arXiv:2301.13424v1 [math.PR] 31 Jan 2023

随机双纽线的内半径

MANJUNATH KRISHNAPUR、ERIK LUNDBERG 和 KOUSHIK RAMACHANDRAN

摘要。与复多项式 p 相关的一个经典研究的几何性质，是其（填充）勒让德曲线 $\Lambda := \{z \in \mathbb{C}$ 的内半径（最大内切圆盘的半径）： $|p(z)| < 1\}$。

本文研究定义多项式 p 为随机多项式时的勒让德曲线内半径；具体而言， p 的零点从紧支撑概率测度 μ中独立采样。若由 μ 生成的对数势 U_μ 的负值集非空，则内半径以压倒性概率有一个正的下界。此外，若 U_μ 的负值集还包含 μ的支撑，则内半径存在一个确定性极限。

另一方面，当零点从单位圆上独立且均匀地采样时，内半径依分布收敛到一个取值于 (0， 1/2) 的随机变量。

我们还考虑 Ginibre 随机矩阵的特征多项式，并证明其勒让德曲线以压倒性概率接近单位圆盘。

1. 引言

令 $p(z)$ 为一个次数为 n 的多项式，并令 Λ 为其（填充的）勒让德曲线，定义如下： $\Lambda = \{z : |p(z)| <1\}$. 记 $\rho(\Lambda)$ 为 Λ 的内半径。根据定义，它是完全包含于 Λ. 中的最大圆盘的半径。本文研究各种随机多项式模型下随机勒让德曲线的内半径。

勒让德曲线 $\{z : |z^n - 1| < 1\}$ 的内半径渐近正比于 $1/n$。1958年，P. Erd¨os、F. Herzog 和 G. Piranian 提出了若干关于多项式代数曲线几何性质的问题 [10] 。关于内半径，他们提出了如下问题 [10, 问题 3]： 例子 $\{|z^n - 1| = 1\}$ 中的衰减速率是否为极值，也就是说，是否存在一个正常数 C，使得对于任意一个次数为 n， 且所有根都位于闭单位圆盘内的首一多项式，其勒让德曲线 Λ 的内半径 ρ 都满足 $\rho \geq \frac{C}{n}$。这个问题至今仍未解决。C. Pommerenke [33]在这一背景下证明了内半径满足下界 $\rho \geq \frac{1}{2e\,n^2}$。

我们在引言第 1.4 节中陈述的结果表明，在概率设定下，典型的勒让德曲线的内半径有一个大得多的下界。具体而言，若 p 的零点是从一个紧支撑测度 μ 中独立抽取的，且其对数势的负值集非空，那么 Λ 的内半径以压倒性概率有一个正的下界，见下文定理 1.1。下面我们来探讨这一结果，并说明为什么 μ 的对数势发挥着重要作用。首先，勒让德曲线Λ 也可以描述为离散对数势的次水平集 $\{\frac{1}{n}\log |p(z)| < 0\}$，其中离散对数势为 $\frac{1}{n}\log |p(z)| = \frac{1}{n}\sum \log |z - z_k|$，而 z_k 是 $p(z)$ 的零点。对固定的 z，和式$\frac{1}{n}\sum \log |z - z_k|$ 是定义 μ 的对数势 $U_\mu(z)$ 的蒙特卡洛近似；特别是，根据大数定律，它逐点收敛到 $\bar{U}_\mu(z)$。利用大偏差估计，我们还可以得出结论：负值集 Ω^- 中每个 z 都以压倒性概率属于 Λ。以压倒性概率成立这一性质，在对多项此类事件取交集时仍然成立（借助并集界）。这一事实结合对导数 $p'(z)$ 的适当一致估计（我们可以使用 Bernstein 型不等式），便可通过标准的 ε 网论证证明，

负值集 Ω^- 的任意紧子集都以压倒性概率包含于 Λ 中。由于假设 Ω^- 非空，这便给出了所需的内半径下界；详情见第 3 节中定理 1.1 的证明。

在附加假设下，即对数势的负值集 Ω^- 包含 μ 的支撑，内半径几乎必然收敛到 Ω^- 的内半径，见推论 1.2；特别地，内半径具有确定性极限。

另一方面，对于某些测度 μ，内半径没有确定性极限，而是收敛于一个非退化随机变量的分布，见定理 1.5，其中讨论了 μ 为单位圆上的均匀测度的情形。我们还研究了从 Ginibre 系综抽取的随机矩阵的特征多项式所对应的勒让德曲线，并证明以压倒性概率，内半径接近 1（事实上，整个勒让德曲线都接近单位圆盘），见定理 1.6。

这些结果的精确表述以及一些进一步揭示 Λ几何性质的补充结果，见下文第 1.4 节。

1.1. 关于随机勒让德曲线的先前结果。 本文属于近期一系列研究随机勒让德曲线几何与拓扑的工作。下面概述这一方向的先前结果。值得注意的是，与本文研究的填充勒让德曲线不同，下文引用的研究所考察的勒让德曲线是等值集（而非次水平集）。

受 Erd¨os 关于勒让德曲线极值长度问题的启发，第二和第三位作者在 [23] 研究了平面上随机多项式勒让德曲线的弧长与拓扑。当多项式的系数为独立同分布的高斯系数时，文献 [23] 证明，其勒让德曲线的平均长度趋近于一个常数。他们还证明，以高概率，该长度有一个增长速度可以任意缓慢的函数作为上界，这意味着勒让德曲线的长度通常比极值情形满足好得多的估计。文献 [23] 还证明，以高概率，勒让德曲线的连通分支数渐近等于 n （定义该曲线的多项式的次数）；并且，存在一个巨型分支（即长度至少为某个固定正数的连通分支）的概率至少为某个固定正数。与本文的重点相关，我们注意到，文献 [23]中关于巨型分支存在性的证明表明，对于固定的 $0 < r < 1$, 勒让德曲线的内半径 ρ 满足下界 $\rho > r$的概率为正。

受 Catanese 和 Paluszny 对一般多项式的拓扑分类启发（该分类依据多项式模的图，并将定义域与值域上的微分同胚视为等价），第二作者与 M. Epstein 和 B. Hanin 在 [9] 中研究了与次数为 n 的随机多项式相关的所谓勒让德树。多项式 p 的勒让德树是一棵带标号的递增非平面二叉树，用来编码模 $|p（z）$的水平集的奇异分支的嵌套结构|。当 p 的零点按照相对于黎曼球面上豪尔测度有界的概率密度独立同分布地均匀随机抽样时， [9] 证明，所诱导的勒让德树中分支（有两个子节点的节点）的数量以高概率为 $o（n）$；而从该组合类中均匀随机抽取的勒让德树，其平均分支数渐近为 $\left(1-\frac{2}{\pi}\right) n$。

在 [21], 部分受到一项已知结果 [11], [43]的启发——该结果指出，黎曼球面上有理勒让德曲线的最大长度为 $2\pi n$——第二作者与A. Lerario研究了随机有理勒让德曲线的几何性质，并证明其在黎曼球面上的平均长度为

渐近地趋于 $\frac{\pi^2}{2}\sqrt{n}$。文献 [21], 还研究了拓扑性质（连通分支的数量及其嵌套结构），其中证明连通分支的数量渐近地被 n的正倍数从上、下两侧界定。随后，Z. Kabluchko和I. Wigman通过调整F. Nazarov和M. Sodin的方法 [28] ，建立了 [16] 中连通分支数量的渐近极限定律；他们使用积分几何夹逼和遍历理论，将其应用于一种平移不变系综，该系综由有理勒让德曲线系综经过缩放极限得到，且由平面亚纯勒让德曲线组成。

1.2. **研究代数曲线的动机**。代数曲线的研究历史悠久、内容丰富，应用领域也十分广泛。计算伯努利双纽线长度的问题，曾在椭圆积分的早期研究中发挥作用 [1]。希尔伯特代数曲线定理及其推广 [26] 表明，代数曲线可用于逼近相当一般的区域；这一稠密性性质也使代数曲线在下文提及的许多应用中具有重要意义。在某些情形下，逼近代数曲线序列会自然出现，例如在全纯动力系统 [25, p. 159], 中，构造一个收敛到曼德博集合的嵌套“曼德博勒让德曲线”序列十分简单。在对数势理论的经典逆问题中——即根据二维物体外部产生的对数势，恢复其均匀质量密度的形状——已证明代数曲线域具有唯一性 [37]。鉴于希尔伯特代数曲线定理以及势函数逆问题通常存在非唯一性 [40], 这一点或许令人意外。由于代数曲线是实代数曲线，并且与复分析有着有益的联系，因此在实代数曲线研究中，它们常受到特别关注，例如在实代数曲线拓扑的研究中 [7], [2]。诸如 Arnoldi 勒让德曲线这样的勒让德曲线也应用于数值分析 [39]。勒让德曲线还应用于二维形状压缩：在这种应用中，由保角焊接构造的形状“指纹”可简化为一种特别方便的形式——即布拉施克乘积的 n次根——前提是将该二维形状视为次数为n 的勒让德曲线 [8], [44], [35]。勒让德曲线也出现在流体动力学移动边界问题的研究中 [18], [24], [19]。在平面调和映射研究中，有理勒让德曲线既是调和多项式的临界集 [17], [22] ，也是引力透镜理论中透镜映射的临界集[30, 第 15.2 节2]。勒让德曲线在保角映射理论及其应用中也占有重要地位 [3], [15], [13]。另请参阅近期的综述 [36] ，其中详细介绍了上述若干较新的研究方向。

1.3. **定义与记号**。 在全文中， μ 表示一个支撑为 $S \subset \mathbb{C}$的博雷尔概率测度。 μ 的对数势定义为

$$U_\mu(z) = \int_S \log|z-w| d\mu(w).$$

众所周知， U_μ 是平面上的次调和函数，并且在 $\mathbb{C} \setminus S$上是调和函数。对于这样的μ，我们将其势所对应的负集与正集记为

$$\Omega^- = \{z \in \mathbb{C} : U_\mu(z) < 0\},\ \Omega^+ = \{z \in \mathbb{C} : U_\mu(z) > 0\}.$$

容易看出，Ω^- 是一个（可能为空的）有界开集。

关于测度的假设。 设 μ 为一个支撑为 $S \subset \mathbb{C}$的博雷尔概率测度。我们对 μ定义以下逐步增强的条件。

(A) 对每个紧致 $K \subset \mathbb{C}$,

$$C(K) = \sup_{z \in K} \int_S \left(\log|z-w|\right)^2 d\mu(w) < \infty.$$

(B) 存在某个 $C<\infty$ 和 $\varepsilon>0$，使得对所有 $z\in\mathbb{C}$ 和所有 $r\le 1,$，我们都有

$$\mu\left(B(z,r)\right)\le\frac{C}{(\log(1/r))^{2+\varepsilon}}.$$

(C) 存在 $\delta>0$ 使得

$$\sup_{z\in\mathbb{C}}\int_S\frac{d\mu(w)}{|z-w|^{\delta}}<\infty.$$

(D) 存在某个 $C<\infty$ 和 $\varepsilon>0$，使得对所有 $z\in\mathbb{C}$ 和所有 $r>0$，都有

$$\mu\left(B(z,r)\right)\le Cr^{\varepsilon}.$$

1.4. 主要结果。 在所有定理中（定理 1.6 除外），我们采用以下设定：

设定： μ 是 $\mathbb{C}$ 上的紧支撑概率测度，其支撑为 S。随机变量 X_i 从分布 μ中独立同分布地抽取。我们考虑随机多项式 $p_n(z):=(z-X_1)\ldots(z-X_n)$，以及它的勒让德曲线 $\Lambda_n:=\{z\colon\ |p_n(z)|<1\}$。我们用 $\rho_n=\rho(\Lambda_n)$表示 Λ_n的内半径。

全文中，w.o.p. 表示以压倒性概率发生，即概率至少为$1-e^{-cn}$，其中某个 $c>0$。

以下定理讨论随机勒让德曲线 Λ_n。注意， Λ_n 由所有满足 $\log|p_n(z)|<0$ 的 z 构成，换言之，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log|z-X_k|<0.$$

根据大数定律，左侧的量逐点收敛到 $U_\mu(z)$。因此，我们可以预期， Λ_n 的渐近行为可用 U_μ 及其正集与负值集 Ω^+，Ω^- 来描述。前三个定理在底层测度 μ 满足不同条件的情况下，将这一点精确表述出来。

定理 1.1。 假设 μ 满足假设 *(A)*。设 $\Omega^-\neq\emptyset$，并令 $\rho=\rho(\Omega^-)$。取紧集 $K\subset\Omega^-$ 和 $L\subset\Omega^+\setminus S.$。那么对所有充分大的 n,

$$K\subset\Lambda_n,\quad w.o.p.,\quad and\quad L\subset\Lambda_n^c\quad w.o.p.$$

特别地，若 ρ_n 表示 Λ_n 的内半径，则

$$\rho_n\ge a\quad w.o.p.,\quad\forall a\in(0,\rho)$$

推论 1.2。 在定理 *1.1* 的条件下，下极限 $\rho_n\ge\rho$ 几乎必然成立。此外，若 $S\subseteq\Omega^-$，则 $\rho_n\to\rho$ 几乎必然成立。

理想情况下，我们希望能够说，紧集 $L\subseteq\Omega^+$ 以高概率包含在 Λ_n^c 内。然而，如果某些根落在 L 内，这显然并不成立。对测度作出更强的假设（D），并进一步假设 U_μ 在 L 上有一个正的下界后，我们证明 L 几乎完全包含在 Λ_n^c 内。

定理 1.3. 设 μ 满足假设 *(D)*。设 L 是某个 $m>0$的紧子集，其中 $\{U_\mu\ge m\}$。那么存在 $c_0>0$，使得

$$\Lambda_n\cap L\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(X_k,e^{-c_0n}),\quad w.o.p.$$

特别地，如果 $U_\mu \geq m$ 处处成立，那么整个勒让德曲线都很小。根据势的最小值原理（ [34]中的定理 3.1.4），只需假设$U_\mu \geq m$ 在 μ的支撑上成立。

推论 1.4。 假设 μ 满足假设 *(D)*，且 $U_\mu \geq m$ 在 S上。那么存在一个 $c_0 > 0$ ，使得$\Lambda_n \subset \bigcup_{k=1}^n B(X_k, e^{-c_0 n})$ 并且 $\rho_n \leq n e^{-c_0 n}$ 以高概率成立。

本节末尾给出了一类例子，用以说明定理 1.1 和定理 1.3。

当势 U_μ 在某个非空开集上为零时，会发生什么？在这种情况下，$\log|p_n|$ 的均值为零，且其为正或负的可能性（近似）相等。因此，我们可能会预期， Λ_n 和 ρ_n 中的随机性会在极限中持续存在，而我们至多只能期待依分布收敛。以下定理讨论了 μ 在单位圆上服从均匀分布这一特殊情形。

定理 1.5。 设 μ 为 $\mathbb{S}^1$上的均匀概率测度，其中 $\mathbb{S}^1$是复平面中的单位圆。那么，对于某个取值于$(0, 1/2)$的随机变量 ρ，有$\rho_n \xrightarrow{d} \rho$。此外，对每个$\varepsilon > 0$，都有 $\mathbb{P}\{\rho < \varepsilon\} > 0$ 和 $\mathbb{P}\{\rho > \frac{1}{2} - \varepsilon\} > 0$。

正如定理 1.5 的证明所示，随机函数 $\log|p_n(z)|$ 经过适当归一化后，几乎必然收敛到定义在 $\mathbb{D}$ 上的非退化高斯随机函数，而这一收敛性是极限随机内半径 ρ 的基础。我们注意到，类似的方法也可用于研究其他测度 μ，只要 U_μ 在某个非空开集上为零（例如， μ 是某个具有单位容量的区域的平衡测度的其他情形）。然而，圆上的均匀测度情形相当特殊，因为由此得到的随机函数 $\log|p_n(z)|$ 及其极限高斯随机函数在原点处都有一个确定性零点（这使得极限内半径的取值不超过 $\mathbb{D}$半径的一半）。

另一个可以依赖定义函数 $\log|p_n(z)|$ 收敛性的情形，是多项式 p_n 具有独立同分布的高斯系数时。实际上，此时的收敛性更为直观（且无需 Skorokhod 定理等额外工具），因为 p_n 本身就可以看作一个具有独立同分布系数的幂级数的截断。此情形的结果与定理 1.5 类似，只是由于不存在确定性零点，数值 $1/2$ 被 1 取代。

当零点是相关随机变量时，我们可以探讨与定理 1.1 和定理 1.3 类似的结果。行列式点过程是一类自然的例子。我们将在此讨论其中一个特例。

Ginibre 系综是在 $\mathbb{C}$ 中由 n 个点组成的随机集合，其联合密度正比于

$$e^{-\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2} \prod_{j<k} |\lambda_j - \lambda_k|^2. \tag{1}$$

这类分布出现在随机矩阵理论中，作为一个元素为独立同分布的标准复高斯的 $n \times n$ 随机矩阵的特征值分布。经过 $\sqrt{n}$ 缩放后，经验分布

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{\frac{\lambda_j}{\sqrt{n}}} \tag{2}$$

收敛到 $\mathbb{D}$ 上的均匀测度。因此，我们可以预期，相应多项式的勒让德曲线与根从 $\mathbb{D}$ 中独立且均匀抽取时的情形相似。

定理 1.6. 设 λ_1、……、λ_n 的联合密度由 (1) 给出，并设 $X_j = \frac{\lambda_j}{\sqrt{n}}$。设 Λ_n 为随机多项式 $p_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - X_k)$ 的单位勒让德曲线。给定 $r \in (0,\ 1)$ 和 $s \in (1,\ \infty)$，当 n 充分大时，

$$\mathbb{D}_r \subseteq \Lambda_n \subseteq \mathbb{D}_s, \quad w.o.p.$$

例 1.7. 令 μ_r 为圆盘 $r\mathbb{D}$ 上的归一化面积测度，并设根从 μ_r中抽样。容易验证， μ_r 满足假设（A）–（D）。我们声称

$$U_{\mu_r}(z) = \begin{cases} \frac{|z|^2 - r^2}{2r^2} + \log r & \text{if } |z| < r, \\ \log|z| & \text{if } |z| \geq r. \end{cases} \tag{3}$$

因此，$\Omega^- = r_c\mathbb{D}$，其中

$$r_c = \begin{cases} 1 & \text{if } r \leq 1, \\ r\sqrt{1 - 2\log r} & \text{if } 1 \leq r \leq \sqrt{e}, \\ 0 & \text{if } r \geq \sqrt{e}. \end{cases}$$

因此，定理 1.1 表明，当 $r < \sqrt{e}$时，随着 $n \to \infty$，任意半径为 $s < r_c$ 的圆盘 $\mathbb{D}_s$ 以压倒性概率包含于 Λ_n中。当 $r \leq 1$时，推论 1.2 表明 Λ_n 与 $\Omega^- = \mathbb{D}$几乎相同。对于 $r > \sqrt{e}$，定理 1.3 适用，说明 Λ_n 包含于若干非常小的圆盘的并集中。

我们来进行计算以验证（3）。通过缩放，显然 $U_{\mu_r}(z) = \log r + U_{\mu_1}(z/r)$，因此只需考虑 $r = 1$。

$$U_{\mu_1}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \log|z - w| dA(w).$$

对于 $|z| \geq 1$，被积函数关于 $w \in \mathbb{D}$ 是调和的，因此由均值定理，$U_\mu(z) = \log|z|$。对于 $|z| < 1$，我们将积分拆分为满足 $|w| < |z|$ 和$|w| > |z|$的两个区域上的积分。$w \mapsto \log|z - w|$ 在 $\{|w| < |z|\}$ 上的调和性以及均值性质给出

$$\int_{|w|<|z|} \log|z - w| dA(w) = \pi|z|^2 \log|z|.$$

对于第二个积分，我们改用极坐标 $w = re^{i\theta}$。

$$\begin{aligned} \int_{|z|}^{1}\int_0^{2\pi} \log|z - re^{i\theta}| r d\theta dr &= \int_{|z|}^{1} \underbrace{\int_0^{2\pi} \log|ze^{-i\theta} - r| d\theta}_{2\pi \log r}\, r dr \\ &= \int_{|z|}^{1} 2\pi r \log r dr \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{|z|^2}{2}\log|z| + \frac{|z|^2}{4}\right), \end{aligned}$$

这里我们再次利用调和函数的平均值性质（这次是在一个圆上），计算了上面第一行中的内部积分。将这两个区域上的积分相加，并除以 π，即可得到 (3)。

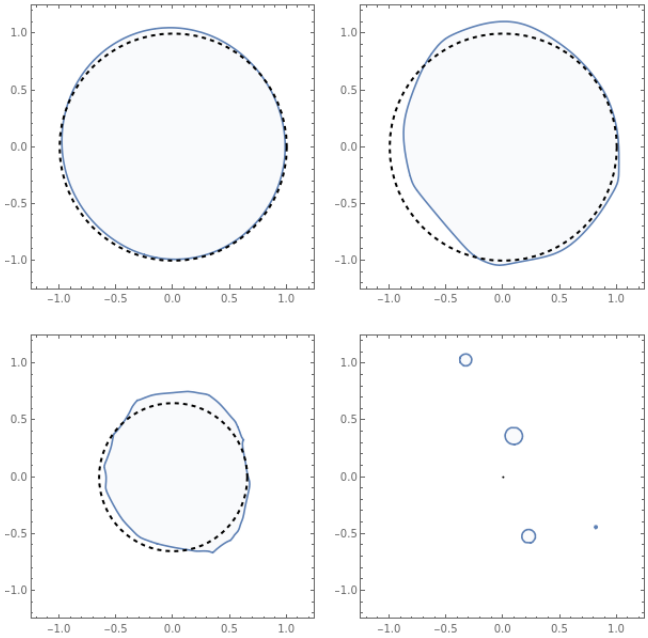

图 1. 次数为 $n = 30,40,400,15$ 的代数曲线，其零点均匀采样自半径为 0.5,1,1.5,1.7 的圆盘（顺序：从左上到右下）。点线圆的半径为 r_c。

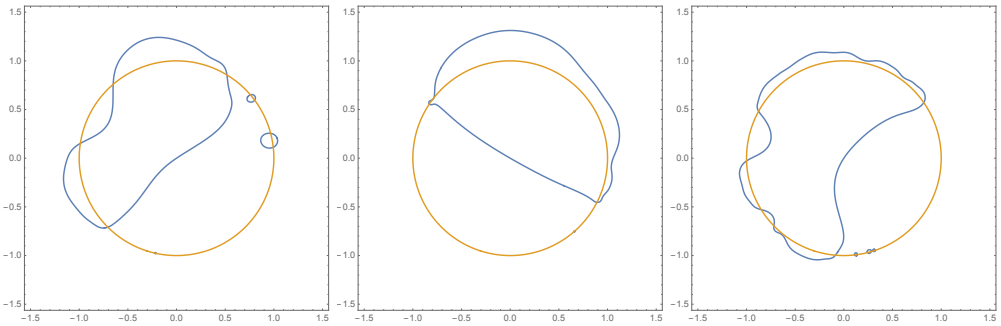

图 2. 次数为 $n = 20,30,40$ 的代数曲线，其零点均匀采样自单位圆。每种情况下还绘出了一个单位圆以供参考。

论文提纲。 我们在第 2 节回顾一些预备结果，它们将作为证明上述结果的工具。我们在第 3 节证明定理 1.1 和推论 1.2，并在第 4 节证明定理 1.3 和推论 1.4。关于圆上的均匀测度的定理 1.5 的证明将在第 5 节给出；与 Ginibre 系综相关的定理 1.6 则在第 6 节证明。

2. 预备结果

我们先介绍两个准备性引理，并在定理的证明中反复使用它们。

引理 2.1. 设 μ 是一个具有紧支撑 $S \subset \mathbb{C}$ 的博雷尔概率测度，满足假设(A)。当 K 是 Ω^- 的非空紧子集，或是满足 $K \cap S = \emptyset$ 的 Ω^+ 的紧子集时，

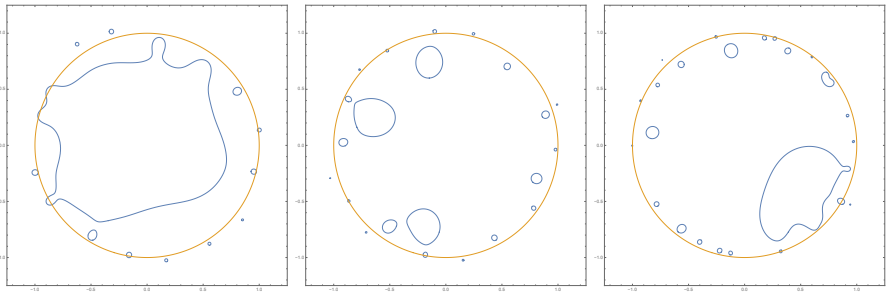

图 3. 次数为 $n = 20$、30、40 的、具有独立同分布的高斯系数的代数曲线，与单位圆一同绘制以供参考。

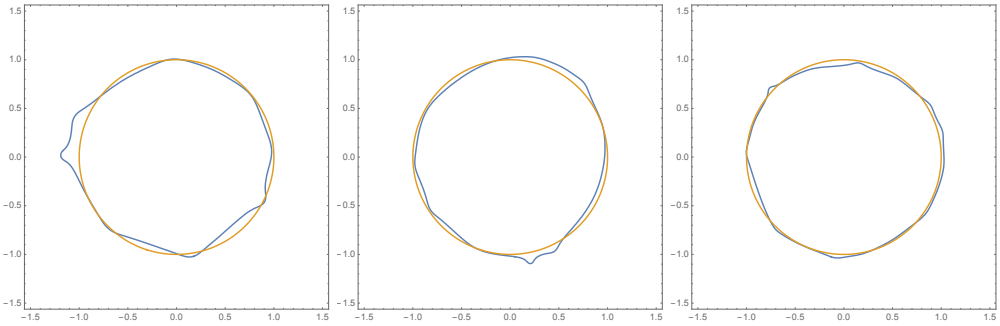

图 4. 由 Ginibre 矩阵的特征多项式生成的次数为 $n = 20$、30、40 的代数曲线，并绘制单位圆以供参考。

存在一个常数 $c(K) > 0$，使得

$$\inf_{z\in K} \int_S (\log|z-w|)^2 \, d\mu(w) \geq c(K).$$

证明。令 μ 满足假设 (A)，并令 $K \neq \emptyset$ 为紧集。于是，根据柯西-施瓦茨不等式，对于所有 $z \in K$，我们有

$$\int_S (\log|z-w|)^2 \, d\mu(w) \geq \left(\int_S |\log|z-w|| \, d\mu(w) \right)^2 \geq |U_\mu(z)|^2$$

因此，为证明该引理，只需证明 $|U_\mu(z)|^2$ 对于 $z \in K$ 有正的下界，只要 $K \subset \Omega^-$，或者 $K \subset \Omega^+$ 且 $K \cap S = \emptyset$.

首先假设 $K \subset \Omega^-$ 是紧集。由于次调和函数是上半连续的，因而在任意紧集上都能取得最大值，所以存在 $c_1(K) > 0$，使得 $U_\mu(z) \leq -c_1(K)$，对所有 $z \in K$. 均成立。因此 $|U_\mu(z)|^2 \geq c_1(K)^2$, 对于 $z \in K$. 成立。在另一种情形下，令 $K \subset \Omega^+$ 为与 μ. 的支撑 S 不相交的紧集。注意到，此时 $U_\mu(z)$ 在 K. 上为正的调和函数。应用哈纳克不等式可得所需常数的存在性（该常数仅取决于 K）。至此，引理得证。□

第二个引理基于网论证，使我们能够根据多项式在网中各点处的值来控制其模的大小。

引理 2.2. 设 G 是一个边界可求长的有界 *Jordan* 域。设 $p(z)$ 是一个次数为 $n.$ 的多项式。那么，存在常数 $C = C(G) > 0$，以及点 w_1、$w_2 ... w_{Cn^2} \in \partial G$，使得

$$\|p\|_{\partial G} \leq 2 \max_{1 \leq k \leq Cn^2} |p(w_k)| \tag{4}$$

证明。 证明的关键在于一个 Bernstein 型不等式（见 [32, 定理 1]）

$$|p'(z)| \leq C_1 n^2 M, \tag{5}$$

其中 $M := \|p\|_{\partial G}$，且 C_1 是一个仅依赖于 G的常数。有了这个估计，证明便归结为以下众所周知的论证。为方便读者起见，我们仍将其详细给出。令 $\ell = \ell(\partial G)$ 表示 $\partial G.$ 的长度。令 N 为稍后指定的正整数。将 ∂G 等分为 N段，其中 w_0，$w_1 ...$，w_N表示各分点。令 $z_0 \in \partial G$ 满足 $M = \|p\|_{\partial G} = |p(z_0)|.$ 如果 z_0 是其中一个w_j，，那么估计式 (4) 显然成立。如果不是这种情况，那么对于某个满足$0 \leq j \leq N$的 j，z_0 位于 $|z_0 - w_j| \leq \frac{\ell}{N}$。现在我们可以写成 —

$$M - |p(w_j)| \leq |p(z_0) - p(w_j)| = \left| \int_{w_j}^{z_0} p'(t) dt \right| \leq C_1 n^2 M \frac{\ell}{N}. \tag{6}$$

这里我们使用 Bernstein 型不等式 (5) 来估计 $|p'|$的大小。若现在取$N = 2\ell C_1 n^2$，那么估计式 (6) 变为

$$M - |p(w_j)| \leq \frac{M}{2}$$

由此即可完成引理的证明。 □

我们还需要下面这个集中不等式（见 [6] 的第 2.7 节）。这个结果称为“Bennett 不等式”，与著名的 Hoeffding 不等式类似，但请注意，这里只假设随机变量有上界，而不要求它们有界。

定理 2.3（Bennett 不等式）。设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 是相互独立且具有有限方差的随机变量，并且满足 $X_i \leq b$，其中某个 $b > 0$ 几乎必然成立，对所有 $i \leq n.$ 均如此。令

$$S = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbb{E}(X_i))$$

并且 $\nu = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_i^2\right)$。则对任意 $t > 0,$

$$\mathbb{P}(S > t) \leq \exp\left(\frac{-\nu}{b^2} h\left(\frac{bt}{\nu} \right) \right),$$

其中 $h(u) = (1+u)\log(1+u) - u$ 对于 $u > 0.$

3. Proofs of Theorem 1.1 and Corollary 1.2

定理 *1.1* 的证明。我们将证明分为两步。

步骤 1：Ω^- 的紧子集包含于 Λ_n

根据我们的假设，$\Omega^- \neq \emptyset.$ 令 $K \subset \Omega^-$ 为紧集。我们希望证明 $K \subset \Lambda_n$ 以高概率成立。无需失去一般性，可假设 $K = G$ 对于某个有界 Jordan 域$\overline{G}$，其

边界可求长，因为任何连通紧集都包含于这样的域中。回顾 $\Lambda_n = \{z : \log|p_n(z)| < 0\}$。记

$$\log|p_n(z)| = \sum_{k=1}^{n} \log|z - X_k|$$

将其表示为独立同分布随机变量之和；对于 $z \in \Omega^-$，我们将使用一个集中不等式证明 $\log|p_n(z)|$ 以压倒性概率为负。然后使用引理 2.2 得到关于 K 的统一估计，并完成证明。

固定 $z_0 \in K.$ 对于 $k = 1, 2, \ldots\ldots, n,$ 定义 $Y_k = \log|z_0 - X_k|,$ 并令

$$Z := \sum_{k=1}^{n} (Y_k - \mathbb{E}Y_k).$$

注意，由于 $z_0 \in \Omega^-$

$$\mathbb{E}Y_k = U_\mu(z_0) < 0$$

并且根据定理陈述中的假设，我们还有

$$\sigma_{z_0}^2 := \mathbb{E}Y_k^2 = \int_S (\log|z_0 - u|)^2 d\mu(u) < \infty$$

现在将定理 2.3 应用于我们的问题，其中 $b \geq \sup_{z\in K,\ w\in S} \log(|z| + |w|)$，$\nu = n\sigma_{z_0}^2$，可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\log|p_n(z_0)| > -\log(2)\} &= \mathbb{P}\{\log|p_n(z_0)| - nU_\mu(z_0) > -nU_\mu(z_0) - \log(2)\} \\
&= \mathbb{P}\{Z > -nU_\mu(z_0) - \log(2)\} \\
&\leq \exp\left(-\frac{n\sigma_{z_0}^2}{b^2} h\left(\frac{-b}{\sigma_{z_0}^2} U_\mu(z_0) - \frac{b\log(2)}{n\sigma_{z_0}^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

由于次调和函数是上半连续的，因此在任何紧集上都能取到最大值，所以对于所有 $z \in K$，有 $U_\mu(z) \leq -M$，其中某个 $M > 0.$。此外，根据引理 2.1，$0 < c_1(K) \leq \sigma_z^2 \leq c_2(K) < \infty,$ 对于所有 $z \in K.$。结合这一界以及 h 是递增函数这一事实，现在可以将其用于上述估计，进而得到

$$\mathbb{P}\{\log|p_n(z_0)| > -\log(2)\} \leq \exp\left(-\frac{n\sigma_{z_0}^2}{b} h\left(\frac{-b}{\sigma_{z_0}^2} U_\mu(z_0) - \frac{b\log(2)}{n\sigma_{z_0}^2}\right)\right) \leq \exp(-cn) \tag{7}$$

其中某个常数 $c = c(K) > 0$，它仅取决于 $K.$。结合并集界并应用引理 2.2 和估计式 (7)，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\log\|p_n\|_K < 0\} &\geq \mathbb{P}\{\max_{1\leq k\leq Cn^2} \log|p_n(w_{k,n})| + \log(2) < 0\} \\
&= 1 - \mathbb{P}\{\max_{1\leq k\leq Cn^2} \log|p_n(w_{k,n})| > -\log(2)\} \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{Cn^2} \{\log|p_n(w_{k,n})| > -\log(2)\}\right) \\
&\geq 1 - Cn^2 \exp(-cn)
\end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们使用了 (7)。这证明了 $K \subset \Lambda_n$ 以高概率成立，并完成了第一部分的证明。

步骤 2： L **的紧子集位于** Λ_n^c。

不失一般性，我们可以假设 L 是 $\Omega^+ \setminus S$ 中的一个闭圆盘。由于 S 是与 L 不相交的紧集，存在 $\delta > 0$，使得距离 $d(L, S) = \delta.$。注意，对所有 $z \in L,$，都有 $-\log|z - X_i| \leq -\log \delta$。现在固定 $z_0 \in L.$。将 Bennett 不等式应用于随机变量 $-\log|z_0 - X_i|$，得到：

$$\mathbb{P}\left(-\log|p_n(z_0)| + nU_\mu(z_0) \geq nU_\mu(z_0) - 1\right) \leq \exp\left(-\frac{n\sigma_{z_0}^2}{b} h\left(\frac{b}{\sigma_{z_0}^2} U_\mu(z_0) - \frac{b}{n\sigma_{z_0}^2})\right)\right). \tag{8}$$

量，与步骤 1 中的含义类似。根据引理 2.1，有下界；根据假设，它也有上界，且上、下界均为仅依赖于 的某些正常数。此外，引理 2.1 表明，对于所有，都成立。利用上述所有结果，我们现在可以估计

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\log|p_n(z_0)| > 1\right) &= \mathbb{P}\left(\log|p_n(z_0)| - nU_\mu(z_0) > -nU_\mu(z_0) + 1\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\log|p_n(z_0)| - nU_\mu(z_0) \leq -nU_\mu(z_0) + 1\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(-\log|p_n(z_0)| + nU_\mu(z_0) \geq nU_\mu(z_0) - 1\right) \\
&\geq 1 - \exp\left(-\frac{n\sigma_{z_0}^2}{b} h\left(\frac{bU_\mu(z_0)}{\sigma_{z_0}^2} - \frac{b}{n\sigma_{z_0}^2}\right)\right) \\
&\geq 1 - \exp\left(-C_0(L)n\right). \qquad (9)
\end{aligned}$$

该估计表明，中的单个点以压倒性概率属于。为完成证明，我们再次使用网论证来证明 w.o.p. 成立。首先注意，如果，，且 是 's 中的一个，则由中值定理可得

$$\left|\log|z - X| - \log|w - X|\right| \leq \frac{|z - w|}{\delta},$$

其中我们已经使 得（，）（并且 是一个圆盘）。于是由三角不等式可得 s

$$\left|\log|p_n(z)| - \log|p_n(w)|\right| \leq \frac{n|z - w|}{\delta}, \quad \text{for } z, w \in L. \tag{10}$$

在 ∂L 上选取一个由 n^2 个等距点组成的网 $w_1, w_2, \ldots w_{n^2}$，并注意到 ∂L 上的任意一点到网中某个点的距离都不超过 C_1/n^2，其中 C_1 是一个取决于 L 半径的常数。由 (10) 可得

$$\left|\log|p_n(z)| - \log|p_n(w)|\right| \leq \frac{C_2}{n}, \quad \text{for } z, w \in L \text{ with } |z - w| \leq \frac{C_1}{n^2}, \tag{11}$$

其中 $C_2 = C_1/\delta$ 是一个常数。

现在我们可以证明，当 n 足够大时，$\inf_{z \in L} \log|p_n(z)| > 0$ 以高概率成立。事实上，注意到，∂L 上使 $\log|p_n|$ 的下确界达到的点必定位于网$\{w_1, w_2 \ldots, w_{n^2}\}$中某个点的 C_1/n^2 范围内。因此，由（11）可得，

$$\mathbb{P}\left(\inf_L \log|p_n(z)| > 0\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n^2} \{\log|p_n(w_k)| > 1\}\right).$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\inf_L \log|p_n(z)|>0\right) &\geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n^2}\{\log|p_n(w_k)|>1\}\right)\\ &= 1-\sum_{k=1}^{n^2}\mathbb{P}\left(\log|p_n(w_k)|\leq 1\right)\\ &\geq 1-n^2\exp(-C_0\,n).\end{aligned}$$

由逐点估计 (9) 得出。至此，定理得证。 □

推论 *1.2* 的证明。假设测度 μ 与定理 1.1 中的相同。令 $\rho_n=\rho(\Lambda_n)$ 为 p_n 的勒让德曲线的内半径，并令 $\rho=\rho(\Omega^-)$ 为 Ω^- 的内半径。由定理 1.1，我们立即得到 $\liminf \rho_n\geq\rho$。

令 S 为 μ 的支撑。由于 $S\cap\Omega^+=\emptyset$，定理 1.3 表明，若 $m>0$，则 $\Lambda_n\cap\{U_\mu\geq m\}$ 包含于至多 n 个圆的并集中，每个圆的半径为 e^{-cn}。记 $\rho_n(m)$ 为 $\rho(\Lambda_n\cap\{U_\mu<m\})$，并记 $\rho(m)$ 为 $\rho(\{U_\mu<m\})$，显然 $\rho_n\leq\rho_n(m)+2ne^{-cn}\leq\rho(m)+2ne^{-cn}$。因此，先令 $n\to\infty$，再令 $m\downarrow 0$，即可得到

$$\limsup_{n\to\infty}\rho_n\leq\lim_{m\downarrow 0}\rho(m).$$

由于 U_μ在 $\mathbb{C}\setminus S$上连续，因此对任意 $\varepsilon>0$，都存在 $m>0$，使得 $\{U_\mu<m\}\subseteq\Omega^-_\varepsilon$，即 Ω^-的 ε 扩张。因此，令 $\rho'(\varepsilon):=\rho(\Omega^-_\varepsilon)$，我们有

$$\limsup_{n\to\infty}\rho_n\leq\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\rho'(\varepsilon).$$

在附加假设 $S\subseteq\Omega^-$下，我们证明当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，$\rho'(\varepsilon)\downarrow\rho$，由此完成 $\limsup\rho_n\leq\rho$ 的证明。要证明 $\rho'(\varepsilon)\downarrow\rho$，还需要进一步论证，因为内半径在集合递减极限下并不连续。例如，裂缝圆盘 $\mathbb{D}\setminus[0,1)$ 的内半径为 $1/2$，但它的任意 ε-扩张的内半径都是 1。

由于 U_μ 在 $\mathbb{C}\setminus S$ 上调和，且 $S\subseteq\Omega^-$，并且在 ∞附近，$U_\mu(z)\sim\log|z|$，水平集 $\{U_\mu=0\}$ 是一个紧集，由若干条曲线组成；除离散的点集外，这些曲线均为实解析曲线（U_μ 的临界点是局部定义的解析函数的零点）。它还将 S 与 ∞分隔开。因此，$\{U_\mu<0\}$ 可以写成若干个 Jordan 域的并，且内半径大于任意给定数值的连通分支至多只有有限个。

选取一个达到内半径 ρ 的 $V\Omega^-$ 的连通分支。V 的边界上至多有有限个 U_μ 的临界点。在任意这样的临界点附近，U_μ 是一个全纯函数的实部，该函数的形式类似于 cz^p（其中 p），因此 $U_\mu=0$ 类似于一组等角线，相邻射线之间的角度为 π/p。特别地，不存在尖点。这说明 V 满足如下“外部球条件”：存在一个 $\delta_0>0$ 和 $B<\infty$，使得对于任意 $\delta<\delta_0$ 以及每个 $w\in\partial V$，存在一个

$$w'\in\mathbb{C}\setminus V \text{ such that } |w'-w|=\delta \text{ and } |w'-z|\geq\delta/B \text{ for all } z\in\Omega^-. \tag{12}$$

现在假设 $\mathbb{D}(z,\ r)\subseteq\Omega^-_\varepsilon$。如果 $\varepsilon<\delta_0/B$，我们断言 $\mathbb{D}(z,\ r-2B\varepsilon)\subseteq\Omega^-$，这当然证明了 $\rho\geq\rho'(\varepsilon)-B\varepsilon$，从而完成证明。如果该断言不成立，那么我们可以找到 $w\in\partial V$ 使得 $|w-z|\leq r-2B\varepsilon$。按照（12）取 w'，其中 $\delta=B\varepsilon$。于是 $w'\notin\Omega^{\delta/B}=\Omega_\varepsilon$，但是

$$|w'-z|\leq|w'-w|+|w-z|\leq\frac{\delta}{B}+r-2B\varepsilon<r.$$

这与 $w'\in\mathbb{D}(z,\ r)\subseteq\Omega_\varepsilon$ 矛盾。 □

4. 定理 1.3 和推论 1.4 的证明

可以使用标准的网论证来证明该定理。不过，我们想先用另一种方法给出推论 1.4 的证明，这种方法本身可能也值得关注。在本节末尾，我们将概述用于证明定理 1.3 的网论证。

在推论 1.4 的证明中，我们需要以下引理。

引理 4.1. *在推论 1.4 的假设下，存在 $c_1 > 0$ 使得*

$$\mathbb{P}\left(\log|p_n'(X_1)| \le \frac{m}{2}(n-1)\right) \le e^{-c_1 n}.$$

首先，我们假设上述引理成立，并证明该推论。

推论 1.4 的证明. 令 G_i 为包含 X_i的 Λ_n 的连通分支。于是，根据伯恩斯坦不等式，我们有

$$|p_n'(X_i)| \le C\frac{n^2}{\operatorname{diam}(G_i)}\|p_n\|_{\partial G_i} = C\frac{n^2}{\operatorname{diam}(G_i)}. \tag{13}$$

由引理 4.1，我们有

$$|p_n'(X_i)| \ge \exp\left\{\frac{m}{2}(n-1)\right\}, \quad \text{w.o.p.}$$

由此，根据（13）可得

$$\operatorname{diam}(G_i) \le Cn^2\exp\left\{-\frac{m}{2}(n-1)\right\}, \quad \text{w.o.p.} \tag{14}$$

当对于每个 $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ 都有 $\operatorname{diam}(G_i) < r_n$ 时，事件 $\Lambda_n \subset \bigcup_{k=1}^n \mathbb{D}_{r_n}(X_k)$ 发生。利用（14）和并集界，如果我们取 $r_n = \exp\{-c_0 n\}$，其中 c_0 适当，则所有这些事件以压倒性概率发生。□

剩下的工作是证明引理 4.1。

*引理 4.1 的证明。*我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\log|p_n'(X_1)| \le \frac{m}{2}(n-1)\right\} &= \int_S \mathbb{P}\left\{\log|p_n'(X_1)| \le \frac{m}{2}(n-1)\Big|X_1 = z\right\} d\mu(z) \\ &= \int_S \underbrace{\mathbb{P}\left\{\sum_{k=2}^n \log|z - X_k| \le \frac{m}{2}(n-1)\right\}}_{(*)} d\mu(z).\end{aligned} \tag{15}$$

将被积函数（$*$）改写为

$$(*) = \mathbb{P}\left\{Z \ge \left(U_\mu(z) - \frac{m}{2}\right)(n-1)\right\}, \quad Z = (n-1)U_\mu(z) - \sum_{k=2}^n \log|z - X_k|.$$

于是我们有（其中 θ 将在下文选定）

$$\begin{aligned}(*) &= \mathbb{P}\left\{e^{\theta Z} \ge e^{\theta(n-1)(U_\mu - m/2)}\right\} \\ \text{(since } U_\mu \ge m\text{)} \quad &\le \mathbb{P}\left\{e^{\theta Z} \ge e^{\theta(n-1)(m/2)}\right\} \\ &\le e^{-\theta(n-1)(m/2)}\mathbb{E}e^{\theta Z}.\end{aligned}$$

令 $Z_k = -\log|z - X_k| + U_\mu(z)$，使得 $Z = Z_2 + \ldots + Z_n$。由于 X_i 是独立同分布的，因此 Z_i 也是，我们有

$$\mathbb{E}e^{\theta Z} = \left(\mathbb{E}e^{\theta Z_2}\right)^{n-1}.$$

我们声称存在 $\tau < \infty$ 和 $\theta_0 > 0$（不依赖于 $z \in S$），使得

$$\mathbb{E}[e^{\theta Z_2}] \le e^{\tau\theta^2} \quad \text{for } |\theta| < \theta_0. \tag{16}$$

假设这一点，证明即可如下完成：

$$\begin{aligned}(*) &\le e^{-\theta(n-1)m/2} e^{(n-1)\tau\theta^2} \\ &= e^{-\frac{1}{4}m\theta(n-1)} \end{aligned} \tag{17}$$

只要我们选择 $\theta < \frac{m}{4\tau}$。将其代入 (15)，得到

$$\mathbb{P}\left\{\log|p_n'(X_1)| \le \frac{m}{2}(n-1)\right\} \le e^{-\frac{1}{4}m\theta(n-1)},$$

这就推出了引理中的结论。

剩下的工作是证明 (16)。定义 A 中的假设 (D) 表明，对于 $z \in S$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Z_1 > t\} &= \mathbb{P}\{|z - X_1| \le e^{U_\mu(z)-t}\} \\ &\le Ce^{\varepsilon(M-t)}\end{aligned}$$

其中 $M = \sup_{z\in S} U_\mu(z)$。另一方面，当 t 足够大时，$\mathbb{P}\{Z_1 < -t\} = 0$，因此必要时取更小的 ε，即可得到以下界

$$\mathbb{P}\{|Z_1| > t\} \le 2e^{-\varepsilon t}.$$

满足上述尾界的随机变量称为次指数（参见 [41] 中的第 2.7 节）。众所周知（参见 [41] 中命题 2.7.1 的蕴含关系 $(a) \implies (e)$），若次指数随机变量的均值为零，则 (16) 成立。□

现在我们概述定理 1.3 的证明思路

定理 1.3 的证明。 导出 (17) 的同一论证（基本上是因为 $-\log|z - X_1| + U_\mu(z)$ 服从次指数分布）表明，存在 $\theta > 0$

$$\mathbb{P}\{\log|p_n(z)| < \frac{1}{2}mn\} \le e^{-\theta n} \tag{18}$$

对任意 $z \in L$ 均成立。令 $r_n = e^{-\frac{\theta}{4}n}$。那么，若 $z \in L \setminus \bigcup_{k=1}^n B(X_k, r_n)$，我们有

$$|\nabla \log|p_n(z)|| = \Big|\sum_{k=1}^n \frac{1}{z - X_k}\Big| \le \frac{n}{r_n}.$$

因此，若 $z \in L \setminus \bigcup_{k=1}^n B(X_k, (1 + \frac{m}{4})r_n)$，则结合梯度的界与 (18)，可得

$$\mathbb{P}\left\{\inf_{B(z,\frac{1}{4}mr_n)} \log|p_n| \ge \frac{1}{4}mn\right\} \ge 1 - e^{-\theta n}.$$

不失一般性，假设 $m \le 1$，我们可以选取一个由 C/r_n^2 个点组成的网，使得 $L\setminus\bigcup_{k=1}^n B(X_k, 2r_n)$ 中的每一点到网中某一点的距离都不超过 $mr_n/4$。于是，根据我们对 r_n的选择，$L\setminus\bigcup_{k=1}^n B(X_k, 2r_n)$上的 $\log|p_n| > \frac{1}{4}mn$处处成立的概率至少为 $1 - \frac{C}{r_n^2}e^{-\theta n} \ge 1 - Ce^{-\frac{\theta}{2}n}$。□

5. 定理 1.5 的证明

首先，我们声称对于任意 $\varepsilon > 0$， $\Lambda_n \subseteq (1+\varepsilon)\mathbb{D}$ 以高概率成立。确定性地， $\Lambda_n \subseteq 2\mathbb{D}$，因为 μ 的支撑位于 $\mathbb{S}^1$上。此外， $U_\mu(z) = \log_+ |z|$，因此 $L = \{z : \ 1+\varepsilon \le |z| \le 2\}$ 是 Ω^+的一个紧子集。由定理 1.1 或定理 1.3 可知， $L \cap \Lambda_n = \emptyset$ 以高概率成立，从而证明了 $\Lambda_n \subseteq (1+\varepsilon)\mathbb{D}$以高概率成立。

因此，只需考虑 $\Lambda_n \cap \mathbb{D}$。考虑

$$g_n(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \log|z - X_k|$$

对于 $z \in \mathbb{D}$。由于 X_k 在 $\mathbb{S}^1$上均匀分布，因此可得 $\mathbb{E}[\log|z - X_1|] = 0$。令

$$K(z,w) = \mathbb{E}[(\log|z-X_1|)(\log|w-X_1|)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|z - e^{i\theta}| \log|w - e^{i\theta}| \, d\theta.$$

因此 $\mathbb{E}[g_n(z)] = 0$ ，且 $\mathbb{E}[g_n(z)g_n(w)] = K(z, \ w)$。

令 g 为定义在 $\mathbb{D}$ 上的（实值）高斯过程，其期望为 $\mathbb{E}[g(z)] = 0$，协方差函数为 $\mathbb{E}[g(z)g(w)] = K(z, w)$。由中心极限定理可得

$$(g_n(z_1), \dots, g_n(z_k)) \xrightarrow{d} (g(z_1), \dots, g(z_k))$$

对任意 z_1、…、 $z_k \in \mathbb{D}$。我们注意到 $g_n(0) = 0$，并声称对于任意$r < 1$， $\sup_{r\mathbb{D}} |\nabla g_n|$ 具有紧性。根据一个众所周知的测度紧性判据（在赋予紧集上一致收敛拓扑的空间 $C(\mathbb{D})$ 上），这证明了作为过程的 $g_n \to g$ 依分布收敛（见 [4]中的定理 7.2）。

为了证明 $\sup_{r\mathbb{D}} |\nabla g_n|$的紧性，固定 $r < s < 1$，并注意到 $\nabla g_n(z)$本质上与$F_n(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - X_k}$相同，后者在 $\mathbb{D}$上全纯。根据柯西积分公式，对于 $|z| < r$，

$$\begin{aligned}
|F_n(z)|^2 &= \Big|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F_n(se^{i\theta})}{z - se^{i\theta}} ise^{i\theta} d\theta\Big|^2 \\
&\le \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F_n(se^{i\theta})|^2 d\theta\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|z - se^{i\theta}|^2} d\theta\right) \\
&\le \frac{1}{(s-r)^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F_n(se^{i\theta})|^2 d\theta.
\end{aligned}$$

该界与 z无关，因此取期望可得，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\sup_{r\mathbb{D}} |F_n|)^2] &\le \frac{1}{(s-r)^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbb{E}\left[|F_n(se^{i\theta})|^2\right] d\theta \\
&\le \frac{1}{(s-r)^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbb{E}\left[\frac{1}{|se^{i\theta} - X_1|^2}\right] d\theta \\
&\le \frac{1}{(s-r)^2(1-s)^2}.
\end{aligned}$$

L^2 中的有界性意味着 F_n的分布具有紧性，正如所声称的那样。

为了准确陈述几乎必然收敛的结论，需要在同一个概率空间上构造g_n 和 g。一种实现方式是使用 Skorokhod 表示定理（见 [4]中的定理 6.7），由此可知，可以在一个概率空间上构造 g_n 和 g，使得 $g_n \to g$ 在紧集上一致收敛，且几乎必然成立。因此，只要证明以下引理，定理 1.5 的证明便告完成。

引理 5.1. 设 f_n、 f； $\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ 为光滑函数，且满足 $\{f = 0\} \cap \{\nabla f = 0\} = \emptyset$。假设 $f_n \to f$在 $\mathbb{D}$的紧集上一致收敛。那么， $\rho(\{f_n < 0\}) \to \rho(\{f < 0\})$。

事实上，将此应用于 g_n, g，我们几乎必然有 $\rho(\Lambda_n \cap \mathbb{D}) \to \rho(\{g < 0\})$。另一方面，对于任意 $\varepsilon > 0$，定理 1.3 表明， $\Lambda_n \cap ((1+\varepsilon)\mathbb{D})^c$ 以高概率包含于半径为 e^{-cn} 的 n 个圆盘之并。结合这两点，我们几乎必然有 $\rho(\Lambda_n) \to \rho(\{g < 0\})$，从而也有分布收敛。这就完成了定理 1.5 中收敛结论的证明。

引理 *5.1* 的证明。对于任意 $U \subseteq \mathbb{D}$，显然 $\rho(U) - \varepsilon \le \rho(U \cap (1-\varepsilon)\mathbb{D}) \le \rho(U)$。将此应用于 $U = \{f_n < 0\}$ 和 $U = \{f < 0\}$，可知要证明 $\rho(\{f_n < 0\}) \to \rho(\{f < 0\})$，只需证明对每个 $\varepsilon > 0$，都有 $\rho(\{f_n < 0\} \cap (1-\varepsilon)\mathbb{D}) \to \rho(\{f < 0\} \cap (1-\varepsilon)\mathbb{D})$。在 $(1-\varepsilon)\mathbb{D}$ 上，收敛是一致的，因此对于任意 $\delta > 0$，当 n 充分大时，我们有 $\{f < -\delta\} \subseteq \{f_n < 0\} \subseteq \{f < \delta\}$ 。剩下只需证明 $\delta \mapsto \rho(\{f < \delta\})$ 在 $\delta = 0$ 处连续。

首先证明，当 $\delta \downarrow 0$ 时， $\rho(\{f < -\delta\}) \uparrow \rho(\{f < 0\})$。若 $B(z, r) \subseteq \{f < 0\}$，则对任意 $\varepsilon > 0$， f 在 $B(z, r-\varepsilon)$ 上的最大值是某个 $-\delta < 0$。因此 $\rho(\{f \le -\delta\}) \ge r - \varepsilon$ ，从而证明 $\rho(\{f < -\delta\}) \uparrow \rho(\{f < 0\})$。

接下来证明，存在某个 $\delta_n \downarrow 0$ 使得 $\rho(\{f \le \delta_n\}) \downarrow \rho(\{f \le 0\})$。令 $r_n = \rho(\{f \le \frac{1}{n}\})$，并求得 z_n，使得 $B(z_n, r_n) \subseteq \{f \le \frac{1}{n}\}$。不失一般性，令 $r_n \downarrow r_0$ 和 $z_n \to z_0$。于是，若 $w \in B(z_0, r_0)$，则当 n 足够大时， $w \in B(z_n, r_n)$，因此当 n 足够大时， $f(w) \le \frac{1}{n}$。由此 $f \le 0$ 在 $B(z_0, r_0)$ 上成立，说明 $\rho(\{f \le 0\}) \ge \lim^{\rho}_{\delta \downarrow 0}(\{f \le \delta\})$。

根据假设 $\{f = 0\} \cap \{\nabla f = 0\} = \emptyset$，我们断言 $\rho(\{f \le 0\}) = \rho(\{f < 0\})$。事实上，若 $B(z, r) \subseteq \{f \le 0\}$，那么实际上 $B(z, r) \subseteq \{f < 0\}$。否则，我们将得到 $w \in B(z, r)$，且 $f(w) = 0$，这意味着 w 是 f 的局部极大值，因此 $\nabla f(w) = 0$。

这证明了 $\delta \mapsto \rho(\{f < \delta\})$ 在 $\delta = 0$ 处的连续性，因而也证明了该引理。 □

至此，我们完成了第一部分的证明，即 $\rho_n = \rho(\{g_n < 0\})$ 依分布收敛到 $\rho = \rho(\{g < 0\})$。要证明 $\mathbb{P}(\{\rho < \varepsilon\}) > 0$，只需证明 $g > 0$ 在 $(1-\varepsilon)\mathbb{D} \cap \{|\operatorname{Im} z| > \varepsilon\}$ 上以正概率成立。要证明 $\mathbb{P}(\{\rho > \frac{1}{2} - \varepsilon\}) > 0$，只需证明 $g < 0$ 在 $(1-\varepsilon)\mathbb{D} \cap \{|\operatorname{Im} z| > \varepsilon\}$ 上以正概率成立。我们分两步完成证明。

(1) 存在 $u_0 : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$，其为调和函数，满足 $u_0(0) = 0$，使得 $u_0 < 0$ 在 $(1-\varepsilon)\mathbb{D} \cap \{|\operatorname{Im} z| > \varepsilon\}$ 上成立。这是已知结果，参见定理 6.1 的证明，或取 Wagner 的引理 5 中构造的多项式p 的 $\log|p|$ [42]。

(2) 对任意 $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$，其为调和函数，满足 $u(0) = 0$，以及任意 $r < 1$ 和 $\varepsilon > 0$，我们断言$\|g - u\|_{\sup(r\mathbb{D})} < \varepsilon$ 以正概率成立。将此应用于上一步中的 u_0 和 $-u_0$，可知 $\rho > \frac{1}{2} - \varepsilon$ 以正概率成立，且 $\rho < \varepsilon$ 以正概率成立。

为此，我们注意到过程 g 可以表示为

$$g(z) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} a_k z^k$$

其中 a_k 是独立同分布的标准复高斯随机变量。 g（如上所定义）的协方差为

$$\mathbb{E}[g(z)g(w)] = \sum_{k \ge 1} \frac{1}{k^2}(z^k \bar{w}^k + w^k \bar{z}^k)$$

可以验证，这与前面给出的 $K(z,\ w)$ 的积分表达式一致。对于任意满足 $u(0)\ =0$ 的调和 u：$\mathbb{D}\to\mathbb{R}$，将其写为

$$u(z)=\operatorname{Re}\sum_{k\geq 1}c_k z^k$$

并选择 N 使得

$$\|\sum_{k>N}c_k z^k\|_{\sup(r\mathbb{D})}<\varepsilon.$$

若两个事件

$$\mathcal{A}_N=\left\{\|\sum_{k>N}\frac{a_k}{k}z^k\|_{\sup(r\mathbb{D})}<\varepsilon\right\},$$
$$\mathcal{B}_N=\left\{|\frac{2a_k}{k}-c_k|<\frac{\varepsilon}{N}\text{ for }1\leq k\leq N\right\}$$

同时发生，则 $|g-u|<3\varepsilon$ 位于 $r\mathbb{D}$上。由于 $\mathcal{A}_N$ 和 $\mathcal{B}_N$ 相互独立且具有正概率，因此我们还有 $\mathbb{P}(\mathcal{A}_N\cap\mathcal{B}_N)\ >0$。

6. 定理 1.6 的证明

证明思路沿袭以往：首先固定 $t>0$，并证明对于位于 $|z|\ =1-t$上的固定 z，$\log|p_n(z)|$ 以高概率为负。由此通过网论证可知，整个圆（因而整个圆盘）以高概率包含在 Λ_n 中。

令 $t\in(0,\ 1-\frac{1}{100})$，并固定 z，使得 $|z|=1-t$。与之前一样，取对数可得

$$\log|p_n(z)|=\sum_{k=1}^{n}\log|z-X_k|,$$

但现在根不再是独立同分布的。定义 F_t： $\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ 如下

$$F_t(w)=\begin{cases}\log\frac{1}{t}, & |z-w|\geq\frac{1}{t}\\ \log|z-w|, & t<|z-w|<\frac{1}{t}\\ \log t, & |z-w|\leq t.\end{cases}$$

接下来，我们写出

$$\begin{aligned}\log|p_n(z)|&=\sum_{k=1}^{n}F_t(X_k)+\sum_{k:|z-X_k|\geq\frac{1}{t}}\left(\log|z-X_k|-\log\frac{1}{t}\right)+\sum_{k:|z-X_k|\leq t}(\log|z-X_k|-\log t)\\&=:\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2+\mathcal{L}_3.\end{aligned}$$

由于项 $\mathcal{L}_3$ 为负，我们有

$$\mathbb{P}\left(\log|p_n(z)|\geq-\frac{t}{4}n\right)\leq\mathbb{P}\left(\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2\geq-\frac{t}{4}n\right)\tag{19}$$

我们断言 (19) 右侧呈指数衰减。为此，我们需要以下

命题 6.1。 固定 $t>0$。存在常数 c_t、 $c_2>0$，使得对于所有充分大的 n，我们有

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{L}_1\geq-\frac{t}{2}n\right)\leq 5\exp(-c_t n),\ \ \mathbb{P}(\mathcal{L}_2\geq\frac{t}{4}n)\leq n\exp(-c_2 n).$$

暂且假设该命题成立。那么，很容易看出，(19) 的右端随 n. 指数级趋于 0。事实上，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2\geq-\frac{t}{4}n\right)&=\mathbb{P}\left(\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2\geq-\frac{t}{4}n,\ \mathcal{L}_2<\frac{t}{4}n\right)+\mathbb{P}\left(\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2\geq-\frac{t}{4}n,\ \mathcal{L}_2\geq\frac{t}{4}n\right)\\&\leq\mathbb{P}\left(\mathcal{L}_1\geq-\frac{t}{2}n\right)+\mathbb{P}\left(\mathcal{L}_2\geq\frac{t}{4}n\right)\\&\leq 5\exp(-c_tn)+n\exp(-c_2n).\end{aligned}$$

这就证明了该断言。现在我们继续证明命题 6.1。

命题 *6.1* 的证明。**步骤**1**：关于** $\mathcal{L}_2$ 的估计

令 $N_t=|\{k\colon\ |z-X_k|\geq\frac{1}{t}\}|$。若 $\mathcal{L}_2\geq\frac{t}{4}n$，则必有 $N_t\geq1$，其概率至多为e^{-cn}，其中 $c>0$。为此，我们回顾一下关于 Ginibre 系综特征值的以下事实。

引理 6.2 (Kostlan [20], [14])。设 λ_j 为 ***Ginibre*** 随机矩阵（未归一化）的特征值（按模从小到大排序）。那么，

$$\{|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,...,|\lambda_n|^2\}\sim\{Y_1,Y_2,...,Y_n\},$$

其中 Y_j 是由 j 个独立同分布的 $Exp(1)$ 随机变量之和。

现在来证明这个断言。由于 $|z|<1$ 和 $t\in(0,\frac{1}{100})$ $|z-X_k|\geq\frac{1}{t}$ 例如可推出$|X_k|>99$.因此，经过简单推导并应用引理 6.2，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_t\geq1)\quad&\leq\mathbb{P}(\max_k|X_k|\geq99)\\&=\mathbb{P}(\max_k|X_k|^2\geq99^2)\\&=\mathbb{P}(\max_k|\lambda_k|^2>99^2n)\\&=\mathbb{P}(\max_kY_k>99^2n),\end{aligned}$$

其中，从上面的第二行到第三行时，我们用到了 $X_j=\frac{\lambda_j}{\sqrt{n}}$。接着，利用并集界和克拉默-切尔诺夫估计，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max_kY_k>99^2n)\quad&\leq n\mathbb{P}(Y_n>99^2n)\\&\leq n\exp(-c_2n),\end{aligned}$$

将此结果与上面的估计结合起来，我们得到

$$\mathbb{P}(N_t\geq1)\leq n\exp(-c_2n),$$

这正是所需的结果。

步骤 2**：关于** $\mathcal{L}_1$**的估计**

所需的估计等价于

$$\mathbb{P}\big\{\mathcal{L}_1-\mathbb{E}(\mathcal{L}_1)\geq-\frac{t}{2}n-\mathbb{E}(\mathcal{L}_1)\big\}\leq5\exp(-c_tn).\tag{26}$$

作为准备，注意到 $\frac{1}{n}\mathbb{E}(\mathcal{L}_1)=\mathbb{E}\left(\int F_td\mu_n\right)$，其中 μ_n 是式（2）中定义的经验谱测度。根据随机矩阵圆律， [38]，几乎必然地 μ_n，并且

其期望也都收敛于单位圆盘上的均匀测度。鉴于 F_t 是有界连续函数，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbb{E}(\mathcal{L}_1)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}F_t dm=\frac{|z|^2-1}{2}+\frac{t^2}{2}, \tag{27}$$

其中，(27) 中的第二个等式可由与例 1.7 中类似的计算得到。利用 $|z|=1-t$，右侧的量可化简为 $-t+t^2$。因此，当 n 足够大时，我们有$\mathbb{E}(\mathcal{L}_1)\le-\frac{3}{4}tn$，于是，若 (26) 中的事件成立，则

$$\mathcal{L}_1-\mathbb{E}(\mathcal{L}_1)\ge\frac{t}{4}n.$$

因此，我们当前的目标可归结为证明上述事件发生的概率至多为 $5\exp(-c_tn)$，其中 c_t 是适当的常数。我们将用到 Pemantle 和 Peres 的以下结果 [29,定理 3.2]。

定理 6.3。给定一个含有 $n<\infty$ 个点的行列式点过程，以及一个定义在有限计数测度上的 *Lipschitz*-1 函数，对于任意 $a>0$，我们有

$$\mathbb{P}\left(|f-\mathbb{E}(f)|\ge a\right)\le 5\exp\left(-\frac{a^2}{16(a+2n)}\right).$$

称 f 在有限计数测度空间上是 Lipschitz-1 函数，意味着

$$\left|f\left(\sum_{i=1}^{k+1}\delta_{x_i}\right)-f\left(\sum_{i=1}^{k}\delta_{x_i}\right)\right|\le 1$$

对于任意 $k\ge0$ 以及任意点 x_1、……、x_k。

在我们的情形中，正如我们回顾过的，$\{X_1,X_2,...,X_n\}$ 是一个恰有 n个点的行列式点过程。此外，$\mathcal{L}_1$ 是 Lipschitz 连续的，其 Lipschitz 常数为 $\|F_t\|_{\sup}=\log\frac{1}{t}$。将定理 6.3 应用于 $\mathcal{L}_1$和$\log(1/t)$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big\{\mathcal{L}_1-\mathbb{E}(\mathcal{L}_1)\ge\frac{t}{4}n\big\}&=5\exp\left\{-\frac{t^2n^2}{256(\log(1/t))^2(\frac{tn}{4\log(1/t)}+2n)}\right\}\\&\le 5\exp\{-c_tn\}\end{aligned}$$

其中，对于一个较大的常数 c，我们可以取 $c_t=ct^2/\log(1/t)^2$。由此完成了该命题的证明。□

既然我们已经证明了逐点估计，就可以使用引理 6 中的网论证来说明，整个圆 $|z|=1-t$ 以压倒性概率包含在勒让德曲线内。接着，最大值原理表明，相应的圆盘以压倒性概率包含在勒让德曲线内。由此完成了对 Λ_n以压倒性概率包含 $\mathbb{D}_r$ 这一结论的证明。

接下来，我们证明对于 $s>1$，$\Lambda_n\subseteq\mathbb{D}_s$ 以高概率成立。固定 $1<s'<s$，并令 $\delta=s-s'$ 且令 $\varepsilon=\frac{1}{2}\log s$。证明分为四步。

(1) 对所有 j，以高概率（w.o.p.）成立，即概率至少为$1-e^{-cn}$。为此，应用引理 6.2 可知，补事件的概率小于 $ne^{-c(s')^n}$，理由与 (25) 中相同，并注意到 99^2 可替换为任何大于 1 的常数。

(2) 固定满足 $|z| = s$ 的 z，并令 $f_{z,\delta}(w) = \log\left(\min\{\max\{|z-w|, \delta\}, \frac{1}{\delta}\}\right)$，这是一个有界连续函数。于是根据 [31]（定理 9），

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_{z,\delta}(\lambda_j/\sqrt{n}) - \int_{\mathbb{D}} f_{z,\delta}(w)\frac{dm(w)}{\pi}\right| > \varepsilon\right\} \le e^{-c_{\varepsilon,\delta}n^2}.$$

(3) 在 (1) 中的事件发生时，$f_{z,\delta}(\lambda_j/\sqrt{n}) =$ 对所有 j 以及所有 $|z| = s$，都有 $\log|z - \frac{\lambda_j}{\sqrt{n}}|$。此外，对于所有 $w \in \mathbb{D}$，$f_{z,\delta}(w) = \log|z-w|$。因此，以高概率成立。

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\log|p_n(z)| - \log s\right| > \varepsilon\right\} \le e^{-c_{\varepsilon,\delta}n^2} + e^{-cn}.$$

因此，根据 $\varepsilon = \frac{1}{2}\log s$ 的选取，以高概率有 $\frac{1}{n}\log|p_n(z)| > \frac{1}{2}\varepsilon$。

(4) 设 $m = \frac{100}{\varepsilon\delta}$，并设 $z_1, \ldots, z_m$ 为 $\partial\mathbb{D}_s$ 上等间距的点。由上一步可知，以高概率有 $\inf_{j\le m}\frac{1}{n}\log|p_n(z_j)| > \frac{1}{2}\varepsilon$。在 (1) 中的事件发生时，$\|\nabla\frac{1}{n}\log|p_n(z)|\| \le \frac{1}{\delta}$，因此

$$\inf_{|z|=s}\frac{1}{n}\log|p_n(z)| > 0$$

以高概率。在此事件上 $\Lambda_n \subseteq \mathbb{D}_s$。

定理 1.6 的证明至此结束。

参考文献

[1] R. Ayoub。勒让德曲线与 Fagnano 对椭圆积分的贡献。《科学史档案》，29(2)：131–149，1984。[2] I. Bauer 和 F. Catanese。代数函数的典型勒让德曲线。《数学年刊》，307(3)：417–444，1997。[3] S. R. Bell。与平面域相关的黎曼曲面及势理论中的复杂性。《休斯敦数学杂志》，26(2)：277–297，2000。[4] P. Billingsley。概率测度的收敛。威利概率与统计丛书：概率与统计。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，第二版，1999。Wiley-Interscience 出版物。[5] P. Borwein。勒让德曲线的弧长 $\{|p(z)| = 1\}$。《美国数学会会刊》，123(3)：797–799，1995。[6] S. Boucheron、G. Lugosi 和 P. Massart。集中不等式。牛津大学出版社，牛津，2013。非渐近理论：独立性，附 Michel Ledoux 撰写的序言。[7] F. Catanese 和 M. Paluszny。多项式勒让德曲线、树与辫群。《拓扑学》，30(4)：623–640，1991。[8] P. Ebenfelt、D. Khavinson 和 H. S. Shapiro。二维形状与勒让德曲线。载于《复分析与动力系统 IV》。第1部分，《当代数学》第553卷，第45–59页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2011。[9] M. Epstein、B. Hanin 和 E. Lundberg。随机多项式的勒让德树。《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔），70(4)：1663–1687，2020。[10] P. Erd˝os、F. Herzog 和 G. Piranian。多项式的度量性质。《数学分析杂志》，6：125–148，1958年。[11] A. Eremenko 和 W. Hayman。关于勒让德曲线的长度。《密歇根数学杂志》，46(2)：409–415，1999。[12] A. Fryntov 和 F. Nazarov。Erd¨os-Herzog-Piranian 勒让德曲线长度的新估计。载于《线性与复分析》，《美国数学会译丛》第2辑第226卷，第49–60页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2009。[13] B. Gustafsson、M. Putinar、E. B. Saff 和 N. Stylianopoulos。群岛上的 Bergman 多项式：估计、零点与形状重建。《数学进展》，222(4)：1405–1460，2009。[14] J. B. Hough、M. Krishnapur、Y. Peres 和 B. Vir´ag。高斯解析函数的零点与行列式点过程。《大学讲座丛书》第51卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2009。[15] M. Jeong 和 M. Taniguchi。有限连通平面域的 Bell 表示的系数体。《数学分析及其应用杂志》，295(2)：620–632，2004。[16] Z. Kabluchko 和 I. Wigman。随机勒让德曲线节点分支期望数量的渐近式。《国际数学研究通知》，即将出版，预印本：arXiv:1902.08424。[17] D. Khavinson、S.-Y. Lee 和 A. Saez。调和多项式的零点、临界勒让德曲线与焦散线。《复分析协同》，4(1)：论文第2号，20页，2018。[18] D. Khavinson 和 E. Lundberg。线性全纯偏微分方程与经典位势理论，《数学调查与专著》第232卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2018。

[19] D. Khavinson、M. Mineev-Weinstein、M. Putinar 和 R. Teodorescu。勒让德曲线无法在拉普拉斯生长中存续。《数学研究快报》，17(2)：335–341，2010。[20] E. Kostlan。关于高斯矩阵的谱。载于《矩阵理论方向》，第162/164卷，第385–388页。（阿拉巴马州奥本，1990），1992。[21] A. Lerario 和 E. Lundberg。关于随机勒让德曲线的几何。《伦敦数学会会刊》（第3辑），113(5)：649–673，2016。[22] A. Lerario 和 E. Lundberg。关于随机调和多项式的零点：截断模型。《数学分析及其应用杂志》，438(2)：1041–1054，2016。[23] E. Lundberg 和 K. Ramachandran。随机勒让德曲线的弧长与拓扑。《伦敦数学会杂志》，96(3)：621–641，2017。[24] E. Lundberg 和 V. Totik。代数曲线生长。《分析、数学物理》，3(1)：45–62，2013。[25] J. Milnor。单复变量动力学，《数学年刊研究丛书》第160卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，第三版，2006。[26] B. Nagy 和 V. Totik。希尔伯特代数曲线定理的强化。《数学分析杂志》，96：191–223，2005。[27] F. Nazarov、L. Polterovich 和 M. Sodin。拉普拉斯特征函数节点几何中的符号与面积。《美国数学杂志》，127(4)：879–910，2005。[28] F. Nazarov 和 M. Sodin。高斯随机函数零点集的空间分布及其连通分支数量的渐近规律。《数学、物理、分析与几何杂志》，12(3)：205–278，2016。[29] R. Pemantle 和 Y. Peres。行列式测度及其他强 Rayleigh 测度的利普希茨泛函集中性。《组合学、概率与计算》，23：140–160，2013。[30] A. O. Petters、H. Levine 和 J. Wambsganss。奇点理论与引力透镜，《数学物理进展》第21卷。Birkh¨auser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，2001。附 David Spergel 撰写的序言。[31] D. Petz 和 F. Hiai。对数能量作为熵泛函。载于《微分方程与数学物理进展》（佐治亚州亚特兰大，1997），《当代数学》第217卷，第205–221页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1998。[32] C. Pommerenke。关于多项式的导数。《密歇根数学杂志》，6：373–375，1959。[33] C. Pommerenke。关于复多项式的度量性质。《密歇根数学杂志》，8：97–115，1961。[34] T. Ransford。复平面中的势理论，《伦敦数学会学生教材》第28卷。剑桥大学出版社，剑桥，1995。[35] T. Richards 和 M. Younsi。伪代数曲线的共形模型与指纹。《构造逼近》，45(1)：129–141，2017。[36] T. J. Richards。关于复多项式几何的一些近期结果：高斯-卢卡斯定理、多项式代数曲线、形状分析与共形等价。《复分析协同》，7(2)：论文第20号，9页，2021。[37] V. N. Strakhov 和 M. A. Brodsky。关于反对数势问题的唯一性。工业与应用数学学会应用数学杂志，46(2)：324–344，1986。[38] T. Tao 和 V. Vu。随机矩阵：非厄米矩阵局部谱统计的普适性。《概率年刊》，43(2)：782–874，2015。[39] L. N. Trefethen 和 D. Bau，III。数值线性代数。工业与应用数学学会（SIAM），宾夕法尼亚州费城，1997。[40] A. N. Varchenko 和 P. I. `Etingof。为什么圆形液滴的边界会变成四阶曲线，《大学讲座丛书》第3卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1992。[41] R. Vershynin。高维概率，《剑桥统计与概率数学丛书》第47卷。剑桥大学出版社，剑桥，2018。附数据科学应用导论，及 Sara van de Geer 撰写的序言。[42] G. Wagner。关于代数曲线域的面积。《数学分析杂志》，50：159–167，1988。[43] E. Wegert 和 L. N. Trefethen。从布丰投针问题到克赖斯矩阵定理。《美国数学月刊》，101(2)：132–139，1994。[44] M. Younsi。形状、指纹与有理勒让德曲线。《美国数学会会刊》，144(3)：1087–1093，2016。