arXiv:2301.13449v1 [cs.GT] 31 Jan 2023

# 竞争性市场中的认证设计

Andreas Haupt Nicole Immorlica Brendan Lucier*

2023年2月1日

**摘要**

受自愿碳市场和教育测试等应用的启发，我们研究这样一种商品市场：商品质量水平各异但不为人知，且市场中存在第三方认证机构。认证机构可以提供有关产品质量的信息性信号，并为此服务收费。卖方选择所生产产品的质量以及认证类型。随后，价格由竞争性市场决定。在单交叉条件下，我们证明生产者在均衡时选择的认证水平是唯一确定的。接着，我们说明如何将收益最大化认证机构的问题化简为一个具有非线性估值的垄断定价问题，并设计一种全多项式时间近似方案，以计算最优候选证书集合及其价格。一般而言，社会福利最优和收益最优的证书集合都可能任意大。

## 1 引言

许多市场出售的商品具有不同的特征，但在消费者看来却完全相同。例如，碳信用市场、管道工或电工等合同工市场，甚至牛奶和鸡蛋等某些实体商品市场。在这些市场中，商品都具有隐藏且难以验证的属性，正是这些属性使它们彼此不同。举例来说，基于自然的碳信用源自各类森林，而这些森林在保护程度和持久性方面各不相同。合同工的技能水平和知识储备也各有差异。实体商品则是在各种不同的条件下生产的，其中一些条件比另一些更合乎伦理、更可持续。

在这类情形下，卖方会寻求通过高成本认证来区分自己的产品。以碳信用为例，大型认证机构会针对碳排放制定认证标准。合同工可以参加认证项目或考试，以证明自己的技能水平。农场也可以联系第三方组织，由其认证食品生产的条件，例如是否采用散养或素食饲喂。

*我们感谢 Robert Maddox、Yanika Meyer-Oldenburg 以及哈佛大学的一位研讨会听众。

在上述每种情况下，下游市场都会根据认证来分配商品。碳交易所支持碳证书交易，本地服务平台则支持电工服务或管道服务交易。这些市场的价格形成独立于认证机构，且不受其控制。因此，无论是以福利最大化还是以收入最大化为目标的认证机构，都需要考虑所提供的认证选项会如何影响交易，以及这又会如何影响认证需求。

认证的存在会对下游市场产生什么影响？我们在一个存在生产活动的竞争性市场背景下回答这一问题。在我们的模型中，大量异质生产者各自生产一个单位的纵向差异化产品。生产者可以选择其产品的质量水平。相应的生产成本由生产者的类型决定，并随质量提高而增加。大量具有单位需求的消费者购买这些商品。消费者的类型也各不相同，这些类型决定了他们对质量偏好的强弱。类型具有完全序，并满足单交叉条件：高类型生产者在生产高质量商品方面相对更有效率，而高类型消费者对质量的偏好相对更强。

质量无法直接验证；取而代之的是，第三方认证机构提供一份认证菜单，其中每种认证都有各自的要求和认证价格。生产者可以从这份菜单中购买针对其产品质量的认证。如果其产品的质量超过证书所规定的质量水平，就会以该质量水平进行营销。认证商品与无法区分的未认证商品随后在竞争性市场中出售。

与认证领域的经济学文献一样，我们假设市场参与者能够正确判断证书对质量的含义（Milgrom（1981）；Grossman（1981）；Lizzeri（1999）；DeMarzo 等（2019））。大量实证研究探讨了在不同市场中，认证是否得到正确解读这一问题（Wimmer 和 Chezum（2003）研究赛马，Tadelis 和 Zettelmeyer（2015）研究二手车拍卖，Ramanarayanan 和 Snyder（2012）研究透析筛查中心，Luca（2016）研究餐厅评论，Elfenbein 等（2015）研究 Ebay 上的卖家评分，Conte 和 Kotchen（2010）研究自愿碳信用）。在我们的模型中，证书依据可验证的认证要求颁发；在完美贝叶斯均衡下，所有市场参与者都对任何给定证书所代表的质量分配持有理性信念。我们指出，这种理性信念未必与官方证书描述一致。例如，在自愿碳市场中，多项实证研究指出，碳证书描述可能与反事实减排结果不符，参见 West 等（2020，2023）；Guizar-Coutiˆno 等（2022）；Clarke 和 Barratt（[n. d.]）；Greenfield（[n. d.]b,n）。

证书的存在显然会影响市场均衡，因为它会影响消费者信念，进而影响支付意愿。我们的第一个结果表明，对于认证机构提供的任何证书菜单，均衡中的证书选择以及下游市场均衡中的配置结果都是唯一的。此外，表现更好的生产者（即能够以更低成本生产更高质量的生产者）会

选择更高（限制更多）的认证等级。这意味着均衡中的生产者—消费者匹配是按类型匹配的。表现更好的生产者会向对质量价值评价更高的消费者销售产品，且产品质量水平也更高。

这一分析立即表明，福利最优菜单以成本价提供每一份证书，并提出了一种动态规划方法，用于在认证等级数量受到基数限制的情况下寻找福利最优菜单。但在许多市场中，认证由具有利润最大化激励的第三方公司提供。我们的主要结果展示了如何在多项式时间内近似构造收益最优菜单。具体而言，我们提供了一个全多项式时间近似方案（FPTAS）：我们展示了如何计算一个菜单，使认证机构获得的收入与最优收入之差小于 $\epsilon$，且运行时间关于 $1/\epsilon$ 为多项式时间。我们的算法还可以选择性地将菜单规模上的基数约束 $k$ 作为输入（即认证等级的最大数量）；在这种情况下，收入基准是至多包含 $k$ 份证书及其价格的最优候选集合。

我们的证明包含一些可能具有独立研究价值的技术性见解。具体而言，我们将认证者问题化约为卖方销售可分商品的问题：该卖方面对的是估值关于数量呈非线性且可能非单调的买方。卖方对应于认证机构，而买方对应于生产者—消费者对。由于均衡中的匹配是唯一的且按类型匹配，因此可以将生产者和消费者投影为单一经济主体。在这一化约问题中，买方估值关于数量是凹的，但不一定单调，这意味着对于不同的买方类型，估值可能在不同数量处达到最大值。这些估值确实满足单交叉性质，这意味着类型可以完全排序，且高类型买方具有逐点更高的估值，并且其偏好的数量弱更高。在这些条件下，我们证明收益最优菜单可能是非线性的，但其价格将随数量单调变化。价格的单调性使得可以利用动态规划构造近似最优菜单，不过，在对数量和价格空间进行离散化时必须谨慎，以确保买方偏好不会发生显著变化。这一非线性定价问题推广了 Bergemann 等（2012a,b）此前专门研究二次需求情形的工作，并且可能具有独立研究价值。

以收入最大化为目标的第三方认证机构所提供的认证菜单，可能扭曲福利并导致交易水平低效。尽管如此，我们证明，认证主体进入市场绝不会造成福利损失，无论其提供何种认证选项菜单。更具体地说，我们可以设想，市场上已有一系列（可能成本高昂的）认证选项可供选择，作为基准；这些选项或许由公共机构或受到严格监管的机构提供。如果第三方认证机构随后进入市场，并以任何价格提供额外的认证选项，我们证明，所有市场参与者的总效用（即使不计入新进入者）只会增加。因此，政策上的启示是

关注逐利动机导致认证效率低下的监管机构，无需阻止认证机构进入市场。相反，只要确保存在一套可供选择的认证，无论由第三方提供者提供，还是作为公共选项提供，能够保障交易产生可接受的福利水平即可。

## 1.1 相关文献

本文对认证文献作出了贡献。早期研究 Milgrom（1981）；Grossman（1981）得出了逐步揭示类型的结果：在均衡中，商品的质量会被完全揭示。认证模型中这些结果的主要直觉是，若认证不提供信息，市场就会将其解读为质量不佳的信号——逆向选择极为严重。在本文的收益最大化认证机构模型中，认证不那么充分地传递信息可能还有其他原因，因为竞争性市场中的价格不仅取决于单个卖方的质量，也可能取决于市场中的所有卖方。后续研究 Lizzeri（1999）；DeMarzo 等（2019）；Acharya 等（2011）允许认证失败，从而弱化了 Milgrom（1981）；Grossman（1981）所得到的鲜明结论。

更广泛地说，本文与如下情形中的机制设计和信息设计相关：设计之后会进行一个外生给定的博弈。关于信息设计的综述，推荐参阅 Bergemann 和 Morris（2019）。本文尤其与向商品的买方和／或卖方提供信息的设计相关。Bergemann 等（2017）研究了第一价格拍卖中的信息设计，其中第三方可以揭示与买方估值相关的信号，并对可实现的收入和收益进行了完整刻画。Alijani 等（2022）将分析扩展到多位买方的情形。在一般的机制设计框架下，Candogan 和 Strack（2021）为一个具有私人类型和隐藏状态的博弈中的行动建议制定了最优披露政策。Dworczak（2020）设计了一类机制：参与者在参加机制后还会参与有限贝叶斯博弈，因此博弈结果会受到机制过程中所揭示信息的影响。他发现第一阶段最优机制具有截断结构。

营利性认证涉及硬信息的销售，这一问题已在竞争性市场的背景下得到研究。Ali 等（2022）考察了一位持有质量不确定商品的卖方。卖方可以在将商品投放市场之前，从一个以收入最大化为目标的中介处购买与质量相关的信号。一般而言，由此产生的均衡并不唯一，且可能存在显著差异，但通过采用噪声信号，中介可以稳健地确保获得高收入。我们的模型有所不同：任何认证选项都向整个市场开放，而且产品质量是内生的，因此认证主体能够影响福利。更一般地说，我们的研究与如何向潜在买方出售与收益相关的硬信息这一问题有关。Bergemann 等（2018）求解了二元环境下的收入最大化机制，而 Bergemann 等（2022）则确定了在更一般的行动空间下，完全披露何时

近似最优。与此相反，我们的认证主体出售的是一种信号，它之所以有价值，是因为它能向后续博弈中的其他参与者传递信息。

在我们的数学分析中，我们将认证者问题化简为一个具有非线性估值的定价问题。Mussa 和 Rosen（1978）之后的非线性定价文献（另见 Dewatripont 等人（2005）以及（B¨orgers 和 Krahmer，2015，第 2.3 章））研究具有二次成本的非线性凹估值。这些论文中的函数形式假设使得最优机制可以用闭式刻画。通常，所提供商品的最优菜单是连续统，这与 Myerson（1981）在其具有影响力的研究中首次考察的线性筛选问题形成对比。我们的分析将表明，我们所考虑的模型类别也可能具有无限菜单。

在我们的多项式时间近似方案中，我们使用了一个非线性定价模型的近似。Bergemann 等（2012年a、b）考察了具有有限菜单（论文中称为“有限信息”）的非线性单维和多维定价环境的近似。这些论文采用了与 Mussa 和 Rosen（1978）类似的函数形式假设，并推导出在这些有限菜单环境中，有限菜单近似的误差率。本文允许效用函数属于满足单交叉条件的一般类别；除了证明可以用有限菜单进行近似外，还表明可以高效地计算有限大小的菜单。

最后，我们用于保证均衡唯一性的主要假设是单交叉条件。单交叉条件在多个领域都很重要，包括相互依存私人价值拍卖（Milgrom 和 Weber（1982））以及社会选择与投票（Saporiti 和 Tohm´e（2006））。算法机制设计领域近期的一系列研究利用单交叉条件，在相互依存价值情境下实现近似最优设计（Roughgarden 和 Talgam-Cohen（2013）；Chawla 等人（2014））。与本文最相关的是，单交叉条件的另一项影响是在市场中产生逆向选择（Mirrlees（1971）；Spence（1974））。

### 1.2 概述

本文其余部分安排如下。第 2 节将形式化介绍我们的模型。第 3 节分析给定认证机构所提供方案时的均衡结构。第 4 节介绍我们的主要结果：将收益最大化认证归约为一个非线性定价问题，并给出求解该问题的全多项式时间近似方案。第 5 节介绍关于福利最大化的结果，并探讨第三方认证对福利的影响。

## 2 模型

**市场**我们考虑一个由生产者和消费者构成的连续统市场。生产者具有单位供给，其类型为 $\psi \in \mathbb{R}_+$，类型分布为 $G$。消费者具有单位需求，其类型为 $\phi \in \mathbb{R}_+$，类型分布为

$F$。类型分布 $F$ 和 $G$ 均为无原子且连续，并具有紧支撑。

商品可以按不同的质量水平生产，记为 $q \in [0,1]$。质量越高的商品对消费者越有价值，但生产成本也越高。我们用 $g(q;\psi)$ 表示类型为 $\psi$ 的生产者生产质量为 $q$的商品所产生的成本。我们假设，对于每个 $\psi$， $g$ 关于 $q$ 弱凸且非递减，并且经过归一化，使得 $g(0;\psi) = 0$。我们还用 $f(q;\phi)$ 表示类型为 $\phi$的消费者对质量为 $q$的商品所享有的价值；对于每个 $\phi$， $f$关于 $q$ 弱凹且非递减，并且经过归一化，使得$f(0;\phi) = 0$。我们将对估值进行缩放，使得对于所有 $q$和 $\phi$， $f(q;\phi) \leq 1$；对于有界价值，这样做不失一般性。

我们假设成本和估值分别满足关于生产者类型和消费者类型的单交叉性质。粗略地说，这意味着类型较高的生产者（消费者）在生产质量较高的商品时，边际成本更低（边际价值更高）。更正式地，对于所有 $\phi_1 <\phi_2$ 和 $q_1 < q_2$，有

$$f(q_2;\phi_2) - f(q_1;\phi_2) > f(q_2;\phi_1) - f(q_1;\phi_1).$$

同样，对于所有 $\psi_1 < \psi_2$ 和 $q_1 < q_2$，我们有

$$g(q_2;\psi_2) - g(q_1;\psi_2) < g(q_2;\psi_1) - g(q_1;\psi_1).$$

允许生产者与消费者之间进行转移支付。我们假设生产者和消费者均为风险中性，并且相对于货币具有拟线性偏好。也就是说，如果消费者 $\phi$ 以 $p$ 的价格从生产者 $\psi$ 处购买质量为 $q$ 的产品，那么消费者获得的效用为

$$u_C((q,p);\phi) = f(q;\phi) - p$$

而生产者的效用为

$$u_P((q,p);\psi) = p - g(q;\phi).$$

**认证** 至关重要的是，生产者和消费者不能就质量签订合同。这意味着，生产者无法可信地承诺其生产产品的质量，而消费者也无法在交易时验证质量。但是，有一家第三方认证机构能够确定生产者产品的质量。该验证会给认证机构带来成本，成本为 $c \geq 0$。

在验证产品质量后，认证机构可以为该产品指定一个信号（或证书）$\sigma \in \Sigma$，其中 $\Sigma$ 是所有潜在证书构成的任意空间。所有生产者和消费者都可以看到该证书。认证机构可以向生产者收取这项服务的费用，并且这些转移支付可以任意取决于所生成的证书。

认证机构可以承诺提供认证菜单 $M$，该菜单由证书／转移支付对（$\sigma$， $t(\sigma)$）以及每份证书对应的质量要求 $\sigma$构成。遵循信息设计和说服领域的文献，

我们注意到，将每个认证信号$\sigma$ 与有资格获得该证书的质量水平集合相对应，并不失一般性。因此，我们不妨假设 $\Sigma = 2^{[0,1]}$是 $[0,1]$,的所有子集构成的集合，且每个 $\sigma$都是 $[0,1]$的子集。其含义是，生产者可以从该菜单中选择一项物品；在这种情况下，她向认证机构支付价格（或转移支付） $t(\sigma)$，认证机构核验该产品的质量 $q$，并且只要 $q \in \sigma$ ，生产者就会获得认证 $\sigma$。为技术上的便利，我们假设认证机构菜单中的每个 $\sigma$ 都包含一个最小元素，即 $\inf \sigma \in \sigma$。[1]

我们用 $\sigma_0 = [0,1]$ 表示不传达任何额外质量信息的平凡信号。带有证书 $\sigma_0$ 的商品，在功能上等同于未经认证的商品。为方便记号，我们假设认证机构始终以零成本提供信号 $\sigma_0$ 。这样一来，我们可以将每种商品都视为已获认证，只是认证水平可能是平凡的。如果生产者试图购买某张证书，却不满足该证书的要求，则会被授予证书 $\sigma_0$；也就是说，认证机构不会为该商品提供认证。

**竞争性市场** 假设所有认证均同时进行，且早于生产者与消费者之间的任何交易。给定认证机构提供的证书和价格菜单 $M$ ，生产者的（生产与认证）策略是一个映射，它将生产者类型 $\psi$ 对应到质量水平 $q$ 和认证 $\sigma$的选择。我们将此类策略$\Gamma$ 记为： $\psi \mapsto (q, \sigma)$，并将讨论范围限制在可测函数 $\Gamma$上。稍微滥用一下记号，我们也用 $\Gamma$ 表示产品对$(q, \sigma)$上的测度；生产者应用策略 $\Gamma$后，这些产品会具有相应的质量和认证。

被分配到同一证书的商品对消费者而言无法区分。所有认证完成后，每位生产者都拥有一单位带有认证 $\sigma$ 的商品。对于任意给定的认证 $\sigma$，将 $\Gamma_\sigma$记为仅针对证书 $\sigma$ 的 $\Gamma$ 在质量 $q$ 上的边缘分布。也就是说，在固定生产者的选择后， $\Gamma_\sigma$ 表示带有认证 $\sigma$ 的产品的质量水平分布。于是，类型为 $\phi$ 的消费者对带有证书 $\sigma$ 的商品的价值可表示为

$$f(\sigma;\phi) = E_{q\sim\Gamma_\sigma}[f(q;\phi)].$$

也就是说，每位消费者都会根据产品的认证等级和生产者的选择，理性地评估每种产品的预期质量。

[1]这排除了“质量 $q$ 严格大于 $1/2$”这类证书，而非“.....至少为 $1/2$”这类证书。前一类证书不便处理，因为不存在满足认证要求的单一最低成本质量选择，因此生产者也无法作出效用最大化的质量选择。我们可以通过放宽均衡概念，并假设每位生产者都选择一个在某个任意小的 $\epsilon$ 范围内近似效用最大化的质量选择 $\epsilon$，以一种直接但繁琐的方式处理这类证书。在本文余下部分，我们将忽略这些技术问题，并简单假设每个 $\sigma$ 都包含一个最小元素。

由于认证相同的商品对消费者而言无法区分，我们可以将生产者与消费者之间的竞争性市场视为一个证书市场 $\sigma$。该市场形成的瓦尔拉斯（或竞争）均衡，是向每位消费者 $\phi$ 配置 $x(\phi)$ 个证书，同时为每个证书设定价格 $p_\sigma$，并满足以下条件：

- 需求满足：每个消费者都会购买自己最偏好的商品。也就是说，对于每种消费者类型 $\phi$，$f(x(\phi);\ \phi) - p_{x(\phi)} \geq f(\sigma;\ \phi) - p_\sigma$ 对每个 $\sigma \in \Sigma$ 均成立。

- 市场出清：每种价格为正的商品都会售出。也就是说，对于所有 $\sigma$，满足 $x(\phi) = \sigma$ 的消费者测度 $\phi$ 不超过选择认证级别 $\sigma$ 的生产者测度 $\psi$。如果 $p_\sigma > 0$，那么这两个测度相等。

由于买方（消费者）具有单位需求，因此其偏好满足总替代条件，瓦拉斯均衡必然存在 Gul 和 Stacchetti（2000）。因此，我们将假设生产者作出选择后，消费者与生产者会以竞争均衡价格进行交易。

**时间线** 总而言之，存在认证的市场时序如下：

1. 认证机构承诺提供一份证书菜单，并为证书设定相应价格。 2. 每个生产者 $\psi$ 同时且私下决定是否生产商品；如果决定生产，还要选择质量等级。 3. 每个决定生产的生产者决定是否为其产品申请认证，以及申请哪种证书。所有生产者同时作出这些决定。 4. 认证机构核验选择申请认证的生产者所生产的产品，并颁发证书。未能成功获得认证的生产者将获得证书 $\sigma_0$。 5. 生产者和消费者在竞争性市场中交易商品。也就是说，交易以所选认证等级对应的市场出清价格进行。

由于瓦尔拉斯均衡一般并不唯一，人们可能会疑问，最后一步中所描述的结果是否定义明确。我们将在下一节证明，最后一步所描述的竞争性市场均衡存在，并且对于认证机构选择的任意证书菜单，以及生产者选择的任意认证等级，其所产生的配置都是唯一的。

# 3 均衡刻画

本节将描述对于认证机构提供的任意给定证书菜单，市场中将出现的市场结果。我们将证明，认证机构将其提供范围限制为阈值证书并不失一般性；这类证书保证产品至少达到某一特定质量等级。我们将刻画向生产者配置此类证书的任意方式所产生的唯一瓦尔拉斯市场均衡配置。随后，我们将利用这一刻画，求解每位生产者从认证机构的证书菜单中进行的效用最大化选择；这一选择同样是唯一的。

## 3.1 作为最低质量阈值的认证

首先，一个简单的观察是，由于生产者成本随质量水平提高而增加，并且不同质量水平但持有相同认证的商品对消费者而言无法区分（因此必须以相同价格出售），被分配证书 $\sigma$ 的生产者总会选择生产该证书所允许的最低质量水平。

**观察 3.1.** 给定任意认证机构菜单 $M$ 以及生产者的任意生产与认证策略。对于任意生产者 $\psi$，选择证书 $\sigma$并以质量 $q > \min \sigma$ 进行生产，劣于选择证书 $\sigma$ 并以质量 $\min \sigma$进行生产。

根据这一观察可知，对于任意菜单 $M$、生产者的任意均衡策略 $\Gamma$ 以及任意证书 $\sigma$，质量 $\Gamma_\sigma$ 上的边缘分布将在 $\min \sigma$ 处集中为点质量。特别是，任何两个最低值相同的证书都会诱导出相同的质量均衡信念，因此对所有消费者而言价值无法区分。因此，认证机构只提供 $\sigma_q = [q, 1]$ 形式的证书并不失一般性；也就是说，提供的证书仅在其最低值上有所区别。若生产者选择证书 $\sigma_q$，则该生产者在均衡时选择的质量水平必然为 $q$。因此，任何给定的认证菜单 $M$ 都可简化为 $[0, 1]$ 中一组（可能无限多的）待认证质量水平。

受这一观察的启发，在本文余下部分，我们假设所有证书均为 $[q, 1]$ 的形式，并将每个 $\sigma = [q, 1]$ 与其质量阈值 $q$ 对应起来。于是，我们可以将认证菜单 $M$ 视为由若干对 $\{(q_i,\ t_i)\}$ 构成的集合，其中 $q_i$ 是质量阈值，而 $t_i$ 是认证质量至少达到 $q_i$ 所对应的价格。

## 3.2 竞争性市场配置的唯一性与按类型匹配性

现在，我们来分析由认证机构和生产者的策略所决定的竞争性市场结果。回想一下，我们可以将注意力限制在形式为 $\sigma_q = [q, 1]$ 的证书上，并且任何带有证书 $\sigma_q$ 的商品，其质量都必定为 $q$。因此，在本节余下部分中，我们

将把市场结果视为质量水平的配置 $x$ 和价格 $p$。也就是说，对于所有消费者 $\phi$，$x(\phi) \in [0,1]$；对于菜单 $M$ 中的每个 $q \in [0,1]$，都有一个相应的市场价格 $p_q$。我们强调，$x$ 是从消费者到其在市场上购买的认证商品的映射，而 $\Gamma$ 是从生产者到其向认证机构选择的证书的映射。

以下引理表明，对于认证菜单 $M$ 以及生产者的生产和认证策略 $\Gamma$ 的任意选择，由此产生的市场中的所有竞争性市场均衡都具有相同且唯一确定的配置。该配置将按类型匹配，其中高类型消费者购买高质量证书。

**引理 3.2**。固定任意认证机构菜单 $M$ 以及生产者的任意策略 $\Gamma$。那么，在每个竞争性市场结果 $(x, p)$ 中，配置 $x$ 满足$x(\phi_1) \leq x(\phi_2)$并且 $p_{x(\phi_1)} \leq p_{x(\phi_2)}$ 对所有 $\phi_1 \leq \phi_2$均成立。

证明。由于消费者具有单位需求，且每个生产者拥有一单位产品，因此可以保证市场存在一个瓦尔拉斯均衡$(x, p)$。根据第一福利定理，任何此类均衡都必须最大化总福利，

$$\int_{\phi} f(x(\phi);\phi)dF(\phi).$$

假设存在类型 $\phi_1 < \phi_2$，满足 $x(\phi_1) > x(\phi_2)$。根据单交叉条件，我们有

$$f(x(\phi_1);\phi_2) - f(x(\phi_2);\phi_2) > f(x(\phi_1);\phi_1) - f(x(\phi_2);\phi_1)$$

因此

$$f(x(\phi_1);\phi_2) + f(x(\phi_2);\phi_1) > f(x(\phi_1);\phi_1) + f(x(\phi_2);\phi_2)$$

这与配置 $x$具有福利最优性的假设相矛盾。

现在我们转而讨论价格。固定任意消费者类型 $\phi_1 < \phi_2$，特别是我们知道 $x(\phi_1) \leq x(\phi_2)$，并假设结论不成立，即 $p_{x(\phi_1)} > p_{x(\phi_2)}$。根据价值函数 $f$ 的单调性，必有 $f(x(\phi_1);\ \phi_1) \leq f(x(\phi_2);\ \phi_1)$。但这意味着 $f(x(\phi_2);\ \phi_1) - p_{x(\phi_2)} > f(x(\phi_1);\ \phi_1) - p_{x(\phi_1)}$，这违反了竞争性市场条件：消费者类型 $\phi_1$ 选择的是她最偏好的商品。因此，我们得出结论：$p_{x(\phi_1)} \leq p_{x(\phi_2)}$，如所述。 □

## 3.3 证书选择的唯一性与排序性

鉴于市场结果已有明确定义，接下来我们讨论生产者在选择质量水平及其相应证书时的均衡选择。我们再次证明，对于所提供的任意证书菜单 $M$，生产者的质量选择在均衡时是唯一的。此外，高类型生产者总会选择（弱）更高的证书。在引理 3.2 中，我们看到高类型消费者也会购买（弱）更高的证书。正如

我们稍后将讨论的那样，这意味着任何均衡中的匹配都将是按类型匹配的，因此，鉴于现有证书，这种匹配是受约束有效的。

回顾一下，生产者策略 $\Gamma$是从生产者类型 $\psi$ 到认证和质量选择的映射；我们知道，这两者总是一致的。因此，我们将用 $\Gamma(\psi) = q$ 表示生产者 $\psi$ 以质量水平$q$ 进行生产并购买证书 $\sigma_q$。特别地，对于所有 $\psi$，必有 $\Gamma(\psi) \in M$。

**引理 3.3.** 固定认证机构提供的任意认证菜单 $M$。那么，生产者存在唯一的均衡策略 $\Gamma$，且 $\Gamma(\psi)$ 关于 $\psi$弱单调递增。

证明。 固定策略 $\Gamma$，该策略决定了生产者群体所选择的证书的测度。令 $(x, p)$ 表示由此形成的竞争性市场中的一个瓦尔拉斯均衡，并回顾一下， $x$ 是唯一确定的。

我们首先证明 $\Gamma$ 是弱单调递增的，即 $\psi$。反设存在 $\psi_1 < \psi_2$，使得 $q_1 = \Gamma(\psi_1)$ 且 $q_2 = \Gamma(\psi_2)$，其中 $q_2 < q_1$。那么，根据生产者的单交叉条件，有 $g(q_1; \psi_1) - g(q_2; \psi_1) > g(q_1; \psi_2) - g(q_2; \psi_2)$。但是，若令 $p_{q_1}$ 和 $p_{q_2}$ 表示给定 $\Gamma$时 $q_1$ 和 $q_2$ 的瓦尔拉斯均衡价格，则有

$$(p_{q_1} - g(q_1; \psi_1)) + (p_{q_2} - g(q_2; \psi_2)) < (p_{q_1} - g(q_1; \psi_2)) + (p_{q_2} - g(q_2; \psi_1))$$

这意味着二者之一

$$p_{q_1} - g(q_1; \psi_1) < p_{q_2} - g(q_2; \psi_1)$$

or

$$p_{q_2} - g(q_2; \psi_2) < p_{q_1} - g(q_1; \psi_2).$$

换言之，生产者 $\psi_1$ 或 $\psi_2$ （或二者）都可以通过改变其质量和认证选择而严格提高其效用。由于这种交换的测度为零，不会影响竞争均衡，因此这将构成生产者的一种有利偏离，违反了 $\Gamma$ 是生产者均衡策略这一假设。

我们已经证明， $\Gamma$关于 $\psi$弱递增。另一方面，根据引理 3.2，我们知道向消费者配置质量水平关于 $\phi$弱递增。这意味着，任何生产和交易的均衡结果，都等价于这样一种结果：消费者和生产者按类型匹配，高类型消费者与高类型生产者进行交易。换言之，对于任意生产者类型 $\psi$，都存在一个消费者类型 $\phi = \phi(\psi)$，使得 $\psi$ 始终与 $\phi(\psi)$进行交易。具体而言， $\phi(\psi)$满足 $F(\phi(\psi)) = G(\psi)$（将 $F$ 和 $G$ 视为累积分布函数）。

鉴于此，我们声称， $\Gamma(\psi)$，即生产者 $\psi$在均衡时选择的认证，始终是认证机构菜单 $M = \{(q_i, t_i)\}$ 中的一张证书 $q_i$，它使 $f(q_i; \phi(\psi)) - g(q_i; \psi) - t_i$ 最大化。为说明原因，反设生产者选择了另一张证书 $q'$，其价格为$t'$，且满足：对某个 $\epsilon > 0$， $f(q'; \phi(\psi)) - g(q'; \psi) - t' < f(q_i; \phi(\psi)) - g(q_i; \psi) - t_i - \epsilon$，

并以假定的市场出清价格$p_{q'}$出售给消费者 $\phi(\psi)$。[2] 那么，生产者 $\psi$ 可以改为以 $t_i$的价格购买 $q_i$ ，并在竞争性市场上以$p_{q'}+g(q_i;\ \psi)-g(q';\ \psi)+(t_i-t')+\epsilon/2$ 的价格出售。注意，如果消费者 $\phi(\psi)$以该价格向生产者 $\psi$ 购买，那么她的效用将为

$$\begin{aligned}
&f(q_i;\phi(\psi))-[p_{q'}+g(q_i;\phi(\psi))-g(q';\phi(\psi))+(t_i-t')+\epsilon/2]\\
&=(f(q_i;\phi(\psi))-g(q_i;\psi)-t_i-\epsilon)+(g(q';\psi)+t')+\epsilon/2-p_{q'}\\
&>f(q';\phi(\psi))-(g(q';\psi)+t')+(g(q';\psi)+t')-p_{q'}+\epsilon/2\\
&>f(q';\phi(\psi))-p_{q'}.
\end{aligned}$$

但是，由于（$q'$，$p_{q'}$）是在市场均衡中消费者 $\phi$（$\psi$）需求最高的供给，这意味着在这次偏离下，以建议价格提供 $q_i$ 将成为消费者 $\phi$（$\psi$）需求最高的供给。尤其是，这意味着某个消费者会愿意以建议价格购买 $q_i$，因此，在这次偏离后调整后的市场均衡中， $q_i$ 的价格至少必须达到这一水平。

我们得出结论，在这次偏离下，生产者 $\psi$ 的效用至少为

$$\begin{aligned}
[p_{q'}+(g(q_i;\psi)-g(q';\psi)+(t_i-t')+\epsilon/2]-g(q_i;\psi)-t_i&=p_{q'}-g(q';\psi)-t'+\epsilon/2\\
&>p_{q'}-g(q';\psi)-t'
\end{aligned}$$

因此，这次偏离严格提高了生产者的效用，这与 $\Gamma$ 处于均衡的假设相矛盾。

因此，我们得出结论，在均衡时，每个生产者 $\psi$ 都会从菜单中选择使 $f$（$q_i$；$\phi$（$\psi$））$-g$（$q_i$；$\psi$）$-t_i$最大化的证书 $q_i$。因此，每个生产者的选择都是唯一的，但在零测集上打破平局的情况除外。 □

引理 3.2 和引理 3.3 的一个直接推论是，对于给定菜单 $M$，均衡结果不仅本质上唯一（市场出清价格的选择除外），而且还具有自然的按类型匹配解释。市场中的每个生产者都有一位与之对应的消费者，双方总会进行交易。生产者会选择能使其与对应消费者之间的交易收益减去认证价格后达到最大的认证等级。

**推论 3.4.** 对于认证机构的任意菜单 $M=\{(q_i,t_i)\}$，由此产生的均衡市场结果是生产者与消费者 $\phi=\phi(\psi)$ 进行交易，其中$G(\psi)=F(\phi)$。$\phi$与 $\psi$进行交易时的质量水平，使 $f(q_i;\ \phi)-g(q_i;\ \psi)-t_i$最大化，并且随 $\psi$弱递增。

[2]请注意，正如我们所证明的， $\Gamma$ 关于 $\psi$弱递增，因此这种偏离不会改变企业按照其购买的证书所形成的排序，也不会改变它们销售给的消费者。

# 4 收入最优认证

在上一节中，我们求解了在认证机构选定认证菜单 $M$ 的条件下，生产者与消费者之间博弈的均衡结果。基于这一刻画，我们现在转而研究认证机构所面临的问题：如何构建能够使收入最大化的证书候选集合。

先验来看，提供哪些证书似乎会影响下游竞争性市场的配置和价格。毕竟，生产者会争夺消费者，而他们购买的证书决定了他们在这场竞争中的表现。因此，人们可能会认为，可供选择的证书菜单会影响每个生产者愿意为某一特定证书支付多少。然而，正如我们将要证明的，市场结果的按类型匹配特征意味着，认证机构可以分别考虑每种生产者类型的行为，而不必担心它们在竞争性市场中如何相互作用。因此，认证机构实质上面对的是一个类型未知的单个买方，只需在该买方的约束下最大化收入。这促使我们将认证者问题归约为卖方面对一个（非线性）买方的问题。

## 4.1 归约为非线性定价问题

我们将把认证机构的收入最大化问题与单个卖方和单个买方之间的非线性定价问题联系起来。买方希望购买一种完全可分商品。卖方可以承诺提供由数量和价格构成的菜单。如果类型为 $\theta$ 的买方以总价 $t$ 购买数量为 $q \in [0,1]$ 的商品，那么买方的效用为

$$u((q,t);\theta) = v(q;\theta) - t,$$

其中 $v$ 关于数量 $q$ 是凹函数，但不一定是非递减函数，并且对于所有 $\theta$，$v(0;\theta) = 0$。估值 $v$ 满足单交叉条件，即对于 $\theta_1 < \theta_2$ 和 $q_1 < q_2$，有

$$v(q_2;\theta_2) - v(q_1;\theta_2) > v(q_2;\theta_1) - v(q_1;\theta_1).$$

委托人旨在给定买方类型的先验分布后，在每个非零数量的生产成本均为常数 $c > 0$ 的条件下最大化收入。给定一个菜单$M$，我们用 Rev($M$) 表示从 $M$获得的预期收入。我们还用 OPT 表示收入最大化菜单选择$M$所带来的收入。

**命题 4.1**。 认证机构的收入最大化问题等价于上述非线性定价问题的一个实例。

证明。 认证者问题是设计一个证书菜单 $M = \{(q_i, t_i)\}$，使收取的总收入减去为验证任何非平凡证书而支付的认证成本 $c$ 后最大化 $q_i > 0$。根据推论 3.4，给定菜单 $M$，

每个生产者 $\psi$ 都会购买使 $f(q_i;\ \phi(\psi))\ -g(q_i;\psi)\ -t_i$最大化的证书 $q_i$。

对于 $q\in[0,1]$，我们可以将 $\psi$ 解释为买方类型，并定义估值函数 $v(q;\psi)=f(q_i;\ \phi(\psi))-g(q_i;\ \psi)$。由于 $f$ 和 $g$ 相对于各自对应的类型都满足单交叉性质，因此估值函数 $v$ 也满足该性质。此外，$v$ 是凹函数，且 $v(0;\psi)=0$。根据定义，生产者从菜单 $M$ 中选择证书，恰好对应于买方在面对同一菜单时选择数量，只需将每个证书质量阈值解释为数量即可。因此，两种情形下的结果乃至收入均相同。

□

请注意，结合推论 3.4，命题 4.1 的一个直接推论是：对于卖方选择的任意菜单 $M$，买方购买的数量随买方类型弱递增。[3]

## 4.2 非线性定价问题中的收入优化

根据命题 4.1，要解决认证机构的收益最大化问题，只需优化非线性定价问题中的收入。首先注意，在估值 $v$ 关于数量呈线性的特殊情形下（例如，当认证问题中的成本函数 $g$ 和价值函数 $f$ 都关于 $q$ 呈线性时），该问题便简化为机制设计中的标准定价问题。Myerson Myerson（1981）提出的刻画结果随即表明，收益最优的做法是选择仅含一个非平凡项目的菜单（$q$，$p$），其中 $q=1$。

**观察 4.2**。如果对于所有 $\theta$，$v$（$q$；$\theta$）关于 $q$ 是线性的，那么存在一个最优收入菜单，只以某个价格 $p$提供数量 $q=1$。该价格 $p$ 将被选择为最大化 $p\times\Pr_\theta[v$（1；$\theta$）$>p]$。

然而，一般而言，非线性会使该问题相较于线性情形发生实质性变化。特别是，提供单个菜单项未必是最优的。

**命题 4.3**。存在一些问题实例，在这些实例中，发布任何单个菜单项都可能是对最优收入的任意差近似。近似因子最大可达 $\Omega(\log(H))$，其中 $H=\max_{\theta_1,\ \theta_2}\max_q v$（$q$；$\theta_1$）$\max_q v$（$q$；$\theta_2$）是买方类型之间最高与最低最大价值之比。

证明。取 $c=0$ 并考虑估值函数 $v(q;\theta)=q$ 当 $q\le\theta$时，以及 $v(q;\theta)=2\theta-q$ 当 $q\ge\theta$时。也就是说，对于每个 $\theta$，$v$ 都是分段线性的，其最大值 $\theta$ 在 $q=\theta$ 处取得。固定某个 $H\ge1$，并假设类型分布满足：对于所有 $h\in[1,H]$，$\Pr[\theta>h]=1/h$。也就是说，在区间 $[1,H]$上，类型分布为等收入分布。

[3]或者，这直接是估值函数 $v$所满足的单交叉条件的结果。

该估值函数是凹函数，并且对所有 $\theta$都满足 $v(0;\theta) = 0$。此外，它还满足单交叉条件。事实上，对于任意 $q$ 和任意 $\theta_1 < \theta_2$，我们注意到 $\frac{d}{dq}v(q;\theta_1) \leq \frac{d}{dq}v(q;\theta_2)$，因为对于任意 $\theta$，当 $q < \theta$时，该导数为 1；而当 $q > \theta$时，该导数为 $-1$。由于 $v$关于 $q$和 $\theta$也连续，因此可推出单交叉条件。[4] 最后，我们注意到，该估值函数 $v$ 确实可以在我们从生产者与消费者的认证问题进行的归约中出现。[5]

现在我们展示所需的近似差距。考虑任意一个仅包含一个非平凡菜单项的菜单 $M$ （$q$， $p$）。那么，卖方获得的收入至多等于质量水平 $q$ 的最优分配所产生的福利。由于对于所有 $\theta$， $v(q;\theta) \leq q$，因此这当然至多等于 $q$ 乘以 $v(q;\theta) > 0$ 的概率，即 $q\Pr[\theta > q/2] \leq q(2/q) = 2$。

另一方面，卖方可以提供一个菜单，其中包含每个质量水平 $q \in [1, H]$，价格均为 $q/2$。类型为 $\theta$ 的买方随后会选择购买质量水平 $q = \theta$，获得效用 $\theta/2$，从而产生收入 $\theta/2$。[6] 总收入于是为 $E[\theta/2] = O(\log H)$。

因此，如前所述，仅发布一个菜单项至多是最优收入的 $O(\log H)$ 近似。 □

因此我们知道，任何近似收入最优机制有时都必须在其菜单中提供多个非平凡选项。这样的菜单应当是什么样的？请注意，在我们的设定中，买方没有免费处置权（即估值不是单调的），因此，在收入最优菜单中，较高数量应以较高价格出售，甚至都不是显而易见的。接下来我们将证明，事实上，总能找到一种收入最优的菜单选择，使得较高数量以较高价格出售。

**定义 4.4**。 如果对于所有满足 $q_i < q_j$ 的$(q_i, p_i),(q_j, p_j) \in M$，都有 $p_i \leq p_j$，则称菜单 $M = \{(q_i, p_i)\}$ 是单调的 。

**引理 4.5**。 对于任意非线性定价问题实例，都存在一个单调的收入最优菜单。

证明。 令 $M$ 为一个收入最优菜单，并记 $M = \{(q_i, p_i)\}_{i\in\Lambda}$，其中$\Lambda$ 是某个（可能不可数的）指标集。不妨假设 $\Lambda$ 是 $[0, 1]$ 的子集，并且对所有 $i < j$ 都有 $q_i < q_j$ （例如，重新编制索引，使得 $q_i$ 的索引等于 $q_i$）。进一步地，不失一般性地假设 $M$ 中的每件物品都会被某种买方类型购买，因为从 $M$ 中移除任何从未被购买的元素都不会产生影响。根据推论 3.4，所购买的质量

[4]严格来说，我们的构造只满足弱单交叉，因为导数不等式并非严格不等式。我们可以通过将初始线段的斜率扰动一个无穷小量，使其取决于类型 $\theta$，从而使这个例子满足严格条件。为使表述清晰，我们省略这些细节。[5]具体而言，令 $\phi$ 和 $\psi$ 的支撑集为 $[1, H]$，对所有 $\phi$ 定义 $f(q;\phi) = q$，并对所有 $\psi$ 定义 $g(q;\psi) = \max\{0, 2(q - \psi)\}$。那么 $f$ 是凹的（事实上是线性的）， $g$ 是凸的，满足单交叉条件，并且 $v(q;\theta) = f(q;\phi(\theta)) - g(q;\theta)$，如所要求的那样。[6]对买方而言，购买更高的质量水平 $q' > \theta$ 更差，因为它以更高的价格带来更低的价值；而购买任意质量水平 $q' < \theta$ 都会产生效用 $q' - q'/2 = q'/2 < \theta/2$。

水平关于买方类型是单调非递减的。这意味着，每件物品（$q_i$，$p_i$）都会被某个买方类型连续区间$I_i$ 购买（该区间可能是零测集）。

假设菜单 $M$ 不是单调的。这意味着，要么存在一个元素 $i < \sup \Lambda$，使得对于所有 $j > i$，$p_i > p_j$；要么存在一对菜单项（$q_i$，$p_i$）和（$q_j$，$p_j$），满足 $j > i$，且 (a) 存在某个 $\ell \in \Lambda$，使得 $i < \ell < j$；(b) 对所有 $i < \ell < j$，$p_\ell < \min\{p_i, p_j\}$。

考虑前一种情况，即存在一个元素 $i < \sup \Lambda$，使得对于所有 $j > i$，$p_i > p_j$。特别地，必定存在某个 $j \in \Lambda$，使得 $j > i$。令$M'$为菜单 $\{(q_\ell, p_\ell)\}_{\ell \in \Lambda,\ \ell \le i}$。也就是说，$M'$是从中移除了所有数量大于 $q_i$ 的元素后的菜单。注意，对于所有 $j \le i$，由于类型 $I_j$ 相较于 $M$中的任何其他元素，更偏好元素（$q_j$，$p_j$），因此它们也更偏好元素（$q_j$，$p_j$），而非 $M'$ 中的任何其他元素。此外，由于购买决策关于买方类型是单调的，我们可以得出，所有满足 $\ell > i$ 的类型 $\theta \in I_\ell$ 都会从菜单 $M'$中购买元素（$q_i$，$p_i$）。但是，由于对于所有 $\ell > i$，$p_i > p_\ell$，这意味着菜单 $M'$ 产生的收入严格高于菜单 $M$产生的收入，这与菜单 $M$具有最优性的假设相矛盾。

接下来考虑另一种情况：存在一对菜单项 $(q_i, p_i)$ 和 $(q_j, p_j)$，使得对所有 $i < \ell < j$，$p_\ell < \min\{p_i, p_j\}$。令 $M'$ 为菜单$\{(q_\ell, p_\ell)\}_{\ell \in \Lambda, \ell \le i} \cup \{(q_\ell, p_\ell)\}_{\ell \in \Lambda, \ell \ge j}$。也就是说，从菜单 $M$ 中移除了所有严格位于 $(q_i, p_i)$ 与 $(q_j, p_j)$ 之间的元素。与前一种情况一样，对于所有 $\ell \le i$ 和 $\ell \ge j$，类型 $I_\ell$ 仍然都更愿意购买 $(q_\ell, p_\ell)$。特别地，类型 $I_i$ 购买 $(q_i, p_i)$，类型 $I_j$ 购买 $(q_j, p_j)$。根据推论 3.4 的购买决策的单调性，所有中间类型 $\theta \in I_\ell$（其中$i < \ell < j$）都必须购买 $(q_i, p_i)$ 或 $(q_j, p_j)$。由于 $p_i$ 和 $p_j$ 都高于这些类型在菜单 $M$ 下所购买元素的价格，因此菜单 $M'$ 的收入必定严格更高，这再次构成矛盾。

我们得出结论，菜单 $M$ 中的价格必须随质量水平单调递增，正如所声称的那样。

□

## 4.3 收入的全多项式时间近似方案

现在，我们可以考虑如何为非线性定价问题构造一个近似收入最优菜单。为此，我们还将作出一项技术假设：估值$v(q;\theta)$关于 $q$ 的导数在 0 处有界。也就是说，存在某个 $\lambda > 0$，使得对于所有 $\theta$，$\frac{d}{dq} v(0;\ \theta) < \lambda$。换言之，买方对产品数量并非无限敏感。在认证的语境下，这意味着对于所有 $\phi$，$\frac{d}{dq} f(0;\ \phi) < \lambda$，即消费者在 0 处对质量并非无限敏感。

—

**假设 4.6**。存在某个 $\lambda > 0$，使得对于所有 $\theta$，$\frac{d}{dq} v(0;\theta) < \lambda$。

基于这一假设，以下结果为含有 $k$ 个项目的最优菜单提供了一个全多项式时间近似方案。我们还将证明，通过取 $k = 1/\epsilon$，可以为最优（不受限制的）菜单获得一个全多项式时间近似方案。

**定理 4.7**。 可以在关于 $\lambda$ 和 $1/\epsilon$ 的多项式时间内找到一个收入至少为 OPT $-\lambda\epsilon$ 的菜单。还可以将菜单限制为最多包含 $k$ 个质量水平；在这种情况下，$OPT$ 是最多包含 $k$ 个质量水平时可实现的最优收入。

证明定理 4.7 的第一步，是说明我们可以将注意力限制在最多包含 $1/\epsilon$ 个条目的菜单上，而收入损失很小。

**引理 4.8**。 对于任意单调菜单 $M$，都存在一个大小至多为 $O(1/\epsilon)$ 的菜单 $M'$，使得 收入$(M') \geq$收入$(M) - O(\epsilon)$。

证明。 固定收入最优菜单 $M = \{(q_i, p_i)\}_{i\in\Lambda}$。根据引理 4.5，我们可以假设 $M$ 是单调的。

我们将 $M'$ 定义为 $M$ 的以下子集。令 $A = \{\ell\epsilon\colon\ 0 \leq \ell \leq \lfloor 1/\epsilon \rfloor\}$。然后，对每个 $a \in A$，我们将 $M$ 中满足 $p \geq a$ 且 $p$ 最小的元素 $(q, p)$ 加入 $M'$。接着注意到，$M'$ 至多包含 $\lceil 1/\epsilon \rceil$ 个物品。此外，对于每个元素 $(q, p) \in M$，都存在某个 $(q', p') \in M'$，使得 $p' \geq p - \epsilon$。

$M'$ 中的任何元素仍会被在 $M$ 中购买该元素的类型购买，因为备选选项菜单变小了。由于价格随数量单调变化，且购买数量随买方类型单调变化，我们可以得出结论：在原菜单 $M$ 中购买了 $(q,\ p)$ 的任何类型，随后都会在菜单 $M'$ 中购买价格至少为 $p - \epsilon$ 的元素。因此，对于任意给定的买方类型，收入损失至多为 $\epsilon$，所以总收入损失也至多为 $\epsilon$ 。

□

接下来，我们将说明，如何对菜单中出现的可能的（质量、价格）对进行离散化，同时避免收入损失过大。

**引理 4.9**。 对于任意大小为 $k$ 的单调菜单 $M$ ，存在一个菜单 $M'$，使得

- $M'$ 至多包含 $k$ 个元素，
- 对于每个 $(q, p) \in M'$，$p$ 是 $\epsilon$ 的倍数，且 $q = \epsilon(1+\epsilon)^\ell$ 对某个整数 $\ell \geq 0$ 成立，并且
- 收入$(M')$ $\geq$收入$(M)$ $- O((k + \lambda)\epsilon)$.

证明。 我们首先给出该构造的基本思路，如图1所示。我们将分三步对菜单 $M$ 中的每个（数量，价格）对进行舍入。第一步，我们将每个数量向下舍入到适当的离散化网格上，然后相应地降低价格以保持数量与价格之比不变。价值函数的凹性将意味着，由于这一变化，买方效用不会在乘法意义上减少太多。第一步对数量进行了离散化；第二步，我们通过将每个价格向下舍入到适当的网格上来离散化价格，这只会增加效用。到这里我们几乎就完成了，但还有一个问题：我们必须确保我们引起的买方效用的（微小）变化不会导致买方从更昂贵的项目转向价格显著

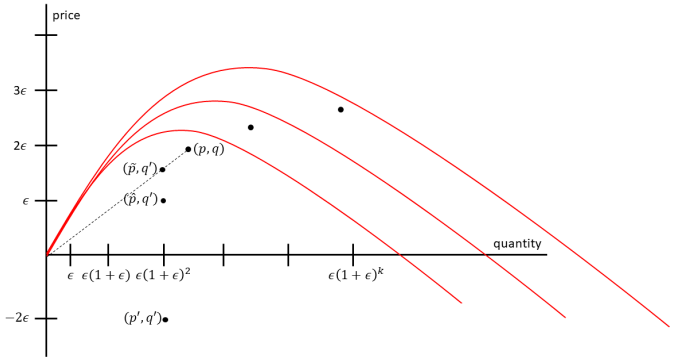


图1：引理 4.9 中离散化过程的示意图。红色曲线表示买方估值函数。菜单项 ($p$, $q$) 通过沿着一条通往原点的直线移动，在数量上离散化为 ($\tilde{p}$, $q'$)，随后在价格上离散化为 ($\hat{}p$, $q'$)。最后应用折扣，得到调整后的菜单项 ($p'$, $q'$)。

更低的菜单项目。正是在这里，我们利用了菜单的价格单调性。由于数量更高的项目价格更高，在第三步中，我们将为数量更高的菜单项目提供折扣，以抵消离散化导致的任何效用扰动。这些折扣使损失项与 $k\epsilon$ 成正比，而不是与 $\epsilon$ 成正比，从而产生了误差界中的这一结果。

现在我们开始正式构造。固定一个大小为 $k$ 的菜单 $M$，使得$M = \{(q_1, p_1) \ldots, (q_k, p_k)\}$ 其中 $q_1 < q_2 < \ldots < q_k$。不失一般性，我们可以假设 $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_k$，且 $M$ 中的每个元素都以正概率被购买。

我们按以下步骤构造一个新菜单 $M'$。首先，对于每个满足 $q_i \geq \epsilon$ 的 $(q_i, p_i)$，令 $q'_i$ 为将 $q_i$ 向下取整到最接近的 $\epsilon(1+\epsilon)^\ell$ 值，其中 $\ell \geq 0$ 为整数。然后定义 $\tilde{p}_i = p_i \times (q'_i/q_i)$，注意我们选择 $\tilde{p}_i$，使得 $\tilde{p}_i/q'_i = p_i/q_i$。这个元素 $(q'_i, \tilde{p}_i)$ 对应于上文直观描述中的数量取整，同时保持价格数量比不变。第二步，我们令 $\hat{}p_i$ 为将 $\tilde{p}_i$ 向下取整到最接近的 $\epsilon$ 的倍数。最后，在第三步中，我们引入折扣。为此，我们定义$p'_i = \hat{}p_i - 3i\epsilon$，注意 $p'_i$ 与 $\hat{}p_i$ 之间的差值随 $i$ 增大而增大。至此，离散化过程完成，因此我们将 $(q'_i, p'_i)$ 加入菜单 $M'$。需要指出的是，菜单 $M'$ 不一定是单调的，可能包含不被任何类型偏好的元素，也可能包含价格为负的元素。

我们声称，对于每一种类型 $\theta$，如果 $\theta$ 在菜单 $M$ 中购买了带有$q_i \geq \epsilon$的物品 $(q_i, p_i)$，那么 $\theta$ 会在菜单 $M'$ 中购买某个满足 $j \geq i$ 的 $(q'_j, p'_j)$。要理解其中的原因，先考虑如果 $(q'_i, \tilde{p}_i)$ 出现在菜单上会发生什么。$u((q'_i, \tilde{p}_i); \theta)$ 是什么？由于估值函数 $v$ 是凹函数，且 $v(0; \theta) = 0$，我们必定

有 $v(q_i'; \theta) \geq \frac{q_i'}{q_i} v(q_i; \theta)$。但由于 $q_i' \geq \frac{1}{1+\epsilon} q_i$，这意味着

$$\begin{aligned} u((q_i', \tilde{p}_i); \theta) &= v(q_i'; \theta) - \tilde{p}_i \\ &\geq \frac{q_i'}{q_i} v(q_i; \theta) - \tilde{p}_i \\ &= \frac{q_i'}{q_i} \left(v(q_i; \theta) - p_i\right) \\ &\geq \frac{1}{1+\epsilon} u((q_i, p_i); \theta) \\ &\geq u((q_i, p_i); \theta) - \epsilon. \end{aligned}$$

由于我们还知道 $\tilde{p}_i - \epsilon \leq \hat{p}_i \leq \tilde{p}_i$ 和 $p_i' = \hat{p}_i - 3i\epsilon$，因此有

$$\begin{aligned} u((q_i', p_i'); \theta) &= u((q_i', \hat{p}_i); \theta) + 3i\epsilon \\ &\geq u((q_i', \tilde{p}_i); \theta) + 3i\epsilon \\ &\geq u((q_i, p_i); \theta) + (3i - 1)\epsilon. \end{aligned}$$

另一方面，对于任意 $j < i$，购买 $(q_j', \tilde{p}_j)$ 的效用至多等于购买 $(q_j, \tilde{p}_j)$ 的效用，而后者至多比购买 $(q_j, p_j)$ 的效用高出 $\epsilon$（因为 $p_j$ 与 $\tilde{p}_j$ 之比不大于 $1+\epsilon$）。因此我们有

$$\begin{aligned} u((q_j', p_j'); \theta) &= u((q_j', \hat{p}_j); \theta) + 3j\epsilon \\ &\leq u((q_j', \tilde{p}_j); \theta) + (3j + 1)\epsilon \\ &\leq u((q_i, p_i); \theta) + (3j + 2)\epsilon. \end{aligned}$$

由于根据假设，$u((q_i, p_i); \theta) \geq u((q_j, p_j); \theta)$，且 $\theta$ 从菜单 $M$ 中购买物品 $(q_i, p_i)$，我们得出 $u((q_i', p_i'); \theta) \geq u((q_j', p_j'); \theta)$ 也成立，因为对于 $i > j$，$(3j + 2) \leq (3i - 1)$。

我们可以得出，购买了 $q_i, p_i$ 的每种类型 $\theta$，如果从具有 $q_i \geq \epsilon$ 的 $M$ 处购买，则会从 $M'$ 处购买一个满足 $j \geq i$ 的菜单项 $(q_j', p_j')$。由于菜单 $M$ 中的价格是单调的，我们可以得出，对于任意 $i$，收入的总损失至多为 $p_i$ 与 $p_i'$ 之间的价格差。这至多为 $O(k\epsilon)$。

最后，考虑一种从具有 $q_i < \epsilon$ 的 $M$ 处购买 $(q_i, p_i)$ 的类型 $\theta$。根据假设 4.6，任何代理人对质量水平 $\epsilon$ 的最大支付意愿为 $\lambda\epsilon$。因此，这些类型产生的收入至多为 $\lambda\epsilon$；所以，无论其购买行为如何，它们造成的收入总损失至多为 $O(\lambda\epsilon)$。 □

有了引理 4.9，我们便可通过动态规划确定给定最高质量条目的收入最优机制，从而完成定理 4.7 的证明。在构造过程中有一点需要特别注意：必须考虑菜单中质量较高的元素可能产生的蚕食效应。为此，我们要求所构造的菜单仅包含被具有非零测度的买方类型所选择的元素，并在递归应用动态规划时检查这一条件。

定理 4.7 的证明。我们说明如何使用动态规划计算最优菜单，其中质量和价格均从一个离散索引集合中的可能选项里选取。一般而言，给定一个数量 $q$ 和价格 $p$，且二者均属于我们的离散选项集合时，我们用 $Q$ 和 $P$ 分别表示 $q$ 和 $p$ 的整数索引。

给定任意的 $Q$、$P$ 和某个 $k \geq 1$，记 $M[Q,P,k]$ 为使用至多包含 $k$ 个元素的菜单所能获得的最优收入，其中最高质量的菜单项由 $Q$ 和 $P$ 索引。我们还将 $L[Q,P,k]$ 记为在此最优菜单中购买质量水平 $Q$ 的最低类型 $\theta$。我们可以递归地计算 $M[Q,P,k]$ 和 $L[Q,P,k]$，如下所示。如果 $k=1$，那么 $M[Q,P,k]$ 恰好等于 $p$ 乘以满足 $v(q;\ \theta) \geq p$ 的概率，而 $L[Q,P,k]$ 恰好等于满足 $v(q;\ \theta) \geq p$ 的类型 $\theta$ 的下确界。

对于 $k>1$，我们将根据离散化结果，考虑菜单上次高质量水平的所有可能选项，例如 $(q',\ p')$，其中 $Q'<Q$。对于 $(Q',\ P')$ 的每种选择，我们令 $\theta(Q',P')$ 表示在菜单项 $(Q',\ P')$ 和 $(Q,\ P)$ 之间无差异的类型（如果存在）。回顾单交叉条件可知，如果这样的 $\theta(Q',\ P')$ 存在，那么它是唯一的。如果不存在这样的 $\theta(Q',\ P')$，我们就不再考虑菜单项 $(Q',\ P')$。否则，我们考虑 $L[Q',P',k-1]$，即在最高质量水平为 $Q'$、价格为 $P'$ 的最优菜单中购买元素 $(Q',P')$ 的最低类型。如果 $L[Q',P',k-1] \geq \theta(Q',\ P')$，那么我们同样不再考虑菜单项 $(Q',\ P')$，因为这意味着包含菜单项 $(Q,\ P)$ 的最优菜单中，不包含任何会购买菜单项 $(Q',\ P')$ 的类型。

否则，我们有 $L[Q',P',k-1] < \theta(Q',P')$。因此，我们可以计算最优菜单中最高质量水平和次高质量水平分别为 $(Q,P)$ 和 $(Q',P')$ 时的收入，即 $R(Q',P') = M[Q',P',k-1] + (P-P')Pr[\theta > \theta(Q',P')]$。也就是说，纳入菜单项 $(Q,P)$ 所带来的额外收入增益或损失为 $(P-P')Pr[\theta > \theta(Q',P')],$，这等于类型大于 $\theta(Q',P')$ 的代理人从菜单项 $(Q',P')$ 转换到菜单项 $(Q,P)$ 所导致的差额。

最后，也考虑仅使用菜单项 $(Q,P)$ 时可获得的收入；将其记为 $R$。如果 $(Q',P')$ 的所有潜在选择都被消除，或者对于 $(Q',P')$ 的所有潜在选择，$R > R(Q',P')$，那么我们令 $M[Q,P,k]=R$，并将 $L[Q,P,k]$ 设为满足 $v(Q;\ \theta) \geq P$ 的下确界类型 $\theta$。这对应于最优菜单仅包含元素 $(P,Q)$ 的情况。否则，令 $(Q',P')$ 为使 $R(Q',P')$ 最大的选择，根据假设，该值大于 $R$。然后我们取 $L[Q,P,k]=\theta(Q',P')$，并令 $M[Q,P,k]=R(Q',P')$。

我们得出结论，可以填充表 $M$ 和 $L$，每个表项所需的时间与 $\epsilon^{-2}$ 成正比（即考虑所有可能选择 $(Q',P')$ 所需的时间）。总共有 $k\epsilon^{-2}$ 个表项，因此填充这些表所需的总时间至多为$k\epsilon^{-4}$。随后，只需对 $Q$和 $P$的所有可能选择，取 $M[Q,P,n]$的最大值，即可得到至多包含 $k$ 个菜单项的收入最优机制。

最后，根据引理 4.8，我们可以取 $k=1/\sqrt{\epsilon}$，并且我们的动态规划将得到一个菜单 $M$，使得 $Rev(M)$ 至多比最优收入低 $O(\lambda/\sqrt{\epsilon})$。进行适当的变量替换，令 $k=1/\epsilon$ 并将其离散化为 $\epsilon^2$ 的倍数，便可推出我们得到的菜单至多比

最优菜单的。 □

# 5 福利最大化

我们研究了收益最大化认证机构面临的问题。那么，希望最大化消费者和生产者所享福利的认证机构又如何呢？我们可以将这样的认证机构视为政府机构，它提供认证服务并非为了获取利润，而是为了提高生产和交易效率。

我们将市场结果的福利定义为消费者、生产者和认证机构的效用总和，并将各方之间的所有转移支付纳入考量。对于认证机构提供的选项菜单 $M$，我们将用 Wel($M$) 表示由菜单 $M$ 导致的唯一市场结果所产生的福利。

推论 3.4 的直接推论是，福利最优的菜单选择是在承担验证成本 $c$ 的情况下，提供所有可能的认证等级。

**定理 5.1.** 福利最优的证书菜单以成本 $c$ 提供每个可能的认证等级 $q > 0$，并以 0 的成本提供等级 0 。

证明。 如果所有质量水平都可见，福利最大化的结果将是每个生产者 $\psi$ 都与消费者 $\phi(\psi)$ 进行交易，且交易质量水平$q$取使其交易收益 $f(q; \phi(\psi)) - g(q; \psi)$ 最大的水平。然而，由于质量水平是隐藏的，生产者和消费者只有在支付验证成本后才能以正质量水平进行交易。因此，如果最大交易收益小于 $c$，那么以等级 0 进行交易更可取。然而，我们注意到，这恰好是所提出的认证菜单在均衡时实现的结果，因此它必定是所有可能菜单中的福利最优结果。 □

上文所述的社会福利最优菜单包含任意多个证书。在实践中，找到一个至多包含 $k$ 个证书的福利最优候选集合可能会有所帮助。事实证明，在假设 4.6 下，只需对上一节所述的动态规划稍作调整，就可以计算出一个近似社会福利最优的候选集合。

**定理 5.2.** 令 $M$ 为至多包含 $k$ 个元素的福利最大化菜单。可以在关于 $1/\epsilon$ 的多项式时间内找到一个至多包含 $k$ 个元素的 $M'$，且满足 $\mathrm{Wel}(M') \geq \mathrm{Wel}(M) - O(\lambda\epsilon)$ 。

证明. 证明与定理 4.7 的证明非常相似，而且严格来说更简单，因此这里仅简要说明不同之处。首先，将注意力限制在对每个非平凡质量等级都设定价格 $c$ 的菜单上，并不失一般性。

给定任意这样的菜单 $M$，我们可以通过向下取整到最接近的 $\epsilon$ 的整数倍，对可能的质量水平进行离散化。根据假设 4.6，这最多会使福利减少 $\lambda\epsilon$，因为每个菜单项带来的福利最多减少这么多，而且每个生产者都会从菜单中选择使其交易收益最大化的选项。

给定这样的离散化，我们可以像定理 4.7 中那样，通过动态规划递归地表示福利最优菜单；简化之处在于，我们只需按质量而非（质量、价格）对进行索引（因为所有价格都将设为 $c$）。我们不再将 $M[Q,k]$（以及相应的 $L[Q,k]$）定义为包含 $k$ 个元素且最大质量按 $Q$ 索引的菜单的最大收入，而是将其定义为包含 $k$ 个元素且最大质量按 $Q$ 索引的菜单的最大福利。与定理 4.7 相比，我们递归计算 $M[Q,k]$（以及 $L[Q,k]$）的方法基本保持不变。唯一需要注意的变化是实际的福利计算，而非收入计算。在定理 4.7 中，我们利用了这样一个事实：当类型为 $\theta > \theta'$ 的代理人以 $p$ 的价格购买证书 $q$ 时，获得的收入为 $p$ 乘以 $\Pr[\theta > \theta']$。相比之下，当类型为 $\psi > \psi'$ 的生产者全部购买证书 $q$ 价格为 $c$ 时，可用闭式表示为 $\int_{\psi'}^{\psi} (f(q;\phi(\eta)) - g(q;\eta) - c)d\eta$。用这项福利计算替代收入计算，即可完成所需的更改。 □

收入最大化的菜单选择是否也能近似实现福利最大化？事实证明，认证机构采用收益最优菜单所产生的福利，可能只是最优福利中任意小的一部分。这源于线性情形下垄断扭曲的经典例子：垄断者可能会受到激励，出售远少于有效率水平的商品（即认证），以抬高价格。

**命题 5.3**。 对于该问题，存在一系列实例，使得收入最优解中的福利只是最优福利中任意小的一部分。近似程度可能差至 $\Omega(\log H)$，其中 $H = \max_{\theta_1,\theta_2} \frac{\max_q v(q;\theta_1)}{\max_q v(q;\theta_2)}$ 是不同买方类型中最高与最低最大价值之比。

证明。 取 $c = 0$，并假设对于所有 $q$ 和 $\psi$，$f(q;\phi) = \phi q$，且 $g(q;\psi) = 0$。我们关于消费者类型 $\phi$ 的分布是在 $[1,H]$ 上的等收入分布；也就是说，对于所有 $\phi \in [1,H]$，$F(\phi) = 1 - \frac{1}{\phi}$。回想观察 4.2，认证机构提供合同 $q = 1$ 并定价为 $H$ 是收益最优的，其期望福利（和收入）为 1。然而，提供合同 $q = 1$ 且价格为 0，则可实现最优福利 $\log(H)$。 □

然而，我们的均衡分析有一个推论：无论选择何种价格，在证书菜单中增加额外的认证选项，都不会降低消费者和生产者的效用总和。对此的一种解读是，当某个认证市场中已经存在一些认证选项时，收益最大化认证机构进入该市场不会损害福利。

**命题 5.4**。 考虑两个认证菜单 $M$和 $M'$，满足 $M \subseteq M'$。那么 $\mathrm{Wel}(M') - \text{收入}(M') \geq \mathrm{Wel}(M) - \text{收入}(M)$。

证明。 如果生产者 $\psi$从认证菜单 $M$中选择选项 $(q, p)$，那么生产者 $\psi$ 及相应消费者 $\phi$ 获得的福利，扣除认证机构筹集的收入后，为 $f(q;\phi(\psi)) - g(q;\psi) - p$。根据推论 3.4,

生产者 $\psi$ 会恰好购买使该数量最大化的 $M$ 中的菜单项。因此，提供额外的菜单项只会增加生产者类型 $\psi$ 与相应消费者 $\phi(\psi)$共同享有的福利。由于这对每个 $\psi$ 都逐点成立，因此对所有类型的总体而言也成立。 □

# 参考文献


Viral V Acharya、Peter DeMarzo 和 Ilan Kremer。2011。内生信息流与公告聚类。《美国经济评论》101, 7 (2011), 2955–79。S Nageeb Ali、Nima Haghpanah、Xiao Lin 和 Ron Siegel。2022。如何出售硬信息。《经济学季刊》137, 1 (2022), 619–678。Reza Alijani、Siddhartha Banerjee、Kamesh Munagala 和 Kangning Wang。2022。拍卖设计中信息中介的局限。载于第*23*届 *ACM*经济学与计算会议论文集。849–868。Dirk Bergemann、Alessandro Bonatti 和 Alex Smolin。2018。信息的设计与定价。《美国经济评论》108, 1 (2018), 1–48。

Dirk Bergemann、Benjamin Brooks 和 Stephen Morris。2017。《一般信息结构下的第一价格拍卖：对竞标和收入的影响》。《计量经济学》85，1（2017），107–143。

Dirk Bergemann、Yang Cai、Grigoris Velegkas 和 Mingfei Zhao。2022。《出售完全信息是否（近似）最优？》。载于《第*23*届*ACM*经济学与计算会议论文集》。608–663。Dirk Bergemann 和 Stephen Morris。2019。信息设计：统一视角。《经济文献杂志》57, 1 (2019)，44–95。Dirk Bergemann、Ji Shen、Yun Xu 和 Edmund Yeh。2012a。有限信息下的多维机制设计。载于《第*13*届*ACM*电子商务会议论文集》。162–178。Dirk Bergemann、Ji Shen、Yun Xu 和 Edmund M Yeh。2012b。有限信息下的机制设计：非线性定价案例。载于国际网络博弈论会议。施普林格，1–10。Tilman B¨orgers 和 Daniel Krahmer。2015。机制设计理论导论。牛津大学出版社，美国。Ozan Candogan 和 Philipp Strack。2021。向私人信息接收者最优披露信息。载于*EC '21*：第*22*届*ACM*经济学与计算会议，匈牙利布达佩斯，*2021*年*7*月*18*日至*23*日，P´eter Bir´o、Shuchi Chawla 和 Federico Echenique（编）。ACM，263。

Shuchi Chawla、Hu Fu 和 Anna Karlin。2014年。相互依存价值情境下的近似收入最大化。载于第十五届*ACM*经济学与计算会议论文集。277–294。Joe Sandler Clarke 和 Luke Barratt。[无日期]。顶级航空公司抵消航班排放的承诺依赖“虚假碳信用”。*Unearthed*（[无日期]）。https://unearthed.greenpeace.org/2021/05/04/carbon-offsetting-british-airways-easyjet-verra/ Marc N Conte 和 Matthew J Kotchen。2010年。解释自愿碳抵消的价格。气候变化经济学1, 02 (2010)，93–111。Peter M DeMarzo、Ilan Kremer 和 Andrzej Skrzypacz。2019年。测试设计与最低标准。《美国经济评论》109, 6 (2019)，2173–2207。Mathias Dewatripont、Patrick Bolton 等。2005年。契约理论。技术报告。布鲁塞尔自由大学。Piotr Dworczak。2020年。后市场机制设计：截断机制。《计量经济学》88, 6 (2020)，2629–2661。Daniel W Elfenbein、Raymond Fisman 和 Brian McManus。2015年。市场结构、声誉与质量认证的价值。《美国经济学杂志：微观经济学》7, 4 (2015)，83–108。Patrick Greenfield。[无日期]a。专家警告称，主要航空公司使用的碳抵消基于有缺陷的体系。《卫报》（[无日期]）。https://www.theguardian.com/environment/2021/may/04/carbon-offsets-used-by-major-airlines-based-on-flawed-system-warn-experts Patrick Greenfield。 [无日期]b。调查显示：最大供应商提供的雨林碳抵消中，超过90%毫无价值。《卫报》（[无日期]）。https://www.theguardian.com/environment/2023/jan/18/revealed-forest-carbon-offsets-biggest-provider-worthless-verra-aoe Sanford J Grossman。1981年。保修与关于产品质量的私人披露所发挥的信息作用。《法律与经济学杂志》24, 3 (1981)，461–483。Alejandro Guizar-Coutiˆno、Julia PG Jones、Andrew Balmford、Rachel Car-menta 和 David A Coomes。2022年。全球评估自愿 REDD+ 项目在湿润热带地区减少森林砍伐和退化的成效。《保护生物学》(2022)，e13970。Faruk Gul 和 Ennio Stacchetti。2000年。差异化商品的英式拍卖。《经济理论杂志》92, 1 (2000)，66–95。Alessandro Lizzeri。1999年。信息揭示与认证中介。《兰德经济学杂志》(1999)，214–231。

Michael Luca。2016年。评论、声誉与收入：Yelp.com 案例。*Com*（*2016年3月15日*）。哈佛商学院 *NOM* 单位工作论文12-016（2016年）。Paul R Milgrom。1981年。好消息与坏消息：表示定理及其应用。《贝尔经济学杂志》（1981年），380–391。Paul R Milgrom 和 Robert J Weber。1982年。拍卖与竞争性竞标理论。《计量经济学：计量经济学会期刊》（1982年），1089–1122。James A Mirrlees。1971年。对最优所得税理论的探索。《经济研究评论》38，2（1971年），175–208。Michael Mussa 和 Sherwin Rosen。1978年。垄断与产品质量。《经济理论杂志》18，2（1978年），301–317。Roger B Myerson。1981年。最优拍卖设计。《运筹学数学》6，1（1981年），58–73。Subramaniam Ramanarayanan 和 Jason Snyder。2012年。声誉与企业绩效：来自透析行业的证据。未发表手稿（2012年）。Tim Roughgarden 和 Inbal Talgam-Cohen。2013年。相互依存价值下的最优及近似最优机制设计。载于第十四届 *ACM* 电子商务会议论文集。767–784。Alejandro Saporiti 和 Fernando Tohm´e。2006年。单交叉、策略性投票与中位数选择规则。《社会选择与福利》26，2（2006年），363–383。Michael Spence。1974年。对信号的竞争性和最优响应：效率与分配分析。《经济理论杂志》7，3（1974年），296–332。Steven Tadelis 和 Florian Zettelmeyer。2015年。信息披露作为匹配机制：来自田野实验的理论与证据。《美国经济评论》105，2（2015年），886–905。Thales AP West、Jan B¨orner、Erin O Sills 和 Andreas Kontoleon。2020年。巴西亚马逊地区自愿 REDD+ 项目夸大了碳排放减量。《美国国家科学院院刊》117，39（2020年），24188–24194。Thales AP West、Sven Wunder、Erin O Sills、Jan B¨orner、Sami W Rifai、Alexan-dra N Neidermeier 和 Andreas Kontoleon。2023年。亟需采取行动，让热带森林保护碳抵消真正发挥气候变化减缓作用。*arXiv* 预印本 *arXiv:2301.03354*（2023年）。Bradley S Wimmer 和 Brian Chezum。2003年。柠檬市场中的质量认证实证研究。《经济探究》41，2（2003年），279–291。