arXiv:2301.13410v1 [cs.GT] 31 Jan 2023

# Mu自动竞价世界中的多渠道拍卖设计 d

Gagan Aggarwal*、Andres Perlroth*和Junyao Zhao†

2023年2月1日

**摘要**

过去几年，越来越多的互联网广告商开始使用自动出价来优化其广告活动。这些广告商有优化目标（例如最大化转化次数），并受到一些约束（例如预算或平均每次转化成本的上界），自动竞价系统则代表他们优化拍卖出价。通常，这些广告商会参与多个广告渠道，并尝试跨渠道进行优化。一个尚未得到探讨的核心问题是，在多渠道环境中，自动出价如何影响最优拍卖设计。

本文研究多渠道环境下如何设置拍卖保留价这一问题。具体而言，我们探讨各渠道是局部优化保留价，还是全局 优化保留价以最大化总收益，对收入会产生怎样的影响。基于实际情况，我们考虑两种模型：一种模型中，各渠道可以完全自由地设置保留价；另一种模型中，各渠道必须遵守发布商设定的底价。我们证明，在第一种模型中，局部 优化造成的福利和收入损失受广告主输入的某个函数所界定，但与渠道和竞标者的数量无关。与此形成鲜明对比的是，我们证明，在第二种模型中，局部 优化带来的收入可能远低于全局 优化带来的收入，且差距可以任意大。

*谷歌， {gagana,perlroth}@google.com
†斯坦福大学，junyaoz@stanford.edu

# 1 引言

广告主越来越多地使用自动出价，为在线广告中的广告拍卖设置出价。自动出价简化了广告主的出价流程——广告主只需指定一个高层次目标和一个或多个约束，系统便会代其优化拍卖出价 [16, 24, 22, 8]。常见目标是最大化转化次数或转化价值。常见约束包括预算和目标每次转化成本（即平均每次转化成本的上界）。这一趋势引出了关于存在自动出价竞标者时拍卖设计的新问题 [4, 13, 7, 6]。

一个尚未得到探索的核心问题是：自动出价如何影响多渠道环境下的最优拍卖设计。广告主通常会在多个渠道展示广告，并跨渠道进行优化。例如，广告主可以通过效果广告 [2], 跨 Google Ads 库存（YouTube、展示广告、搜索、Discover、Gmail 和地图）进行优化，也可以通过自动广告版位 [3], 跨 Facebook、Instagram 和 Messenger 进行优化；应用开发者还可以通过应用广告系列 [1]在谷歌旗下的平台投放广告，包括搜索、Google Play 和 YouTube。对于传统的准线性竞标者，各渠道的拍卖设计彼此独立。然而，当广告主使用自动竞标器并跨渠道进行优化时，由于自动竞标器的约束，一个渠道的拍卖设计会对其他渠道产生外部性。

受此启发，我们提出了一个问题：在多渠道环境中，如何设计跨渠道采用自动出价的拍卖。具体而言，我们研究如何在各渠道设置保留价。我们考虑两种行为模型：局部和全局。在局部 模型中，每个渠道都会优化自身的保留价，以最大化自身收入；而在全局模型中，各渠道会全局优化保留价，以最大化跨渠道总收益。核心问题是：局部优化而非全局优化会造成多大的收入损失?

我们在两种情形下考察这个问题：一种情形中，每个渠道都能完全控制自己的保留价；另一种情形中，各渠道必须遵守外部规定的保留价下界。第一种情形，我们称之为无发布商保留价，在实践中非常常见；当展示广告归销售渠道所有，或发布商将定价决策交由销售渠道时，就会出现这种情形。第二种情形，我们称之为有发布商保留价，适用于展示广告归第三方发布商所有，且该发布商为其展示广告设定底价的情况；该底价可能源于出售展示广告时存在外部选项。这种情况在展示广告中很常见，因为销售渠道通常不同于拥有展示广告的发布商。

**模型：** 我们的模型包含 $k$ 个渠道，每个渠道销售一组展示。每个渠道都可以设置统一保留价。统一保留价位于单位价值成本空间中[1] （详情请参见第 3.1 节）。这一设定的动机是：观察发现，实践中渠道通常知道价值；价值一般是广告的点击率或转化率，如 [4], 所示，而且渠道对此有较好的估算。除了渠道设置的保留价外，在 有发布商保留价 设定中，每次展示还可以由拥有该展示的发布商设置价格底线。每次展示都通过第二价格拍卖售出，其底价取决于销售渠道设定的保留价和发布商设定的价格约束。竞标者希望在满足以下两种约束之一的前提下，最大化其转化次数（或其他形式的价值）：

[1]关于每次展示成本空间中的统一保留价，请参见第 7 节。

约束类型：（1）预算，即支出的上界；（2）目标每次转化成本，即平均每次转化成本的上界。模型也允许没有约束的标准准线性竞标者。博弈分为两个主要阶段：首先，各渠道同时公布其保留价；随后，竞标者针对不同的展示进行最优出价。

### 1.1 我们的结果

本文主要关注比较以下两种情况下均衡时的收入[2]：渠道在局部进行优化，即各自设定保留价以最大化自身收入；以及渠道在全局进行优化，即设定保留价以最大化总收益之和。我们将无政府代价（PoA）定义为渠道局部优化时的总收益与全局优化时的总收益之比的最坏情况。我们的主要目标是界定两种环境下的无政府代价：无发布商保留价和有发布商保留价。

#### 无发布商保留价的情形

为了界定无政府代价，我们首先根据最优流动性福利（定义见第 3 节）给出局部和全局收入的界。这些收入界本身也很有意义，而证明方法还给出了用于确定合适保留价的（非多项式时间）算法。

我们首先考察局部模型中的最坏情况收入，即各渠道分别优化自身收入时的收入，并将其与最优流动性福利进行比较。我们在定理 2 中证明，最坏情况收入至少为最优流动性福利的 $\Omega(\frac{1}{\log \eta})$ 份额，其中 $\eta$ 取决于竞标者输入[3]，并用于量化竞标者群体的异质性。这个收入下界显然也适用于渠道进行全局优化的情形以及单渠道情形。接下来，我们证明该界在常数因子范围内是紧的（命题 3）。具体而言，我们给出一个单渠道情形的例子，其中采用统一保留价时的最优收入为最优流动性福利的 $O(\frac{1}{\log \eta})$。这个上界也适用于多渠道环境中的全局模型和局部模型。换言之，在上述每种情形中，流动性福利与收入之间差距的上界和下界均为 $\Theta(\log \eta)$。这自然引出一个问题：局部优化在收入方面是否与全局优化一样好？考察差距界后，我们发现，差距源于统一保留价难以兼顾不同尺度的价值。有人可能会猜想，既然全局模型和局部模型的差距来源相同，那么即便两种模型之间存在收益差距，该差距也应该取决于不同的因素。令人惊讶的是，我们证明局部优化与全局优化之间的差距恰好也是同一个 $\log \eta$ 因子（定理 4）。请注意，在上述所有情形中，收益保证均与渠道和竞标者的数量无关，仅取决于竞标者的异质性。

#### 有发布商保留价的设定

与无发布商保留价的情形形成鲜明对比的是，我们证明，在这种情形下，即使只有一名 tCPA 竞标者，无政府价格也可以任意小（定理 6）。这个差距示例很大程度上取决于不同

[2]关于预算型竞标者，请参见第 7 节中的简要讨论；$welfare^3\eta$ 是目标每次转化成本竞标者中最高与最低目标每次转化成本的比值，以及预算型竞标者的一个比值（定义见定义 5）的最大值。

渠道之间的不对称性。受此启发，我们考虑一种受限情形：每个渠道都销售随机抽取的展示样本（具体细节见第 6 节）。对于这种情形，当博弈中只有一名 tCPA 竞标者时，我们证明，在对渠道策略施加某些温和约束的条件下，无政府价格 $= 1/k$，其中 $k$ 是渠道数量。当渠道进行全局优化时，均衡是有效率的，且所有渠道都设定较低的保留价。另一方面，在局部优化模型的均衡中，较大的渠道（按其拥有的展示量计算）设定较低的保留价，而小渠道则采取攫取性策略，设定较高的保留价。

### 均衡计算的困难性

除了无政府代价方面的结果，我们还研究了计算该博弈均衡的计算复杂性。我们证明了一个不可能性结果——计算竞标者的子博弈均衡是 PPAD 困难的（定理 1）。为证明这一结果，我们从寻找 0-1 双矩阵博弈的近似纳什均衡问题出发，采用构件归约；同时，我们还需要处理许多本子博弈所特有的困难，详情将在第 4 节和附录 B 中说明。

### 我们结果的关键启示

我们的结果 对多渠道场景中如何设定保留价有若干启示 g:

- 局部优化与全局优化之间的收益差距，在很大程度上取决于是否存在发布商设定的保留价。

- 无发布商保留价时，局部模型与全局模型的收入之间最坏情况下的差距为 $\Theta(\log \eta)$，其中 $\eta$ 反映竞标者输入的异质性，且与渠道数和竞标者数无关。因此，只要可能，最好进行全局优化。

- 无发布商保留价时，通过设置统一保留价，可以获得最优流动性福利的 $\Theta(\frac{1}{\log \eta})$ 份额。在单渠道情形和多渠道环境下进行全局优化时，这一观察并不令人意外；但值得注意的是，即使采用局部优化，这一结论依然成立，因为某个渠道的利己行为原本可能导致其他渠道难以获得收入。我们还注意到，与设置统一保留价相比，在更细粒度的层面设置保留价可以提高近似效果。在这种情况下，近似比将取决于每个切片中竞标者的异质性。

- 有发布商保留价时，局部模型与全局模型的收入差距可能任意大。即使只有一个渠道受到外部定价约束，也可能出现这种情况。

### 论文结构

我们在第 3 节中给出该问题的形式化模型。随后，在第 4 节中，我们证明计算子博弈的均衡是 PPAD 困难的。在第 5 节中，我们研究无发布商保留价的情形，并给出无政府代价的紧确界，以及局部模型和全局模型中收入与

最优流动性福利之间差距的紧确界。在第 6 节中，我们研究有发布商保留价的情形，并证明无政府代价为 0。我们还研究了这一情形的一个受限版本，并证明该版本的无政府代价为 $1/k$ 。最后，在第 7 节中，我们讨论了福利方面的扩展，以及如何在每次展示成本空间中设置保留价。

## 2 相关工作

**自动竞价**。 近年来，人们对自动出价相关问题的研究兴趣日益浓厚，包括竞价算法及其均衡 [4], ，以及存在自动出价时的拍卖设计 [13, 7, 6]。Aggarwal 等人 [4] 开创了自动竞价研究，并针对一类一般性的自动竞价约束，找到了最优竞价策略。他们还证明了均衡的存在性，并证明均衡时的流动性福利相较于最优流动性福利的下界。Deng 等人 [13] 展示了如何利用加价来改善福利保证；当竞标者同时受到目标每次转化成本和预算约束时，这可能会以收入为代价。Balseiro 等人[7] 刻画了单阶段拍卖中收入最优的拍卖机制，其中竞标者为价值最大化者，或受目标每次转化成本约束的效用最大化者；价值和/或目标可以是私有信息。与本文类似，Balseiro 等人 [6] 也研究了存在自动竞价者时的保留价，并表明对于受目标每次转化成本约束的准线性竞标者，使用（针对特定竞标者设定的）保留价可以提高收入和福利。他们没有研究预算受限竞价者。以上论文均针对单渠道设定。

**多渠道拍卖设计**。这类文献大多聚焦于这样的模型：多个渠道（拍卖方）相互竞争，以吸引被锁定的利润最大化买家[9, 15, 19]。渠道之间的竞争会压低保留价，从而降低收入并带来更有效率的结果 [23]。我们的模型与这些模型不同，因为我们的竞标者并非被锁定的买家，而是在自动竞价约束下进行优化。有趣的是，我们证明，在某些情况下，渠道之间的竞争会推高保留价，同时提升福利（见定理 7.）。

## 3 模型

我们的基准模型考虑一组竞标者（广告主） $J$ ，他们有意购买一组展示 $I$ ，这些展示由 $K$ 个不同渠道出售。渠道 $k$ 出售的展示 $i \in I_k$采用带底价的第二价格拍卖进行销售。该底价取决于渠道选择的保留价 $r_k$ ，以及拥有该展示的发布商设定的最低价格 $p_i$ [4]。

### 3.1 竞标者

受实践中最常见的竞价形式启发，我们假设每位竞标者都属于以下类型之一：目标每次转化成本竞标者、预算型竞标者，或拟线性（*QL*）

[4]发布商可能有外部选项，可以出售部分展示，因此会设置保留价以反映这一点。这些保留价由发布商预先选定，因此是渠道和竞标者都已知的固定常数。

竞标者。我们分别用 $J_{\text{tCPA}}$、 $J_{\text{Budgeted}}$ 和 $J_{\text{QL}}$ 表示属于目标每次转化成本、预算型和QL的竞标者集合。

每位竞标者 $j$ 都拥有一个价值（例如转化率）$v_{j,\,i}$ 针对展示 $i$，并为该展示提交出价 $b_{j,\,i}$。竞标者购买展示 $i \in I_k$ 的成本为

$$c_{j,i}(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{r}) = \max\{\max_{\ell \neq j \text{ s.t. } b_{\ell,i} \geq \max\{r_k v_{\ell,i},\, p_i v_{\ell,i}\}} \{b_{\ell,i}\},\, r_k v_{j,i},\, p_i v_{j,i}\}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{b}_i = (b_{j,\,i})_{j \in J}$（注意，为简洁起见，我们采用记号 $c_{j,\,i}(\boldsymbol{b}_i,\ \boldsymbol{r})$，尽管 $c_{j,\,i}(\boldsymbol{b}_i,\ \boldsymbol{r})$ 并不取决于 $b_{j,\,i}$），而 $\boldsymbol{r} = (r_k)_{k \in K}$（因为 $p_i$ 是发布商预先选定的固定常数，为简洁起见，我们不将其作为变量）。也就是说，竞标者为一次展示支付的成本，是以下三者中的最大值：(i) 出价高于各自保留价的竞标者所提交的出价；(ii) 拥有该展示的渠道设定的保留价；以及 (iii) 发布商设定的保留价。另请注意，保留价 $r_k$ 和 $p_i$ 会乘以 $v_{j,\,i}$，从而得到竞标者 $j$ 对展示 $i$ 的最终底价。换言之，保留价处于单位价值成本空间中。我们将竞标者 $j$ 对展示 $i$ 的最终保留价记为 $r_{j,\,i} := \max\{r_k v_{j,i},\, p_i v_{j,i}\}$。现在我们来说明竞标者类型。

**QL竞价者：** 这是一种传统的利润最大化竞标者，不受任何约束。此类竞标者的占优策略是对展示出价其价值，无论其他人对该展示如何出价。

**tCPA竞标者：** 此类竞标者在平均每次转化成本不超过其目标每次转化成本的约束下，最大化转化次数（即竞标者获得的展示的总价值）。具体而言，竞标者求解以下最大化问题：

$$\begin{aligned} \max_{\forall i \in I,\, b_{j,i} \geq 0,\, x_{j,i} \in [0,1]} \quad & \sum_{i \in I \text{ s.t. } b_{j,i} \geq c_{j,i}(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{r})} v_{j,i} x_{j,i} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} c_{j,i}(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{r}) x_{j,i} \leq T_j \cdot \sum_{i \in I} v_{j,i} x_{j,i} \quad \forall j \in J \\ & x_{j,i} = 1 \text{ if } b_{j,i} > c_{j,i}(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{r}) \quad \forall j \in J, i \in I. \end{aligned} \tag{2}$$

**预算型竞价者：** 此类竞标者在预算约束下最大化转化次数。具体而言，竞标者求解以下最大化问题：

$$\begin{aligned} \max_{\forall i \in I,\, b_{j,i} \geq 0,\, x_{j,i} \in [0,1]} \quad & \sum_{i \in I \text{ s.t. } b_{j,i} \geq c_{j,i}(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{r})} v_{j,i} x_{j,i} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} c_{j,i}(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{r}) x_{j,i} \leq B_j \quad \forall j \in J \\ & x_{j,i} = 1 \text{ if } b_{j,i} > c_{j,i}(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{r}) \quad \forall j \in J, i \in I. \end{aligned} \tag{3}$$

请注意，tCPA竞标者和预算型竞标者都可以决定在展示平局时所获得的份额（如果竞标者 $j$ 在某次展示中**平局** $i$，也就是说 $b_{j,i} = c_{j,i}(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{r})$）。这与文献中的标准做法一致（例如预算节奏均衡 [12]）：将平局裁决规则内生化为均衡的一部分

概念，我们稍后将对此进行定义。此外，在下一个命题中，我们将证明，在给定其他竞标者出价的情况下，tCPA竞标者（或预算型竞标者）采取**统一出价** $j$ 是最优的[5]，，即其出价由单个出价参数确定，具体如下：$\alpha_j \geq 0 \ \ \forall i \in I, b_{j,i} = \alpha_j v_{j,i}$。

**命题 1**。对于 *tCPA* 竞标者（或预算型竞标者，分别） $j$，问题（2）（或（3），分别）的最优出价具有以下形式：存在 $\alpha_j \geq 0$ 使得 $\forall i \in I, b_{j,i} = \alpha_j v_{j,i}$。

命题 1 的证明见附录。

### 3.2 竞价者子博弈

竞标者观察渠道公布的保留价 $\boldsymbol{r} = (r_k)_{k \in K}$，并决定对每次展示 $i$的出价 $\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{r})$；如果某个竞标者 $j$ 在展示 $i$上出价相同，他们还可以决定自己获得的展示份额$x_{j,i}(\boldsymbol{r})$ $i$。在上一小节中，我们已经证明，对于任意类型的竞标者，给定其他竞标者的出价，其最优响应是统一出价，因此我们假设每个竞标者 $j$ 都使用出价参数为 $\alpha_j(\boldsymbol{r})$的统一出价。

此外，我们假设在竞价者子博弈中，竞标者采用未被支配的统一出价策略。具体而言，对 QL 竞标者来说，低于其价值出价被以其价值出价所支配；对 tCPA 竞标者 $j$来说，使用低于 $T_j$ 的出价参数被使用出价参数 $\alpha_j(\boldsymbol{r}) = T_j$所支配。要理解后一种情况，请注意，使用严格低于 $T_j$ 的出价参数的 tCPA 竞标者 $j$ 不可能受到 tCPA 约束，因为对于任何其赢得的展示，其成本都不可能超过其出价 $b_{j,i} = \alpha_j(\boldsymbol{r}) v_{j,i} < T_j v_{j,i}$。因此，其 tCPA 约束，即问题（2）中的第一个约束，并未达到紧约束；所以，将其出价参数提高至 $T_j$，竞标者只会增加总价值，而不会违反其 tCPA 约束。综上，我们作出以下假设：

**假设1 (**统一未被支配出价)。每个竞标者 $j \in J$ 均采用统一出价，即$\forall i \in I, b_{j,i}(\boldsymbol{r}) = \alpha_j(\boldsymbol{r}) v_{j,i}$ 其出价参数为 $\alpha_j(\boldsymbol{r}) \geq 0$。此外，每个 *QL*竞价者 $j$ 采用出价参数 $\alpha_j(\boldsymbol{r}) = 1$，每个 *tCPA*竞标者 $j$ 采用出价参数 $\alpha_j(\boldsymbol{r}) \geq T_j$。

我们为竞标者子博弈采用的均衡解，是一种将内生平局裁决规则纳入考量的子博弈完美均衡版本，这与相关文献的做法一致，例如预算受限竞标者的节奏均衡 [12] 以及 tCPA竞标者的自动出价均衡 [18]。

**定义1 (**子博弈竞价均衡)。考虑渠道设定保留价$\boldsymbol{r}$ 后形成的竞标者子博弈。该子博弈的一个均衡由竞标者的出价参数$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{r}) = (\alpha_j(\boldsymbol{r}))_{j \in J}$ 以及展示的分配概率 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{r}) = (x_{j,i}(\boldsymbol{r}))_{j \in J, i \in I}$ 构成，且满足

*(1)* 只有出价不低于成本的竞标者才能获得展示：对于 $i \in I_k$, $x_{j,i}(\boldsymbol{r}) > 0$，仅当 $b_{j,i}(\boldsymbol{r}) \geq c_{j,i}$ $(\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{r}) \ \ \boldsymbol{r})$ 成立。
*(2)* 对于任何出价高于保留价的物品，必须完全分配：对于 $i \in I_k$, $\sum_{j \in J} x_{j,i}(\boldsymbol{r}) = 1$，如果存在某个 $\ell \in J$，使得 $b_{\ell,i}(\boldsymbol{r}) > r_{\ell,i}$，则该条件必须成立。

[5]从定性角度看，这与 Aggarwal 等人 [4] 的著名结果相同。他们通过对竞标者估值引入微小扰动来证明这一点。我们则采取另一种方法，将平局裁决规则内生化为均衡概念的一部分；在文献中，证明均衡的存在性和计算复杂性时，这是一种标准方法。

*(3)* 满足约束：对于每个 $j \in J_{Budgeted}$, $\sum_{i\in I} c_{j,i}(\boldsymbol{b}_i(r)\ \boldsymbol{r}) \cdot x_{j,i}(\boldsymbol{r}) \le B_j$，以及每个$j \in J_{tCPA}$, $\sum_{i\in I} c_{j,i}(\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{r})\ \boldsymbol{r}) x_{j,i}(\boldsymbol{r}) \le T_j \cdot \sum_{i\in I} v_{j,i} x_{j,i}(\boldsymbol{r})$。

*(4)* 对于每个预算型或 *tCPA* 竞标者 $j$，即使他们可以决定在展示 $i$ 的出价平局时获得的份额 $x_{j,i}(\boldsymbol{r})$ $i$，提高其出价参数也不会增加其价值，除非违反其预算/每次转化成本约束。

通过调整预算型竞标者 [12]的节奏均衡和 tCPA 竞标者 [18]的自动出价均衡的存在性证明，可以直接得出子博弈竞价均衡的存在性。

**命题2**。 在竞标者子博弈中，子博弈竞价均衡始终存在。

### 3.3 渠道

我们重点关注两种模型，它们取决于渠道可能采用的目标函数：局部渠道模型和全局 渠道模型。

**局部渠道模型**：在这种情况下，每个渠道设定自己的保留价 $r_k$，在给定其他渠道保留价 $\boldsymbol{r}_{-k}$的情况下，使自身收入最大化。因此，渠道 $k$ 求解

$$\max_{r_k} \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_k} c_{j,i}(\boldsymbol{b}_i(r_k, \boldsymbol{r}_{-k}), r_k, \boldsymbol{r}_{-k}) x_{j,i}(r_k, \boldsymbol{r}_{-k}).$$

**全局渠道模型**：在此情况下，渠道确定保留价 $\boldsymbol{r}$，以最大化所有渠道的总收入。因此，它们设定保留价来求解

$$\max_{\boldsymbol{r}} \sum_{k\in K} \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_k} c_{j,i}(\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{r}) x_{j,i}(\boldsymbol{r}).$$

### 3.4 完整博弈

我们将渠道和竞标者参与的完整博弈概括为以下两阶段博弈：

(S0) 每个渠道 $k \in K$ 都为其展示选择一个统一保留价（以单位价值成本空间表示） $r_k$，精度有限[6] $I_k$。

(S1) 每个竞标者 $j \in J$ 观察渠道公布的保留价 $\boldsymbol{r}$ （以及发布商预先选定的保留价（$p_i$）$_{i\in I}$），然后选择一个出价参数$\alpha_j$（$\boldsymbol{r}$），并根据$\alpha_j$（$\boldsymbol{r}$）提交出价（见假设1）。如果竞标者 $j$ 在展示 $i$上打平，他们还可以决定自己获得的展示份额$x_{j,\ i}$（$\boldsymbol{r}$）$\ i$。

根据命题2，对于渠道混合策略支持集中的任意固定 $\boldsymbol{r}$，阶段(S1)都存在竞标者之间的一个子博弈均衡。我们假设阶段(S1)总是确定性地产生这样一个均衡；也就是说，以下假设始终成立：在给定 $\boldsymbol{r}$（如定义1所定义）的情况下，阶段(S1)中的（（$\boldsymbol{b}_i$（$\boldsymbol{r}$））$_{i\in I}$，$\boldsymbol{x}$（$\boldsymbol{r}$））是一个固定的子博弈均衡。

允许渠道在阶段 (S0) 使用混合策略，即从分布 $\mathcal{R}_k$ 中抽取其保留价 $r_k$。请注意，渠道之间的博弈是一个由有限个玩家参与的有限博弈，因此，根据著名的纳什定理 [20]，总是存在混合策略均衡。

此外，我们假设该博弈是完全信息的。也就是说，$(v_{j,\ i},\ B_j,\ T_j,\ p_i)_{j\in J,\ i\in I}$ 为渠道和竞标者所知。

[6]请注意，假设保留价具有有限精度，在实践中是非常自然的。

### 3.5 重要概念

现在，我们介绍一些主要概念，用于比较局部渠道模型与全局渠道模型的结果。

**定义 2**（流动性福利）。 分数分配 $\boldsymbol{x} = (x_{j,\ i})_{\ j\in J,\ i\in I}$ 的流动性福利为

$$Wel(\boldsymbol{x}) = \sum_{j\in J_{Budgeted}} \min\left\{B_j, \sum_{i\in I} v_{j,i}x_{j,i}\right\} + \sum_{j\in J_{tCPA}}\sum_{i\in I} T_j v_{j,i}x_{j,i} + \sum_{j\in J_{QL}}\sum_{i\in I} v_{j,i}x_{j,i},$$

最优流动性福利为 $Wel^*$：$=$最大值$_{\boldsymbol{x}\ that\ satisfies\ bidders'\ constraints}\, Wel$（$\boldsymbol{x}$）。

例如，Aggarwal 等人 [4] 和 Azar 等人 [5], 此前研究过流动性福利这一概念，而 Dobzinski 和 Paes Leme [14]首次提出了这一概念。众所周知，最优流动性福利是所有渠道收入总和的上界。更确切地说，无论渠道选择何种保留价，最优流动性福利 $Wel^*$ 都大于或等于渠道收益之和，我们将其记为$Rev(\boldsymbol{r}) := \sum_{k\in K}\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_k} c_{j,\ i}(\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{r})\ \boldsymbol{r})x_{j,\ i}(\boldsymbol{r})$:

**事实 1.** 对于任意 $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^K_{\geq 0}$, $Rev(\boldsymbol{r}) \leq Wel^*$。

因此，我们以最优流动性福利为基准，衡量局部模型和全局模型中的收入表现。我们用 LocalEQ 表示局部渠道模型中包含所有混合策略均衡 $\mathcal{R} := (\mathcal{R}_k)_{k\in K}$ 的集合，并将局部模型和全局模型中的收入保证定义如下:

**定义 3**（收益保证）。 局部模型和全局模型中的收入保证定义为

$$RevG(Local) = \frac{\inf_{\mathcal{R}\in LocalEQ}\mathbb{E}_{\boldsymbol{r}\sim\mathcal{R}}[Rev(\boldsymbol{r})]}{Wel^*},$$
$$RevG(Global) = \frac{\sup_{\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^K_{\geq 0}}\ Rev(\boldsymbol{r})}{Wel^*}.$$

请注意，局部模型中任意 $\mathcal{R} \in$LocalEQ 的支持集内的任何保留价 $\boldsymbol{r}$ 在全局模型中也可行，因此可得以下事实。

**事实 2.** $RevG(Local) \leq RevG(Global) \leq 1$

此外，为了比较这两个模型的结果，我们采用标准的无政府状态价格（Price of Anarchy）概念 [17]。

**定义 4**（无政府代价）。 与全局模型相比，局部模型的无政府价格（*PoA*）为

$$PoA = \frac{\inf_{\mathcal{R}\in LocalEQ}\mathbb{E}_{\boldsymbol{r}\sim\mathcal{R}}[Rev(\boldsymbol{r})]}{\sup_{\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^K_{\geq 0}}\ Rev(\boldsymbol{r})}.$$

# 4 均衡计算的困难性

本节研究计算我们博弈均衡的计算复杂性。本节的主要结果是，我们证明，即使只是寻找竞标者子博弈的子博弈均衡（定义1），在计算上也已经很困难：

**定理 1.** 寻找子博弈均衡（定义*1*）是 *PPAD*-困难的。

我们通过从寻找 0-1 双矩阵博弈的近似纳什均衡问题进行归约来证明这一点；该问题已在 [11] 中被证明是 PPAD 困难的。证明的基本思路与预算受限的准线性竞标者的节奏均衡困难性结果类似 [10]。然而，我们必须处理许多 tCPA 竞标者所特有的难题。最值得注意的是，与出价参数至多为 1 的预算受限准线性竞标者不同，tCPA 竞标者的出价没有自然上界；当其 tCPA 约束未达到紧约束时，其出价参数可以任意高。我们构造了新的构造元件，迫使 tCPA 竞标者的出价参数保持有界，同时仍为其留出受控的“松弛量”，使他们可以对价格高于其 tCPA 的展示出价，但不会赢得所有这些展示。完整的归约详见附录。

尽管计算上存在困难，我们仍能够证明渠道在均衡中可以实现的严格收入保证，相关内容将在后续章节中介绍。

# 5 无发布商保留价时的收入与无政府代价

本节重点讨论展示没有发布商设定的保留价的情形，即对于每个 $i \in I$， $p_i = 0$ 。我们研究渠道在局部模型和全局模型中能够实现的收入保证：在局部模型中，每个渠道出于自身利益选择其保留价；而在全局模型中，各渠道合作地选择保留价，以最大化其总收益。

本节的主要结果如下：

- 我们在局部模型中建立了一个收入保证（定义见定义 3）（定理 2）。
- 此外，我们证明了，即使在全局模型中，我们的收入保证也是严格的（命题 3）。
- 此外，作为局部模型下收入保证的一个推论，我们可以立即得到无政府代价的一个下界（定理 3）。我们给出无政府代价的一个匹配上界（定理 4），从而确立了局部模型与全局模型之间的紧密分离。

## 5.1 收益保证

我们首先证明本节的主要技术结果，该结果为局部模型确立了收益保证。正如定理 1 所示，实际计算均衡是 PPAD 困难的。尽管如此，我们将证明，每个渠道都可以设定某个保留价，从而保证自身获得一定数额的收入，而不受其他渠道所设保留价的影响。

为此，我们将证明每个渠道都可以设置一个保留价，确保其收入至少达到不受约束的预算竞标者总预算的一定份额（引理 1 和

推论 1）。接着，我们将证明每个渠道都可以设置一个保留价，确保其收入至少达到其对目标每次转化成本和 QL 竞价者所贡献的最优流动性福利（定义 2）的一定份额（引理 2 和推论2）。最后，我们将把这些结果结合起来，得到最终收益保证（定理 2）。

这项证明的主要难点在于：在局部模型的均衡中，预算受限竞标者可能不受约束，也就是说，他们没有花完预算。目标每次转化成本和 QL 竞标者对最优流动性福利的贡献，可以轻松归因到不同渠道（参见引理 2 中 $W^{*}{}_{\mathrm{tCPA}}(k)$ 和 $W^{*}{}_{\mathrm{QL}}(k)$ 的定义），而且渠道有一种自然的方式，可以将其贡献中的较大比例转化为收入（参见引理 2）。然而，预算受限竞标者对不同渠道的贡献并没有明显的归因方式，其出价也没有明显的下界。为了掌握不受约束的预算受限竞标者，我们定义了预算比例这一概念。

**定义 5 (**预算比例 $\beta_j$ 和 $\beta_{max}, \beta_{min}$)。 对于预算型竞标者 $j$，将其预算比例定义为 $\beta_j = \frac{B_j}{\sum_{i \in I} v_j{}_i}$，即其预算与所有展示的价值总和之比。此外，定义 $\beta_{max} = \max_{j \in J_{Budgeted}} \beta_j$ 和 $\beta_{min} = \min_{j \in J_{Budgeted}} \beta_j$。

直观来说，预算型竞标者的预算比例所起的作用，类似于 tCPA 竞标者的 tCPA。有了这一点，我们就可以证明一些关键的技术性主张，这些主张将帮助我们确定不受约束的预算受限竞标者的出价下界，进而帮助我们为这些竞标者找到合适的保留价。

## 关键主张

**主张1.** 在子博弈均衡（定义*1*）中，若预算型竞标者 $j$ 不受约束，即未花完其预算，那么它必须赢得所有展示 $i$，且 $v_{j,i} > 0$；在这些展示中，它不能与另一位不受约束的预算型竞标者打成平局。

证明. 反设预算型竞标者 $j$ 不受约束，却未能完全赢得某个展示 $i$ （即 $x_{j,i}(\boldsymbol{r}) < 1$），使得 $v_{j,i} > 0$。注意，竞标者 $j$ 可以提高出价参数 $\alpha_j$，而不增加总支出，直到竞标者 $j$ 在某个满足 $v_{j,i'} > 0$ 的展示 $i'$ 上打成平局（但未能完全赢得该展示）。这种平局必定会发生；否则，随着竞标者 $j$提高 $\alpha_j$，在某个时刻，竞标者 $j$ 将会在展示 $i$ 上打成平局。然而，这与定义1的第（4）项相矛盾，因为竞标者 $j$ 可以通过将 $x_{j,i'}(\boldsymbol{r})$ 提高一个足够小的量，严格增加其效用，同时不违反其预算约束。 □

下一个主张可直接由主张1推出。

**断言 2**。 在子博弈均衡中，对于任意展示 $i \in I$，至多有一个无约束预算竞标者 $j$ 满足 $v_{j,i} > 0$。

接下来我们证明以下主张，这将有助于将收入界定在不受约束的预算受限竞标者的最优流动性福利之下。

**断言 3.** 如果展示 $i$ 对预算型竞标者 $j$ 的最终保留价满足 $r_{j,i} < \beta_j v_{j,i}$，那么在子博弈均衡中，展示 $i$ 的售出成本至少为 $r_{j,i}$。

证明。我们首先证明，除非展示 $i$ 被完全卖给竞标者 $j$（在这种情况下，结论显然成立，因为展示 $i$ 的成本至少为其保留价 $r_{j,\,i}$），否则竞标者 $j$ 会对展示 $i$出价 $b_{j,\,i} \geq \beta_j v_{j,\,i}$。

假设 $b_{j,\,i} < \beta_j v_{j,\,i}$，以导出矛盾。回想一下，$\alpha_j$ 表示竞标者$j$的出价参数。由于假设 $b_{j,\,i} = \alpha_j v_{j,\,i}$ 小于 $\beta_j v_{j,\,i}$，我们得到 $\alpha_j < \beta_j$。此外，由于竞标者 $j$ 的总支出至多等于其出价之和，因此有

$$\text{Total amount spent by bidder } j \leq \sum_{i \in I} b_{j,i} = \sum_{i \in I} \alpha_j v_{j,i} < \sum_{i \in I} \beta_j v_{j,i} = B_j.$$

因此，竞标者 $j$ 不受约束。根据主张1，该竞标者必须赢得其所有展示。

现在我们已经证明$b_{j,\,i} \geq \beta_j v_{j,\,i}$，根据我们的假设，这严格大于 $r_{j,\,i}$。因此，根据定义1的第 (2) 项，展示 $i$ 将在子博弈均衡中全部售出（其成本至少为 $b_{j,\,i} > r_{j,\,i}$，这是由定义1的第 (1) 项得出的）。

□

下面的主张与上述主张类似，将用于对 tCPA 和 QL 竞标者的最优流动性福利进行收入界定。

**命题 4.** 如果展示 $i$ 对 *tCPA*竞标者 $j$ 的最终保留价（即成本空间中的保留价；回想一下，在模型部分中记作 $r_{j,i}$）满足 $r_{j,i} < T_j v_{j,i}$，那么在子博弈均衡中，展示 $i$ 将以至少 $r_{j,i}$ 的成本售出。类似地，如果展示 $i$ 对 *QL*竞标者 $j$ 的最终保留价满足 $r_{j,i} < v_{j,i}$，那么在子博弈均衡中，展示 $i$ 将以至少 $r_{j,i}$ 的成本售出。

证明。根据假设1，tCPA竞标者 $j$ 对展示 $i$ 的出价为 $b_{j,i}(\boldsymbol{r}) \geq T_j v_{j,i} > r_{j,i}$。因此，根据定义1的第（2）项，展示 $i$ 将在子博弈均衡中全部售出（其成本至少为$r_{j,i}$，这是由定义1的第（1）项所致）。对 QL竞标者的情形也可作类似论证。

□

接下来，我们首先给出每个渠道收入相对于预算型竞标者所贡献的最优流动性福利的下界（引理 1 和推论 1），然后给出每个渠道收入相对于目标每次转化成本竞标者和 QL 竞标者所贡献的福利的下界（引理 2 和推论2）。最后，我们将综合这些结果，得到收益保证的下界（定理 2）。

## 预算型竞标者带来的福利

**引理 1**。令 $E$ 为任意保留价下的一个子博弈均衡。定义如下：

- 令 $J_C^E$ 为预算型竞标者中受限的竞标者子集，即他们在均衡 $E$ 中花完了全部预算。
- 令 $J_U^E$ 为预算型竞标者中不受限的竞标者子集，即他们在均衡 $E$ 中的支出严格低于预算。
- 对于渠道 $k$ 和预算型竞标者 $j$，令 $\rho(k,\ j) = \frac{\sum_{i \in I_k} v_{j,\,i}}{\sum_{i \in I} v_{j,\,i}}$ 表示竞标者 $j$ 在 $I_k$ 中获得的展示总价值与竞标者 $j$ 在 $I$ 中获得的所有展示总价值之比。

那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，

*1.* 在均衡 $E$ 中，竞标者 $j \in J_C^E$ 在所有渠道获得的总收益不低于其预算 $B_j$,

*2.* 此外，如果渠道 $k$ 能够为每个预算型竞标者设定投标人特定保留价格 $r_k(j) = (1-\varepsilon)\beta_j$（回想一下， $\beta_j$ 是定义 *5* 中的预算比例），那么无论其他渠道的保留价格如何，在由此产生的子博弈均衡中（不一定是$E$），渠道 $k$ 都能获得至少以下收入

$$\sum_{j \in J_U^E} (1-\varepsilon)\rho(k,j)B_j,$$

*3.* 此外，渠道 $k$ 可以设定一个独立于 $E$的统一保留价 $r_k$，使得无论其他渠道的保留价格如何，在由此产生的子博弈均衡中（不一定是 $E$），渠道 $k$ 都能获得至少以下收入

$$\frac{\sum_{j \in J_U^E}(1-\varepsilon)\rho(k,j)B_j}{2\max\left\{1, \lceil \log \frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} \rceil\right\}}.$$

证明。 1. 由于竞标者 $j \in J_C^E$在 $E$中花完了全部预算（根据 $J_C^E$的定义），因此所有渠道从他们那里获得的总收益等于他们的预算。

2. 考虑任意一个均衡 $E_r$，它由陈述中给出的渠道 $k$的投标人特定保留价格以及其他渠道任意设定的保留价格所产生（注意， $E_r$ 与 $E$无关）。考虑任意一个展示 $i \in I_k$。由于渠道 $k$ 为每个预算型竞标者 $j$设定的投标人特定保留价格为 $(1-\varepsilon)\beta_j$，因此预算型竞标者 $j$对展示 $i$ 的保留价格为 $r_{j,\,i} = (1-\varepsilon)\beta_j v_{j,\,i} < \beta_j v_{j,\,i}$。于是，根据断言 3，在均衡 $E_r$ 中，对于任意 $j \in J_{\text{Budgeted}}$，每个展示 $i$ 的售出价格至少为 $r_{j,\,i} = (1-\varepsilon)\beta_j v_{j,\,i}$。也就是说，

$$\text{the revenue of Channel } k \text{ in the equilibrium } E_r \geq \sum_{i \in I_k} \max_{j \in J_{\text{Budgeted}}} (1-\varepsilon)\beta_j v_{j,i}. \tag{4}$$

现在令 $I_k(j) \subseteq I_k$ 表示满足以下条件的展示集合 $i \in I_k$： $v_{j,\,i} > 0$。根据断言 2，如果 $j$和 $j'$ 是在均衡 $E$中不受约束的两个竞标者，那么 $I_k(j)$ 和 $I_k(j')$ 不相交。因此，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I_k} \max_{j \in J_{\text{Budgeted}}} (1-\varepsilon)\beta_j v_{j,i} &\geq \sum_{j \in J_U^E} \sum_{i \in I_k(j)} (1-\varepsilon)\beta_j v_{j,i} && (5)\\
&= \sum_{j \in J_U^E} (1-\varepsilon)\beta_j \sum_{i \in I_k(j)} v_{j,i} && (6)\\
&= \sum_{j \in J_U^E} (1-\varepsilon)\beta_j \rho(k,j) \sum_{i \in I} v_{j,i} && (7)\\
&= \sum_{j \in J_U^E} (1-\varepsilon)\rho(k,j)B_j, && (8)
\end{aligned}$$

由此根据不等式（4）完成证明。

3. 设定合适的统一保留价的总体思路是将保留价分桶，并选出潜在收入最高的那个。具体而言，我们将预算受限竞标者划分为以下几组：

$$J^s_{\text{Budgeted}} = \{j : j \in J_{\text{Budgeted}} \text{ and } 2^s\beta_{min} \le \beta_j \le 2^{s+1}\beta_{min}\}$$

对于 $s \in \{0\} \cup \left[\lceil \log \frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} \rceil - 1\right]$（回顾一下，$\beta_{max}$，$\beta_{min}$ 分别是定义 5 中定义的最大和最小预算比例）。我们观察到，如果渠道 $k$ 将其统一保留价设为 $(1-\varepsilon)2^s\beta_{min}$，那么对于预算型竞标者 $j \in J^s{}_{\text{Budgeted}}$，有 $r_{j,\,i} = (1-\varepsilon)2^s\beta_{min}v_{j,\,i} < \beta_j v_{j,\,i}$ 对所有展示 $i \in I_k$ 均成立。因此，根据断言 3，在子博弈均衡 $E_r$ 中，每个展示 $i \in I_k$ 的售出价格至少为 $\max_{j \in J^s_{\text{Budgeted}}} r_{j,\,i} = \max^{j \in J^s_{\text{Budgeted}}}(1-\varepsilon)2^s\beta_{min}v_{j,\,i} \ge \max_{j \in J^s_{\text{Budgeted}}} \frac{1-\varepsilon}{2}\beta_j v_{j,\,i}$（该不等式由分桶得出）；该均衡由渠道 $k$ 将统一保留价设为 $(1-\varepsilon)2^s\beta_{min}$，而其他渠道任意设置保留价所产生。因此，渠道 $k$ 将统一保留价设为 $(1-\varepsilon)2^s\beta_{min}$ 所获得的收入

$$\text{Rev}_k((1-\varepsilon)2^s\beta_{min}) \ge \sum_{i \in I_k} \max_{j \in J^s_{\text{Budgeted}}} \frac{1-\varepsilon}{2}\beta_j v_{j,i}. \tag{9}$$

现在令 $I_k(j) \subseteq I_k$ 表示满足 $v_{j,\,i} > 0$ 的展示集合 $i \in I_k$。那么，根据断言 2，$I_k(j)$ 和 $I_k(j')$ 对于均衡中的两个不受约束的预算受限竞标者 $j \ne j'$ $E$ 而言互不相交。因此，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_s \sum_{i \in I_k} \max_{j \in J^s_{\text{Budgeted}}} \frac{1-\varepsilon}{2}\beta_j v_{j,i} &\ge \sum_s \sum_{j \in J^E_U \cap J^s_{\text{Budgeted}}} \sum_{i \in I_k(j)} \frac{1-\varepsilon}{2}\beta_j v_{j,i} \\
&= \sum_{j \in J^E_U} \sum_{i \in I_k(j)} \frac{1-\varepsilon}{2}\beta_j v_{j,i} \\
&\ge \frac{1-\varepsilon}{2} \sum_{j \in J^E_U} \rho(k,j) B_j,
\end{aligned} \tag{10}$$

wh这里最后一个不等式的推导与不等式（5-8）中的推导相同

最后，令 $s^* = \text{argmax}_{s \in \{0\} \cup \left[\lceil \log \frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} \rceil - 1\right]} \sum_{i \in I_k} \max_{j \in J^s_{\text{Budgeted}}} \frac{1-\varepsilon}{2}\beta_j v_{j,i}$。那么，我们有：渠道 $k$ 通过设置统一保留价 $r^*_k = 2^{s^*}\beta_{min}$（注意，$r^*_k$ 确实独立于 $E$）所获得的收入为

$$\begin{aligned}
\text{Rev}_k((1-\varepsilon)2^{s^*}\beta_{min}) &\ge \sum_{i \in I_k} \max_{j \in J^s_{\text{Budgeted}}} \frac{1-\varepsilon}{2}\beta_j v_{j,i} && \text{(By Inequality (9))} \\
&\ge \frac{\sum_s \sum_{i \in I_k} \max_{j \in J^s_{\text{Budgeted}}} \frac{1-\varepsilon}{2}\beta_j v_{j,i}}{\max\left\{1, \lceil \log \frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} \rceil\right\}} && \text{(By definition of } s^*) \\
&\ge \frac{\frac{1-\varepsilon}{2} \sum_{j \in J^E_U} \rho(k,j) B_j}{\max\left\{1, \lceil \log \frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} \rceil\right\}} && \text{(By Inequality (10)).}
\end{aligned}$$

□

引理 1 中的条款 (3) 推出以下推论:

**推论 1.** 定义 $\rho(k,j)$ 如引理 *1* 所示。令 $\mathcal{R}=(\mathcal{R}_k)_{k\in K}$ 为渠道博弈（即 *S0*）的任意混合策略均衡，并令 $E(\boldsymbol{r})$ 为给定渠道混合策略支撑集中的任意保留价$\boldsymbol{r}$ 时的子博弈均衡。那么，渠道 $k$ 在混合策略均衡 $\mathcal{R}$ 中的期望收益至少为

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{r}\sim\mathcal{R}}\left[\frac{\sum_{j\in J_U^{E(\boldsymbol{r})}}(1-\varepsilon)\rho(k,j)B_j}{2\max\left\{1,\left\lceil\log\frac{\beta_{max}}{\beta_{min}}\right\rceil\right\}}\right].$$

## tCPA 和 QL 投标人的福利

**引理 2**。 设 $\boldsymbol{x}^*$ 为福利最大化分配（即，在定义 *2* 中， $\boldsymbol{x}^*$ 满足 $Wel^*=Wel(\boldsymbol{x}^*)$），并且

- 设 $W^*_{tCPA}(k)$ 为分配给 $x^*$中的 *tCPA*竞标者的 $I_k$ 中的展示所产生的流动性福利，即，

$$W^*_{tCPA}(k):=\sum_{j\in J_{tCPA}}\sum_{i\in I_k}T_jv_{j,i}x^*_{j,i},$$

- 并设 $W^*_{QL}(k)$ 为分配给 $x^*$中的准线性竞标者的 $I_k$ 中的展示所产生的流动性福利，即，

$$W^*_{QL}(k):=\sum_{j\in J_{QL}}\sum_{i\in I_k}v_{j,i}x^*_{j,i}.$$

那么，对于任意 $\varepsilon>0$,

*1.* 如果渠道 $k$ 可以为每个目标每次转化成本或准线性竞标者 $j$ 按如下方式设定投标人特定保留价（也在单位价值成本空间中）$r_k(j)$：

$$r_k(j)=\begin{cases}(1-\varepsilon)T_j & if\ j\ is\ a\ tCPA\ bidder\\ 1-\varepsilon & if\ j\ is\ a\ QL\ bidder,\end{cases}$$

那么，无论其他渠道如何行动，渠道 $k$ 获得的收入至少为 $(1-\varepsilon)W^*_{tCPA}(k)+W^*_{QL}(k)$，

*2.* 此外，我们令 $T_{max}=$最大值$_{j\in J_{tCPA}}T_j$，并令 $T_{min}=$最小值$_{j\in J_{tCPA}}T_j$，然后渠道$k$ 可以设定一个统一保留价 $r_k$，使得渠道 $k$ 获得的收入至少为

$$\frac{(1-\varepsilon)(W^*_{tCPA}(k)+W^*_{QL}(k))}{2+2\max\left\{1,\left\lceil\log\frac{T_{max}}{T_{min}}\right\rceil\right\}}$$

无论其他渠道如何行动。

证明。 1. 按照假设固定渠道 $k$的投标人特定保留价格，并考虑任意一个子博弈均衡。对于任意展示 $i\in I_k$，令竞标者 $j=\arg\max_{\ell\in J_{\mathrm{tCPA}}\text{ 满足 }x^*_{\ell,\,i}>0}T_\ell v_{\ell,\,i}$，并令竞标者 $q=\arg\max_{\ell\in J_{\mathrm{QL}}\text{ 满足 }x^*_{\ell,\,i}>0}v_{\ell,\,i}$。由于$r_{j,\,i}=r_k(j)v_{j,\,i}=(1-\varepsilon)T_jv_{j,\,i}<T_jv_{j,\,i}$，由命题 4 可知，展示 $i$ 的售出成本至少为$r_{j,\,i}=(1-\varepsilon)T_jv_{j,\,i}$。

同理，由于$r_{q,\ i} = r_k(q)v_{q,\ i} = (1-\varepsilon)v_{q,\ i} < v_{q,\ i}$，由命题 4 可知，展示 $i$的售出成本至少为 $r_{q,\ i} = (1-\varepsilon)v_{q,\ i}$。此外，注意到展示 $i$对 $W^{*}{}_{\text{目标每次转化成本}}(k) + W^{*}{}_{\text{准线性}}(k)$的贡献至多为 $\max\{v_{q,i}, T_j v_{j,i}\}$，且我们已证明展示$i$ 的售出成本至少为该金额的$(1-\varepsilon)$份额，因此渠道 $k$ 的收入至少为$(1-\varepsilon)(W^{*}{}_{\text{目标每次转化成本}}(k) + W^{*}{}_{\text{准线性}}(k))$。

2. 再次说明，设定合适的统一保留价的总体思路是：将上文使用的竞标者专属保留价划分为若干区间，并将统一保留价 $r_k$ 设为潜在收入最高区间的下限。具体而言，我们将所有目标每次转化成本竞标者划分为以下区间：

$$J^{s}_{\text{tCPA}} = \{j : j \in J_{\text{tCPA}}, 2^{s} T_{min} \le T_j \le 2^{s+1} T_{min}\}$$

对于 $s \in \{0\} \cup \left[\lceil \log \frac{T_{max}}{T_{min}} \rceil - 1\right]$。

和之前一样，对于任意展示 $i \in I_k$，令竞标者 $j = \arg\max_{\ell \in J_{\text{tCPA}} \text{ 满足 } x^{*}_{\ell,\ i} > 0} T_\ell v_{\ell,\ i}$，并令竞标者$q = \arg\max_{\ell \in J_{\text{QL}} \text{ 满足 } x^{*}_{\ell,\ i} > 0} v_{\ell,\ i}$。注意，展示 $i$对 $W^{*}{}_{\text{目标每次转化成本}}(k) + W^{*}{}_{\text{准线性}}(k)$ 的贡献至多为 $\max\{v_{q,i}, T_j v_{j,i}\}$。

若 $T_j v_{j,\ i} > v_{q,\ i}$，令 $s$ 满足 $j \in J^{s}{}_{\text{目标每次转化成本}}$。假设渠道 $k$ 设定的保留价为$r_k = (1-\varepsilon)2^{s} T_{min}$，由于分桶，该价格严格低于 $T_j$。那么，根据命题 4，在子博弈均衡中，展示 $i$ 的售出成本至少为 $(1-\varepsilon)2^{s} T_{min} v_{j,\ i} \ge \frac{1-\varepsilon}{2} T_j v_{j,\ i}$；这个不等式成立是因为分桶。

若 $v_{q,\ i} \ge T_j v_{j,\ i}$，假设渠道 $k$ 设定保留价 $r_k = 1-\varepsilon$。那么，根据命题 4，在子博弈均衡中，展示$i$ 的售出成本至少为 $v_{q,\ i}$。

现在我们将这两种情况结合起来。令 $Rev_k(r_k)$ 表示在子博弈均衡中，若渠道 $k$ 设定统一保留价 $r_k$ （无论其他渠道的保留价如何），渠道 $k$ 的收入。然后，对所有分桶 $s$ 求和，可得

$$\sum_{r_k \in \{1-\varepsilon, T_{min}\} \cup \left\{2^{s} T_{min} \mid s \in \left[\lceil \log \frac{T_{max}}{T_{min}} \rceil - 1\right]\right\}} Rev_k(r_k) \ge \frac{1-\varepsilon}{2}(W^{*}_{\text{tCPA}}(k) + W^{*}_{\text{QL}}(k)),$$

因为正如我们在上述案例分析中所展示的，所有桶合在一起至少覆盖了每次展示对 $W^{*}{}_{\text{目标每次转化成本}}(k) + W^{*}{}_{\text{准线性}}(k)$ 的流动性福利的 $\frac{1-\varepsilon}{2}$-份额。

令 $r^{*}_k = \arg\max_{r_k \in \{1-\varepsilon, T_{min}\} \cup \left\{2^{s} T_{min} \mid s \in \left[\lceil \log \frac{T_{max}}{T_{min}} \rceil - 1\right]\right\}} Rev_k(r_k)$。那么，通过将保留价设为 $r^{*}_k$，渠道 $k$ 至少可以获得以下收入

$$\frac{(1-\varepsilon)(W^{*}_{\text{tCPA}}(k) + W^{*}_{\text{QL}}(k))}{2 + 2\max\left\{1, \lceil \log \frac{T_{max}}{T_{min}} \rceil\right\}}.$$

□

如果渠道 $k$ 无论其他渠道采取何种行动，通过设定特定的统一保留价 $r_k$ 始终可以获得一定数额的收入，那么在渠道博弈的任何混合策略均衡中（即完整博弈的阶段 (S0)），渠道 $k$的收入至少达到相同数额（否则渠道 $k$ 将偏离并选择统一保留价 $r_k$）。因此，引理 2 中的第 (2) 项推出以下推论：

**推论2**。 令 $W^*_{tCPA}(k)$ 和 $W^*_{QL}(k)$ 如上述引理 *2* 中所定义。则对于任意 $\varepsilon > 0$，在渠道博弈 ***(S0)*** 的任何混合策略均衡中，渠道 $k$ 的期望收益至少为

$$\frac{(1-\varepsilon)(W^*_{tCPA}(k) + W^*_{QL}(k))}{2 + 2\max\left\{1, \lceil \log \frac{T_{max}}{T_{min}} \rceil\right\}}.$$

## 最终收益保证

**定理 2**。对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$RevG(Local) \geq \frac{1-\varepsilon}{3 + 2\max\left\{1, \lceil \log \frac{T_{max}}{T_{min}} \rceil\right\} + 2\max\left\{1, \lceil \log \frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} \rceil\right\}}.$$

证明。 设 $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_k)_{k\in K}$ 是渠道博弈的任意混合策略均衡，并令 $E(\boldsymbol{r})$表示在渠道的混合策略支持集中的任意保留价 $\boldsymbol{r}$ 下的子博弈均衡。令 $\boldsymbol{x}^*$ 为流动性福利最大化分配（即 $\boldsymbol{x}^*$ 满足 $Wel^* = Wel(\boldsymbol{x}^*)$）。

根据推论2，均衡 $\mathcal{R}$中渠道 $k$ 的期望收益记为 $\mathrm{Rev}_k[\mathcal{R}]$，其值为

$$\mathrm{Rev}_k[\mathcal{R}] \geq \frac{(1-\varepsilon)(W^*_{\mathrm{tCPA}}(k) + W^*_{\mathrm{QL}}(k))}{2 + 2\max\left\{1, \lceil \log \frac{T_{max}}{T_{min}} \rceil\right\}},$$

其中 $W^*_{\text{目标每次转化成本}}(k)$ 和 $W^*_{\text{准线性}}(k)$ 的定义与引理 2 中相同。

因此，所有渠道的期望总收益记为 $\mathrm{Rev}[\mathcal{R}]$，其值为

$$\mathrm{Rev}[\mathcal{R}] \geq \frac{(1-\varepsilon)(W^*_{\mathrm{tCPA}} + W^*_{\mathrm{QL}})}{2 + 2\max\left\{1, \lceil \log \frac{T_{max}}{T_{min}} \rceil\right\}}, \tag{11}$$

其中，$W^*_{\text{目标每次转化成本}} := \sum_{k\in K} W^*_{\text{目标每次转化成本}}(k)$ 和 $W^*_{\text{准线性}} := \sum_{k\in K} W^*_{\text{准线性}}(k)$ 分别表示目标每次转化成本竞标者和准线性竞标者对 $x^*$ 流动性福利的总贡献。

令 $\rho(k,\ j)$ 如引理 1 中所定义。那么，根据推论 1,

$$\mathrm{Rev}_k[\mathcal{R}] \geq \mathbf{E}_{\boldsymbol{r}\sim\mathcal{R}}\left[\frac{\sum_{j\in J_U^{E(\boldsymbol{r})}}(1-\varepsilon)\rho(k,j)B_j}{2\max\left\{1, \lceil \log \frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} \rceil\right\}}\right].$$

对所有渠道求和，得到

$$\mathrm{Rev}[\mathcal{R}] \geq \sum_k \mathbf{E}_{\boldsymbol{r}\sim\mathcal{R}}\left[\frac{\sum_{j\in J_U^{E(\boldsymbol{r})}}(1-\varepsilon)\rho(k,j)B_j}{2\max\left\{1, \lceil \log \frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} \rceil\right\}}\right] = \mathbf{E}_{\boldsymbol{r}\sim\mathcal{R}}\left[\frac{\sum_{j\in J_U^{E(\boldsymbol{r})}}(1-\varepsilon)B_j}{2\max\left\{1, \lceil \log \frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} \rceil\right\}}\right]. \tag{12}$$

此外，根据引理 1 的第 (1) 项，我们有

$$\mathrm{Rev}[\mathcal{R}] \geq \mathbf{E}_{\boldsymbol{r}\sim\mathcal{R}}\left[\sum_{j\in J_C^{E(\boldsymbol{r})}} B_j\right]. \tag{13}$$

注意到

$$Wel^* \leq W^*_{\mathrm{tCPA}} + W^*_{\mathrm{QL}} + \sum_{j\in J_{\mathrm{Budgeted}}} B_j,$$

然后由不等式 (11)、(12) 和 (13) 即可得出该定理。 □

结合定理 2 和事实 2，我们得到以下推论：

**推论 3**。对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$RevG(Global) \geq \frac{1-\varepsilon}{3 + 2\max\left\{1, \left\lceil \log \frac{T_{max}}{T_{min}} \right\rceil\right\} + 2\max\left\{1, \left\lceil \log \frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} \right\rceil\right\}}.$$

最后，我们通过一个使用著名“等收入”技巧的例子，证明上述局部模型和全局模型中的收入保证在常数因子范围内都是紧的。

**命题 3**。对于单渠道情形，存在一个实例，其中 $RevG(Global) = RevG(Local) = O(1/(\log(T_{max}/T_{min}) + \log(\beta_{max}/\beta_{min})))$。

证明。由于只有一个渠道，$RevG(Global) = RevG(Local)$。

考虑 $2^\ell$ 个 tCPA竞标者，其目标每次转化成本为 $1/2^\ell$，对应 $\ell = 0, \ldots, w_1 - 1$；每个竞标者都只对一个独特的展示感兴趣，其价值为 1（也就是说，他们对其他所有展示的价值均为 0，而其他所有人对该展示的价值也均为 0）。类似地，有 $2^\ell$ 个预算型竞价者，其预算为 $1/2^\ell$，对应 $\ell = 0, \ldots, w_2 - 1$；每个竞标者都只对一个独特的展示感兴趣，其价值为 1（也就是说，他们对其他所有展示的价值均为 0，而其他所有人对该展示的价值也均为 0）。通过将每个人分配到其独特的展示，可获得 $w_1 + w_2$ 最优流动性福利。最佳统一保留价所能获得的收入不超过 4。这表明 $RevG(Global) \leq 4/(w_1 + w_2) = 4/\left(2 + \frac{T_{max}}{T_{min}} + \frac{\beta_{max}}{\beta_{min}}\right) = (\log \log)$。□

## 5.2 无政府代价

在本小节中，我们研究渠道出于自身利益在局部模型中设定统一保留价，与在全局模型中合作地选择保留价相比，会损失多少总收益。具体而言，我们考虑标准概念——无政府代价 $PoA$（定义 4）。首先，我们注意到定理 2 中的收益保证立即给出了 $PoA$ 的一个下界：

**定理 3**。对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$PoA \geq \frac{1-\varepsilon}{3 + 2\max\left\{1, \left\lceil \log \frac{T_{max}}{T_{min}} \right\rceil\right\} + 2\max\left\{1, \left\lceil \log \frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} \right\rceil\right\}}.$$

证明。根据 $PoA$（定义 4）的定义，$PoA = \frac{RevG_{(Local)}}{RevG(Global)}$。根据事实 2，$RevG(Global) \leq 1$。由此可得 $PoA \geq RevG(Local)$，再应用定理 2 即完成证明。□

接下来，我们证明定理 3 中的 $PoA$ 下界是紧的（相差一个常数因子）。

**定理 4**。存在一个包含两个渠道的实例，使得 $PoA = O(1/(\log(T_{max}/T_{min}) + \log(\beta_{max}/\beta_{min})))$。

**基本思路：** 我们首先构造一个“等收入”实例（其中包含许多目标每次转化成本呈几何级数递减的 tCPA 竞标者 $J_1$，每位竞标者都只对由渠道 $k_1$拥有的一个独特展示感兴趣），如命题 3 的证明所示。对于这个“等收入”实例，渠道 $k_1$无法通过设定统一保留价，同时从 $J_1$ 中的所有竞标者那里获得可观收入。

现在，关键思路是引入另一个渠道 $k_2$ 和另一位 tCPA竞标者 $j_2 \notin J_1$，使得渠道 $k_2$ 仅拥有一次展示，且只有竞标者 $j_2$ 对其具有严格正价值。此外，竞标者 $j_2$ 对渠道 $k_1$中的每次展示 $i$ 都有价值，而竞标者 $j_2$对展示 $i$ 的价值经过精心选择，使其与对展示 $i$感兴趣的竞标者 $J_1$ 的 tCPA 成比例。因此，如果竞标者 $j_2$ 进行统一出价（在单位价值成本空间中），那么对渠道 $k_1$中的展示而言，这会在成本空间中产生非统一出价，且这些出价与竞标者 $J_1$的 tCPA 成比例。我们可以将这些非统一出价视为对渠道 $J_1$中的竞标者设置的、因竞标者而异的非统一保留价，且这些保留价与各自的 tCPA 成比例。这样，我们就能从渠道 $J_1$ 中的所有竞标者那里提取全部收入（类似于引理 2 的第 (1) 项）。

最后，我们只需说明上述思路只能在全局模型中成功应用，而不能在局部模型中应用。这是因为在局部模型中，渠道 $k_2$ 会为其唯一的展示设置较高的保留价，以从竞标者 $j_2$身上获得更多收益。因此，竞标者$j_2$ 没有足够的“松弛量”，无法给出足够高的统一出价，从而为 $J_1$中的竞标者设置足够高的投标人特定保留价格。

含预算型竞标者的实例构造基本沿用了上述思路。完整证明见附录C。

根据定理 3和定理 4，可得以下紧确的无政府代价：

**定理5** （无政府代价）。 $PoA = \Theta(1/(\log(T_{max}/T_{min}) + \log(\beta_{max}/\beta_{min})))$。

## 6 有发布商保留价时的无政府代价

本节研究模型的一般版本：发布商拥有展示 $i$，并为该展示设定最低价格 $p_i$，展示只有达到该价格才能售出。[7] 我们得出的主要发现是，定理5在很大程度上取决于是否存在发布商价格。我们证明，在一般渠道下，存在发布商价格时，最坏情况下的 $PoA = 0$。

接下来，我们将注意力限制在一类重要的实例上，其中各渠道彼此是按比例缩放的副本。也就是说，各渠道共享同一组同质展示，但各自拥有的收入份额不同。在此背景下，我们证明，只有拍卖中存在一个竞标者时，$PoA$ 才有非平凡下界。在这种情况下，$PoA = 1/|K|$，因此，与我们在第 5 节中的结果不同，它取决于博弈中的渠道数量。

### 一般渠道

现在，我们给出本节针对一般情形的主要结果：各渠道拥有的展示可以存在任意不对称性，且发布商保留价格也可以任意。

**定理 6.** 如果发布商可以为其展示任意设置最低价格，那么存在一个实例，使得 $PoA = 0$。

[7]请记住，价格 $p_i$ 也处于单位价值成本空间中。

证明。 考虑以下实例：有两个渠道和一个竞标者，该竞标者是目标约束为 $T = 1$ 的 tCPA竞标者。频道 1 只有一个展示待售。该展示没有任何发布商定价约束（$p_i = 0$）。频道 2 有 $q$ 个展示待售，每个展示都有相同的发布商定价约束 $p_i = 1 + 1/q$。竞价者对所有展示的估值都相同，即对于所有 $i \in I$，均为 $v_i = 1$ 。

我们断言，在全局模型中，将两个渠道的保留价都设为零是最优的。事实上，在没有保留价的情况下，竞标者可以购买全部展示，因为她以总成本 $q \cdot (1 + 1/q) = 1 + q$ 获得了 $1 + q$ 的价值。这是全局模型的最优解，因为总收益恰好等于最优流动性福利。

另一方面，在局部模型中，对于频道 1 而言，设定统一保留价 $r_1 = 1$ 是严格占优策略：如果 $r_1 > 1$，频道 1 的收入为零。如果 $r_1 \leq 1$，竞标者会购买其展示，从而带来 $r_1$ 的收入。因此，频道 1 严格偏好将保留价设为 $r_1 = 1$。由于 $r_1 = 1$，竞标者无法购买频道 2 的任何展示，因为每次展示的成本至少为 $1 + 1/q$。因此，在这一均衡中，竞标者提交统一出价 1，只获得频道 1 售出的展示，全局收益为 1。

因此，根据这个实例，我们有 $RevG(Local)/RevG(Global) \leq 1/(1+q)$。取 $q \to \infty$，即可完成证明。 □

前一个结果背后的直觉来自这样一些实例：部分渠道的发布商价格相对于竞标者的目标每次转化成本较高，而另一些渠道则没有发布商价格。在这些实例中，在全局模型下，渠道会受益于在低价渠道（没有发布商保留价）维持较低的保留价，因为这些渠道会补贴 tCPA 竞标者，使其能够从高价 渠道购买展示。然而，当低价渠道是短视的，它们就会希望提高保留价，以增加局部收入。这种局部行为会对高价渠道的收入产生负面影响，进而对所有渠道都不利。

鉴于前一个负面 $PoA$ 结果的原因是不同渠道上的发布商价格存在不对称性，接下来我们将 $PoA$ 分析限定在一个特殊子类中，其中各渠道是彼此的缩放 版本。

## 缩放频道

缩放频道模型由权重 $\gamma = (\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_k) \in \Delta([0,1]^K)$ [8] 组成，使得频道 $k$ 拥有每个展示 $i \in I$ 的份额 $\gamma_k$。[9]

第一个结果表明，令人惊讶的是，只要有多于一个竞标者参与拍卖，那么在最坏情况下 $PoA = 0$。

**定理 7。** 对于缩放频道模型，如果有两个或更多竞标者参与拍卖，那么存在一个实例，使得 $PoA = 0$。

我们构造的实例（详见附录 D）由两个渠道和两个 tCPA竞标者组成。该实例的核心思路是，渠道的主要收入来源是竞标者 1 购买高价展示，即发布商保留价格较高的展示。竞标者 1 需要有足够的松弛量，才能购买这些高价展示。因此，竞标者 1 需要购买

[8] $\Delta [0,1]^K$ $\mathbb{R}^K$ ( 是单位单纯形。在此为简化表述，我们假设展示是可分割的。对于不可分割的展示，类似的模型会假设每个展示 $i$ 都被复制，使得频道 $k$ 拥有这些副本的份额 $\gamma_k$。

足够多的低价展示。然而，如果竞标者 2 设置较高的出价，低价展示的价格也可能很高。只有当竞标者 2 从其他低价展示中获得足够的松弛量时，它才能设置较高的出价。论证的关键在于，在全局模型中，渠道可以通过设置足够高的保留价，阻止竞标者 2 获得足够的松弛量。这样一来，竞标者 1 就能获得松弛量来购买高价展示。相反，对于局部模型，存在一种均衡：两个渠道都设置较低的保留价。这会使竞标者 1 无法购买高价展示，因为竞标者 2 设置了较高的出价，从而耗尽了竞标者 1 的松弛量。

作为该实例的推论，我们表明，在自动竞价框架中，像全局模型那样设置较高的保留价不仅能增加收入，也能提高福利。这与经典的利润最大化框架形成对比，在该框架中，较高的保留价与福利呈负相关。

我们在本节最后证明，对于所有渠道中仅有一位竞标者参与的情形，$PoA$ 始终严格为正（对于纯策略均衡）。

**定理 8.** 如果只有一位竞标者，那么对于纯策略均衡，我们有 $PoA = \frac{1}{|K|}$，其中 $|K|$ 是博弈中的渠道数。

证明推迟至附录 D。我们注意到，与第 5 节中 $PoA$ 不受渠道数影响的结果不同，在有发布商保留价的设定中，$PoA$直接取决于渠道数。

# 7 进一步讨论

本文针对以单位价值成本空间设置保留价的情形，给出了收入保证和无政府代价的紧确界。由此自然引出两个后续问题:

- 我们能否为竞标者的福利 得出类似的界限?
- 如果渠道在按展示计费 空间中设定保留价，收益保证是多少?

我们简要讨论如何扩展部分结果来回答这些问题。详情请参阅完整论文。

### 福利界限

我们的大多数收入和无政府代价结果都适用于福利。具体而言，对于无发布商保留价的设定，我们可以得到类似于定理 2 和命题 3 中收入界限以及定理5 中无政府代价界限的福利界限（证明概要见附录 E）。无发布商保留价设定中的许多结果也适用于福利。详情请参阅完整论文。

我们还注意到一个有趣的现象——与准线性设定不同，采用更高的保留价有时反而能提高福利（见定理 7 后的讨论）。

### 统一的按展示计费保留价格

当渠道设置统一的每次展示成本保留价时（即保留价与价值无关，且对所有竞标者和展示都相同），我们可以获得类似于定理 2 的收入保证。

我们可以通过调整第 5 节中的分桶论证来实现这一点：对 tCPA竞标者，将 $T_j v_{j,i}$ 分桶，而不是$T_j$；对准线性竞标者，将 $v_{j,i}$ 分桶；对预算型竞标者，将 $\beta_j v_{j,i}$ 分桶，而不是 $\beta_j$。

## 参考文献


[1] 关于应用广告系列 [n. d.]。《关于应用广告系列》。https://support.google.com/google-ads/answer/6247380?hl=en。访问日期：2022-02-08。[2] 关于效果最大化广告系列 [n. d.]。《关于效果最大化广告系列》。https: //support.google.com/google-ads/answer/10724817?hl=en。访问日期：2022-02-08。[3] 关于投放系统：版位 [n. d.]。《关于投放系统：版位》。https://www.facebook.com/business/help/965529646866485?id=802745156580214。访问日期：2022-02-08。[4] Gagan Aggarwal、Ashwinkumar Badanidiyuru 和 Aranyak Mehta。2019。带约束的自动竞价。载于网络与互联网经济学——第*15*届国际会议 *WINE 2019*，纽约，美国纽约州，*2019*年*12*月*10*日至*12*日，论文集（计算机科学讲义，第*11920*卷），Ioannis Caragiannis、Vahab S. Mirrokni 和 Evdokia Nikolova（编）。Springer，17–30。https://doi.org/10.1007/978-3-030-35389-6_2[5] Yossi Azar、Michal Feldman、Nick Gravin 和 Alan Roytman。2017。流动价格无政府状态。载于国际算法博弈论研讨会。Springer，3–15。[6] Santiago Balseiro、Yuan Deng、Jieming Mao、Vahab Mirrokni 和 Song Zuo。2021。自动竞价世界中的稳健拍卖设计。神经信息处理系统进展34（2021）。[7] Santiago R. Balseiro、Yuan Deng、Jieming Mao、Vahab S. Mirrokni 和 Song Zuo。2021。自动竞价拍卖概览：价值最大化与效用最大化。计算机协会，纽约，美国纽约州，132–133。https://doi.org/10.1145/3465456. 3467607[8] 在 Twitter广告上出价 [n. d.]。在 Twitter广告上出价。https://business.twitter.com/en/help/troubleshooting/bidding-and-auctions-faqs.html。访问日期：2022-02-08。[9] Roberto Burguet 和 J´ozsef S´akovics。1999。拍卖设计中的不完全竞争。国际经济评论40（1999），231–247。[10] Xi Chen、Christian Kroer 和 Rachitesh Kumar。2021。第二价格拍卖中节奏控制的复杂性。载于第*22*届 *ACM*经济学与计算会议论文集（*EC '21*）。计算机协会，318。[11] Xi Chen、Shang-Hua Teng 和 Paul Valiant。2007。胜负博弈的近似复杂性。载于*SODA*，第7卷。Citeseer，159–168。[12] Vincent Conitzer、Christian Kroer、Eric Sodomka 和 Nicolas E Stier-Moses。2021。拍卖市场中的乘法节奏均衡。运筹学（2021）。

[13] Yuan Deng、Jieming Mao、Vahab Mirrokni 和 Song Zuo。2021。迈向自动竞价世界中的高效拍卖。计算机协会，纽约，美国纽约州，3965–3973。https://doi.org/10.1145/3442381.3450052[14] Shahar Dobzinski 和 Renato Paes Leme。2014。预算约束拍卖中的效率保证。载于国际自动机、语言与编程研讨会。Springer，392–404。[15]Glenn Ellison、Drew Fudenberg 和 Markus M¨obius。2004。竞争性拍卖。《欧洲经济学会杂志》2，1（2004年3月），30–66。https: //doi.org/10.1162/154247604323015472 arXiv:https://academic.oup.com/jeea/article- pdf/2/1/30/10312861/jeea0030.pdf[16] Google Ads 帮助中心：关于自动出价 [n. d.]。Google Ads 帮助中心：关于自动出价。https://support.google.com/google-ads/answer/2979071?hl=en。访问日期：2020-02-08。[17] Elias Koutsoupias 和 Christos Papadimitriou。1999。最坏情况均衡。载于第*16*届计算机科学理论方面年度会议论文集（德国特里尔）（*STACS'99*）。Springer-Verlag，德国柏林、海德堡，404–413。[18] Juncheng Li 和 Pingzhong Tang。2022。投资回报率约束的在线广告市场中的自动竞价均衡。*arXiv*预印本 *arXiv:2210.06107*（2022）。[19] R. Preston McAfee。1993。竞争性卖家的机制设计。《计量经济学》61，6（1993），1281–1312。http://www.jstor.org/stable/2951643[20] JF NAs。1951。非合作博弈。《数学年刊》54，2（1951），286–295。[21] RA Rankin。1968。《实分析与复分析》，W. Rudin著。412页。84先令。1966年。（麦格劳-希尔，纽约。）《数学公报》52，382（1968），412–412。[22] TikTok 商业帮助中心：关于应用事件优化 [n. d.]。TikTok 商业帮助中心：关于应用事件优化。https://ads.tiktok.com/help/article?aid=179845248081724490。访问日期：2022-02-08。[23] G´abor Vir´ag。2010。竞争性拍卖：有限市场与收敛。《理论经济学》5，2（2010），241–274。https://doi.org/10.3982/TE538 arXiv:https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.3982/TE538[24] Meta出价策略指南 [n. d.]。Meta出价策略指南。https://www.facebook.com/business/m/one-sheeters/facebook-bid-strategy-guide。访问日期：2022-02-08。

## 均匀出价是最优的

命题 *1* 的证明。 我们使用贪心交换论证来证明该命题。我们将维持不变量 $\forall i \in I,\ b_{j,\,i} = \alpha_j v_{j,\,i}$。初始时，我们令 $\alpha_j = 0$ 和 $\forall i \in I,\ x_{j,\,i} = 0$，然后使用贪心过程更新它们：直到问题（2）（或（3））中的第一个约束对于解 $(b_{j,\,i})_{i\in I}$、$(x_{j,\,i})_{i\in I}$ 变紧，或存在 $\forall i \in I$ 使得 $v_{j,\,i} > 0,\ x_{j,\,i} = 1$（即，竞标者 $j$ 已经赢得了所有其具有严格正价值的展示）为止，执行以下操作

1. 如果竞标者 $j$ 在展示 $i$ 上处于平局，且 $x_{j,i} < 1$（当存在多个此类展示时，任意选择一个），则增加 $x_{j,i}$，直到 $x_{j,i} = 1$，或达到停止条件为止，

2. 如果不存在这样的展示，则提高 $\alpha_j$，直到竞标者 $j$ 在一个新的展示 $i$上打成平局，然后转到步骤 1。

请注意，每当上述过程在步骤 1 中提高某个展示 $i_1$ 对应的 $x_{j,i_1}$ 时，以下两点必然成立：(i) 对于任何满足 $c_{j,i_2}(\boldsymbol{b}_{i_2},\boldsymbol{r})\, v_{j,i_2} < \alpha_j$ 的展示 $i_2 \in I$，都有 ~~$x_{j,i_2} = 1$~~（因为对于任何这样的 $i_2$，在上述过程中，竞标者 $j$ 在 $i_1$之前就会在 $i_2$ 上打成平局，而上述过程也早已将 $x_{j,i_2}$ 提高到 1）；(ii) $c_{j,i_1}(\boldsymbol{b}_{i_1},\boldsymbol{r})\, v_{j,i_1} = \alpha_j$（因为只有当竞标者 $j$ 在展示 $i_1$上打成平局时，~~该过程才会~~提高 $x_{j,i_1}$）。因此，在上述过程为某个展示 $i$提高 $x_{j,i}$ 的任何时刻，展示 $i$ 都必须是当前“性价比最高”的展示，也就是说，在所有满足 $x_{j,\ell} < 1$ 的展示 $\ell \in I$ 中，展示 $i$ 对竞标者 $j$具有最低的单位价值成本 $c_{j,i}(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{r})\, v_{j,i}$。

---

现在，令 $(b^*_{j,i})_{i\in I}, (x^*_{j,i})_{i\in I}$ 表示上述贪心过程收敛到的问题（2）（或问题（3））的解，并令 $(b'_{j,i})_{i\in I}, (x'_{j,i})_{i\in I}$ 表示问题（2）（或问题（3））的任意可行解。我们要证明，$(b^*_{j,i})_{i\in I}, (x^*_{j,i})_{i\in I}$ 不劣于 $(b'_{j,i})_{i\in I}, (x'_{j,i})_{i\in I}$。

为此，我们按照单位价值成本 $c_{j,i}(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{r})\, v_{j,i}$，将 $I$ 中的所有展示按竞标者 $j$ 的单位价值成本从低到高排序 $\pi$，即 $\pi$ 是 $I$ 上的一个排列，满足 $c_{j,\pi(i_1)}(\boldsymbol{b}_{\pi(i_1)},\boldsymbol{r})\, v_{j,\pi(i_1)} \le c_{j,\pi(i_2)}(\boldsymbol{b}_{\pi(i_2)},\boldsymbol{r})\, v_{j,\pi(i_2)}$，对任意 $i_1 < i_2$ 均成立。令 $i_0$ 为满足 $x'_{j,\pi(i_0)} \neq x^*_{j,\pi(i_0)}$ 的最小数。必有 $x^*_{j,\pi(i_0)} > x'_{j,\pi(i_0)}$。要看出这一点，注意如果 $x^*_{j,\pi(i_0)} < 1$，由于对于 $i > i_0$，贪心过程会优先选择 $x^*_{j,\pi(i_0)}$，而不是任何其他 $x^*_{j,\pi(i)}$，直到问题（2）（或问题（3））中的第一个约束变为紧约束；并且根据 $i_0$ 的定义，对于所有 $i < i_0$，都有 $x'_{j,\pi(i)} = x^*_j$，因此必有 $x^*_{j,\pi(i_0)} \ge x'_{j,\pi(i_0)}$（否则 $(x'_{j,i})_{i\in I}$ 会违反第一个约束）。如果 $x^*_{j,\pi(i_0)} = 1$，那么 $x^*_{j,\pi(i_0)} \ge x'_{j,\pi(i_0)}$ 显然成立。由于这两种情况下都有 $x^*_{j,\pi(i_0)} \ge x'_{j,\pi(i_0)}$，而我们假设 $x'_{j,\pi(i_0)} \neq x^*_{j,\pi(i_0)}$，因此可得 $x^*_{j,\pi(i_0)} > x'_{j,\pi(i_0)}$。

令 $i' > i_0$ 满足 $x'_{j,\pi(i')} > 0$。不失一般性，必定存在这样的 $i'$ WLOG，否则显然 $(b^*_{j,i})_{i\in I}$，$(x^*_{j,i})_{i\in I}$ 是更好的解。现在考虑总体单位价值成本 $T' = \frac{\sum_{i\in I} c_{j,i}(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{r}) x'_{j,i} v_{j,i}}{\sum_{i\in I} v_{j,i} x'_{j,i}}$，以及总成本 $B'_\delta = \sum_{i\in I} c_{j,i}(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{r}) x'_{j,i}$。由于 $c_{j,\pi(i_0)}(\boldsymbol{b}_{\pi(i_0)},\boldsymbol{r})\, v_{j,\pi(i_0)} \le c_{j,\pi(i')}(\boldsymbol{b}_{\pi(i')},\boldsymbol{r})\, v_{j,\pi(i')}$，如果将 ~~$x'_{j,i'}$~~ 减少 $v_{j,\pi(i')}$，并将 $x'_{j,i_0}$ 增加 $v_{j,\pi(i_0)}$，增减幅度均为 $\delta = \min\{v_{j,\pi(i_0)}(x^*_{j,i_0} - x'_{j,i_0}),\, v_{j,\pi(i')} x'_{j,i'}\}$，那么 $T'$ 和 $B'_\delta$ 都不会增加，且总价值 $\sum_{i\in I} v_{j,i} x'_{j,i}$ 不变。（请注意，适当调整出价 $b'_{j,i'}$ 和 $b'_{j,i_0}$ 后，这种对 $x'_{j,i'}$ 和 $x'_{j,i_0}$ 的变动是可行的。）

此外，只要存在 $i_0 \in I$ 使得 $x'_{j,\pi(i_0)} \neq x^*_{j,\pi(i_0)}$ 能够使 $x'_{j,\pi(i_0)} = x^*_{j,\pi(i_0)}$，我们就可以重复上述论证。这表明 $(x^*_{j,i})_{i\in I}$ 所达到的总价值优于（或等于）$(x'_{j,i})_{i\in I}$。

□

# B 寻找子博弈均衡的困难性证明

在本节中，我们证明，即使子博弈仅由 tCPA竞标者构成且没有保留价，寻找子博弈均衡（定义1）仍是 PPAD 困难。由于我们只

在本节中考虑 tCPA竞标者且不设保留价，因此我们首先在下一小节中通过限定为 tCPA竞标者来简化子博弈均衡的概念。

## B.1 tCPA竞标者的子博弈均衡

在没有保留价的情况下，tCPA竞标者的子博弈均衡可简化为如下统一出价均衡，其本质上与 [18], 中的自动出价均衡相同。因此，在本节中，我们也将 tCPA竞标者的子博弈称为统一出价博弈。

**定义 6**（tCPA竞标者的统一出价均衡）。在包含 $m$ 个物品（展示） $I$ 以及 $n$ 个 *tCPA*竞标者的子博弈中，这些竞标者的 *tCPA* 分别为 $T_1$、.....、$T_n$。设 $\alpha = (\alpha_1$、.....、$\alpha_n)$ 为竞标者出价参数组成的向量，其中 $\alpha_j \geq T_j$；设 $x = (x_{1,1}$、.....、$x_{n,m})$ 为物品分配组成的向量，其中 $x_{j,i} \in [0,1]$ 表示物品 $i$ 分配给竞标者 $j$ 的份额，因此 $\sum_{j\in[n]} x_{ji} \leq 1$；再设 $p_i$ 为物品 $i$的次高出价，因此竞标者 $j$ 为物品 $i$支付 $p_i x_{j,i}$。我们称（$\alpha$、$x$）为统一出价均衡，当且仅当

*(1)* 只有出价最高的竞标者才能获得物品：$x_{j,i} > 0$ 当且仅当 $\alpha_j v_{j,i} \geq \alpha_\ell v_{\ell,i}$ 对所有 $\ell \in [n]$ 均成立。*(2)* 对任何出价为正的物品进行完全分配：$\sum_{j\in[n]} x_{j,i} = 1$ 若 $\alpha_\ell v_{\ell,i} > 0$ 对某个 $\ell \in [n]$ 成立。*(3)* 满足 *tCPA* 约束：对每个 $j \in [n]$，$\sum_{i\in[m]} p_i x_{j,i} \sum_{i\in[m]} v_{j,i} x_{j,i} \leq T_j$。*(4)* 每位竞标者的出价参数都满足以下条件：即使他们可以决定在平局时获得的物品份额，提高出价参数也不会在不违反其 *tCPA* 约束的情况下增加其总价值。

## B.2 求解统一出价均衡的困难性

我们将计算 0-1（胜负型）双矩阵博弈的（近似）混合策略纳什均衡，归约为计算 tCPA 竞标者统一出价博弈的统一出价均衡。该归约的基本思路与预算受限拟线性竞标者的统一出价均衡求解困难性结果类似 [10]。然而，我们确实需要处理许多 tCPA 约束特有的难题。最值得注意的是，与出价参数至多为 1 的预算受限拟线性竞标者不同，tCPA 竞标者的出价没有自然的上界；当其 tCPA 约束不紧束时，出价参数可以任意高。

我们首先定义 0-1 双矩阵博弈以及该博弈的近似纳什均衡 .

**定义 7 (**0-1 双矩阵博弈 $\mathcal{G}(A, B)$)。 在 *0-1* 双矩阵博弈中，有两个玩家，双方各有 $n$ 个策略可供选择。玩家 *1* 的成本矩阵为 $A \in \{0,1\}^{n\times n}$，也就是说，如果玩家 *1* 选择第 $i$ 个策略，玩家 *2* 选择第 $j$ 个策略，那么玩家 *1* 的成本为 $A_{ij}$ 。类似地，玩家 *2* 的成本矩阵为 $B \in \{0,1\}^{n\times n}$，也就是说，如果玩家 *1* 选择第 $i$ 个策略，玩家 *2* 选择第 $j$ 个策略，那么玩家 *2* 的成本为 $B_{ij}$ 。

**定义 8** （$\varepsilon$-近似纳什均衡）。 在一个 *0-1* 双矩阵博弈 $\mathcal{G}$（*A, B*）中，假设玩家 *1* 采用混合策略 $x \in [0,1]^n$ *s.t.* $1^T x = 1$，玩家 *2* 采用混合策略 $y \in [0,1]^n$

*s.t.* $1^T y = 1$。那么，如果对所有满足 $1^T z = 1$ 的 $z \in [0,1]^n$，都有

$$x^T A y \le z^T A y + \varepsilon,$$
$$x^T B y \le x^T A z + \varepsilon.$$

已证明，为 0-1 双矩阵博弈寻找近似纳什均衡是 PPAD 困难的 [11]。

**引理 3** (Chen 等人 [11, 定理 6。1])。 对于任意常数 $c > 0$，为 *0-1* 双矩阵博弈寻找 $1/n^c$-近似纳什均衡是 *PPAD*-困难的。

现在，给定一个具有任意成本矩阵 $A$ 和 $B$ 的 0-1 双矩阵博弈 $\mathcal{G}(A, B)$，我们如下构造一个面向 tCPA 竞标者的统一出价博弈 $\mathcal{I}(A, B)$。

### B.2.1 困难实例 $\mathcal{I}(A, B)$的构造

**竞标者：** 对于每个玩家 $p \in \{1, 2\}$ 和每个策略 $s \in [n]$，我们引入两个 tCPA 竞标者$\mathcal{C}(p, s)$ 和 $\mathcal{D}(p, s)$。此外，我们还引入另外两个 tCPA 竞标者 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$。

物品：对于每个 $p \in \{1, 2\}$ 和每个 $s \in [n]$，我们构造一个高价物品 $H(p, s)$、一个低价物品 $L(p, s)$、一组归一化物品 $\{N(p, s)_i \mid i \in [n]\}$，以及一组分配给竞标者 $\mathcal{C}(p, s)$ 的支出物品$\{E(p, s)_i \mid i \in [n]\}$；此外，我们还为竞标者 $\mathcal{D}(p, s)$ 构造一个低价物品 $D(p, s)$。此外，我们还有一个供竞标者 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 使用的特殊物品 $T$，以及一个供竞标者 $\mathcal{T}_2$ 使用的低价物品$T_2$ 。

**估值：** 我们首先对估值进行非正式描述，然后给出形式化定义。设 $\delta_1 = 1/n^2$ 和 $\delta_2 = 1/n^4$。

> 竞标者 $\mathcal{C}(1, s)$ 对物品 $H(1, s)$ 和 $L(1, s)$ 具有较高价值（即 $n^3$），对其自身的归一化物品 $\{N(1, s)_i \mid i \in [n]$ 和 $i \neq s\}$ 具有中等价值（即 3），对其自身的支出物品 $\{E(1, s)_i \mid i \in [n]\}$、归一化物品 $N(1, s)_s$ 以及竞标者$\mathcal{C}(1, t)$的第 $s$ 个归一化物品 $N(1, t)_s$ 具有较低价值（即 1），而对竞标者 $\mathcal{C}(2, t)$ 的第 $s$ 个支出物品 $E(2, t)_s$ 的价值可忽略不计（即 $\delta_1 B_{st}$）。竞标者 $\mathcal{C}(2, s)$ 的估值与此类似。
>
> 另一方面，竞标者 $\mathcal{D}(1, s)$ 对竞标者$\mathcal{C}(1, s)$的第 $s$ 个归一化物品 $N(1, s)_s$ 的价值，与竞标者 $\mathcal{C}(1, s)$ 对该物品的价值相同（即 1），并且对自己的物品 $D(p, s)$ 的价值为 1。
> 竞标者 $\mathcal{T}_1$ 对竞标者 $\mathcal{C}(1, s)$的高价物品$H(1, s)$的价值，与竞标者 $\mathcal{C}(1, s)$ 对该物品的价值相同（即 $n^3$），并且对物品 $T$ 的价值为 1。竞标者 $\mathcal{T}_2$ 对物品 $T$ 的价值与竞标者 $\mathcal{T}_1$ 相同（即 1），并且对自己的物品 $T_2$ 的价值为 1。
> 形式上，我们用记号 $v$(竞标者,物品) 表示竞标者对某物品的价值。对于所有$p \in \{1, 2\}$、所有互不相同的 $s, t \in [n]$ 以及所有 $i \in [n]$，我们令

$$v(\mathcal{C}(p, s), N(p, s)_s) = 1,\ v(\mathcal{C}(p, s), N(p, s)_t) = 3$$
$$v(\mathcal{C}(p, s), N(p, t)_s) = 1,\ v(\mathcal{C}(p, s), E(p, s)_i) = 1,$$
$$v(\mathcal{C}(1, s), E(2, i)_s) = \delta_1 B_{si},\ v(\mathcal{C}(2, t), E(1, i)_t) = \delta_1 A_{it},$$
$$v(\mathcal{C}(p, s), H(p, s)) = n^3,\ v(\mathcal{C}(p, s), L(p, s)) = n^3,$$
$$v(\mathcal{D}(p, s), D(p, s)) = 1,\ v(\mathcal{D}(p, s), N(p, s)_s) = 1.$$

此外，对于所有 $p \in \{1,2\}$ 和 $s \in [n]$，我们令 $v(\mathcal{T}_1, H(p,s)) = n^3$，并令 $v(\mathcal{T}_1, T) = v(\mathcal{T}_2, T) = v(\mathcal{T}_2, T_2) = 1$。对于任何其他未在上文出现的（竞标者,物品）对，$v$(竞标者,物品) =0。

**tCPA：** 竞标者 $\mathcal{T}_1$ 的 tCPA 为 1，竞标者 $\mathcal{T}_2$ 的 tCPA 为 $\delta_2$。对于所有 $p \in \{1,2\}$ 和 $s \in [n]$，竞标者 $\mathcal{D}(p, s)$ 的 tCPA 为 $\delta_2$，并且

$$\text{bidder } \mathcal{C}(1,s)\text{'s tCPA} = \frac{n^3 + n + \delta_1 \sum_{t\in[n]} A_{st} + 3/2}{2n^3 + 4n - 2},$$
$$\text{bidder } \mathcal{C}(2,s)\text{'s tCPA} = \frac{n^3 + n + \delta_1 \sum_{t\in[n]} B_{ts} + 3/2}{2n^3 + 4n - 2}.$$

### B.2.2 困难性证明

**定理 9.** 对于 *tCPA* 竞标者的统一出价博弈，寻找统一出价均衡是 *PPAD*-困难的。

我们通过证明以下事实来证明定理 9：若能为困难实例 $\mathcal{I}(A, B)$ 找到一个统一出价均衡，那么也能为 0-1 双矩阵博弈 $\mathcal{G}(A, B)$ 找到一个 $O(1/n)$-近似纳什均衡（由引理 3 可推出该定理）。我们将该定理的证明分解为一系列引理。

**引理 4.** 在 $\mathcal{I}(A, B)$ 的任意统一出价均衡中，对于所有 $p \in \{1,2\}$ 和 $s \in [n]$，竞标者$\mathcal{C}(p, s)$ 的出价参数至少为 1。

证明。 假设竞标者 $\mathcal{C}(p, s)$ 的出价参数严格小于 1，从而导出矛盾。那么，竞标者 $\mathcal{C}(p, s)$ 不会获得物品 $H(p, s)$ 的任何份额，因为竞标者 $\mathcal{T}_1$ 对物品 $H(p, s)$ 的价值与竞标者 $\mathcal{C}(p, s)$ 相同，而竞标者 $\mathcal{T}_1$ 的出价参数至少等于竞标者 $\mathcal{T}_1$ 的目标每次转化成本，即 1。现在我们来求竞标者 $\mathcal{C}(p, s)$ 的每次转化成本（CPA，即竞标者的总支付额除以其总价值）的上界。

首先，竞标者 $\mathcal{C}(p, s)$ 获得的总价值至少等于物品 $L(p, s)$ 的价值，即$n^3$，因为除了 $\mathcal{C}(p, s)$ 之外，没有人对 $L(p, s)$ 具有正价值，因此 $\mathcal{C}(p, s)$ 总能免费赢得$L(p, s)$。

此外，竞标者 $\mathcal{C}(p, s)$ 的总支付额至多为 $\mathcal{C}(p, s)$ 的出价参数乘以 $\mathcal{C}(p, s)$ 对除 $H(p, s)$ 和 $L(p, s)$ 之外物品的总价值，因为 $\mathcal{C}(p, s)$ 不会获得 $H(p, s)$ 的任何份额，并且可以免费获得 $L(p, s)$。根据 $\mathcal{I}(A, B)$ 的构造，很容易验证， $\mathcal{C}(p, s)$ 对除 $H(p, s)$ 和 $L(p, s)$ 之外物品的总价值小于 $5n$。由于我们假设 $\mathcal{C}(p, s)$ 的出价参数小于 1，从而导出矛盾，因此 $\mathcal{C}(p, s)$ 的总支付额小于 $5n$。

因此，竞标者 $\mathcal{C}(p, s)$ 的每次转化成本低于 $5n/n^3$，远低于 $\mathcal{C}(p, s)$ 的目标每次转化成本。接下来，我们证明这与定义 6 的第四条性质矛盾。具体而言，我们可以先不失一般性地假设竞标者 $\mathcal{C}(p, s)$ 对任何物品都不处于平局，因为否则 $\mathcal{C}(p, s)$ 可以将出价参数提高任意小的幅度，使 $\mathcal{C}(p, s)$ 获得与 $\mathcal{C}(p, s)$ 竞价打平的完整物品，而 $5n$ 仍是 $\mathcal{C}(p, s)$ 总支付额的上界（理由与前面相同），这与定义 6 的第四条性质矛盾。然后，我们注意到存在一些竞标者 $\mathcal{C}(p, s)$ 具有正价值的物品，例如 $H(p, s)$。因此，如果 $\mathcal{C}(p, s)$ 提高

出价参数，直到 $\mathcal{C}(p,\ s)$ 首次与一个新物品竞价打平，且 $\mathcal{C}(p,\ s)$ 对该物品具有正价值，那么由于 $\mathcal{C}(p,\ s)$ 已经以远低于 $\mathcal{C}(p,\ s)$ 目标每次转化成本的每次转化成本获得了正价值，$\mathcal{C}(p,\ s)$ 至少能够负担该新物品的一部分（这与定义 6 的第四条性质矛盾）。

□

**引理 5.** 在 $\mathcal{I}(A,B)$的任何统一出价均衡中，竞标者 $\mathcal{T}_2$ 的出价参数等于竞标者 $\mathcal{T}_1$ 的出价参数；对于所有 $p\in\{1,2\}$ 和 $s\in[n]$，竞标者 $\mathcal{D}(p,s)$ 的出价参数等于竞标者 $\mathcal{C}(p,s)$ 的出价参数。

证明。 首先，我们证明，在统一出价均衡中，竞标者 $\mathcal{T}_2$的出价参数等于竞标者 $\mathcal{T}_1$ 的出价参数。注意，除了竞标者 $\mathcal{T}_2$ 以外，没有人对物品 $T_2$ 有正价值，因此，$\mathcal{T}_2$ 可以免费获得价值为 1 的 $T_2$，这使得 $\mathcal{T}_2$ 无论物品 $T$ 的价格是多少，都能负担其一定份额，因为竞标者 $\mathcal{T}_2$ 的目标每次转化成本为正。由于竞标者 $\mathcal{T}_2$对物品 $T$ 的价值（即 1）与竞标者 $\mathcal{T}_1$ 相同，并且总能负担 $T$的一定份额，根据定义 6 中的第四条性质，在统一出价均衡中，$\mathcal{T}_2$的出价参数应不小于 $\mathcal{T}_1$的出价参数。另一方面，如果 $\mathcal{T}_2$的出价参数严格大于 $\mathcal{T}_1$的出价参数（后者至少为 1），那么 $\mathcal{T}_2$ 将以至少为 1 的价格赢得完整物品 $T$，由此可知，$\mathcal{T}_2$的每次转化成本至少为 $1/2$，远高于 $\mathcal{T}_2$的目标每次转化成本（即 $\delta_2$）。因此，$\mathcal{T}_2$ 的出价参数不大于（故而等于）$\mathcal{T}_1$ 的出价参数。

竞标者 $\mathcal{D}(p,s)$ 与竞标者 $\mathcal{C}(p,s)$ 的出价参数等价性的证明与前述证明类似。具体而言，$\mathcal{D}(p,s)$ 同样拥有一个价值为 1 的免费物品 $D(p,s)$，且 $\mathcal{D}(p,s)$ 也有一个为正但极小的目标每次转化成本（即 $\delta_2$），因此，$\mathcal{D}(p,s)$ 能够负担物品 $N(p,s)_s$ 的一定份额。注意，$\mathcal{D}(p,s)$ 和 $\mathcal{C}(p,s)$ 对物品 $N(p,s)_s$ 的价值相同（即 1），并且 $\mathcal{C}(p,s)$ 的出价参数不小于 $\mathcal{C}(p,s)$ 的目标每次转化成本（$\approx 1/2$）。其余证明与上文对竞标者 $\mathcal{T}_2$ 和竞标者 $\mathcal{T}_1$ 的证明相同。 □

**引理 6.** 在 $\mathcal{I}(A,B)$ 的任何统一出价均衡中，竞标者 $\mathcal{T}_1$ 的出价参数为 $1$。

证明。 $\mathcal{T}_1$ 的出价参数至少为 1，因为 $\mathcal{T}_1$ 的目标每次转化成本为 1。只需证明 $\mathcal{T}_1$ 的出价参数至多为 1。

现在假设，为了导出矛盾，竞标者 $\mathcal{T}_1$ 的出价参数严格大于 1。在引理 5 的证明中，我们已经证明，竞标者 $\mathcal{T}_2$ 的出价参数等于 $\mathcal{T}_1$ 的出价参数，并且 $\mathcal{T}_2$ 无力购买完整物品 $T$。因此，根据定义 6 的第二个性质，$\mathcal{T}_1$ 必须获得 $T$ 的一部分，而 $\mathcal{T}_1$ 为 $T$ 支付的每单位价值的支付恰好等于 $\mathcal{T}_1$ 的出价参数；根据我们的反证假设，该参数严格大于 1。此外，对于所有 $p\in\{1,2\}$ 和 $s\in[n]$，(i) 根据引理 4，竞标者 $\mathcal{C}$（$p$，$s$）的出价参数至少为 1；(ii) 根据 $\mathcal{I}$（$A$，$B$）的构造，竞标者 $\mathcal{T}_1$ 对物品 $H$（$p$，$s$）的价值与竞标者 $\mathcal{C}$（$p$，$s$）相同。因此，对于任意 $p\in\{1,2\}$ 和 $s\in[n]$，如果竞标者 $\mathcal{T}_1$ 赢得物品 $H$（$p$，$s$）的任何一部分，那么 $\mathcal{T}_1$ 为 $H$（$p$，$s$）支付的每单位价值的支付至少为 1。综上，竞标者 $\mathcal{T}_1$ 的每次转化成本严格大于 1，因而违反了 $\mathcal{T}_1$ 的目标每次转化成本，这就产生了矛盾。

□

**引理 7**。 在任何统一出价均衡中，对于所有 $p\in\{1,2\}$ 和 $s\in[n]$，竞标者 $\mathcal{C}(p,s)$ 至少赢得物品 $N(p,s)_s$ 的 $1-2\delta_2$ 份额。

证明。 竞标者 $\mathcal{C}(p,\ s)$ 和竞标者 $\mathcal{D}(p,\ s)$ 在物品 $N(p,\ s)_s$ 上打成平局，因为根据引理 5，他们对该物品的价值均为 1，且出价参数相同。因此，物品 $N(p,\ s)_s$ 的每单位价值的支付等于 $\mathcal{C}(p,\ s)$ 的出价参数，即 $\geq 1$。由于竞标者获得的唯一其他物品

$\mathcal{D}(p,\ s)$ 获得的是 $D(p,\ s)$（价值为 1 且成本为零），而 $\mathcal{D}(p,\ s)$ 的目标每次转化成本为 $\delta_2$，因此通过直接计算可知，$\mathcal{D}(p,\ s)$ 最多只能负担物品 $N(p,\ s)_s$ 的 $2\delta_2$ 份额。根据定义 6 中的第二个性质，$\mathcal{C}(p,\ s)$ 至少赢得 $N(p,\ s)_s$ 的 $1-2\delta_2$ 份额。 □

**引理 8**。 在 $\mathcal{I}(A,B)$的任何统一出价均衡中，对于所有 $p\in\{1,2\}$ 和 $s\in[n]$，竞标者$\mathcal{C}(p,s)$的出价参数都严格小于3。

证明。 我们证明竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 的情形（竞标者 $\mathcal{C}(2,s)$ 的情形类似）。反设竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 的出价参数至少为 3，我们将证明 $\mathcal{C}(1,s)$ 的目标每次转化成本必定被违反。为此，我们计算 $\mathcal{C}(1,s)$ 获得的总价值以及 $\mathcal{C}(1,s)$ 支付的总支付额。

首先，竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 是唯一对物品 $L(1,s)$ 具有正价值的竞标者。因此，竞标者$\mathcal{C}(1,s)$ 从物品 $L(1,s)$ 获得价值 $n^3$，且无需付款。

注意，竞标者 $\mathcal{T}_1$ 与竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 对物品 $H(1,s)$ 的价值相同，均为 $n^3$。根据引理 6，竞标者 $\mathcal{T}_1$ 的出价参数为 1，严格小于竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 的出价参数（$\geq 3$），因此，竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 赢得完整物品 $H(1,s)$，支付 $n^3$，并获得价值 $n^3$。

竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 和竞标者 $\mathcal{D}(1,s)$ 对物品 $N(1,s)_s$具有相同的价值 1。引理 5 表明，竞标者 $\mathcal{D}(1,s)$ 的出价参数等于竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 的出价参数（$\geq 3$）。因此，物品 $N(1,s)_s$ 的单位价值价格至少为 3。根据引理 7，$\mathcal{C}(1,s)$获得物品 $N(1,s)_s$的至少$1-2\delta_2$份额，因此为 $N(1,s)_s$的该份额至少支付 3（$1-2\delta_2$）。也就是说，$\mathcal{C}(1,s)$从 $N(1,s)_s$ 获得的价值最多为 1（因为 $\mathcal{C}(1,s)$对完整物品 $N(1,s)_s$的价值为 1），但至少支付 3（$1-2\delta_2$）。

竞标者 $\mathcal{C}(1,\ s)$具有正价值的其他物品是 $\{E(1,\ s)_t \mid t\in[n]\}$, $\{N(1,\ s)_t \mid t\in[n]$ 以及 $t\neq s\}$, $\{E(2,\ t)_s \mid t\in[n]\}$ 和 $\{N(1,\ t)_s \mid t\in[n]$ 以及 $t\neq s\}$。

由于竞标者 $\mathcal{C}(2,t)$对物品 $E(1,s)_t$的价值为 $\delta_1 A_{st}$，且根据引理 4 $\mathcal{C}(2,t)$ 的出价参数至少为 1，如果竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$赢得完整物品 $E(1,s)_t$，其付款 $\mathcal{C}(1,s)$至少为 $\delta_1 A_{st}$。对于 $t\neq s$ 和 $t\in[n]$，由于竞标者 $\mathcal{C}(1,t)$ 对物品 $N(1,s)_t$的价值为 1，且根据引理 4，$\mathcal{C}(1,t)$ 的出价参数至少为 1，如果竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$赢得完整物品 $N(1,s)_t$，其付款 $\mathcal{C}(1,s)$至少为 1。我们可以不失一般性地假设，$\mathcal{C}(1,s)$以付款 $\delta_1 A_{st}$ 赢得每个 $t\in[n]$ 的 $E(1,s)_t$ 的全部价值（即 1），并以付款 1 赢得每个 $t\neq s$的 $N(1,s)_t$ 的全部价值（即 3），因为对于这些物品而言，这是 $\mathcal{C}(1,s)$所能期待的最佳价值付款比，而且这些价值付款比远低于 $\mathcal{C}(1,s)$的目标每次转化成本（$\approx 1/2$）。也就是说，如果 $\mathcal{C}(1,s)$的每次转化成本不超过 $\mathcal{C}(1,s)$的目标每次转化成本，那么将物品 $\{E(1,s)_t \mid t\in[n]\}$ 和$\{N(1,s)_t \mid t\in[n]$ 以及 $t\neq s\}$ 交给 $\mathcal{C}(1,s)$，并按上述价值付款比收取费用，就不会违反$\mathcal{C}(1,s)$的目标每次转化成本。因此，不失一般性地，竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$从物品 $\{E(1,s)_t \mid t\in[n]\}$和 $\{N(1,s)_t \mid t\in[n]$ 以及 $t\neq s\}$ 中获得价值 $4n-3$，并支付 $\sum_{t\in[n]}\delta_1 A_{st}+n-1$。

另一方面，由于竞标者 $\mathcal{C}(2,t)$ 对物品 $E(1,t)_s$ 的价值为 1，而竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 对该物品的价值为 $\delta_1 B_{st}$，根据引理 4 $\mathcal{C}(2,t)$，其出价参数至少为 1；因此，如果竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 赢得物品 $E(1,t)_s$ 的任何份额，其支付的每单位价值的支付 $\mathcal{C}(1,s)$ 至少为 $1/(\delta_1 B_{st})$（或者，当 $B_{st}=0$ 时，竞标者$\mathcal{C}(1,s)$ 永远不会赢得该物品的任何份额）。对于 $t\neq s$ 和 $t\in[n]$，由于竞标者 $\mathcal{C}(1,t)$ 对物品 $N(1,t)_s$ 的价值为 3，而竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 对该物品的价值为 1，并且根据引理 4，$\mathcal{C}(1,t)$ 的出价参数至少为 1，因此，如果竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 赢得物品 $N(1,t)_s$ 的任何份额，其支付的每单位价值的支付 $\mathcal{C}(1,s)$ 至少为 3。注意，这些物品的每单位价值的支付都远高于 $\mathcal{C}(1,s)$ 的目标每次转化成本，因此，不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{C}(1,s)$ 不会赢得这些物品的任何份额。也就是说，如果竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 的每次转化成本不超过 $\mathcal{C}(1,s)$ 的目标每次转化成本，那么将物品$\{E(2,t)_s \mid t\in[n]\}$ 和 $\{N(1,t)_s \mid t\in[n]$ 以及 $t\neq s\}$ 从竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 手中拿走，不会违反

$\mathcal{C}(1,\ s)$ 的目标每次转化成本。因此，不失一般性，竞标者 $\mathcal{C}(1,\ s)$ 从物品 $\{E(2,\ t)_s \mid t \in [n]\}$和 $\{N(1,\ t)_s \mid t \in [n]$ 以及 $t \neq s\}$ 中获得的价值为零，且付款为零。

在上文每段的结尾，我们都说明了竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 从不同物品获得的价值及相应的付款。总而言之，竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 的总价值至多为 $2n^3+4n-2$，总支付额至少为 $n^3+3(1-2\delta_2)\ +\sum_{t\in[n]}\delta_1 A_{st}+n-1$。因此，$\mathcal{C}(1,s)$ 的每次转化成本高于 $\mathcal{C}(1,s)$ 的目标每次转化成本，这就导致了矛盾。

□

**引理 9**。在任何统一出价均衡中，对于所有 $p \in \{1,2\}$，都存在 $s \in [n]$，使得竞标者 $\mathcal{C}(p,s)$的出价参数严格大于 $1+1/n$。

证明。我们对 $p=1$ 证明该引理（$p=2$ 的情形类似）。反设对于所有 $s\in[n]$，竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 的出价参数都属于 $[1,1+1/n]$（根据引理 4，我们知道该参数至少为 1），下面我们给出竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 每次转化成本的上界。

首先，竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 免费获得物品 $L(1,s)$，因为该物品不存在竞争。此外，竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 可以获得物品 $H(p,s)$ 的一部分，因为 $\mathcal{C}(1,s)$ 和 $\mathcal{T}_1$ 对该物品的价值相同，而且根据引理 6 $\mathcal{T}_1$，其出价参数为 1，不高于 $\mathcal{C}(1,s)$ 的出价参数。令 $\tau\in[0,1]$ 表示竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 赢得的物品 $H(p,s)$ 的份额，因此 $\mathcal{C}(1,s)$ 从 $H(p,s)$ 获得价值 $\tau n^3$，并支付 $\tau n^3$。此外，对于每个 $t\in[n]$，竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 都能获得完整物品 $E(1,s)_t$，且支付不超过 $3\delta_1 A_{st}$，因为竞标者 $\mathcal{C}(2,t)$ 对该物品的价值为 $\delta_1 A_{st}$，而根据引理 8，$\mathcal{C}(2,t)$ 的出价参数小于 3。对于每个 $t\in[n]$ 和 $t\neq s$，竞标者$\mathcal{C}(1,s)$ 都能获得完整物品 $N(1,s)_t$，且支付不超过 $1+1/n$，因为竞标者 $\mathcal{C}(1,t)$ 对该物品的价值为 1，而根据我们的假设，$\mathcal{C}(1,t)$ 的出价参数为 $\leq 1+1/n$。最后，根据引理 7，$\mathcal{C}(1,s)$ 赢得至少 $1-2\delta_2$ 份额的 $N(1,s)_s$，且支付不超过 $1+1/n$（因为 $\mathcal{C}(1,s)$ 的出价参数乘以 $\mathcal{C}(1,s)$ 对完整物品 $N(1,s)_s$ 的价值，等于 $\leq 1+1/n$）。此外，容易验证，当出价参数为 $\leq 1+1/n$ 时，竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 无法获得物品 $\{E(2,t)_s \mid t\in[n]\}$、$\{N(1,t)_s \mid t\in[n]$ 和 $t\neq s\}$的任何份额。

总而言之，竞标者 $\mathcal{C}(1,\ s)$ 获得的总价值至少为 $(1+\tau)n^3+4n-2-2\delta_2$，且总支付额至多为 $\tau n^3+(n-1)(1+1/n)\ +\sum_{t\in[n]}3\delta_1 A_{st}+1$。因此，竞标者 $\mathcal{C}(1,\ s)$ 的 CPA 上界在 $\tau=1$ 时达到最大值，且最大值为

$$\frac{n^3+n-1/n+\sum_{t\in[n]}3\delta_1 A_{st}+1}{2n^3+4n-2-2\delta_2},$$

该值严格小于 $\mathcal{C}(1,\ s)$ 的目标每次转化成本。因此，如果 $\mathcal{C}(1,\ s)$ 提高出价参数，直到 $\mathcal{C}(1,\ s)$ 首次与某个新物品出价相同（这样的物品确实存在，例如 $\{N(1,\ t)_s \mid t\in[n]$ 和 $t\neq s\}$），$\mathcal{C}(1,\ s)$ 就能购买该物品的一部分，这与定义 6 的第四个性质矛盾。（可能有人会注意到，提高 $\mathcal{C}(1,\ s)$ 的出价参数会打破 $N(1,\ s)_s$与 $\mathcal{C}(1,\ s)$ 和 $\mathcal{D}(1,\ s)$ 之间在该物品上的平局，但这并不构成问题，因为在上述计算 $\mathcal{C}(1,\ s)$ 总支付额上界时，我们已将 $N(1,\ s)_s$完整物品的付款计入。）

□

现在，我们令 $\tilde{x}_s$ 表示统一出价均衡中竞标者 $\mathcal{C}(1,\ s)$ 的出价参数，并令 $\tilde{y}_t$ 表示竞标者 $\mathcal{C}(2,\ t)$ 的出价参数。我们定义概率向量 $x=(x_1,\ .....,\ x_n)$，它对应于双矩阵博弈 $\mathcal{G}(A,\ B)$ 中玩家 1 的混合策略；另定义概率向量 $y=(y_1,\ .....,\ y_n)$，它对应于玩家 2 的混合策略，具体如下

$$x_s=\frac{\tilde{x}_s-1}{\sum_{i\in[n]}(\tilde{x}_i-1)},\ y_t=\frac{\tilde{y}_t-1}{\sum_{i\in[n]}(\tilde{y}_i-1)}.$$

注意，$x$ 是一个有效的概率向量，因为对于所有 $i \in [n]$，根据引理 4，$\tilde{x}_i \geq 1$；并且根据引理 9，存在 $i \in [n]$ 使得 $\tilde{x}_i > 1$。类似地，$y$ 也是一个有效的概率向量。下一个引理说明，$(x, y)$ 是 $\mathcal{G}(A, B)$ 的 $O(1/n)$-近似纳什均衡。这证明了定理 9，因为显然可以根据 $\mathcal{I}(A, B)$ 的统一出价均衡，高效地计算出 $(x, y)$；而根据引理 3，一般情况下，寻找 $\mathcal{G}(A, B)$ 的 $O(1/n)$-近似纳什均衡是 PPAD 难题。

**引理 10**。对于所有 $s \in [n]$，如果竞标者 $\mathcal{C}(1, s)$ 的出价参数 $\tilde{x}_s$ 严格大于 1，那么第 $s$ 个策略是玩家 1 对玩家 *2* 在 *0-1* 双矩阵博弈 $\mathcal{G}(A, B)$ 中的混合策略 $y$ 的 $O(1/n)$ 近似最佳响应[10]。类似地，如果竞标者 $\mathcal{C}(2, t)$ 的出价参数 $\tilde{y}_t$ 严格大于 1，那么第 $t$ 个策略是玩家 2 对玩家 *1* 在 $\mathcal{G}(A, B)$ 中的混合策略 $x$ 的 $O(1/n)$ 近似最佳响应。

证明。我们证明引理的第一部分，即如果 $\tilde{x}_s > 1$，那么第 $s$ 个策略是对 $y$ 的 $O(1/n)$ 近似最佳响应。（另一部分的证明类似。）形式化地说，我们要证明对于所有 $s' \in [n]$ 和 $s' \neq s$，$\sum_{t\in[n]} A_{st} y_t \leq \sum_{t\in[n]} A_{s't} y_t + O(1/n)$。根据 $y_t$ 的定义，这个不等式等价于

$$\sum_{t\in[n]} A_{st}(\tilde{y}_t - 1) \leq \sum_{t\in[n]} A_{s't}(\tilde{y}_t - 1) + O(1/n) \sum_{i\in[n]} (\tilde{y}_i - 1).$$

根据引理 4 和引理 9，$\sum_{i\in[n]}(\tilde{y}_i - 1)$至少为 $1/n$。因此，只需证明对于所有$s' \in [n]$ 和 $s' \neq s$，

$$\sum_{t\in[n]} A_{st}(\tilde{y}_t - 1) \leq \sum_{t\in[n]} A_{s't}(\tilde{y}_t - 1) + O(1/n^2). \tag{14}$$

首先，我们证明，对于所有 $i \in [n]$，不失一般性地，竞标者 $\mathcal{C}(1, i)$的 tCPA 必须是紧束的。具体而言，根据引理 8，竞标者 $\mathcal{C}(1, i)$的出价参数小于 3，这意味着 $\mathcal{C}(1, i)$无法获得物品 $\{N(1, t)_i \mid t \in [n] \text{ 和 } t \neq i\}$的任何份额。然而，如果 $\mathcal{C}(1, i)$的 tCPA 不是紧束的，$\mathcal{C}(1, i)$就可以提高出价参数，并负担得起这些物品的部分份额，这与定义 6 中的第四条性质矛盾。唯一的例外是，$\mathcal{C}(1, i)$可能因为与竞标者 $\mathcal{D}(1, i)$打平（或者在与竞标者 $\mathcal{T}_1$打平时，与物品 $H(p, s)$打平），而只赢得了物品 $N(1, i)_i$的一部分；此时，提高出价参数可能会违反 $\mathcal{C}(1, i)$的 tCPA 约束，前提是 $\mathcal{C}(1, i)$负担不起完整物品。然而，在这种情况下，我们只需增加 $\mathcal{C}(1, i)$在统一出价均衡的分配向量中获得的物品 $N(1, i)_i$（或相应地，$H(p, s)$）的份额，并减少 $\mathcal{D}(1, i)$（或相应地，$\mathcal{T}_1$）获得的份额，直到 $\mathcal{C}(1, i)$的 tCPA 成为紧束的；此时结果仍是统一出价均衡。因此，

$$\text{bidder } \mathcal{C}(1, s)\text{'s CPA} = \text{bidder } \mathcal{C}(1, s)\text{'s tCPA} = \frac{n^3 + n + \delta_1 \sum_{t\in[n]} A_{st} + 3/2}{2n^3 + 4n - 2},$$
$$\text{bidder } \mathcal{C}(1, s')\text{'s CPA} = \text{bidder } \mathcal{C}(1, s')\text{'s tCPA} = \frac{n^3 + n + \delta_1 \sum_{t\in[n]} A_{s't} + 3/2}{2n^3 + 4n - 2}.$$

由此可得

$$\text{bidder } \mathcal{C}(1, s)\text{'s CPA} - \text{bidder } \mathcal{C}(1, s')\text{'s CPA} = \frac{\sum_{t\in[n]} \delta_1 A_{st} - \sum_{t\in[n]} \delta_1 A_{s't}}{2n^3 + 4n - 2}. \tag{15}$$

[10]如果某个纯策略的期望成本至多比其他任意纯策略的期望成本高出 $\varepsilon$，我们就称该纯策略是对另一位玩家混合策略的 $\varepsilon$-近似最佳响应。

接下来，我们分别计算竞标者 $\mathcal{C}(1,\ s)$ 和竞标者 $\mathcal{C}(1,\ s')$ 的总支付额和总价值，从而得到他们每次转化成本的不同界限。

首先，对于任意 $i \in [n]$ （包括 $s$ 和 $s'$），由于除 $\mathcal{C}(1,i)$ 外，只有竞标者 $\mathcal{C}(1,t)$ 对物品 $N(1,i)$ 出价 $\tilde{x}_t$ （$\tilde{x}_t$ 是 $\mathcal{C}(1,t)$ 的出价参数，而 1 是 $\mathcal{C}(1,t)$ 对 $N(1,i)$ 的价值），并且根据引理 8，$\tilde{x}_t < 3$ （它小于竞标者 $\mathcal{C}(1,i)$ 的出价 $3\tilde{x}_i \geq 3$），可知竞标者 $\mathcal{C}(1,i)$ 赢得所有物品 $\{N(1,i)_t \mid t \in [n]$，并支付 $\sum_{t\in[n]}$ 和 $_{t\neq i}\tilde{x}_t\ t \neq i\}$。此外，根据引理 7，竞标者 $\mathcal{C}(1,i)$ 赢得 $N(1,i)$ 的至少 $1-2\delta_2$ 份额$_i$（至多为完整物品）；又由于竞标者 $\mathcal{C}(1,i)$ 和 $\mathcal{D}(1,i)$ 根据引理 5 具有相同的出价参数，且对 $N(1,i)$ 的价值均为 $1_i$，因此 $\mathcal{C}(1,i)$ 为 $N(1,i)$ 支付至少 $\tilde{x}_i(1-2\delta_2)$，至多 $\tilde{x}_{ii}$。此外，由于除 $\mathcal{C}(1,i)$ 外，只有竞标者 $\mathcal{C}(2,t)$ 对物品 $E(1,i)$ 出价 $\tilde{y}_t\delta_1 A_{it}\,_t$（$\tilde{y}_t$ 是 $\mathcal{C}(2,t)$ 的出价参数，而 $\delta_1 A_{it}$ 是 $\mathcal{C}(2,t)$ 对 $E(1,i)$ 的价值$_t$），并且根据引理 8，$\tilde{y}_t\delta_1 A_{it} < 3\delta_1 A_{it}$（它小于竞标者$\mathcal{C}(1,i)$ 对 $E(1,i)$ 的出价 $\tilde{x}_i \geq 1\,_t$），可知竞标者 $\mathcal{C}(1,i)$ 赢得所有物品 $\{E(1,i)_t \mid t \in [n]\}$，并支付 $\sum_{t\in[n]}\delta_1 A_{it}\tilde{y}_t$。此外，由于该物品没有竞争，竞标者 $\mathcal{C}(1,i)$ 免费赢得物品 $L(1,i)$。另外，容易验证，竞标者$\mathcal{C}(1,i)$ 使用出价参数 $<3$ 时，无法获得物品 $\{E(2,t)_i \mid t \in [n]\}$、$\{N(1,t)_i \mid t \in [n]$ 和 $t \neq i\}$ 的任何份额。

最后，我们计算 $\mathcal{C}(1,i)$ 对物品 $H(1,i)$ 的价值和成本。为此，我们需要对 $s$ 和 $s'$ 进行分类讨论（因为尽管根据我们的假设，竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 的出价参数为 $\tilde{x}_s > 1$，竞标者 $\mathcal{C}(1,s')$ 的出价参数 $\tilde{x}_{s'}$ 可能为 $>1$，也可能恰好为 1）。由于除了 $\mathcal{C}(1,s)$ 之外，只有 $\mathcal{T}_1$ 在物品 $H(1,s)$ 上出价 $n^3$（$n^3$ 是 $\mathcal{T}_1$ 对 $H(1,s)$ 的价值，而根据引理 6，1 是 $\mathcal{T}_1$ 的出价参数），因此 $\mathcal{C}(1,s)$ 以 $n^3$ 的价格赢得 $H(1,s)$。类似地，$\mathcal{T}_1$ 也在物品 $H(1,s')$ 上出价 $n^3$。然而，由于 $\tilde{x}_{s'}$ 可能为 $>1$，也可能恰好为 1，我们只能确定竞标者 $\mathcal{C}(1,s')$ 至少赢得物品 $H(1,s')$ 的一部分。令 $\tau$ 表示 $H(1,s')$ 中由 $\mathcal{C}(1,s')$ 赢得的份额，则 $\mathcal{C}(1,s')$ 为该物品支付 $\tau n^3$。

总之，竞标者 $\mathcal{C}(1,s)$ 获得的总价值至多为 $2n^3+4n-2$，且总支付额至少为 $n^3+\sum_{t\in[n]}\tilde{x}_t - 2\delta_2\tilde{x}_s + \sum_{t\in[n]}\delta_1 A_{st}\tilde{y}_t$。因此，

$$\begin{aligned}\text{bidder } \mathcal{C}(1,s)\text{'s CPA} &\geq \frac{n^3+\sum_{t\in[n]}\tilde{x}_t - 2\delta_2\tilde{x}_s + \sum_{t\in[n]}\delta_1 A_{st}\tilde{y}_t}{2n^3+4n-2}\\ &= \frac{n^3+\sum_{t\in[n]}\tilde{x}_t + \sum_{t\in[n]}\delta_1 A_{st}\tilde{y}_t - O(\delta_2)}{2n^3+4n-2}.\end{aligned}$$

竞标者 $\mathcal{C}(1,\ s')$获得的总价值至少为 $(1+\tau)\ n^3+4n-2-2\delta_2$，且总支付额至多为 $(1+\tau)\ n^3+\sum_{t\in[n]}\tilde{x}_t + \sum_{t\in[n]}\delta_1 A_{s't}\tilde{y}_t$。因此，

$$\begin{aligned}\text{bidder } \mathcal{C}(1,s')\text{'s CPA} \leq& \frac{\tau n^3+\sum_{t\in[n]}\tilde{x}_t + \sum_{t\in[n]}\delta_1 A_{s't}\tilde{y}_t}{(1+\tau)n^3+4n-2-2\delta_2}\\ \leq& \frac{n^3+\sum_{t\in[n]}\tilde{x}_t + \sum_{t\in[n]}\delta_1 A_{s't}\tilde{y}_t}{2n^3+4n-2-2\delta_2}\\ &\text{(because the first upper bound is maximized when } \tau=1)\\ =& \frac{n^3+\sum_{t\in[n]}\tilde{x}_t + \sum_{t\in[n]}\delta_1 A_{s't}\tilde{y}_t}{2n^3+4n-2}\cdot\left(1+\frac{2\delta_2}{2n^3+4n-2-2\delta_2}\right)\\ =& \frac{n^3+\sum_{t\in[n]}\tilde{x}_t + \sum_{t\in[n]}\delta_1 A_{s't}\tilde{y}_t + O(\delta_2)}{2n^3+4n-2}.\end{aligned}$$

结合竞标者 $\mathcal{C}(1,\ s)$ 的每次转化成本下界和竞标者 $\mathcal{C}(1,\ s')$ 的每次转化成本上界，我们得到

$$\text{bidder } \mathcal{C}(1,s)\text{'s CPA} - \text{bidder } \mathcal{C}(1,s')\text{'s CPA} \geq \frac{\sum_{t\in[n]} \delta_1 A_{st}\tilde{y}_t - \sum_{t\in[n]} \delta_1 A_{s't}\tilde{y}_t - O(\delta_2)}{2n^3+4n-2}. \quad (16)$$

将方程 (15) 和方程 (16) 合并可得

$$\sum_{t\in[n]} \delta_1 A_{st}\tilde{y}_t - \sum_{t\in[n]} \delta_1 A_{s't}\tilde{y}_t - O(\delta_2) \leq \sum_{t\in[n]} \delta_1 A_{st} - \sum_{t\in[n]} \delta_1 A_{s't},$$

这意味着

$$\sum_{t\in[n]} A_{st}(\tilde{y}_t - 1) - \sum_{t\in[n]} A_{s't}(\tilde{y}_t - 1) \leq O(\delta_2/\delta_1) = O(1/n^2).$$

这正是方程 (14)，证明完毕。 □

# C 无政府价格上界的证明

定理 4 的证明。 我们将构造两个实例，使得第一个实例满足 $PoA = O(1/\log(T_{max}/T_{min}))$，第二个实例满足 $PoA = O(1/\log(\beta_{max}/\beta_{min}))$。从这两个实例中选取上界较差的那个（取决于 $T_{max}/T_{min}$ 和 $\beta_{max}/\beta_{min}$ 中哪个更大），即可得出该定理。令 $\varepsilon = \frac{1}{8^n}$。

*tCPA* 实例。 **竞标者：** 有一个 tCPA竞标者 $j_2$，其目标每次转化成本为 1；还有另一组 tCPA竞标者 $J_1 := \bigcup_{\ell\in[n]} J_1^\ell$，其中 $J_1^\ell$ 包含 $2^{n-\ell}$ 个 tCPA竞标者，每个竞标者的目标每次转化成本为 $2^\ell$，对应每个 $\ell \in [n]$。此外，还有两个 QL竞价者 $q_1$ 和 $q_2$。

**渠道：** 有两个渠道 $k_1$ 和 $k_2$。渠道 $k_2$ 仅拥有一个展示 $i_2$，该展示对竞标者 $j_2$ 的价值为 1，对其他所有人的价值均为 0。渠道 $k_1$ 拥有展示 $\{i_1, i_1'\} \cup \{i_1^j \mid j \in J_1\}$。展示 $i_1$ 对竞标者 $j_2$的价值为 $1-2\varepsilon$，对竞标者 $q_1$的价值为 1，对其他所有人的价值均为 0。展示 $i_1'$ 对竞标者 $j_2$的价值为 $\varepsilon$，对竞标者 $q_2$的价值为 1，对其他所有人的价值均为 0。对于每个 $\ell \in [n]$的任意 $j \in J_1^\ell$，展示 $i_1^j$ 对竞标者 $j$的价值为 1，对竞标者 $j_2$的价值为 $\varepsilon 2^\ell$，对其他所有人的价值均为 0。

**全局模型：** 我们首先考虑全局模型，并证明如果两个渠道都将保留价设为零，则总收益为 $n2^n$。由于只有竞标者 $j_2$ 对展示 $i_2$具有非零价值，且保留价为零，因此竞标者 $j_2$ 将以零成本获得价值为 1 的 $i_2$。因此，如果 $j_2$ 只获得展示 $i_2$，竞标者 $j_2$的目标每次转化成本约束并不紧。根据定义1的第（4）项，竞标者$j_2$ 应提高出价参数，直到其在新的展示上形成平局。

现在我们证明，竞标者 $j_2$ 必须先在展示 $i_1$ 上打成平局，再在展示 $i_1'$上打成平局，之后才会在 $\{i_1^j \mid j \in J_1\}$中的任何展示上打成平局。注意，根据假设1，竞标者 $q_1$ 会对展示 $i_1$出价 1，竞标者 $q_2$ 会对展示 $i_1'$出价 1，而竞标者 $j \in J_1^\ell$ 对任何 $\ell \in [n]$ 都会对展示 $i_1^j$ 至少出价 $2^\ell$。要使竞标者 $j_2$ 以出价 1 在展示 $i_1$上打成平局，$j_2$的出价参数只需为 $\frac{1}{1-2\varepsilon}$；此外，要使竞标者 $j_2$ 以出价 1 在展示 $i_1'$上打成平局，$j_2$的出价参数需要为 $\frac{1}{\varepsilon}$；并且，要使竞标者 $j_2$ 以出价 $2^\ell$ 在展示 $i_1^j$ 上打成平局，且对任何 $\ell \in [n]$都满足 $j \in J_1^\ell$，$j_2$的出价参数至少需要为$\frac{2}{\varepsilon}$。因此，$j_2$ 必须先在展示 $i_1$ 上打成平局。注意，即使展示 $i_1$ 已全部售予

竞标者 $j_2$ 的成本为 1，竞标者 $j_2$在展示 $i_1$ 和 $i_2$ 上的总支出除以其总价值为 $\frac{1}{2-2\varepsilon}$，仍低于 $j_2$的目标每次转化成本。根据定义1的第 (4) 项可知，竞标者 $j_2$ 会将出价参数提高至 $\frac{1}{\varepsilon}$，以便在展示 $i'_1$ 上打成平局，并获得其中一小部分 $i'_1$。

根据对上述两段的讨论可知，竞标者 $j_2$ 的出价参数至少为 $\frac{1}{\varepsilon}$。因此，对于任意 $\ell \in [n]$，竞标者 $j_2$ 针对带有 $j \in J_1^\ell$ 的展示 $i_1^j$ 的出价至少为 $2^\ell$，并且由于 $j_2$ 针对展示 $i_1^j$ 的出价高于保留价（该保留价为零），根据定义1的第（2）项，展示 $i_1^j$ 必须被完全售出（成本至少为 $2^\ell$）。由此可知，渠道 $k_2$ 的收入至少为 $\sum_{\ell\in[n]} 2^\ell \cdot |J_1^\ell| = \sum_{\ell\in[n]} 2^\ell \cdot 2^{n-\ell} = n2^n$。

**局部模型：** 根据假设1，竞标者 $j_2$ 将使用至少为 $j_2$ 的目标每次转化成本1的出价参数。因此，在局部模型中，如果渠道 $k_2$ 为带有 $1-\varepsilon$ 的展示 $i_2$ 设置保留价，根据定义1的第（2）项，无论渠道 $k_1$ 的保留价如何，$i_2$ 都将在子博弈均衡中以成本 $1-\varepsilon$ 完全售予竞标者 $j_2$。因此，我们知道，在局部模型中，渠道 $k_2$ 的收入至少为 $1-\varepsilon$。换句话说，在局部模型中，竞标者 $j_2$ 为展示 $i_2$ 至少花费 $1-\varepsilon$。

现在我们证明，在局部模型中，子博弈均衡下竞标者 $j_2$ 的出价参数至多为 $\frac{1}{1-2\varepsilon}$。~~反设~~竞标者 $j_2$ 的出价参数严格大于 $\frac{1}{1-2\varepsilon}$，则可推出 $j_2$ 对展示 $i_1$ 的出价严格大于 1，因此竞标者 $j_2$ 将赢得整个展示 $i_1$，且成本大于 1。因此，展示 $i_1$ 和 $i_2$ 的总支出除以其总价值至少为 $\frac{2-\varepsilon}{2-2\varepsilon} > 1$（考虑其他展示只会使情况更糟，因为竞标者 $j_2$ 需要使用更高的出价参数才能赢得其他展示），这违反了竞标者 $j_2$ 的 tCPA 约束。

因此，当出价参数至多为 $\frac{1}{1-2\varepsilon}$ 时，对于任意 ~~$\ell \in [n]$~~，竞标者 $j_2$ 对展示 $i_1^j$ ~~的~~出价至多为 $\frac{\varepsilon 2^\ell}{1-2\varepsilon}$，其中 $j \in J_1^\ell$。注意，根据我们对 ~~$\varepsilon$~~ 的选择，~~$\frac{\varepsilon 2^\ell}{1-2\varepsilon} \le \frac{\varepsilon 2^n}{1-2\varepsilon} \le 2^{-n}$~~。因此，对于任意 $\ell \in [n]$，竞标者 $j_2$ 对展示 $i_1^j$ 的出价（其中 $j \in J_1^\ell$）相较于竞标者 $j$ 对展示 $i_1^j$ 的价值可以忽略不计；这意味着竞标者 $j_2$ 的出价对竞标者 $j$ 赢得展示 $i_1^j$ 的成本影响可以忽略不计。最后，由于渠道 $k_2$ 使用统一保留价，且 $J_1$ 本质上与引理 3 中的“等收入”实例相同，因此渠道 $k_2$ 的收入为 $O(2^n)$。

总之，对于我们的 tCPA 实例，$PoA$ 为 $O(1/n) = O(1/\log(T_{max}/T_{min}))$。

预算型实例。构造与 tCPA 实例类似：

**竞标者：** 有一个预算为 1 的预算型竞价者 $j_2$，还有另一组预算型竞价者 $J_1 := \bigcup_{\ell\in[n]} J_1^\ell$，其中 $J_1^\ell$ 包含 $2^{n-\ell}$ 个预算型竞价者，每个竞标者的预算为 $2^\ell$。此外，还有两个 QL 竞价者 $q_1$ 和 $q_2$。

**渠道：** 有两个渠道 $k_1$ 和 $k_2$。渠道 $k_2$ 仅拥有一个展示 $i_2$，它对竞标者 $j_2$ 的价值为 1，对其他所有人的价值均为零。渠道 $k_1$ 拥有展示 $\{i_1, i'_1\} \cup \{i_1^j \mid j \in J_1\}$。展示 $i_1$ 对竞标者 $j_2$的价值为 1，对竞标者 $q_1$的价值为 $1-\varepsilon$，对其他所有人的价值均为零。展示 $i'_1$ 对竞标者 $j_2$的价值为 $\varepsilon$，对竞标者 $q_2$的价值为 1，对其他所有人的价值均为零。对于每个 $\ell \in [n]$，任意 $j \in J_1^\ell$ 下，展示 $i_1^j$ 对竞标者 $j$的价值为 1，对竞标者 $j_2$的价值为 $\varepsilon 2^\ell$，对其他所有人的价值均为零。

预算型实例的 $PoA \le O(1/\log(\beta_{max}/\beta_{min}))$ 的证明与我们对 tCPA 实例的证明类似。

□

# D 缩放渠道的证明

## D.1 定理 7 的证明

定理 7 的证明。考虑以下实例。存在两个对称渠道（即 $\gamma_k$ =1/2）和两个目标分别为 $T_1 = 2$ 和 $T_2 = 1$ 的 tCPA 竞标者。渠道拥有五种展示类型，按各自的发布商价格排序如下： $I_1$， $I_2$， $I_3$，$I_4$ 和 $I_5$ ，其中$\delta > \epsilon$。发布商的保留价和竞标者的估值如图 1 所示。

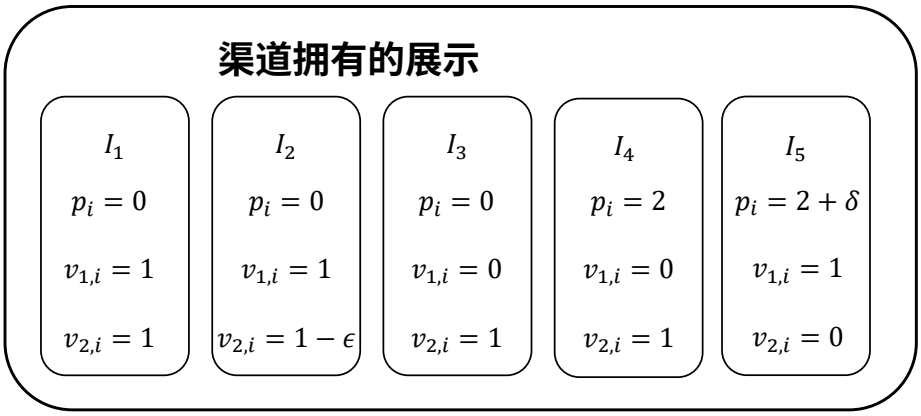



图 1：定理 7 中用于说明 $PoA = 0$ 的实例。

**全局模型：** 注意，在这种情况下，对渠道而言，将统一保留价设为 1 是一个可行解。对于这个子博弈，由于所有展示的成本至少为 1，竞标者 2 没有松弛量来购买价格超过 1 的展示。因此，竞标者 2 的出价为 $b_{2,\ i} = v_{2,\ i}$。因此，竞标者 1 的出价为 $b_{1,\ i} = (2 + \delta)v_{1,\ i}$。拍卖的结果是，竞标者 1 获得所有展示$I_1$，$I_2$，价格为 1；并获得展示的一个子集 $I_5' \subseteq I_5$，价格为 $2+\delta$，其中 $|I_5'| = (|I_1| + (1 +\epsilon)|I_2|)/\delta$，从而使竞标者 1 的 tCPA 约束紧约束。因此，在这个子博弈中，两个渠道收取的收入在 $\epsilon$ 足够小时约为 $|I_1| + |I_2| + |I_3| + (1 + 2/\delta)(|I_1| + |I_2|)$。由于在全局模型中将两个渠道的保留价设为 1 是一种可行策略，我们可以得出，当$\epsilon$足够小时， $Rev(Global) \geq |I_1| + |I_2| + |I_3| +(1 + 2/\delta)(|I_1| + |I_2|)$。

**局部模型：** 我们断言，存在一种均衡，使得两个渠道都将保留价设为 0。在该均衡的均衡路径子博弈中，竞标者 1 的出价为 $b_{1,i} = (2 + \delta)v_{1,i}$，竞标者 2 的出价为$b_{2,i} = 2v_{2,i}$。采用这些竞价策略，竞标者 1 获得所有展示 $I_1, I_2$ ；并且根据假设$|I_1| < |I_2|$，竞标者 1 有足够的松弛量，可以获得一个子集 $I_5' \subseteq I_5$，使其 tCPA 约束紧束。竞标者 2 获得所有展示 $I_3$ 以及子集 $I_4' \subseteq I_4$，使其 tCPA 约束紧束。在这种竞价行为下，当 $\epsilon$ 较小时，我们有 $I_4', I_5'$ 较小 $O(\epsilon)$。因此，每个渠道获得的收入约为 $(2(|I_1| + |I_2|) + |I_3|)/2$。

现在我们证明，将保留价设为 0 对渠道而言是一种均衡。由于各渠道的博弈是对称的，我们只考虑渠道 1 的偏离。如果频道 1 设定保留价$r_1 > 2 + \delta$，在该子博弈中，竞标者 1 和竞标者 2 只会购买频道 2 的展示。因此，频道 1 的收入为 0。如果 $r_1 \in (2, 2 + \delta]$，竞标者 2 只购买频道 2 的展示，这意味着与设定 $r_1 = 0$ 相比，频道 1 会损失 $|I_3|/2$ 。而竞标者 1 为展示 $I_1, I_2$支付 $r_1$ 。与设定保留价 $r_1 = 0$ 相比，频道 1 从竞标者 1 获得的增益不超过 $\delta(|I_1| + |I_2|)$。因此，当 $\delta$ 较小时，偏离至 $r_1 \in [2 + \epsilon, 2 + \delta)$ 并无利可图。如果$r_1 \leq 2$，那么来自竞标者 1 的收入与 $r_1 = 0$ 的情形相同，因为价格由竞标者 2 的出价决定。至于来自竞标者 2 的收入，我们有：频道 1 在展示 $I_3$ 上获得 $(1 - \epsilon)r_1$，并获得 $I_4$ 的 $x$ 个展示，其中 $x = \frac{(1-\epsilon)(2-r_1)}{2(p_4-1)}|I_3|$。因此，频道 1 的收入增益为 $(1 - \epsilon)|I_3| + x(1 - p_4/2)$。由于 $p_4 = 2$，我们有频道 1 对设定任意保留价 $r_1 \in [0, 2]$ 无差异。我们得出结论：将保留价设为 $r_1 = 0$ 是最优的，因此构成一种均衡。

最后，通过比较全局模型和局部模型，我们得到当 $\epsilon$ 足够小时，

$$PoA \leq \frac{2(|I_1| + |I_2|) + |I_3|}{|I_1| + |I_2| + |I_3| + (1 + 2/\delta)(|I_1| + |I_2|)}.$$

取 $\delta \to 0$，即可完成证明。 □

## D.2 定理 8 的证明

我们将定理 8 的证明分为以下几个步骤。

首先，我们证明，为了界定 $PoA$ ，不失一般性，可以只考虑竞标者为 tCPA竞标者的实例。

**引理 11.** 假设博弈中只有一个竞标者。如果该竞标者是预算型竞价者或 *QL*竞价者，那么 $RevG(Local) = RevG(Global)$。

证明。 如果该竞标者是 QL竞价者，那么该渠道的保留价优化问题独立于其他渠道。因此，全局模型和局部模型实现的收入相同。

如果该竞标者是预算型竞价者，我们声称，在局部模型的所有均衡中，该竞标者都会花完预算。假设并非如此，那么某个渠道可以在不使预算型竞价者受到约束的情况下略微提高保留价。这样一来，该竞标者不会改变其出价，而偏离的渠道会增加收入，这就产生了矛盾。由此可知，局部模型中的总收益就是该竞标者的预算，这与最优流动性福利相符。这意味着$RevG(Local) = RevG(Global)$. □

下一步将刻画全局模型的最优保留价。

**引理 12** (全局模型：最优保留价)。 对于约束为 $T$ 的单个目标每次转化成本竞标者，全局模型的解是每个渠道都设置使目标每次转化成本竞标者的约束恰好达到紧约束的最低保留价。也就是说，各渠道设置 $r = \arg\min\{\sum_{i \in I} v_i = T \sum_{i \in I} \max\{r, p_i\}\}$。 –

引理 *12* 的证明。证明思路基于这样一个事实：来自受 tCPA 约束的竞标者的收入，大致等于其目标每次转化成本乘以该竞标者获得的展示量。由于展示量与保留价成反比，在全局模型中，只要 tCPA 约束仍然紧束，所有渠道都会将保留价设得尽可能低。

我们首先证明，在全局模型中，不失一般性地，所有渠道都可以设置相同的保留价。事实上，由于竞标者对所有展示采用统一出价，其在价值空间中的最终出价在各个渠道中都相同。特别地，请注意，从竞标者的角度来看，面对渠道 $k$ 的展示所设置的保留价 $r_k$ ，与在所有渠道中面对相同的保留价 $r = \sum_{k \in K} \gamma_k r_k$ 是等价的。因此，从竞标者的角度来看，在各渠道面对对称保留价格并不会改变其竞价行为。同样，由于最终出价保持不变，采用对称保留价格也不会改变全局收益。

下文中，我们用 $r$ 表示这样的对称保留价格。

令 $V(q)$ 为竞 标者对发布商保留价格低于 $q$ 的展示的价值。也就是说，

$$\begin{aligned} V(q) = \max & \sum_{i \in I} v_i x_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in I} p_i x_i \leq q, \\ & x_i \in [0,1]. \end{aligned}$$

注意， $V$是连续函数，因此可以在紧集 [21] 上用可微函数一致逼近。因此，通过简单的极限论证，我们可以假设 $V$ 是可微的。

给定对称保留价格 $r$ 和出价乘数 $\alpha \geq \max\{r, T\}$，竞标者获得的价值为 $V(\alpha)$，成本为 $rV(r) + \int_r^\alpha qV'(q)dq = \alpha V(\alpha) - \int_r^\alpha V(q)dq$。

因此，当渠道设定保留价格 $r$ 时，竞标者的最优响应由方程的解 $\alpha(r)$ 给出

$$(\alpha - T)V(\alpha) = \int_r^\alpha V(z)dz. \tag{17}$$

我们从 $\alpha(r)$ 推导出以下观察。

**观察 1**： $\alpha(r)$ 是关于 $r$ 的非增函数。要说明这一点，请注意，方程（17）的左侧与 $r$ 无关，而方程的右侧随 $r$ 增大而递减。因此，对于 $r' < r$，我们得到 $\alpha(r) \leq \alpha(r')$。

为了完成证明，我们定义

$$\underline{r} = \min\{r \text{ s.t. Equation 17 has solution}\} \tag{18}$$

.[11] ，并声称 $r$ 是最优保留价。事实上，对于 $r > \underline{r}$ ，根据观察 1，我们有 $\alpha(r) < \alpha(\underline{r})$。因此，采用 $r$ 时的总收益为 $T \cdot V(\alpha(r)) < T \cdot V(\alpha(\underline{r}))$。

对于 $r \leq \underline{r}$，请注意，方程（17）无解。这意味着竞标者购买了所有展示，且未使 tCPA 约束达到紧束。换言之，竞标者购买的是相同的展示，但价格更低。我们得出结论： $\underline{r}$ 是最优保留价。

□

以下引理刻画了局部模型中最大渠道的竞价均衡。

[11]注意，由于满足方程 17 的 $r$ 构成的集合是紧且非空的，因此 $\underline{r}$ 定义良好（对于 $r = T, \alpha(T) = T$ 满足该方程）。

**引理 13**（局部模型：大型渠道保留价）。考虑一个约束为$T$的单个目标每次转化成本竞标者，以及一个（纯策略）保留价均衡，满足对于由方程（18）定义的 $r$，$\sum_{k\in K}\gamma_k r_k > r$。当渠道并非对称时（即对于某些 $k$、$k'$，$\gamma_k \neq \gamma_{k'}$），每个大型渠道$\hat{k}$（$\gamma_{\hat{k}} \geq \gamma_{k'}$，其中 $k' \neq k$）都会设定保留价$r_{\hat{k}} = \underline{r}$。

该引理表明，在局部模型中，渠道之间的竞争会促使较大的渠道设定有效的保留价，并为竞标者提供价值，从而提高分配效率。反过来，较小的渠道会提高其保留价，以攫取较大渠道所提供的价值；将所有渠道汇总时，这会造成收入低效。

引理 *13* 的证明。固定渠道的一个均衡 $(r_k)_{k\in K}$，使得 $\sum_{k\in K}\gamma_k r_k > v$。

考虑一个局部偏离，其中一个渠道降低保留价。令 $s$ 表示竞标者在渠道 $k$ 降低其保留价$\underline{r}$时获得的额外价值。竞标者会将这部分额外价值用于购买更多展示。也就是说，在子博弈中，竞标者会通过将出价从 $\alpha$ 提高到 $\alpha_s$来响应保留价的降低，并满足

$$\int_{\alpha}^{\alpha_s}(q-T)V'(q)dq = s \tag{19}$$

其中，$V$定义于引理 12 的方程（17）中。

在此偏离下，渠道 $k$ 的收入增益为 $\gamma_k\int_{\alpha}^{\alpha_s} qV'(q)dq$，而其承担的成本为$s$。根据均衡条件，我们有 $\gamma_k\int_{\alpha}^{\alpha_s} qV'(q)dq \leq s$。取 $s \to 0$（即令对 $r_k$ 的偏离趋于零），得到 $\gamma_k\alpha V'(\alpha)$ $d\alpha_s/ds - 1 \leq 0$。由方程（19），我们还可得到 $(\alpha - T)V'(\alpha)d\alpha_s/ds = 1$。代入这两个表达式，并注意到$V'(\alpha) > 0$ 以及 $d\alpha_s/ds < 0$,[12]，我们得出结论：当且仅当 $T \geq \alpha(1-\gamma_k)$时，渠道不会因局部降低其保留价而获益。

反过来，使用相同的论证，我们可以得出：当且仅当 $T \leq \alpha(1-\gamma_k)$ 时，渠道不会因提高保留价而受益。

为完成证明，假设出现矛盾，即对于最大的某个渠道$r_{\hat{k}} > v$，有 $k$。那么，该渠道可以降低其保留价。因此，在均衡中必有 $T \geq \alpha(1-\gamma_{\hat{k}})$。由于渠道并不对称，存在一个渠道 $k'$，满足 $\gamma_{k'} < \gamma_{\hat{k}}$。于是，对于渠道 $k'$，有 $T > \alpha(1-\gamma_{k'})$。这意味着渠道 $k'$会通过将其保留价从 $r_{k'}$ 提高到 $r_{k'} + \epsilon$而增加收入，其中 $\epsilon$足够小。这与均衡假设矛盾。

□

完成预备步骤后，我们现在可以证明定理 8。

定理 *8* 的证明。根据引理 11，我们可以将注意力限制在竞标者是 tCPA竞标者的情形。

**证明** $PoA \geq 1/k$

考虑局部模型上的一个任意纯策略保留价均衡 $(r_k)_{k\in K}$。可能有以下 3 种情况。

**情形 1**。这是 $\sum_{k\in K}\gamma_k r_k < v$。这种情形不可能是均衡：这意味着竞标者不受约束。因此，一个渠道可以略微提高其保留价，$\underline{r}$同时仍让竞标者

[12] $\alpha_s$ 在 $s$ 上递减，论证方法与引理 12 中观察 1 所用的方法相同。

不受约束，从而保持出价不变。因此，该渠道会提高收入，这就产生了矛盾。

**情况 2**。若 $\sum_{k\in K}\gamma_k r_k = v$，则该竞标者面临的保留价与全局最优解中的相同。因此，在这种情况下，局部模型的结果与全局模型相同。

**情况 3**。当 $\sum_{k\in K}\gamma_k r_k > v$ 时。如果渠道不对称（即，对于某个 $k$，$\gamma_k \neq \gamma_{k'}$ $k'$，），引理 13 表明，最大渠道设定的保留价为 $r_{\hat{k}} = v$。此时，tCPA竞标者的一种可行解是只购买一个最大渠道的展示。采用这种次优竞价策略后，竞标者获得的总价值为 $\gamma_{\hat{k}} kV(\alpha(r))$. 因此，在均衡中，出价参数 $\alpha_{LocalEQ}$ 必须满足 $V(\alpha_{LocalEQ}) \geq \gamma_k H(\alpha(r))$. 由于该竞标者受目标每次转化成本约束，各渠道的总收入等于目标 $T$ 乘以竞标者在均衡中获得的价值。利用全局模型中的保留价为 $r$ （引理 12），我们得出

$$PoA = \inf_{\alpha_{LocalEQ}} \frac{T\cdot V(\alpha_{LocalEQ})}{T\cdot V(\alpha(\underline{r}))} \geq \frac{\gamma_k V(\alpha(\underline{r}))}{V(\alpha(\underline{r}))} = \gamma_k \geq \frac{1}{k}.$$

接下来需要处理情况 3。当渠道对称时，即 $\gamma_k = 1/k$。沿用引理 13 中关于偏离的论证，我们可以得到：要么一个渠道设定保留价 $r = r$，要么所有渠道设定相同的保留价，此时 $r$ 满足 $T = \alpha_{LocalEQ}(1 - 1/k)$。如果一个渠道设定 $r = r$，则适用于非对称情况的同一证明也成立。否则，由于最优出价乘数也满足方程（17），我们得到

$$\begin{aligned}
(\alpha_{Global} - T)V(\alpha_{Global}) &= \int_{\underline{r}}^{\alpha_{Global}} V(z)dz \\
&= \int_{\underline{r}}^{r} V(z)dz + \int_{r}^{\alpha_{LocalEQ}} V(z)dz + \int_{\alpha_{LocalEQ}}^{\alpha_{Global}} V(z)dz \\
&= \int_{\underline{r}}^{r} V(z)dz + (\alpha_{LocalEQ} - T)V(\alpha_{LocalEQ}) + \int_{\alpha_{LocalEQ}}^{\alpha_{Global}} V(z)dz \\
&\leq (r - \underline{r})V(\alpha_{LocalEQ}) + (\alpha_{LocalEQ} - T)V(\alpha_{LocalEQ}) \\
&\quad + (\alpha_{Global} - \alpha_{LocalEQ})V(\alpha_{Global}).
\end{aligned}$$

最后一个不等式成立，是因为 $V$ 单调不减且 $\alpha_{LocalEQ} \leq \alpha_{Global}$。

整理各项，并注意到 $(r-r)V(\alpha_{LocalEQ})+(\alpha_{LocalEQ}-T) \leq \alpha_{LocalEQ}V(\alpha_{LocalEQ})$ 成立，因为 $r \leq r \leq T$，我们得到

$$(\alpha_{LocalEQ} - T)V(\alpha_{Global}) \leq \alpha_{LocalEQ}V(\alpha_{LocalEQ}).$$

我们得出 $PoA \geq 1/k$。利用均衡条件，我们有 $T = \alpha_{LocalEQ}(1 - 1/k)$。这意味着 $V(\alpha_{LocalEQ})/V(\alpha_{Global}) \geq 1/k$。

**证明** $PoA \leq 1/k$

为证明 $PoA$ 的紧确性，我们考虑一个包含 $k$ 对称渠道（$\alpha_k = \frac{1}{k}$）的实例。每个渠道拥有两类展示：高价值展示 $H$ 和低价值展示 $L$。高价值展示的发布商定价约束为 $p_i = h$（适用于 $i \in H$），低价值展示的发布商定价约束为 $p_i = l$（适用于 $i \in L$）。我们假设有 $|H| = n_1$ 个高价值展示和 $|L| = n_2$ 个低价值展示。tCPA 约束为 $T = 1$。

我们假设 $n_1(h - 1) = n_2$。这意味着 $r = 0$ 并且 $Rev_{Global} = T\cdot(h + l)$（引理 12）。

我们断言，在局部模型中，存在一个所有渠道都设定保留价$r_k = 1$的均衡。为此，假设某个渠道偏离到 $r'_k$，并假设 $r'_k$ 是最优偏离。接下来，我们分以下几种情况进行讨论。

- 若 $r'_k > 1$，由于 tCPA 竞标者没有松弛量，因此不会从渠道$k$购买。这不是一个有利可图的偏离。

- 若 $r'_k < 1$，且 tCPA 竞标者无法购买部分高价值展示 $H$，那么这种偏离无利可图：若不偏离，该渠道会以价格 $1 > r'_k$出售展示 $L$。

- 若 $r'_k < 1$，且 tCPA 竞标者能够在 $H$中购买部分展示。那么，如果 $h$ 满足$1 < h(1-1/k)$，我们可以发现，该渠道通过将保留价略微提高至高于 $r'_k$，还能进一步增加收入（关于有利偏离条件的证明见引理 13）。这与 $r'_k$的最优性矛盾。

我们得出结论，只要 $1 < h(1 - 1/k)$，设定保留价 $r_k = 1$ 就是局部博弈的一个均衡。

在局部模型的这一均衡中，各渠道的总收益为 $n_2$因此，

$$PoA \leq \frac{n_2}{n_2 + n_1} = \frac{n_1(h-1)}{n_1(h-1) + n_1} = 1 - \frac{1}{h}.$$

当 $h \to \frac{1}{1-1/k}$ 取极限时，我们得出 $PoA \leq 1/k$。 □

# E 福利结果概述

我们的大多数收入和无政府代价结果都可以推广到福利。[13] 特别是在无发布商保留价的设定下，

1. 定理 2 中的收入下界很容易推广，因为收入是福利的下界，而且我们使用的基准是最优流动性福利。2. 命题 3 中用于证明收入上界的例子可以加以修改，从而得到类似的福利上界。具体做法是增加几个竞标者——其中两个的目标每次转化成本为 1，另外两个的预算为 1。3. 对定理 3 中的例子作类似修改，可以得到福利无政府代价的上界。4. 综合这些结果，我们可以得到福利无政府代价的紧确界（相差一个常数因子），与定理5类似。

证明详见完整论文。

[13]对于福利，我们 将局部模型相对于全局模型的无政府代价定义为 $PoA = \inf \frac{Wel(x_{Local})}{Wel(x_{Global})}$。