arXiv:2301.13386v1 [physics.data-an] 31 Jan 2023

准周期振子中极端事件的涌现

Premraj Durairaj[1], Sathiyadevi Kanagaraj[1], Suresh Kumarasamy[1], Karthikeyan Rajagopal[1,2]
[1] *Centre for Nonlinear Systems, Chennai Institute of Technology, Chennai-600 069, Tamilnadu, India.*
[2] *Department of Electronics and Communications Engineering, University Centre forResearch and Development, Chandigarh University, Mohali, 140 413, Punjab, India.*（日期：2023年2月1日；收到日期：）

极端事件是非线性动力系统中可能意外发生的、振幅大且罕见的异常波动。非线性过程的概率分布中，超过极端事件阈值的事件即为极端事件。文献中已有关于极端事件生成机制及其预测指标的报道。根据极端事件的特性，例如发生频率低、振幅极大，许多研究表明，极端事件既具有线性特征，也具有非线性特征。有趣的是，在这项工作中，我们报告了一类特殊的极端事件，它们既非混沌，也非周期。这些非混沌极端事件出现在系统的准周期动力学与混沌动力学之间。我们通过多种统计指标和表征技术报告了这类极端事件的存在。

物理学和天文学分类系统编号：
05.45.-a

极端事件是在许多自然系统和工程系统中发生的、无法预料的罕见事件。极端事件（极端事件）可以有多种形式，包括洪水、气旋、干旱、大流行病、停电、材料断裂、爆炸、化学污染和股市崩盘等 [1]。这类事件会对现实世界产生严重影响。因此，为了预防极端事件，有必要了解极端事件发生的相关机制及其一般特征。因此，研究人员着重探索各种非线性振子 [2–5],映射 [6], 和神经网络 [7]中的极端事件。此外，在超流氦[8], 等离子体[9], 光纤 [10], 激光器 [11], 以及毛细波 [12]等系统中也发现了极端事件。

然而，根据动力系统的特性，研究发现极端事件可由多种机制引发，包括内部危机、开关间歇、吹胀分岔、黏滑分岔等 [6, 11, 13–15]。例如，既有研究表明，内部或外部危机导致混沌吸引子突然扩张并遭到破坏，从而可能引发极端事件 [11, 14]。此外，内部危机被认为是极端事件发生的一种关键机制：当混沌吸引子的轨迹到达鞍点或不稳定周期轨道的稳定流形时，混沌吸引子的范围会扩大。这种混沌吸引子的突然扩张可能导致极端事件。此外，Pomeau–Manneville 间歇性也被认为是极端事件产生的另一种机制。当周期振荡中间穿插着混沌爆发时，便可能出现这种间歇性，进而导致振幅极大的事件。极端事件还可能通过以下其他机制出现。不连续边界附近的滑动分岔可能引发极端事件。在多稳态系统中，噪声可能导致吸引子的轨迹在共存吸引子之间跳转，从而引发异常大的事件。这种现象被称为噪声诱导间歇性。在耦合系统中，吸引子的轨迹会偏离同步流形，朝流形的横向方向移动。在这种转变过程中，动力学的同步误差可能为零，也可能非零，这种现象称为开关间歇 [16]。

此外，先前的研究发现，混沌过程或随机过程可能导致极端事件或罕见事件 [16]。具体而言，研究报告指出，具有不连续边界的微机电悬臂梁以及采用相位共轭反馈的二极管激光器中都出现了极端事件 [17, 18]。通过对光纤激光器施加谐波泵浦调制，研究人员发现了怪波的产生 [2, 19–21]。利用复杂网络上的多重随机游走，研究人员证明了网络上的随机输运会出现极端事件 [23, 24]。现在一个有趣的问题是，非混沌信号能否诱发极端事件。文献中有研究表明，非混沌和非周期现象已作为奇异非混沌动力学得到充分研究；这种动力学出现在吸引子从准周期性向混沌转变的过程中 [31]。文献中可以找到这些奇异非混沌吸引子的产生机制 [25, 26, 31]。本研究结果表明，与奇异非混沌动力学类似，非周期且非混沌的动力学也会表现出大振幅极端事件。本研究开辟了一个新的研究领域，表明非混沌非线性过程也可能导致极端事件，而此前尚无相关报道。

为展示非混沌极端事件，我们考虑用于描述双原子分子运动的莫尔斯振子（MO）。值得注意的是，莫尔斯振子在经典力学、半经典力学和量子力学领域都作出了重要贡献 [27, 28]。莫尔斯振子曾用于研究无阻尼分子的光解离。在存在驱动和阻尼的情况下，莫尔斯振子被用于分子的多光子激发

，以泵浦多原子分子的局域模 [29]。我们考虑准周期受迫 MO，其动力学方程可写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f sin(\omega_1 t) + g sin(\omega_2 t) + e^{-2x} - e^{-x} - \gamma y \end{aligned} \quad (1)$$

其中， x和 y 是系统的状态变量，γ 是阻尼参数。第一和第二个力的振幅分别用 f 和 g 表示，相应的频率分别用 ω_1 和 ω_2表示。

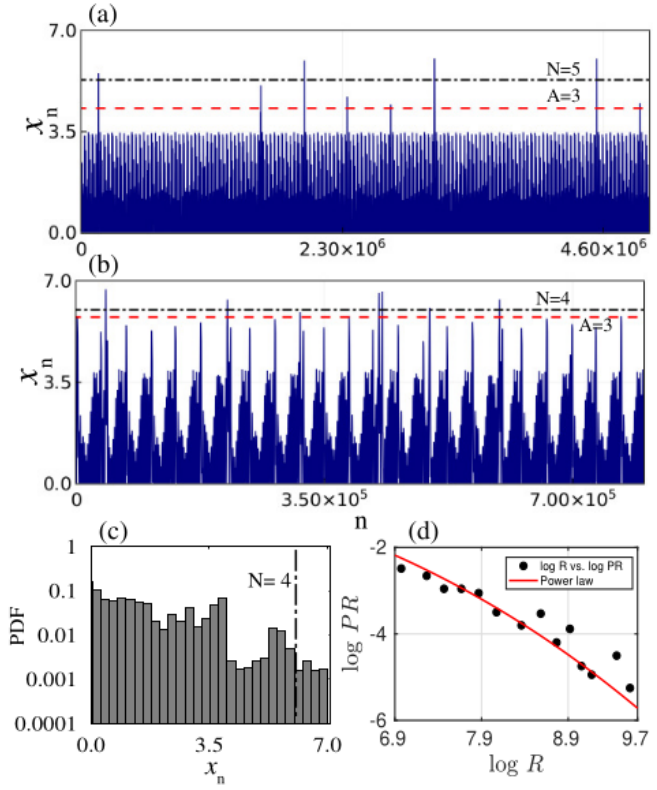


图 1：（a）受迫振幅分别为（a） $f = g = 0.255$ 和 $g = 0.278$ x_n n^{th} $f = g = 0.255$ $f =$ 和 x （b） 的非混沌动力学中， x_n 的时间演化。 为变量 的局部峰值。水平黑色点划线和红色虚线是定义极端事件的临界阈值线（关于 N 和 A的含义，请参阅正文）。（c）极端事件对应的概率分布函数；（d）对于（b），极端事件的返回间隔（R）（事件间隔）与复发时间概率（PR）的关系。（d）中的实心圆和实线分别表示数值数据和相应的幂律拟合。其他参数值固定为 $\gamma = 0.35$、$\omega_1 = 0.3$和 $\omega_2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ 。

为了展示极端事件的存在，我们首先在图 1(a) 和图 1(b) 中描绘了 x 变量的时间演化，并将第一项和第二项强迫的振幅分别固定为 $f = g = 0.255$ 和 $f = g = 0.278$。从图 1(a) 可以观察到，部分振荡（事件）具有较大的振幅，而其余振荡的振幅较小。为检验较大振幅的振荡是否符合文献中定义的极端事件判据，我们采用以下关系：

$$x_{EE} =< x_n > +N\sigma_{x_n}, \quad (2)$$

其中， x_{EE} 是临界振幅阈值， N 是乘法因子。变量 x 的均值和标准差分别表示为 $< x_n >$ 和 σ_{x_n}。这里， x_n （一个事件）是变量 x的局部峰值。若事件或局部峰值的值高于在 $N \geq 4$条件下由式（2）定义的临界阈值，则可满足极端事件判据。为确认极端事件的存在，我们在图1(a)和1(b)中绘制了 $N = 5$ 和 $N = 4$ 时间序列的临界阈值。根据时间序列的不同，我们采用了两个不同的 N 值。尽管 N 的选择具有任意性，本研究将 N 的最小值设为4。我们还针对每个 f值范围确定了 N_{max} 的临界值，详情将在下文讨论。在这两种情况下，我们都可以看到，一些大振幅事件越过了阈值线，证实了极端事件的存在。由于前述判据中 N 的选择具有任意性，我们采用异常指数定义的另一项判据：$A_n = \frac{Hf_n}{H_{1/3}}$ [17]，其中 Hf_n 是事件 n的最大高度与其总体的平均高度 $Hf_n = x_n - \langle x_n \rangle_n$ 之差，而 $H_{1/3}$ 是 Hf_n中最高三分之一数值的平均值。若事件 x_n 的异常指数 A_n 大于2，则该事件称为极端事件。我们发现，图1(a)和1(b)中的两种情况均满足上述判据，其异常指数为 $A = 3$ ，在图中以水平虚线表示。显然，少数罕见的大振幅事件越过了异常指数线。我们在图1(c)中计算了图1(b)所示时间序列的概率分布函数（PDF）。 $N = 4$ 处的极端事件临界阈值在PDF图中以竖直虚线表示。在图中，临界阈值线以上具有有限概率的事件即为极端事件。我们也可以绘制图1(a)对应的类似概率分布，但为简洁起见，这里仅绘制了图1(b)对应的PDF。

上述分析表明，观测到的行为在振幅方面满足极端事件判据。极端事件的另一个重要特征是事件间隔。事件间隔定义了事件的发生频率，不应具有离散值（离散值意味着事件的周期性发生），而应在一定范围内呈现分布。为了考察观测时间序列中事件的分布，我们找出连续极端事件之间的事件间隔（R）。随后，如图 1(d) 所示，我们求得了此类事件间隔的概率（PR）。事件间隔及其概率遵循如下幂律关系：$log_{10}(PR) = a\ log_{10}(R)^b$，其中 a 和 b 为常数，其值分别为 $a = -0.006$ 和 $b = 2.96$。所得数值以实心圆表示，

连续线表示相应的幂律拟合。下面将进一步利用李雅普诺夫指数（LE）、振幅最大值 X_{max}、临界因子N_{max}以及双参数分析，估计极端事件的出现及其转变过程。

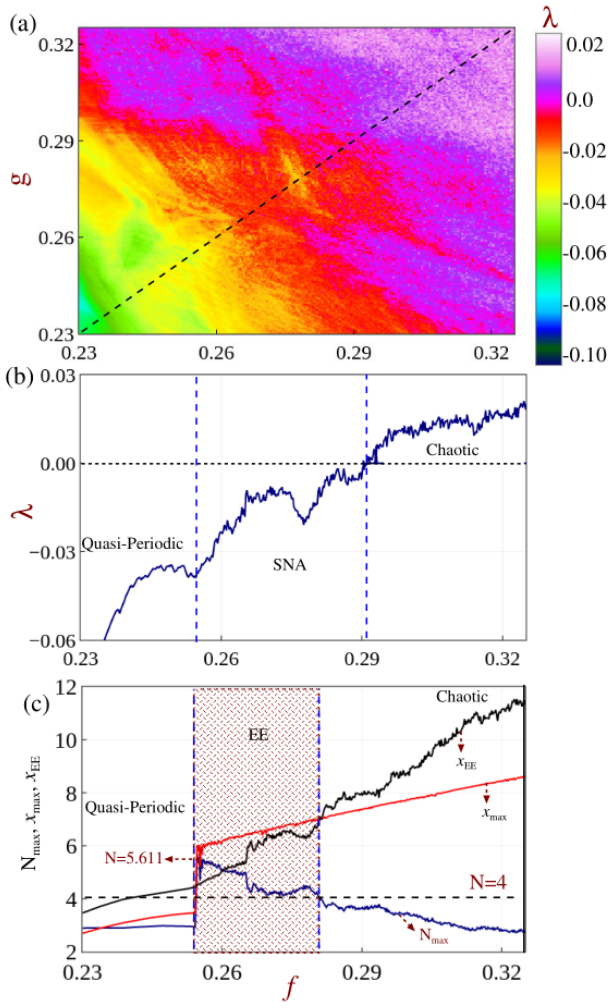


图 2：（a）在 (f，g) 参数空间中的双参数分岔图。根据李雅普诺夫指数（λ）的范围（由色条表示），标出了各动力学区域。（b）最大李雅普诺夫指数随驱动振幅 $f(=g)$ 的变化。（c）改变 $f(=g)$ 的幅值时，事件的最大振幅 x_{max}（红色）以及事件对应的 N_{max}（公式 3）（蓝色）。黑线表示根据公式（2）绘制的极端事件临界阈值（x_{EE}），其中 N=4。其他参数值与图 1 相同。

为说明吸引子的全局动力学转变及极端事件的演化路径，我们使用最大李雅普诺夫指数绘制了（f，g）空间中的双参数图，如图 2(a) 所示。李雅普诺夫指数的取值范围（见色条）表示在参数 f 和 g 下分别出现准周期、非混沌和混沌吸引子。当受迫振幅 f 和 g 较小时，吸引子具有最大负李雅普诺夫指数，表明存在准周期（QP）吸引子区域。为更好地理解准周期吸引子，我们在补充材料图 S1 a(i, ii) 中绘制了 $f = g = 0.23$ 的时间演化和相图轨迹，显示了其有界特性。因此，该吸引子的极端事件临界阈值高于准周期吸引子的振幅。随着 f 和 g 数值增大，准周期吸引子经由奇异非混沌动力学转变为混沌（CH）吸引子，此时李雅普诺夫指数从负值（接近零）变为正值。为区分奇异非混沌吸引子和混沌吸引子，在分别固定 $f = g = 0.278$ 和 $f = g = 0.33$ 的情况下，补充材料图 S1 b(i,ii) 和图 S1 c(i,ii) 展示了时间演化和相图轨迹。此外，频谱也可用于区分准周期、奇异非混沌吸引子和混沌。补充材料图 S4 (a-c) 给出了频谱分析。与混沌吸引子（具有更多大振幅振荡）相比，我们发现奇异非混沌吸引子的大振幅振荡较少。更多信息请参阅补充材料图 S1。此外，为清晰展示动力学转变，我们在图 2(b) 中绘出了最大李雅普诺夫指数：固定参数（$f = g$），并沿图 2(a) 中所示的对角虚线改变该参数。图 2(b) 展示了在范围（$0.23 < f\ (= g)\ < 0.32$）内，最大李雅普诺夫指数随受迫振幅 f 和 g（$f = g$）的变化关系。我们观察到，在上述范围内，当受迫振幅最小时，李雅普诺夫指数取负值，表明系统呈现准周期动力学。随着参数增大，李雅普诺夫指数由负转正，表明动力学从准周期行为转变为混沌行为。此外，我们发现李雅普诺夫指数接近零的负值对应奇异非混沌行为；该区域内可见极端事件。文献表明，极端事件会在混沌动力学下通过不同路径发生 [16]；网络上的随机输运等随机过程已通过复杂网络上的多次随机游走得到展示 [23, 24]。在各种演化路径中，非混沌动力学下极端事件的发生是一种新现象，据我们所知，此前尚未有相关报道。

为验证 SNA 区域内是否出现极端事件，我们求出给定时间序列的最大振幅 x_{max}、极端事件阈值 x_{EE} 以及 N (N_{max}) 的最大值。在图 2(c) 中，我们绘出了随 $f = g$ 大小变化的上述量。该图对极端事件状态的解释如下。在非极端状态下，临界阈值 x_{EE} 大于 x_{max}。这意味着阈值大于大振幅振荡，因此不满足极端事件判据。而在极端事件状态下，x_{max} 大于极端事件临界阈值 x_{EE}（阴影部分为极端事件区域）。这表明极端事件的振幅大于极端事件判据所规定的振幅。请注意，SNA 状态在

参数范围 $f \in 0.28$ 至 0.2912 内没有极端事件。正如上文所述，我们将 $N = 4$ 固定为文献 [30] 中给出的任意常数。然而， N 的最大值可通过改写式 (2) 确定，如下所示：

$$N_{max} = \frac{max(x_{EE}) - \langle x_n \rangle}{\sigma_{x_n}}. \tag{3}$$

在图 2(c) 所示的 SNA 区域中，我们发现

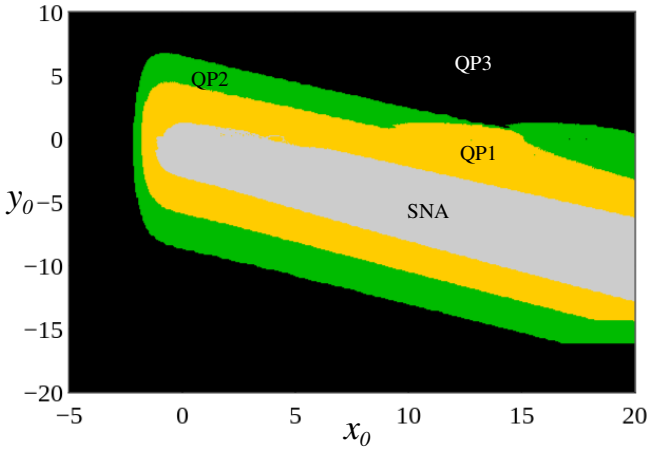


图3： $f = g = 0.278$的吸引域。 $QP1$、 $QP2$和 $QP3$ 分别为准周期吸引子-1、准周期吸引子-2和准周期吸引子-3。SNA 表示奇异非混沌吸引子。其他参数值固定为与图 1 相同。

乘法因子取值介于 $4 \leq N_{max} \leq$5.611 之间；受迫振幅在 0.256 至 0.28 范围内的区域以透明阴影图案标示。 N_{max} 的图表显示，根据参数的选择，可以选取任意值 N$\in \{4, 5.611\}$。因此，上述结果满足极端事件的所有判据，并证实了 SNA 状态下极端事件的存在。

正如我们前面讨论的，观测到的极端事件是非混沌且非周期的。同时，与奇异非混沌极端事件对应的参数表现出多种稳定行为。通过绘制一系列初始条件下的吸引域，可以观察到多稳态行为。图3通过改变系统的初始状态 x_0 和 y_0 绘制而成，参数取值见图1图注。我们可以看到，非混沌且非周期行为（即奇异非混沌吸引子）的吸引域嵌入在准周期动力学的吸引域中。在奇异非混沌吸引子的吸引域之外，我们发现了三个不同的吸引域，其中包含准周期吸引子。图3中分别以 QP1、QP2、QP3 和 SNA 标记这三个不同的准周期吸引子的吸引域以及奇异非混沌吸引子的吸引域。在补充材料图（S2）中展示了各个准周期吸引子。图3表明，极端事件会在特定的初始条件取值下发生域。这些吸引域的大小会随着我们在图 2 标示的极端事件状态范围内改变参数而变化。

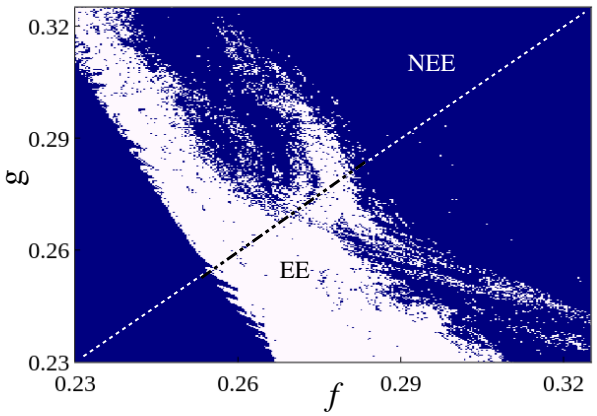


图 4：在（f， g）参数空间中的双参数相图（在固定初始条件（x_0， y_0）=(0.3，0.2)下使用方程 2 绘制），分别用于区分极端事件（EE）和非极端事件（NEE）的存在。其余参数值固定为与图 1 相同。

同样，为了确定参数空间中 f 和 g对应的极端事件区域，我们绘制了如图4所示的双参数图。

图中的白色区域表示参数组合（f， g）对应的极端事件，这些事件借助方程 2 与非极端事件区分开来（NEE，以蓝色表示）。比较图 2(a) 和图 4 可知，极端事件出现在 SNA 区域内（但某些 SNA 参数区域可能不包含极端事件）。

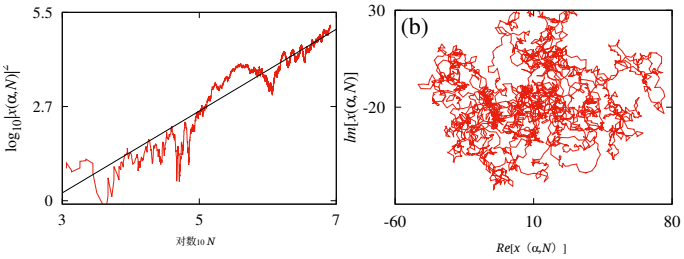


图 5：固定驱动振幅 f， $g = 0.278$ 时的奇异连续谱。(a) $|x(\alpha, N)|^2$ 相对于 N 的对数图。红线和黑线分别表示数值结果及其对应的幂律拟合。(b) x在复平面中的分形轨迹。其他参数值设定为 $\gamma = 0.35, \omega_1 = 0.3, \omega_2 = (\frac{\sqrt{5}-1}{2})$。

为展示奇异非混沌吸引子状态下极端事件存在的普遍性，我们在补充材料图 S3(a)、(b) 中展示了 $\gamma = 0.4$的极端事件状态。这一结果验证了所选参数状态下奇异非混沌极端事件的存在。在下一节中，我们将所观察到的行为刻画为具有奇异性和非混沌性的行为。为此，我们进行

奇异连续谱分析以及有限时间 Lyapunov 指数的分布分析。

为了验证奇异非混沌动力学，我们在图 5 中绘制了信号 x 的奇异连续谱 [31]，该信号的部分傅里叶和由 $X(\alpha, N) = \sum_{m=1}^{N} x_m e^{2\pi i m\alpha}$ 给出，其中 α 与外部频率 (ω_1) 成正比，而 N 是时间序列的长度。红线和黑线分别表示奇异连续谱及其对应的幂律拟合。当将 N 视为时间时，$|X(\alpha, N)|^2$ 随 N 增长，即 $|X(\alpha, N)|^2 \sim N^{\beta}$，其中 β 为斜率。当信号具有奇异非混沌动力学的特性时，相应的斜率值介于 $1 < \beta < 2$ 之间。对于此情况，斜率值 $\beta = 1.576$ 证实了图 5(a) 所示的奇异非混沌动力学确实存在。复数 $[Re(x)\ Im(x)]$ 平面中具有分形结构的布朗运动对应轨迹，也证实了图 5(b) 中的奇异非混沌动力学。

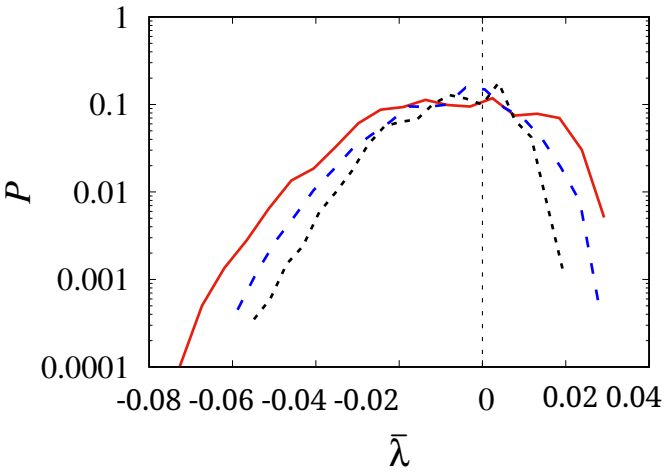


图 6：通过固定三个不同的有限时间段 $T = 500$ （红色实线）、$T = 1000$（蓝色虚线）和 $T = 1500$ （黑色点线），得到奇异非混沌吸引子的有限时间李雅普诺夫指数相对于概率分布函数（PDF）的关系，其中 $f, g = 0.278$。

此外，还采用另一种称为有限时间李雅普诺夫指数分布来验证奇异非混沌动力学。该分布既有正值也有负值，但对于奇异非混沌动力学，曲线下的面积在负值区间最大。图 6 展示了三个不同有限时间间隔下的分布：$T = 500$，1000 和 1500。负值区间比正值区间大，表明系统呈现非混沌动力学。通过这些分析可知，所观察到的动力学既是奇异的（非周期的），也是非混沌的，同时还表现出大振幅和罕见事件。

本文展示了准周期受迫 MO 中极端事件的产生机制。作为强迫振幅的函数，我们发现，系统会通过奇异非混沌极端事件经历从准周期（QP）吸引子到混沌（CH）吸引子的转变。在这种极端事件动力学过程中，我们发现轨迹会长时间偏离有界吸引子，而混沌吸引子则呈现出许多更高振幅的峰值。为确认极端事件的存在，我们估计了临界阈值，并观察到极端事件中的高振幅峰值会超过临界阈值，而混沌和准周期吸引子中的峰值则不会。吸引子的动力学转变以及非混沌极端事件动力学的出现，可通过最大李雅普诺夫指数体现出来。进一步地，我们利用概率分布以及相对于极端事件重现时间概率的返回间隔（事件间隔），验证了所观测到的极端事件。极端事件是许多自然系统和人造系统中发生的异常且不可预期的事件。理解其机制或产生路径，有助于预测极端事件的出现。早期关于极端事件的研究表明，由于极端事件具有罕见且振幅极高的特性，其表现出混沌特性。本文研究揭示了一种此前未知的极端事件产生方式，即非混沌且非周期的极端事件。这一发现为极端事件能够以非混沌过程发生开辟了新的研究方向。

我们谨此感谢印度金奈理工学院（CIT）非线性系统中心资助本项工作，资助编号为 CIT/CNS/2022/RP-016。

[1]S. Albeverio、V. Jentsch 和 H. Kantz，《自然与社会中的极端事件》，前沿丛书（施普林格，柏林，2006年）。[2] R. H¨ohmann、U. Kuhl、H. J. St¨ockmann、L. Kaplan 和 E. J. Heller，《物理评论快报》，**104**，(2010) 093901。[3] J. J. Metzger、R. Fleischmann 和 T. Geisel，《物理评论快报》，**112**，(2014) 203903。[4] A. Mathis、L. Froehly、S. Toenger、F. Dias、G. Genty 和 J. M. Dudley，《科学报告》，**5**，(2015年) 12822。[5] S. Birkholz、C. Br´ee、I. Veseli´c、A. Demircan 和 G. Steinmeyer，《科学报告》，**6**，(2016) 35207。

[6] D. Premraj、K. Suresh、S. A. Pawar、L. Kabiraj、A. Prasad 和 R. I. Sujith，《欧洲物理快报》，**134**，（2021年）34006。[7] A. Saha 和 U. Feudel，《物理评论E》，**5**，（2017年）062219。[8] A. N. Ganshin、V. B. Efimov、G. V. Kolmakov、L. P. Mezhov-Deglin 和 P. V. E. McClintock，《物理评论快报》，**101**，（2008年）065303。[9] H. Bailung、S. K. Sharma 和 Y. Nakamura，《物理评论快报》，**107**，（2011年）255005。[10] D. R. Solli、C. Ropers、P. Koonath 和 B. Jalali，《自然》，**450**，（2007年）1054。[11] J. Zamora-Munt、B. Garbin、S. Barland、M. Giudici、J.

R. Rios Leite、C. Masoller 和 J. R. Tredicce，《物理评论A》，**87**，(2013) 035802。[12] M. Onorato、T. Waseda、A. Toffoli、L. Cavaleri、O. Gram- stad、P. A. E. M. Janssen、T. Kinoshita、J. Monbaliu、N. Mori、A. R. Osborne 和 M. Seri o，《物理评论快报》**102**，(2009) 114502。[13] S. C. Venkataramani、B. R. Hunt、E. Ott、D. J. Gauthier 和 J. C. Bienfang，《物理评论快报》，**77**，(1996) 5361。[14] C. Grebogi、E. Ott、F. Romeiras 和 J. A. Yorke，《物理评论A》，**36**，(1987) 5365。[15] J. A. Reinoso、J. Zamora-Munt 和 C. Masoller，《物理评论E》，**87**，(2013) 062913。[16] S. N. Chowdhury、A. Ray、S. K. Dana 和 D. Ghosh，《物理报告》，**966**，(2022) 1-52。[17] E. Mercier、A. Even、E. Mirisola、D. Wolfersberger 和 M. Sciamanna，《物理评论E》，**91**，042914 (2015)。[18] K. Suresh 和 A. N. Pisarchik，《物理评论E》，**98**，(2018) 032203。[19] A. N. Pisarchik、R. Jaimes-Re´ategui、R. Sevilla- Escoboza、G. Huerta-Cuellar 和 M. Taki，《物理评论快报》，**107**，274101 (2011)。[20] A.N. Pisarchik、A.E. Hramov，《物理与生命系统中的多稳态：表征与应用》（施普林格，2022）。[21] F. T. Arecchi、U. Bortolozzo、A. Montina 和 S. Resi- dori，《物理评论快报》，**106**，153901 (2011)。[22] A. S. Pikovsky、U. Feudel 和 S. P. Kuznetsov，《奇异非混沌吸引子：准周期驱动系统中介于有序与混沌之间的动力学》（World Scientific，2006年）。[23] V. Kishore、M. S. Santhanam 和 R. E. Amritkar，《物理评论快报》，**106**，188701（2011年）。[24] A. Kumar、S. Kulkarni 和 M. S. Santhanam，《混沌》，**30**，043111，2020年。[25] A. Prasad、S. S. Negi 和 R. Ramaswamy，《国际分岔与混沌杂志》，**11**，（2001年）291–309。[26] D. Premraj、K. Suresh、J. Palanivel 和 K. Thamilmaran，《通讯：非线性科学与数值模拟》，**50**，（2017年）103；D. Premraj、K. Suresh、K. Thamilmaran 和 K. Rajagopal，《欧洲物理学杂志专题》，（2022年）1–7。[27] G. C. Lie 和 J. M. Yuan，《化学物理杂志》，**84**，（1986年）5486。[28] W. Knop 和 W. Lauterborn，《化学物理杂志》，**93**，（1990年）3950。[29] S. Zdravkovic、A. N. Bugay 和 A. Y. Parkhomenko，《非线性动力学》，**90**，（2017年）2841。[30] C. Bonatto 和 A. Endler，《物理评论 E 》，**96**，（ 2017 年） 012216。[31] A. S. Pikovsky 和 U. Feudel，《物理学杂志A》，**27**，（1994年）5209。