。正如我们所见，可以写成 $\mathrm{Tr}(x^\lambda)=a_\lambda m_\lambda$，其中 m_λ 是与 λ 相关联的单项对称多项式，也就是 λ 的 $\mathfrak{S}_n$-轨道中所有不同元素之和。对于任意 $\mathbf{k}$，当 λ 遍历所有弱递减指数向量时，m_λ 构成 $\mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ 的一组 $\mathbf{k}$-基。因此，对于某个 $b_\lambda\in\mathbb{Q}$，可以写为

$$e_je_p-e_{p+j}=\sum_\lambda b_\lambda m_\lambda=\sum_\lambda\frac{b_\lambda}{a_\lambda}\,\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}}(x^\lambda).$$

我们将明确计算系数 b_λ，然后证明 $\frac{b_\lambda}{a_\lambda}\in\mathbb{Z}_{(p)}$，也就是说，$\frac{b_\lambda}{a_\lambda}$ 写成最简形式时，分母中不含有 p 的幂。由此可知，$e_je_p-e_{p+j}\in I^{\mathfrak{S}_n}$。将 $e_je_p-e_{p+j}$ 按单项对称多项式 m_λ 展开时，以非零系数出现的分拆 λ 具有如下形式

$$\lambda^{(k)}=(2^k,1^{p+j-2k},0^{i-j+k})$$

对于 $0 \le k \le j$。我们将在证明的后面单独考虑 $k = 0$ 的情形。现在假设 $k \ge 1$。那么， $e_j e_p$ 中 $m_{\lambda^{(k)}}$ 的系数 $b_{\lambda^{(k)}}$ 等于 $\binom{p+j-2k}{j-k}$。为说明这一点，我们可以计算单项式 $x_1^2 \cdots x_k^2 x_{k+1} \cdots x_{p+j-k}$ 在 $e_j e_p$中出现的次数。为了得到这样的单项式，必须从 e_j 中选择一个可被 $x_1 \cdots x_k$ 整除的项，并从 e_p 中选择一个可被 $x_1 \cdots x_k$整除的项。剩下需要选择变量 x_{k+1}、……、 $x_{k+p+j-2k}$ （这是一个大小为 $p+j-2k$的集合），其中有 $j-k$ 个必须来自 e_j项。由于 $k \ge 1$，这也就是 $e_j e_p - e_{p+j}$中 $m_{\lambda^{(k)}}$ 的系数。

由于 $a_\lambda = k!(p+j-2k)!(i-j+k)!$，我们可以写成

$$\begin{aligned} e_j e_p - e_{p+j} &= \frac{b_{(1^{p+j})}}{a_{(1^{p+j})}} \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}}(x^{(1^{p+j})}) + \sum_{k=1}^{j} \frac{\binom{p+j-2k}{j-k}}{k!(p+j-2k)!(i-j+k)!} \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}}(x^{\lambda^{(k)}}) \\ &= \frac{b_{(1^{p+j})}}{a_{(1^{p+j})}} \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}}(x^{(1^{p+j})}) + \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{(j-k)!(p-k)!k!(i-j+k)!} \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}}(x^{\lambda^{(k)}}). \end{aligned}$$

注意，对于 $k \ge 1$，$\operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}}(x^{\lambda^{(k)}})$ 中每个系数的分母都不含 p 的因子。因此，这些系数都是 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的元素。接下来需要确定 $\operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}}(x^{(1^{p+j})})$ 的系数。令 $\lambda = (1^{p+j})$。我们有 $b_\lambda = \binom{p+j}{j} - 1$，因为 $e_j e_p$ 给出 $\binom{p+j}{j}$ 项 $x_1 \cdots x_{p+j}$，而 e_{p+j} 恰好有一个这种形式的项。由于 λ 由 $p+j$ 1 个 ' 和 $p+i-(p+j)$ 个 0 组成，因此有 $a_\lambda = (p+j)!(i-j)!$。于是，

$$\frac{b_\lambda}{a_\lambda} = \frac{\binom{p+j}{j} - 1}{(p+j)!(i-j)!} = \frac{(p+j)! - p!j!}{p!j!(p+j)!(i-j)!}.$$

现在我们可以将 $(p+j)! = (p+j)(p+j-1)\cdots p!$ 重写，并约去一个 $p!$，得到

$$\frac{b_\lambda}{a_\lambda} = \frac{(p+j)(p+j-1)\cdots(p+1) - j!}{j!(p+j)(p+j-1)\cdots(p)(p-1)!(i-j)!}.$$

注意，$(p+j)(p+j-1)\cdots(p+1) \equiv j!$ 模 p，且它严格大于 p。因此，对于某个 $\ell > 0$，我们可以写成 $(p+j)(p+j-1)\cdots(p+1) = j! + \ell p$。此外，分母中只有一个 p 因子。因此我们有

$$\frac{b_\lambda}{a_\lambda} = \frac{j! + \ell p - j!}{j!(p+j)\cdots p(p-1)!(i-j)!} = \frac{\ell}{j!(p+j)\cdots(p+1)(p-1)!(i-j)!} \in \mathbb{Z}_{(p)}.$$

□

4.2. 一个基础情形。

命题 4.3. 当 $n = p$ 时，转移映射的像等于 $\mathbb{Z}_{(p)}[e_1, \ldots, e_p]$ 的理想 $J_p = \langle p, e_1, \ldots, e_{p-1} \rangle$。

在开始证明命题 4.3 之前，我们回顾分拆支配序的定义。关于（次数和）支配序的归纳技巧，与 Neusel 在证明 [11, 定理 1.1] 时所用的技巧类似。

定义 4.4. 固定一个整数 $m \ge 1$，并令 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$、 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ 为 m 的两个整数分拆，其中元组 λ 和 μ 的坐标均为弱递减的非负数。若对每个 $1 \le j \le n$，都有 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_j \ge \mu_1 + \cdots + \mu_j$.，则称 λ 支配μ，或记作 $\lambda \ge_{\mathrm{dom}} \mu$。

命题 4.3 的证明。由命题 4.2 可知，存在包含关系 $J_p \subseteq I^{\mathfrak{S}_p}$。要证明 J_p 的生成元也生成转移的像，只需证明任意特殊单项式（见定义 3.3）的转移都属于 J_p，这由定理 3.4 可得。我们将按次数和支配序归纳。设 x^λ 是一个特殊单项式，满足 $\lambda_1 \ge 2$。令 $k := \max\{j : \lambda_j \ne 0\}$。由于 λ 是特殊的，且 $\lambda_1 \ge 2$，我们有 $k \in \{2, \ldots, p-1\}$，其中 $\lambda_k = 1$。定义一个新的分拆

$$\widetilde{\lambda} := (\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \ldots, \lambda_{k-1} - 1, 0, \ldots, 0)$$

~ ~由 λ 通过将所有非零部分减去 1 得到。记 $e_k\, x^\lambda = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le p} (x_{i_1} \cdots x_{i_k} x^\lambda)$，我们可以对等式两边应用转移映射，并利用其 $\mathbb{Z}_{(p)}[e_1, \ldots, e_p]$-线性：

$$e_k \operatorname{Tr}(x^{\widetilde{\lambda}}) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le p} \operatorname{Tr}(x_{i_1} \cdots x_{i_k} x^{\widetilde{\lambda}}). \tag{1}$$

~右侧的一般项形如 Tr(x^α)，其中 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$由 λ 将恰好 k 个分量各加 1 得到。只有当 λ的每个非零分量~ ~ ~都加 1 时，项 Tr(x^λ) 才会出现。 λ 的每个非零分量都对应于 λ 中一个大于 2 的分量。若 λ 有 ℓ 个非零分量，则 $1 \le \ell < k$，因为 $\lambda_k = 1$。因此，式 (1) 中 Tr(x^λ) 的系数为$\binom{p-\ell}{k-\ell}$，它在 $\mathbb{Z}_{(p)}$中可逆。现在，给定式 (1) 中任意一项 Tr(x^α)，令 μ 为 α的弱递减重排。根据构造，对每个 $j \le k$，都有 $\mu_j \le \lambda_j$，且当且仅当 $\mu = \lambda$时取等号。对于 $j > k$，我们有

$$\mu_1 + \cdots + \mu_j \le \deg(x^\lambda) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = \lambda_1 + \cdots + \lambda_j.$$

因此， $\mu \le_{\mathrm{dom}} \lambda$。由此可知，我们可以写成

$$\mathrm{Tr}(x^\lambda) = \frac{1}{\binom{p-\ell}{k-\ell}} \left(e_k \,\mathrm{Tr}(x^{\tilde{\lambda}}) + \sum_{\mu <_{\mathrm{dom}} \lambda} c_\mu \,\mathrm{Tr}(x^\mu) \right),$$

因此，由归纳法可得 Tr(x^λ) $\in J_p$。 □

4.3. 利用 $\mathfrak{S}_n$ 的 p-Sylow 子群。为了证明定理 1.1，我们将利用这样一个事实：当 n 落在某个 k 的范围 $\{kp, kp+1, \ldots, (k+1)p-1\}$ 内时， $\mathfrak{S}_n$ 的 p-Sylow 子群是同构的。

引理 4.5. 设 n、 m 为正整数，且对于某个正整数 k，有 $kp \le n < m < (k+1)p$。那么， $\mathfrak{S}_n$ 和 $\mathfrak{S}_m$ 的 p-Sylow 子群是同构的。此外， $\mathfrak{S}_n$ 的任意给定的 p-Sylow 子群都可以通过自然包含 $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathfrak{S}_m$ 嵌入 $\mathfrak{S}_m$ 的一个 p-Sylow 子群中。

证明。设 P_n 是 $\mathfrak{S}_n$ 的任意一个 p-Sylow 子群。那么， $\mathfrak{S}_m$ 中存在一个子群 P_m，它由 P_n 经映射

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n &\longrightarrow \mathfrak{S}_m, \\ [w_1, \ldots, w_n] &\mapsto [w_1, \ldots, w_n, n+1, \ldots, m] \end{aligned}$$

其中上述置换用单行记号表示。于是 $P_n \cong P_m$ 作为群。由于 n、 $m \in \{kp, \ldots, (k+1)p-1\}$， $\mathfrak{S}_n$ 和 $\mathfrak{S}_m$ 的阶含有相同个数的 p 因子。因此， $\mathfrak{S}_n$ 和 $\mathfrak{S}_m$ 的 p-Sylow 子群阶相同。既然我们已构造出 $\mathfrak{S}_m$ 的一个阶正确的子群，那么 $\mathfrak{S}_m$ 的所有 p-Sylow 子群都必定与 P_m 同构。□

从现在起，若 n、 m 满足某个 k 下的 $kp \le n < m < (k+1)p$，我们分别选取 $\mathfrak{S}_n$、 $\mathfrak{S}_m$ 的 p-Sylow 子群 P_n、 P_m，使得如引理 4.5 的证明中那样， P_m 是 P_n 在自然包含 $\iota\colon \mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathfrak{S}_m$ 下的像。当 P_n、 P_m 以这种方式选取时，变量 x_{n+1}、……、 $x_m \in \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_m]$ 在 P_m 的作用下均为不变。下面的简单推论由此得出。

推论 4.6. 设 n, m, P_n, P_m 如上， $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_m]^{P_m} = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]^{P_n} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[x_{n+1}, \ldots, x_m]$，且存在自然包含 $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]^{P_n} \hookrightarrow \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_m]^{P_m}$。

只要 $n+1$ 不是 p 的倍数，我们就可以利用引理 4.5 和推论 4.6，推导出转移理想 I^{P_n} 和 $I^{P_{n+1}}$ 之间的关系。

引理 4.7. 设 $n \in \{kp, \ldots, (k+1)p-2\}$，且 P_n, P_{n+1} 是 $\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n+1}$ 的 p-Sylow 子群，满足 $\iota(P_n) = P_{n+1}$。令 R_n 和 R_{n+1} 分别表示 $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ 和 $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ 中的 P_n- 不变子环和 P_{n+1}- 不变子环。则， $I^{P_{n+1}}$ 是扩张理想 $R_{n+1} \cdot I^{P_n}$。

证明。理想 $I^{P_{n+1}}$ 由 $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ 中所有单项式 x^α 的转移生成。给定这样一个单项式， x_{n+1} 要么整除 x^α，要么不整除。如果 x_{n+1} 不整除 x^α，那么

$$\mathrm{Tr}^{P_{n+1}}(x^\alpha) = \mathrm{Tr}^{P_n}(x^\alpha) \in R_{n+1} \cdot I^{P_n}.$$

如果 x_{n+1} 整除 x^α，我们可以将 x^α 分解为 $x^{\widetilde{\alpha}} \cdot x_{n+1}^b$，其中 $\gcd(x^{\widetilde{\alpha}}, x_{n+1}^b) = 1$。利用 x_{n+1} 被 P_{n+1} 固定这一事实，以及 P_{n+1} 的作用具有乘法性，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}^{P_{n+1}}(x^\alpha) &= \sum_{w \in P_{n+1}} (wx^{\widetilde{\alpha}})(wx_{n+1}^b) \\ &= \sum_{w \in P_{n+1}} (wx^{\widetilde{\alpha}})x_{n+1}^b \\ &= x_{n+1}^b \sum_{w \in \iota(P_n)} wx^{\widetilde{\alpha}} \\ &= x_{n+1}^b \,\mathrm{Tr}^{P_n}(x^{\widetilde{\alpha}}) \quad \in R_{n+1} \cdot I^{P_n}.\end{aligned}$$

我们已经证明了包含关系 $I^{P_{n+1}} \subseteq R_{n+1} \cdot I^{P_n}$。为了证明反向包含关系，取 $f \in R_{n+1} \cdot I^{P_n}$，并将 $f = \sum_j r_j \mathrm{Tr}^{P_n}(f_j)$ 写成某个 $r_j \in R_{n+1}$ 和 $f_j \in \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$。由于 f_j 只使用变量x_1、.....、x_n，因此我们有 $\mathrm{Tr}^{P_n}(f_j) = \mathrm{Tr}^{P_{n+1}}(f_j)$。由于 $\mathrm{Tr}^{P_{n+1}}$ 是 R_{n+1}-模的映射，且每个 $r_j \in R_{n+1}$，因此可得 $f = \mathrm{Tr}^{P_{n+1}}\left(\sum_j r_j \cdot f_j\right) \in I^{P_{n+1}}$。□

推论 4.8。与前面一样，取 $I^{P_n} \subset R_n$ 和 $I^{P_{n+1}} \subset R_{n+1}$，则 $\mathrm{ht}(I^{P_n}) = \mathrm{ht}(I^{P_{n+1}})$。

证明。环扩张 $R_n \hookrightarrow R_{n+1}$ 是平坦的，因此下降定理成立。此外，诱导映射 $\mathrm{Spec}\ R_{n+1} \to \mathrm{Spec}\, R_n$ 是满射。根据 [9, 定理 19 (3)],，I^{P_n} 及其扩张理想$I^{P_{n+1}} = R_{n+1} \cdot I^{P_n}$ 的高度相等。□

现在我们已经建立了 I^{P_n} 与 $I^{P_{n+1}}$之间的联系，可以比较 I^{P_n} 与 $I^{\mathfrak{S}_n}$的高度。为此，我们借助 [14], 中的一个推论，并稍作改述，以适用于 k 不是域的情形。

推论 4.9。 [14, 推论 5.2] 设 k 是一个交换环，其中 $|\mathfrak{S}_n :\ H|$ 可逆；这里 H是 $\mathfrak{S}_n$的一个子群，在 S上作用：$=\mathsf{k}[x_1 \ldots, x_n]$。那么 $\mathrm{ht}(I^{\mathfrak{S}_n}) = \mathrm{ht}(I^H)$。

证明。假设 $|\mathfrak{S}_n :\ H| \in \mathsf{k}^\times$，由 [14, 命题 5.1], 可知，$I^H$ 在整环扩张 $S^{\mathfrak{S}_n} \hookrightarrow S^H$中位于 $I^{\mathfrak{S}_n}$ 之上。由于 $S^{\mathfrak{S}_n}$ 和 S^H 都是整环，且 $S^{\mathfrak{S}_n}$ 是整闭的[2],，下降定理适用于这个环扩张。根据 [9, 定理 20 (3)],，有 $\mathrm{ht}(I^{\mathfrak{S}_n}) = \mathrm{ht}(I^H)$。□

4.4. 定理 1.1 的证明。接下来只需将前几节的内容结合起来，证明主定理。在 $\mathsf{k} = \mathbb{Z}_{(p)}$ 且 $H = P_n$的情形下，我们应用推论 4.9。

定理 1.1 的证明。结合推论 4.8 和推论 4.9，我们得出，对于任意 $n, m \in \{kp, kp+1, \ldots, (k+1)p-1\}$，存在某个 $k \geq 1$，使得

$$\mathrm{ht}(I^{\mathfrak{S}_n}) = \mathrm{ht}(I^{P_n}) = \mathrm{ht}(I^{P_m}) = \mathrm{ht}(I^{\mathfrak{S}_m}).$$

当 $n \in \{p, \ldots, 2p-1\}$ 时，命题 4.3 表明 $\mathrm{ht}(I^{\mathfrak{S}_n}) = \mathrm{ht}(I^{\mathfrak{S}_p}) = p$。由于 $\mathrm{ht}(I^{\mathfrak{S}_n}) = p$，我们可以在 $\mathbb{Z}_{(p)}[e_1, \ldots, e_n]$ 中找到一个高度为 p 的素 $\mathfrak{q}_n$，使得 $I^{\mathfrak{S}_n} \subseteq \mathfrak{q}_n$。另一方面，命题 4.2 表明 $J_n \subseteq I^{\mathfrak{S}_n}$。但是 J_n 本身是一个高度为 p 的素理想，因此我们有包含关系

$$J_n \subseteq I^{\mathfrak{S}_n} \subseteq \mathfrak{q}_n,$$

其中 J_n 和 $\mathfrak{q}_n$ 都是高度为 p 的素数。由此我们得出 $J_n = I^{\mathfrak{S}_n} = \mathfrak{q}_n$，定理得证。 □

5. Applications

5.1. 以 $\mathbb{F}_p$ 为系数的余不变空间。根据引理 3.8，我们可以通过研究模 $I^{\mathfrak{S}_n}_{\mathbb{Z}_{(p)}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 来确定 $\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]_{\mathfrak{S}_n}$作为 $\mathbb{F}_p[e_1, \ldots, e_n]$-模的结构，其中 $\mathbb{F}_p[e_1, \ldots, e_n]$ 通过在左侧张量因子上进行乘法作用。

[2] 当 $\mathsf{k} = \mathbb{Z}$ 或 $\mathsf{k} = \mathbb{Z}_{(p)}$ 时，不变量环 $S^{\mathfrak{S}_n}$ 是一个定义在唯一分解整环上的多项式环，因此其本身也是唯一分解整环。对于域 k，众所周知，有限群的不变量环都是整闭的；参见 [12] 的 §1.7。

定理 5.1. 设 $n = p + i$ 满足 $0 \le i \le p-1$。那么，余不变空间 $\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]_{\mathfrak{S}_n}$ 作为 $\mathbb{F}_p[e_1, \ldots, e_n]$ 上的模有如下直和分解:

$$\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]_{\mathfrak{S}_n} \cong \frac{\mathbb{F}_p[e_1, \ldots, e_n]}{\widetilde{J}_n} \oplus \widetilde{J}_n \tag{2}$$

其中 J_n 是 $\mathbb{F}_p[e_1, \ldots, e_n]$的理想 $\langle e_1e_p - e_{p+1},\, e_2e_p - e_{p+2},\, \ldots,\, e_ie_p - e_{p+i},\, e_{i+1},\, e_{i+2},\, \ldots,\, e_{p-1}\rangle$。证明。令 $R = \mathbb{F}_p[e_1, \ldots, e_n]$。我们首先定义一个分次 R-模之间的映射:

$$\begin{aligned} \varphi : I^{\mathfrak{S}_n} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\longrightarrow \widetilde{J}_n, \\ f \otimes a &\mapsto af. \end{aligned}$$

这是一个满射，因为 J_n 的任意生成元 g 都有 $g \otimes 1$ 作为原像。$\ker(\varphi)$中的任意基本张量都必须有一个代表元 $f \otimes a$，满足以下条件之一： $a = 0$ 属于 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，或者 f 是 $I^{\mathfrak{S}_n}$中 p 的倍数。因此，$\ker(\varphi)$中的任意非零基本张量都必须是 $p \otimes 1$的一个 R-倍。另一方面， $I^{\mathfrak{S}_n} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$中的任意元素都是一个基本张量：若 $x = \sum r_j(f_j \otimes a_j)$是 $I^{\mathfrak{S}_n} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$中的一个元素，其中 $r_j \in R, f_j \in I^{\mathfrak{S}_n}$，且 $a_j \in \mathbb{Z}$ 是 $a_j + p\mathbb{Z}$的一个代表元，那么 x 可以改写为

$$x = \sum r_j(f_j \otimes a_j) = \sum (r_jf_j \otimes a_j) = \sum (a_jr_jf_j \otimes 1) = \left(\sum a_jr_jf_j\right) \otimes 1.$$

因此，$\ker(\varphi)$ 是由 $p \otimes 1$ 生成的循环 R-模。此外， $r(p \otimes 1) = 0$ 对某个 $r \in R$ 成立，当且仅当 $r \in J_n$，所以 $\ker(\varphi) \cong R/J_n$ 作为分次 R-模。

现在我们为 φ 构造一个右逆。令自由模 R^{p-1} 以 $b_1, \ldots, b_{p-1}$ 为 R-基。定义映射

$$\begin{aligned} \hat{\psi} : R^{p-1} &\longrightarrow I^{\mathfrak{S}_n} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ b_j &\mapsto \begin{cases} (e_je_p - e_{p+j}) \otimes 1 & \text{if } 1 \le j \le i \\ e_j \otimes 1 & \text{if } i+1 \le j \le p-1 \end{cases} \end{aligned}$$

并将其线性扩张为 R-线性映射。将 J_n 的极小生成元标记为 $f_1, \ldots, f_{p-1}$，其中 f_j 的次数模 p 为 j。那么映射 ψ 满足

$$f_k\hat{\psi}(b_j) - f_j\hat{\psi}(b_k) = 0$$

对每个 $1 \le j, k \le p-1$ 都成立。由于 J_n 的生成元构成一个 R-正则序列，映射 ψ 可下降为映射 $\psi\colon \tilde{J}_n \to I^{\mathfrak{S}_n} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。此外， ψ 是 φ 的右逆，因此 $I^{\mathfrak{S}_n} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 分解为 R-模的直和

$$I^{\mathfrak{S}_n} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \ker(\varphi) \oplus \tilde{J}_n \cong R/\tilde{J}_n \oplus \tilde{J}_n.$$

□

5.2. 具有 $\mathbb{F}_p$ 系数的转移映射的像。

推论 5.2. 设 $n \in \{p, p+1, \ldots, 2p-1\}$。则转移映射 $\mathbf{Tr}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathbb{F}_p}$: $\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{F}_p[e_1, \ldots, e_n]$ 的像等于理想

$$\tilde{J}_n = \langle e_1e_p - e_{p+1},\ e_2e_p - e_{p+2},\ \ldots,\ e_ie_p - e_{p+i},\ e_{i+1},\ e_{i+2},\ \ldots,\ e_{p-1}\rangle \subset \mathbb{F}_p[e_1, \ldots, e_n].$$

证明。当 G 是置换群时，可以利用多项式环的单项式基验证交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{(p)}[x_1, \ldots, x_n] & \xrightarrow{\mathrm{Tr}^G_{\mathbb{Z}_{(p)}}} & \mathbb{Z}_{(p)}[x_1, \ldots, x_n]^G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n] & \xrightarrow{\mathrm{Tr}^G_{\mathbb{F}_p}} & \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]^G \end{array}$$

可交换。由于映射 $\mathbb{Z}_{(p)}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$ 是满射，因此可以通过取定理 1.1 的 $I^{\mathfrak{S}_n}_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ 并对其应用到 $\mathbb{F}_p[e_1, \ldots, e_n]$的自然满射，来得到 $\mathbf{Tr}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathbb{F}_p}$的像。这恰好给出了理想$J_n$。□

推论 5.2 与关于模表示 $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ 的转移映射的像的其他几个结果一致，其中 $\mathbf{k}$ 是特征为 $p > 0$的域。Campbell、Hughes、Shank 和 Wehlau˜指出， J_p 的生成集由 [5, 定理 9.18], 给出；他们在那里给出了 $\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}_n}\mathbf{k}$ 的像的一个块基，但一般而言这是一个冗余的生成集。Shank 和 Wehlau 证明了，当 G 通过 [14, 置换作用时， $I_{\mathbf{k}}^G$是根基1]定理 6.。

在 [10, 推论 2.5], 中，Neusel 证明了：如果 G 具有一个按置换作用的循环 p-Sylow 子群，那么 $I_{\mathbf{k}}^G$ 的高度至多为 $n-k$，其中 k是 G作用于 x_1、.....、 x_n时的轨道数。当 $p \le n < 2p$时， $\mathfrak{S}_n$ 的 p-Sylow 子群是阶为 p的循环群。可以选取 $\mathfrak{S}_n$ 的一个 p-Sylow 子群，使其循环置换 x_1、.....、 x_p，并固定每个 x_{p+1}、.....、 x_n。这样的子群具有 $1+(n-p)$ 个轨道，因此 $I^{\mathfrak{S}_n}\mathbf{k}$的高度至多为 $n-(1+n-p) = p-1$。当 $\mathbf{k} = \mathbb{F}_p$时，推论 5.2 表明 Neusel 的界是紧的，˜因为每个 J_n 都是高度为 $p-1$的素数。

6. A Conjecture for Larger n

定理 1.1 引出了一个关于 $\mathbb{Z}_{(p)}[x_1,\dots,x_n]_{\mathfrak{S}_n} \cong I^{\mathfrak{S}_n}$对于 $n \ge 2p$ 的余不变空间的自然问题。由于当 $n = p, p+1, \dots, 2p-1$时， $I^{\mathfrak{S}_n}$ 的生成元构成正则序列，因此 $I^{\mathfrak{S}_n}$在 $\mathbb{Z}_{(p)}[e_1,\dots,e_n]$ 上的自由分解是 Koszul 复形。此外，由于生成元的次数总是 $0, 1, \dots, p-1 \bmod p$，对固定的 i 取所有分次 Betti 数 $\beta_{i,\ j}$，得到的多重集在 $\bmod p$ 意义下相同。对于 $n < p$， $S^{\mathfrak{S}_n}$-模结构中的这种稳定性显然成立，因为此时 $S_{\mathfrak{S}_n}$ 总是秩为 1 的自由 $S^{\mathfrak{S}_n}$-模。我们可以问，这一现象在多大程度上仍然成立。对于所有 n， $\mathfrak{S}_n$ 的 p-Sylow 子群呈现出类似的稳定性模式，而这种结构对定理 1.1 的证明至关重要。这一现象或许存在于所有 n 中。

为陈述我们的猜想，我们先给出一个简短的定义。给定一个 $\mathbb{Z}$ 分次模 M，其上的环 $\mathbb{Z}$ 为分次环R，并给定某个 $i \ge 0$，令 $A_i^R(M)$ 表示这样一个整数多重集：其中 $j \in \mathbb{Z}$恰好出现 $\beta_{i,\ j}^R(M)$ 次。换言之，多重集 $A_i^R(M)$ 记录了 M 在 R 上的分次最小自由分解中，同调次数 i^{th} 所出现的次数移位。

猜想 6.1. 对每个 $r \ge 1$，令 $R_r := \mathbf{k}[e_1,\dots,e_r]$， $M_r := \mathbf{k}[x_1,\dots,x_r]_{\mathfrak{S}_r}$。设 m, n 满足$kp \le m, n < (k+1)p$，其中某个整数为 k，并假设 $\mathbf{k} = \mathbb{F}_p$ 或 $\mathbf{k} = \mathbb{Z}_{(p)}$。那么对每个 $i \ge 0$，多重集 $A_i^{R_n}(M_n)$ 和 $A_i^{R_m}(M_m)$ 在将所有元素模 p 后相等。

我们给出一些支持猜想 6.1 的证据。所有计算均使用 Macaulay2 完成，下面列出的数据采用 $\mathbf{k} = \mathbb{F}_p$。我们首先列出 $p = 2$和$p = 3$时， n在 $\{2p, 2p+1, \dots, 3p-1\}$ 范围内的数据。

当 $p = 2$时，我们考虑 $n \in \{4, 5\}$。下面列出 $A_i(M_4)$ 和 $A_i(M_5)$ 的元素；i^{th} 行和第二列中的条目分别给出了 M_4, M_5在 R_4, R_5上的最小自由分解中出现的次数扭曲。请读者注意，图 1 中两张表最右侧的列完全相同。当 $p = 3$时，可获得 $n \in \{6, 7\}$的数据。图 2 中各表最右侧的列也完全相同。

i	$A_i(M_4)$	$A_i(M_4)$ 模 4
0	$0, 1, 2, 3, 6$	$0, 1, 2, 3, 2$
1	$1, 2, 3, 3, 4, 5, 6$	$1, 2, 3, 3, 0, 1, 2$
2	$3, 4, 5, 6$	$3, 0, 1, 2$
3	6	2

i	$A_i(M_5)$	$A_i(M_5)$ 模 4
0	$0, 5, 2, 3, 10$	$0, 1, 2, 3, 2$
1	$5, 2, 3, 7, 8, 5, 10$	$1, 2, 3, 3, 0, 1, 2$
2	$7, 8, 5, 10$	$3, 0, 1, 2$
3	10	2

FIGURE 1. $p = 2$、 $n = 4$ （第一张表）以及 $p = 2$、 $n = 5$ （第二张表）的分解数据。

这些数据或许表明，某个比猜想 6.1 更强的结论成立，即当 $2p \le n, m < 3p$ 时， $A_i^{R_n}(M_n)$ 与 $A_i^{R_m}(M_m)$ 模 $2p$ 相同。迄今尚未发现这一结论的反例。我们或许可以进一步希望，若 $kp \le m, n < (k+1)p$，则 $A_i^{R_n}(M_n)$ 与 $A_i^{R_m}(M_m)$ 模 kp 相同。遗憾的是，来自 $p = 2, n \in \{6, 7\}$ 的数据表明这并不成立。不过，这些多重集模 2 仍然相同。这一点可从图3和图4中看出。这里， j^ℓ 表示 j 在多重集中出现了 ℓ 次。

i	$A_i(M_6)$	$A_i(M_6)$ 模 6
0	$0,1,2,4,5,6,8,9,10$	$0,1,2,4,5,0,2,3,4$
1	$1,2,3,4,5,5,6,6,6,$ $7,8,9,9,10,10,11,13,$ 14	$1,2,3,4,5,5,0,0,0,$ $1,2,3,3,4,4,5,1,$ 2
2	$3,5,6,6,7,7,8,9,10,$ $10,11,11,13,14,15$	$3,5,0,0,1,1,2,3,4$ $4,5,5,1,2,3$
3	$7,8,10,11,12,15$	$1,2,4,5,0,3$
4	12	0

i	$A_i(M_7)$	$A_i(M_7)$ 模 6
0	$0,7,2,4,5,12,14,9,10$	$0,1,2,4,5,0,2,3,4$
1	$7,2,9,4,5,11,6,12,12,$ $7,14,9,10,16,17,19,$ 14	$1,2,3,4,5,5,0,0,0,$ $1,2,3,3,4,4,5,1,$ 2
2	$9,11,6,12,7,13,14,9,16$ $16,11,17,19,14,21$	$3,5,0,0,1,1,2,3,4$ $4,5,5,1,2,3$
3	$13,14,16,11,18,21$	$1,2,4,5,0,3$
4	18	0

FIGURE 2. $p=3$、 $n=6$ （第一张表）和 $p=3$、 $n=7$ （第二张表）的分解数据 .

i	$A_i(M_6)$	$A_i(M_6)$ 模 2	$A_i(M_6)$ 模 4	$A_i(M_6)$ 模 6
0	$0,1,3,5,6,6,7,8,10,15$	$0^5,1^5$	$0^2,1^2,2^3,3^3$	$0^3,1^2,2,3^2,4,5$
1	1 3 4 5 6 6 6 7 7 8 8 9 10, 10, 11, 11, 12, 13, 15	$0^9,1^{10}$	$0^4,1^4,2^5,3^6$	$0^4,1^4,2^2,3^3,4^3,5^3$
2	4 6 7 8 9 9 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 14, 15	$0^8,1^7$	$0^4,1^3,2^4,3^4$	$0^3,1^2,2^2,3^3,4^3,5^2$
3	$9,10,12,14,15,15$	$0^3,1^3$	$0,1,2^2,3^2$	$0,2,3^3,4$
4	15	1	3	3

FIGURE 3. $\mathbb{F}_2[x_1,\dots,x_6]_{\mathfrak{S}_6}$ 的 $\mathbb{F}_2[e_1,\dots,e_6]$-自由分解中出现的次数移位。

i	$A_i(M_7)$	$A_i(M_7)$ 模 2	$A_i(M_7)$ 模 4	$A_i(M_7)$ 模 6
0	$0,3,5,6,7,9,10,12,14,21$	$0^5,1^5$	$0^2,1^3,2^3,3^2$	$0^3,1,2,3^3,4,5$
1	3 5 6 7 8 9 9 10, 11, 12, 12, 13, 14, 14, 16, 17, 19, 21	$0^9,1^{10}$	$0^4,1^6,2^5,3^4$	$0^3,1^3,2^3,3^4,4^3,5^3$
2	$8,9,10,11,12,13,14,14,15$ $16,16,17,18,19,21$	$0^8,1^7$	$0^4,1^4,2^4,3^3$	$0^2,1^2,2^3,3^3,4^3,5^2$
3	$14,15,16,18,21,21$	$0^3,1^3$	$0,1^2,2^2,3$	$0,2,3^3,4$
4	21	1	1	3

FIGURE 4. $\mathbb{F}_2[x_1,\dots,x_7]_{\mathfrak{S}_7}$ 的 $\mathbb{F}_2[e_1,\dots,e_7]$ 自由分解中出现的次数移位。

猜想 6.1 纯粹是一个数值性命题，但由定理 1.1 可知， $M_n = I^{\mathfrak{S}_n}_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ 的自由分解在代数上彼此相关。我们通过换环来展示这种关系。

构造 6.2. 设 $p+1 \le n \le 2p-1$。考虑环 $R=\mathbb{Z}_{(p)}[e_1,\dots,e_n]$ 和 $S=\mathbb{Z}_{(p)}[e_1,\dots,e_{n-1}]$。定义一个 $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数同态 $f\colon R\to S$，其定义如下

$$f(e_j)=\begin{cases} e_j & \text{if } j\neq n \\ e_{n-p}e_p - e_{n-p} & \text{if } j=n \end{cases}.$$

令 R,S 带有一个 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$-分次，其中 $\deg(e_i)=i \bmod p$。那么， f 关于此分次是齐次的，并且 $f(I^{\mathfrak{S}_n}) = I^{\mathfrak{S}_{n-1}}$。通过乘法映射，我们赋予 S 一个 R-模结构

$$R\times S\to S,\quad (r,s)\mapsto f(r)s.$$

特别地， $e_{n-p}e_p-e_n$ $I^{\mathfrak{S}_n}$ 的最高次数生成元作用于元素 $s\in S$ 时，结果为

$$(e_{n-p}e_p-e_n)\cdot s = f(e_{n-p}e_p-e_n)s = (e_{n-p}e_p-(e_{n-p}e_p-e_{n-p}))s = e_{n-p}s. \tag{3}$$

令 $K_\bullet$ 为在 R 上对 $R/I^{\mathfrak{S}_n}$ 进行消解的 Koszul 复形。根据 (3)，S-模复形 $K_\bullet \otimes_R S$ 中的微分由 $K_\bullet$ 得到，只需将所有矩阵条目 $e_{n-p}e_p - e_n$ 替换为 e_{n-p}；换言之，$K_\bullet \otimes_R S$ 是一个以 $I^{\mathfrak{S}_{n-1}}$的生成元为基、由 S-模构成的 Koszul 复形。由于$I^{\mathfrak{S}_{n-1}}$ 的生成元构成一个 S-正则序列，复形 $K_\bullet \otimes_R S$ 仍然是正合的；此外，它还在S上对 $S/I^{\mathfrak{S}_{n-1}}$ 进行消解。

问题6.3. 设 $kp+1 \le n < (k+1)p$，并设 $C_\bullet$ 是 $R/I^{\mathfrak{S}_n}$ 在 $R = \mathbb{Z}_{(p)}[e_1,\dots,e_n]$上的最小自由分解。是否存在一个 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-分次的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数映射 $f\colon R \to S = \mathbb{Z}_{(p)}[e_1,\dots,e_{n-1}]$，使得 $C_\bullet \otimes_R S$ 在 S上分解 $S/I^{\mathfrak{S}_{n-1}}$？

Appendix A. Minimal free resolutions with local coefficient rings

本节中，我们将验证环 $\mathbb{Z}_{(p)}[e_1,\dots,e_n]$ 上的极小自由分解在同构意义下是唯一的。我们紧密遵循多项式环 $\mathsf{k}[x_1,\dots,x_n]$（其中 k 是一个域）这一事实证明的结构，该证明见 [13]。我们在修改这些论证时，借鉴了涉及局部情形的证明（例如参见 [9]）。

令 $(A,\mathfrak{a},K)$ 为一个诺特局部环。考虑多项式环 $R = A[z_1,\dots,z_n]$，通过规定对于所有 $a \in A$，$\deg(a) = 0$，以及对于所有 $1 \le i \le n$，$\deg(z_i) = d_i > 0$，将其赋予分次 A-代数结构。令 $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}R + (z_1,\dots,z_n)R \subset R$。这是 R 的唯一齐次极大理想。

引理 A.1（广义分次中山引理）。设 U 是一个有限生成的分次 R-模，且 $J \subset R$ 是一个真齐次理想。则下列结论成立：

（1）如果 $JU = U$，则 $U = 0$；（2）如果 $W \subset U$ 是一个分次 R-子模且 $U = W + JU$，则 $U = W$。

证明。首先证明（1）。假设 $JU = U$ 且 U 非零。取 U 的一组有限齐次极小 R-模生成元 $\mathcal{G}$。令 m 为 $\mathcal{G}$ 中次数最小的元素。则对于 $j <$, $\deg(m)$，有 $U_j = 0$。JU 中的每个元素要么次数大于 $\deg(m)$，要么由于 J 是一个真理想，必属于 $(JU)_{\deg(m)} = J_0 \cdot U_{\deg(m)} \subset \mathfrak{a}R \cdot U_{\deg(m)}$。由假设，$m \in JU$，因此 $m \in \mathfrak{a}R \cdot U_{\deg(m)}$。取 $\mathcal{G}$ 的一个子集 $\mathcal{G}'$，使其极小地生成 $U_{\deg(m)}$。于是可写为 $m = \sum_{m' \in \mathcal{G}'} a_{m'} m'$，其中 $a_{m'} \in \mathfrak{a}$。由于 m 是一个极小生成元，它必以非零系数出现在等式右端，因此有

$$m - a_m m = \sum_{m \neq m' \in \mathcal{G}'} a_{m'} m'$$
$$(1 - a_m) m = \sum_{m \neq m' \in \mathcal{G}'} a_{m'} m'.$$

但 $a_m \in \mathfrak{a} = \operatorname{rad}(A)$，因此 $1 - a_m$ 是 A中的一个单位，因而也是 R中的一个单位。这与 m 作为 U的生成元的极小性相矛盾，因此 $U = 0$。

(2) 将 (1) 应用于分次 R-模 U/W即可得到。 □

定理 A.2（ [13]中基础定理 2.12 的类似结论）。设 U 是一个有限生成的分次R-模，并令$\overline{U} := U/\mathfrak{m}U$。则 $\overline{U}$是一个有限维分次 K-向量空间。令 $p = \dim_K \overline{U}$。

(1) 设 $\{\overline{u}_1,\dots,\overline{u}_p\}$是 $\overline{U}$的一组齐次基。对于每个 $1 \le i \le p$，选取 $\overline{u}_i$的一个齐次原像$u_i \in U$。则 $\{u_1,\dots,u_p\}$是 U的极小齐次生成系。(2) U 的每个极小齐次生成系都可按 (1) 中的方式得到。(3) U 的每个极小齐次生成系都含有 p 个元素。对每个i，令 $q_i = \dim_K(\overline{U}_i)$。则 U 的每个极小齐次生成系都含有 q_i 个次数为 i的元素。(4) 设 $\{u_1,\dots,u_p\}$和 $\{v_1,\dots,v_p\}$是 U的两个极小齐次生成系，并令 $v_s = \sum_j r_{js} u_j$ 满足 $r_{js} \in R$（对每个 s）。对于所有 s, j，令 c_{js} 为r_{js} 中次数为 $\deg(v_s) - \deg(u_j)$ 的齐次分量。则以下三个性质成立：对所有 s 有 $v_s = \sum_j c_{js} u_j$，$\det([c_{js}]) \in A^\times$，并且 $[c_{js}]$ 是一个具有齐次元素的可逆矩阵。

证明。为证明 (1)，首先注意到 $U = \mathfrak{m}U + Ru_1 + \cdots + Ru_p$。根据引理 A.1 (2)，我们有 $U = Ru_1 + \cdots + Ru_p$，因此 $\{u_1,\dots,u_p\}$生成 U。若这不是一个最小生成集，那么就存在某个关系（可能需要重新编号），其形式为 $u_1 = \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p$，其中 $\alpha_i \in R$。下降到$\overline{U}$可得

一个关系 $\overline{u}_1 = \overline{\alpha}_2\overline{u}_2 + \cdots + \overline{\alpha}_p\overline{u}_p$，其中 $\overline{\alpha}_i$ 是 α_i 在 $\overline{U}$中的像。这与 $\{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_p\}$ 是 $\overline{U}$上的一个K-基矛盾，因此 $\{u_1, \ldots, u_p\}$必须极小生成 U。

为证明 (2)，假设 $\{u_1, \ldots, u_p\}$ 是 U 的一组极小齐次生成元。则 $\{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_p\}$ 生成 $\overline{U}$。若 $\{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_p\}$之间存在线性相关，则选取一个真子集 $\{\overline{u}_{i_1}, \ldots, \overline{u}_{i_q}\}$，使其成为$\overline{U}$ 的 K-基。由 (1)，其原像 $\{u_{i_1}, \ldots, u_{i_q}\}$ 生成 U 作为一个 R-模，这与生成集 $\{u_1, \ldots, u_p\}$的极小性矛盾。因此，$\{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_p\}$ 必须是 $\overline{U}$ 的一个 K-基。

结论 (3) 可由 (1) 和 (2) 推出。

为证明 (4)，设 $\{u_1, \ldots, u_p\}$ 和 $\{v_1, \ldots, v_p\}$ 是 U 的两组极小齐次 R-模生成元。假设每组中的生成元都按次数递增排列。由齐次性可知，对于所有 s，$v_s = \sum_j c_{js}u_j$。令 C 为元素为 c_{js} 的矩阵。对于每个 i，令 B_i 表示 C 对角线上与次数为 i 的生成元对应的 $q_i \times q_i$ 块。于是，对于 $j > s$，有 $\deg(u_j) \geq \deg(v_s)$；因此，若 $j > s$ 且 c_{js} 位于块 $B_{\deg(v_s}$之外，则 $c_{js} = 0$。块 B_i 中的元素次数为 0，因此它们属于 A，且 $\det(C) = \prod_i \det(B_i)$。令 $\overline{C}$ 为元素为 $\overline{c}_{js}$ 的矩阵，其中 $\overline{c}_{js}$ 是 c_{js} 在 $K = R/\mathfrak{m}$ 中的像。于是 $\overline{C}$ 是一个矩阵，其非零元素仅出现在块 $\overline{B}_i$ 中。注意，对所有 s，$\overline{v}_s = \sum_j \overline{c}_{js}\overline{u}_j$，因此 $\overline{C}$ 是 K 的换基矩阵。由此可知 $\overline{C}$ 可逆，且 $\det(\overline{C})$ 是一个单位。由于 $\det(C) = \prod_i \det(B_i)$ 属于 A，我们有 $\det(C) = \det(\overline{C}) + a$，其中 $a \in \mathfrak{a}$。由于 $\det(\overline{C})$ 是一个单位，因此 $\det(C)$ 也是单位，因为 $a \in \mathrm{rad}(A)$。□

定义 A.3. 形如

$$0 \to R(-p) \xrightarrow{1} R(-p) \to 0$$

的复形称为短平凡复形。若干短平凡复形的直和（它们可以位于不同的同调次数），称为平凡复形。

定理 A.4（ [13]中定理 7.5(2) 的类似结论）。设 U 是一个有限生成分次 R-模。设 F 是 U 的极小分次自由分解，G 是 U 的分次自由分解。那么，作为复形，G $\cong$F $\oplus$T，其中 T 是某个平凡复形。

证明。由 [13, 引理 6.7], ，恒等映射 $\mathrm{id}_U : U \to U$ 诱导出次数为 0 的复形分次映射 φ: F $\to$ G 和 ψ : G $\to$ F。此外，存在一个内度为 0 的分次同伦 h，使得

$$\mathrm{id}_i - \psi_i\varphi_i = d_{i+1}h_i + h_{i-1}d_i : F_i \to F_i$$

对每个 i 都成立。由于 F 是极小的，我们可以反复应用对每个 i 都有 $\mathrm{Im}(d_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$ 这一事实，从而得到 Im(id$_i - \psi_i\varphi_i$) $\subseteq \mathfrak{m}F_i$。

为 F_i 选取一组齐次基，并按基元素的次数递增排列。设 $C = [c_{rj}]$ 为 $\psi_i\varphi_i$ 关于这组有序基的矩阵。于是，C 在对角线上有方块 B_j，其元素属于 A，而所有方块下方的元素均为零。$\mathrm{id}_i - \psi_i\varphi_i$ 的矩阵为 $E - C$，其中 E 是维数相应的单位矩阵。由于 $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_i - \psi_i\varphi_i) \subseteq \mathfrak{m}F_i$，矩阵 $E - C$ 的元素属于 $\mathfrak{m}$。因此，由于 E 的对角线元素均为 1，C 的对角线元素也必为 1。方块 B_j 中其余的元素必须属于 $\mathfrak{a}$，否则 $E - C$ 将含有属于 R 的可逆元。我们有 $\det(C) = \prod_j \det(B_j)$。模去 $\mathfrak{m}$ 后，$\overline{C}$ 必须是单位矩阵，因此其行列式为 1。但 $\det(\overline{C}) = \prod_j \det(\overline{B}_j)$，所以每个 $\overline{B}_j$ 的行列式都是 K 中的非零元素。因此，$\det(C) = \prod_j (\det(\overline{B}_j) + a_j)$，其中 $a_j \in \mathfrak{a}$，故它在 $A \subset R$ 中可逆。因此，$\psi\varphi$: F $\to$ F 是一个同构。令 ξ : F $\to$ F 为其逆映射。于是

$$\mathbf{F} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{G} \xrightarrow{\xi\psi} \mathbf{F}$$

是一个分裂。令 T $=$ ker($\xi\psi$)。于是，作为分次模，G $\cong$ φ(F) $\oplus$T。接下来只需证明这是链复形的同构，并证明 T 是平凡复形。证明的其余部分（见 [13, 第37]页）与 R的系数环无关，因此略去。□

References

1. Marcelo Aguiar 和 Swapneel Mahajan, *Monoidal functors, species and Hopf algebras*, CRM专著丛书, 第29卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2010年, 前言由 Kenneth Brown、Stephen Chase 和 Andr´e Joyal 撰写。2. Emil Artin, *Galois Theory*, 第2版, 圣母大学数学讲座, 第2号, 圣母大学, 圣母镇, 印第安纳州, 1944年。3. D. J. Benson, *Polynomial invariants of finite groups*, 伦敦数学会讲义丛书, 第190卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1993年。4. Kenneth S. Brown, *Cohomology of groups*, 数学研究生教材, 第87卷, 施普林格出版社, 纽约—柏林, 1982年。5. H. E. A. Campbell、I. P. Hughes、R. J. Shank 和 D. L. Wehlau, *Bases for rings of coinvariants*, 变换群 1 (1996), 第4期, 307–336。6. Thomas Church、Jordan S. Ellenberg 和 Benson Farb, *FI-modules and stability for representations of symmetric groups*, 杜克数学杂志 164 (2015), 第9期, 1833–1910。7. Lukas Katth¨an, *Unpublished notes*, (2017)。8. J. Lewis、V. Reiner 和 D. Stanton, *Invariants of* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ *in polynomials modulo Frobenius powers*, 爱丁堡皇家学会学报A辑 147 (2017), 第4期, 831–873。9. Hideyuki Matsumura, *Commutative algebra*, 第2版, 数学讲义丛书, 第56卷, Benjamin/Cummings出版公司, 雷丁, 马萨诸塞州, 1980年。10. Mara D. Neusel, *The transfer in the invariant theory of modular permutation representations*, 太平洋数学杂志 199 (2001), 第1期, 121–135。11. , *The transfer in the invariant theory of modular permutation representations. II*, 《加拿大数学公报》45 (2002), 第2期, 272–283。12. Mara D. Neusel 和 Larry Smith, *Invariant theory of finite groups*, 数学调查与专著, 第94卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2002年。13. Irena Peeva, *Graded syzygies*, 代数与应用, 第14卷, 施普林格伦敦有限公司, 伦敦, 2011年。14. R. James Shank 和 David L. Wehlau, *The transfer in modular invariant theory* **142** 1999 1, , 63 77 纯粹~~与应用~~代数杂志（），第期，–。15. Larry Smith, *Polynomial invariants of finite groups*, 数学研究札记, 第6卷, A K Peters有限公司, 韦尔斯利, 马萨诸塞州, 1995年。16. Stacks项目作者, *The stacks project*, `https://stacks.math.columbia.edu`, 2022年。