arXiv:2301.13495v1 [math.MG] 31 Jan 2023

# 单位体积体中体积为 $\varepsilon$ 的子集间距离的无维数估计

Abdulamin Ismailov[1] Alexei Kanel-Belov FyodorIvlev

**摘要**

单位体积体中两点之间的平均距离 $K \subset \mathbb{R}^n$ 趋于无穷大，当 $n \to \infty$时。然而，对于两个体积为 $\varepsilon > 0$ 的小子集，情况有所不同。对于单位体积立方体和欧几里得球，最大距离的量级为 $\sqrt{-\ln \varepsilon}$；对于单纯形和超八面体，量级为 $-\ln \varepsilon$；对于带有 $p \in [1$ 的 $\ell_p$ 球，量级为 $(-\ln \varepsilon)^p$。这些估计不依赖于维数 $n$。本文旨在研究这一现象。等周不等式将在我们的方法中发挥关键作用。

# 目录

**1 引言。3 2 预备知识。7 3 欧几里得球。9 4 单位立方体。17 5 单纯形与 $\ell_p$-球体。23**5.1 单纯形.23 5.2 $\ell_p$-球体.4**06 下界。43 7 离散等周问题。54 8 结论。57 A $\Phi^{-1}$的渐近行为。61**[1]E

-mail：nameundefinednamovich@gmail.com

**B 函数** $x(-\log x)^{1-\frac{1}{p}}$**在** $(0;\frac{1}{2}]$ **上递增。63 C 函数** $V_n(x)$ **与** $S_n(x)$**的极限。63 D 平均距离。70**

# 1 引言。

在高维空间中，我们观察到各种各样的不同现象。例如，弗拉基米尔·伊戈列维奇·阿诺德喜欢向学生提出如下问题：“直径为 1 米的 100 维西瓜，其果肉占总体积的百分比是多少？如果瓜皮厚度为 1 厘米呢？”答案约为 $1-e^{-1}$。这个问题以一种简单的方式展示了测度集中现象：一个体的大部分质量可能集中在一个薄壳内。再举一例，当维数趋于无穷时，半径为 2023 的欧几里得球的体积趋于 0。更一般地，根据等直径不等式，在高维空间中，单位体积体的直径应当变得任意大。

本文旨在通过研究以下现象，更好地理解高维空间中的规律：单位体积凸体中的两个点之间的距离可以任意大；例如，考虑单位立方体 $(0;1)^n$ –，当 $n$ 趋于$+\infty$ 时，直径等于 $\sqrt{n}$ 也趋于无穷大；类似地，平均距离至少是 $\sqrt{n}$量级（见附录 D）；甚至一个点与某个固定体积的子集之间的距离也可能任意大，但事实证明，单位立方体中两个固定体积为 $\varepsilon > 0$的子集之间的距离存在一个上界，该上界依赖于 $\varepsilon$，但与维数 $n$无关。对于单位立方体以外的其他凸体，情况又如何呢?

考虑一族体积为 1 的有界凸体 $K_n$。对于每个$K_n$，考虑两个体积均为某个固定值 $\varepsilon \in (0;1/2)$ 的子集之间所有可能距离的上确界是有意义的。将该值记为 $d_n(\varepsilon)$。

我们用 $\Phi$ 表示函数

$$\Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} e^{-\pi x^2} dx$$

函数 $\Phi^{-1}(\varepsilon)$渐近等价于

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{-\ln \varepsilon}$$

当 $\varepsilon$趋近于 0 时（见附录 A）。

**定理6.2**。 当 $K_n$ 为单位体积欧几里得球时

$$\lim_{n\to\infty} d_n(\varepsilon) = -2\frac{1}{\sqrt{e}}\Phi^{-1}(\varepsilon)$$

**定理 4.3 和 6.3**。 当 $K_n$ 为单位立方体时，我们有

$$-2\sqrt{\frac{\pi}{6}}\Phi^{-1}(\varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} d_n(\varepsilon) \le \limsup_{n\to\infty} d_n(\varepsilon) \le -2\Phi^{-1}(\varepsilon)$$

**定理 5.5 和 6.4**。 当 $K_n$ 为单位体积单纯形时，我们有

$$-\frac{\sqrt{2}}{e}\ln(2\varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} d_n(\varepsilon) \le \limsup_{n\to\infty} d_n(\varepsilon) \le -c\ln\varepsilon$$

对于某个与 $n$ 和 $\varepsilon$ 无关的普适常数 $c > 0$ 。

**定理 5.8 和 6.5**。 固定某个 $p \in [1;\ 2]$。当 $K_n$ 为单位体积$\ell_p$ 球体时

$$-2\Psi_p^{-1}(\varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} d_n(\varepsilon) \le \limsup_{n\to\infty} d_n(\varepsilon) \le C_p(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{p}},$$

其中， $C_p$ 是由 $p$ 确定的某个普适常数，而函数 $-2\Psi_p^{-1}(\varepsilon)$（见附录 C）与其渐近等价

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{p}}\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)}(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{p}}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时。

将欧几里得距离替换为曼哈顿距离后，我们的问题的一个版本可以通过离散化来处理。

**定理 7.3**。 若用 $d_n(\varepsilon)$ 表示单位立方体 $[0;\ 1]^n$ 中两个体积为 $\varepsilon \in (0;1\,2)$ 的几何体之间的最大曼哈顿距离，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n(\varepsilon)}{\sqrt{n}} = -2\sqrt{\frac{\pi}{6}}\Phi^{-1}(\varepsilon)$$

我们还建立了某种一般性的下界，表明就我们的问题而言，欧几里得球在某种意义上是最优的。

**定理 6.6**。 当 $K_n$ 是体积为 *1* 的中心对称有界凸几何体时

$$-2\frac{1}{\sqrt{e}}\Phi^{-1}(\varepsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} d_n(\varepsilon)$$

只需考虑一些超平面切割，就可以推导出我们问题的下界。但如何为单位体积凸体中两个子集 $A$和 $B$ 之间的距离给出上界呢?

首先，我们注意到，如果 $A$ 和 $B$ 的体积都至少为$_{1\ 2}$，那么它们之间的距离为零（见引理 2.1）。因此，我们假设 $A$ 和 $B$ 的体积均为 $\varepsilon \in$ (0; $_{1\ 2}$)。接下来，我们引入体的 $\delta$-扩张这一概念，将其定义为与该体的距离至多为 $\delta$ 的所有点构成的集合，即

$$A_\delta = \{x \in X \mid \exists y \in A\colon d(x,y) \leq \delta\}$$

如果我们用 $A$ 的 $\delta$-扩张替换它，并取足够小的 $\delta$，会发生什么? 粗略地说，我们的体会增加一层宽度为 $\delta$ 的薄层。薄层 $A_\delta \setminus A$ 的体积可以近似表示为 $\delta \cdot S(A)$，其中$S(A)$是体 $A$的表面积。因此， $A$ 的体积约增加 $\delta{\cdot}S(A)$，而扩张 $A$之后，几何体 $A$和 $B$ 之间的距离恰好减少 $\delta$ （也可能变为零）。为了估计 $A$和 $B$ 之间的距离，我们将同时逐步扩张它们，直到两个几何体的体积都至少达到$_{1\ 2}$；此时它们之间的距离已经为零。两个几何体达到体积$_{1\ 2}$ 所用时间的两倍，就是它们之间距离的一个上界。

这只是对我们如何处理这个问题的粗略描述。要让这个想法行得通，我们还需要更多内容。我们尚未说明几何体的形状；目前，它们可以是体积为 $\varepsilon$ 的任意子集，这可能会带来问题，因为我们打算依赖表面积等概念。在一定程度上，以下观察或许能缓解这些问题：将 $A$ 和 $B$ 稍微扩大 $\delta$ 后，距离和体积不会有太大变化，但光滑性可能会有所改善。无论如何，在全文中，我们都假设所讨论的几何体具有所需的光滑性。

现在来考虑一个体 $A$ 在扩张刚开始时缓慢扩张的过程。与其讨论薄层的近似体积$A_\delta \setminus A$ ，不如取点 $\delta = 0$处的右导数。

所得结果称为自由表面积的 Minkowski–Steiner公式

$$\mu^+(A) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\mu(A_\delta) - \mu(A)}{\delta}$$

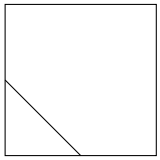
因此，能够估计这一表面积对我们的方法至关重要。但我们只知道 $A$ 和 $B$ 的初始体积，这使我们面临等周问题：给定关于一个体的初始体积的信息，求其表面积的下界。

欧几里得球具有非常良好的对称性。可以应用对称化技术。欧几里得球内的等周区域已被完全分类（[16, 定理1和 5]）。这使我们能够获得足够精确的估计，从而证明定理6.2。

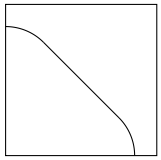
然而，在这方面，单位立方体不如欧几里得球。因此，我们不处理单位立方体的内部，而是将问题转移（引理4.1）到另一个空间，在那里等周问题的情况更好，并借此推导出原空间中的下界（[16, 定理 7]）。

最后，要在单纯形的情形下推导下界，还需要引入新的思想和方法。这里我们重复采用 Sasha Sodin 的一篇文章中的方法 [19], ，其中证明了关于$p \in [1$的 $\ell_p$ 球体的等周不等式； $2]$ 。特别地，在 $p = 1$ 的情形下，我们得到超八面体。定理5.8是文章 [19]中所建立的等周不等式的直接推论。

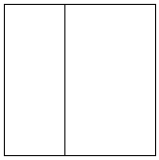
尽管我们的方法确实能给出渐近正确的估计，但不应期待它能导出精确的常数。我们通过考察体积为 $\mu(A_\delta)$ 的等周问题，从下方界定 $\mu(A_\delta)$ 的增长，但这可能会导致次优估计，因为随着 $\delta$ 的变化， $A_\delta$ 不一定呈现为最优等周区域的形状。



（a）区域 $A$



（b）区域 $A_\delta$



（c）体积为 $\mu(A_\delta)$ 的最优区域

# 2 预备知识。

假设我们在空间 $X$ 中工作，其度量为 $d$，概率测度为 $\mu$，即 $\mu(X) = 1$。在本节中，我们将介绍一些与我们的问题相关的基本概念。

**定义 1**。两个非空子集 $A$，$B \subseteq X$之间的距离是 $A$ 中的点与 $B$中的点之间距离的下确界

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$$

**定义 2**。点 $x \in X$ 属于子集 $A \subseteq X$的 $\delta$-扩张，当且仅当它到 $A$中的某个点的距离至多为 $\delta$

$$A_\delta = \{x \in X \mid \exists y \in A \colon d(x, y) \leq \delta\}$$

我们想知道，两个测度为 $\mu(A) = \mu(B) = \varepsilon > 0$ 的子集 $A$、$B \subset X$之间可能相距多远。为此，注意到，如果它们的$\delta$-扩张相交，那么距离的上界为 $2\delta$

$$A_\delta \cap B_\delta \neq \varnothing \Rightarrow \operatorname{dist}(A, B) \leq 2\delta$$

我们的问题涉及以下情形：$X$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个单位体积开凸有界子集，$d$ 是欧几里得度量，且$\mu$ 是勒贝格测度。在这种情况下，下面的引理成立。

**引理 2.1**。如果 $A$ 和 $B$ 是 $X$ 的两个子集，且 $\mu(A) + \mu(B) \geq 1$，那么它们之间的距离为$0$

$$\operatorname{dist}(A, B) = 0$$

证明。反设。设 $A$ 与 $B$ 之间的距离为一个正数

$$r = \operatorname{dist}(A, B) > 0$$

这意味着我们的子集不相交，因此

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A \cup B) = 1$$

选取一对距离小于 $2r$ 的点 $a \in A$ 和 $b \in B$

$$d(a, b) < 2r$$

以 $c$ 表示 $a$ 和 $b$ 之间线段的中点。从 $c$ 到两个子集 $A$ 和 $B$ 的距离都严格小于 $r$，因此点 $c$ 不属于我们的任何一个子集。现在考虑一个位于 $X$ 内部、以 $c$ 为中心且半径为 $\delta$ 的邻域，其中 $\delta < r - \frac{d(a,\, b)}{2}$。显然，它既不可能与 $A$ 相交，也不可能与 $B$ 相交，同时它具有非零测度，因此

$$\mu(X \setminus (A \cup B)) > 0,$$

这将导致矛盾。 □

要确保 $A_\delta$ 与 $B_\delta$ 的交集非空，以下条件足以保证这一点

$$\mu(A_\delta) \geq \frac{1}{2} \text{ and } \mu(B_\delta) \geq \frac{1}{2}$$

因此，我们关注 $\mu(A_\varepsilon)$作为 $\varepsilon$的函数时的增长，因为这可能会给出 $\delta$ 的上界，进而给出 dist$(A, B)$ 的上界。 $\mu(A_\varepsilon)$ 在 $\varepsilon = 0$ 处的导数为

**定义 3**。 我们将 $A \subseteq X$ 的表面积定义为以下极限

$$\mu^+(A) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mu(A_\varepsilon) - \mu(A)}{\varepsilon}$$

$\mu^+(A)$的下界可能有助于我们得到关于$\mu(A_\varepsilon)$增长的结果，但我们所知道的只有子集 $A$的测度 $\mu(A)$。因此，我们希望知道当 $\mu(A)$固定时 $\mu^+(A)$的最小可能值，或者至少给出$\mu^+(A)$的下界。

**定义 4**。 我们将等周剖面定义为一个函数，它将 $t$映射到 $\mu(A) = t$时 $\mu^+(A)$ 可能取值的下确界。

$$I_\mu(t) = \inf_{\mu(A)=t} \mu^+(A)$$

当达到二分之一的测度后，我们不再关注 $\mu(A_\varepsilon)$的增长；此外，我们的初始 $\mu(A)$大于 0。这意味着，我们只关注 $I_\mu(t)$在 $0 < t < \frac{1}{2}$ 时的取值。因此，本文默认将等周剖面的定义域设为区间 $(0; \frac{1}{2})$。

在所有测度相同的区域中，表面积最小的区域称为等周区域，其边界称为等周超曲面。

# 3 个欧几里得球体。

**引言**。 欧几里得球是应用对称化技术的理想对象。通过一个涉及[16, 定理 1 和 5]的论证，可以完整地分类欧几里得球中的最优等周区域。因此，考察这些最优等周区域即可得出等周剖面的下界。

用 $B^n$ 表示单位 $n$球体。其体积为

$$\frac{\sqrt{\pi}^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

因此，单位体积的 $n$球体半径为

$$\omega_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\pi}} \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi e}}$$

用 $\mu$ 表示 $\omega_n B^n$ 上的勒贝格测度。

结合 [16] 中的定理 1 和定理 5，可对 $\omega_n B^n$ 中的最优等周区域进行分类。

**定理 3.1** （[16, 定理 1 和 5]）。 球体内的等周超曲面要么是经过原点的超平面，要么是与 $\omega_n B^n$的球面正交的球冠。

我们希望求出等周剖面 $I_\mu$ of$\omega_n B^n$ 的下界。根据定理 3.1，只需考虑与 $\omega_n B^n$ 正交的球体的交集。

我们用 $\Psi(x)$ 表示 $\Phi(\sqrt{e}x)$。注意，函数 $\Psi(x)$ 的利普希茨常数 $C > 0$ 是有限的，因为其导数是有界函数。在区间 $(-\infty;0)$ 上， $\Psi(x)$ 和 $\Psi'(x)$ 都是递增函数。

**定理 3.2**。 对于每个 $\varepsilon_0 \in (0; 1\ 2)$ 以及 $\tau > 0$，存在一个数 $N$，使得等周不等式

$$I_\mu(\Psi(t) + \tau) \geq \Psi'(t)$$

对所有 $n > N$和 $\Psi\ (t)\ \in\ (\varepsilon_0;\ \frac{1}{2} - \tau)$ 均成立。

证明。首先，注意到 $I_\mu$ 在区间 $(0;\ 1/2)$ 上是非递减函数。事实上，若取一个与 $\omega_n B^n$ 正交的球体，使其与$\omega_n B^n$ 的交集体积为 $\varepsilon \in (0;\ 1/2)$，再将其替换为一个半径相同、但中心距离 $\omega_n B^n$的中心更远的球体，则会得到一个体积和表面积都更小的 $\omega_n B^n$ 区域。

下面我们将证明，对于任意 $D$、$\delta_1$、$\delta_2 > 0$，存在一个数 $N$，使得对于每个 $n > N$ 和 $0 < d \le D$，在 $\omega_n B^n$ 中存在一个最优等周区域，其体积 $V$ 且表面积 $S$ 满足

$$\Psi(-d) + \delta_1 \ge V$$

$$S \ge \Psi'(-d - \delta_2)$$

注意到，我们的定理可由这一最后的断言推出。事实上，在定理的表述中，我们要求 $\Psi(t)$ 属于区间 $(\varepsilon_0;\ \frac{1}{2} - \tau)$，这意味着 $t \ge \Psi^{-1}(\varepsilon_0)$。令 $D = -\Psi^{-1}(\varepsilon_0)$，并选取 $\delta_1$、$\delta_2 > 0$，使得

$$C\delta_2 + \delta_1 \le \tau$$

$$t < \Psi^{-1}\left(\frac{1}{2} - \tau\right) \le -\delta_2$$

根据我们的断言，存在一个数 $N$，使得对于每个 $n > N$ 和 $d \in (0;\ D]$，在 $\omega_n B^n$ 中存在一个体积为 $V$、不大于 $\Psi(-d) + \delta_1$，且表面积至少为 $S$（$\Psi'$）的最优等周区域。由于该区域是最优的，

$$I_\mu(V) = S$$

而我们的界意味着

$$I_\mu(\Psi(-d) + \delta_1) \ge I_\mu(V) = S \ge \Psi'(-d - \delta_2) \tag{1}$$

对于任意满足 $\Psi(t) \in (\varepsilon_0; \frac{1}{2} - \tau)$ 的 $t$，我们可以令 $d = -t - \delta_2 \in (0;\ D]$，但随后

$$\Psi(-d) + \delta_1 = \Psi(t + \delta_2) + \delta_1 \le \Psi(t) + C\delta_2 + \delta_1 \le \Psi(t) + \tau$$

将其与（1）结合，我们得到所需的等周不等式

$$I_\mu(\Psi(t) + \tau) \ge I_\mu(\Psi(-d) + \delta_1) \ge \Psi'(-d - \delta_2) = \Psi'(t)$$

现在我们需要证明这一论断。固定 $D > 0$。我们将考虑 $\omega_n B^n$ 与一个同其正交的球体 $B_r^n(A)$ 的交集，使得

到原点的距离（这里记作 $O$）与 $B_r^n(A)$ 之间的距离是范围 $(0;\ \frac{D}{2}]$ 内的某个数 $\frac{d}{2}$。

如果两个球体的球心与相应球面交集上的任意一个点构成直角三角形，则称这两个球体正交。

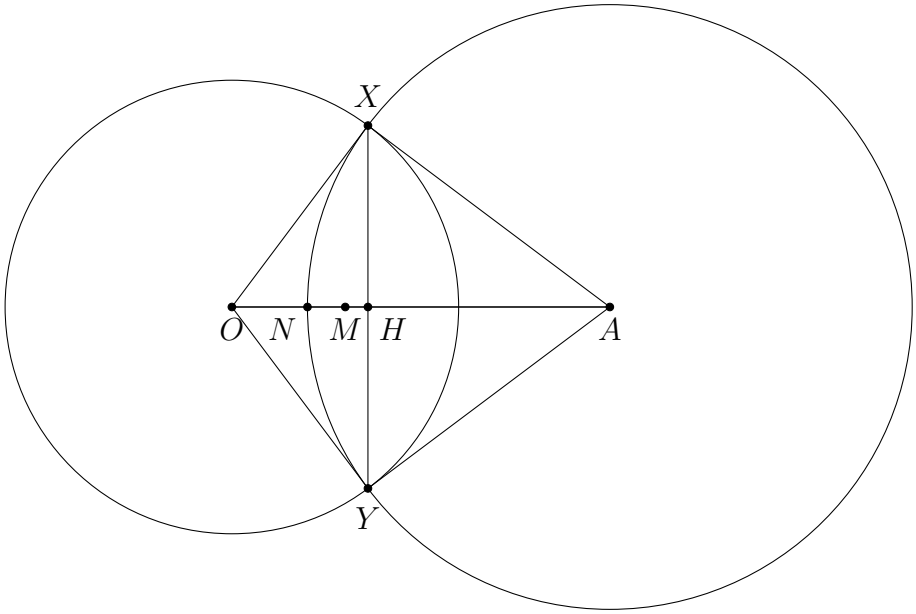



图2：上文所述的直角三角形

在上图中，球体 $\omega_n B^n$ 对应于中心位于 $O$、半径为 $OX$的圆，球体 $B_r^n(A)$ 对应于中心位于 $A$ 、半径为 $AX$的圆。由于我们有一个直角三角形，

$$OA = \sqrt{OX^2 + AX^2} = \sqrt{\omega_n^2 + r^2}$$

我们要求 $ON = \frac{d}{2}$

$$ON = OA - AN = \sqrt{\omega_n^2 + r^2} - r = \frac{d}{2}$$

$$\sqrt{\omega_n^2 + r^2} = r + \frac{d}{2}$$

$$\omega_n^2 = rd + \frac{d^2}{4}$$

$$r = \frac{\omega_n^2}{d} - \frac{d}{4}$$

考虑直角三角形 $OAX$ 的高 $XH$，并注意到

$$OH = \frac{OX^2}{OA} = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega_n^2 + r^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega_n^2} + \left(\frac{r}{\omega_n^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega_n^2} + \left(\frac{1}{d} - \frac{d}{4\omega_n^2}\right)^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{d^2} + \frac{1}{2\omega_n^2} + \frac{d^2}{16\omega_n^4}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{d} + \frac{d}{4\omega_n^2}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{1}{d} + \frac{d}{4\omega_n^2}} = \frac{d}{1 + \frac{d^2}{4\omega_n^2}} \leq d \quad (2)$$

设 $P$ 是一个距原点 $x$ 的超平面。用 $S_n(x)$ 表示超平面 $\omega_n B^n$ 被 $P$ 截出的截面的体积。超平面 $P$ 将 $\omega_n B^n$ 分成两部分，其中至少有一部分的体积不超过 $_{1\,2}$，将该体积记为 $V_n(x)$。$V_n(x)$ 和 $S_n(x)$ 都是在 $[0;\infty)$ 上定义的减函数。

由 [20] 中定理1的证明可知，函数序列 $V_n(x)$一致收敛于 $\Psi(-x)$，且函数序列$S_n(x)$一致收敛于 $\Psi'(-x)$（见附录 C）。

在区间 $[0; D]$ 上，正连续函数 $\Psi'(-x) - \Psi'(-x-\delta_2)$ 达到其最小值 $\varepsilon_1 > 0$。根据一致收敛性，对于所有充分大的 $n$，有

$$S_n(x) \geq \Psi'(-x) - \varepsilon_1,$$

这给出

$$S_n(OH) \geq S_n(d) \geq \Psi'(-d) - \varepsilon_1 \geq \Psi'(-d - \delta_2)$$

对于所有 $d \in (0; D]$。

我们还知道，$S_n(OH) \leq S_n(0)$ 和 $S_n(0)$ 都收敛于 $\Psi'(0)$。因此，$S_n(OH)$ 始终被某个常数 $S_0$ 从上方界定。

经过点 $H$ 且正交于 $OA$ 的超平面将两个球体 $\omega_n B^n$ 和 $B_r^n(A)$ 的交集分成两个球冠：$\Omega_1$ 属于 $\omega_n B^n$，$\Omega_2$ 属于 $B_r^n(A)$。$\omega_n B^n \cap B_r^n(A)$ 的体积等于 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 的体积之和。

我们希望给出 $\Omega_2$体积的上界。其底面，即经过 $H$ 的超平面截面，面积不超过 $S_0$。固定某个数$1 > \varepsilon_2 > 0$。在线段 $HN$ 上取一点 $M$，使得 $HM$：$HN = \varepsilon_2$。

用 $S_1$ 表示经过$M$ 且正交于 $OA$ 的 $B_r^n(A)$ 的超平面截面的面积。$\Omega_2$ 的体积可被如下地从上方界定:

$$S_1 NM + S_0 MH = S_1 NH(1-\varepsilon_2) + S_0 NH\varepsilon_2 \tag{3}$$

对应于 $S_1$ 的（$n-1$）-球体半径等于

$$\begin{aligned}\sqrt{AX^2 - AM^2} &= \sqrt{AX^2 - (AH+HM)^2} \\ &= \sqrt{(AX^2 - AH^2) - 2AH\cdot HM - HM^2} \le \sqrt{XH^2 - 2\varepsilon_2 AH\cdot HN}\end{aligned}$$

对应于 $S_0$ 的（$n-1$）-球体半径为 $XH$，因此两个半径之比为

$$\sqrt{1 - 2\varepsilon_2 \frac{AH}{XH^2} HN}$$

由于 $XH$ 是直角三角形的高， $XH^2$ 等于 $OH\cdot HA$，因此该比值可改写为

$$\sqrt{1 - 2\varepsilon_2 \frac{HN}{OH}}$$

注意到 $HN = OH - ON$，并且根据公式（2）

$$\sqrt{1 - 2\varepsilon_2 \frac{HN}{OH}} = \sqrt{1 - 2\varepsilon_2 \left(1 - \frac{ON}{\frac{2ON}{1+\frac{d^2}{4\omega_n^2}}}\right)} = \sqrt{1 - 2\varepsilon_2 \left(1 - \frac{1+\frac{d^2}{4\omega_n^2}}{2}\right)}$$

对于所有充分大的 $n$

$$\frac{d^2}{4\omega_n^2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{1 - 2\varepsilon_2 \left(1 - \frac{1+\frac{d^2}{4\omega_n^2}}{2}\right)} \le \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_2}{2}}$$

我们得到

$$S_1 \le S_0 \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

显然， $NH \le OH \le d \le D$，根据（3），$\Omega_2$ 的体积不大于

$$DS_0 \left(\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} (1-\varepsilon_2) + \varepsilon_2\right)$$

注意，我们可以选取 $\varepsilon_2 \in (0;1)$，使得对于所有充分大的 $n$

$$DS_0\left(\left(1-\frac{\varepsilon_2}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}(1-\varepsilon_2)+\varepsilon_2\right) \leq \frac{\delta_1}{2} \tag{4}$$

$\Omega_1$ 的体积为 $V_n(OH)$。根据（2）

$$d-OH = d-\frac{d}{1+\frac{d^2}{4\omega_n^2}} = d\cdot\frac{\frac{d^2}{4\omega_n^2}}{1+\frac{d^2}{4\omega_n^2}} \leq \frac{D^3}{4\omega_n^2}$$

我们注意到，函数序列 $V_n(x)$ 一致收敛于 $\Psi(-x)$。因此，对于所有充分大的 $n$

$$\Psi(-OH)+\frac{\delta_1}{4} \geq V_n(OH)$$

注意，对于所有 $x \geq 0$

$$0 < \Psi'(-x) \leq \Psi'(0),$$

这意味着

$$\Psi(-d)+\Psi'(0)\frac{D^3}{4\omega_n^2}+\frac{\delta_1}{4} \geq \Psi(-OH)+\frac{\delta_1}{4} \geq V_n(OH) \tag{5}$$

对于足够大的 $n$，我们有

$$\Psi'(0)\frac{D^3}{4\omega_n^2} \leq \frac{\delta_1}{4} \tag{6}$$

我们得出，$\omega_n B^n \cap B_r^n(A)$ 的体积 $V$ 等于 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$，的体积之和，因此根据不等式（4）、（5）、（6）

$$\Psi(-d)+\delta_1 \geq V$$

根据定理 3.1，$\omega_n B^n$ 与 $B_r^n$ 的交集是 $\omega_n B^n$中的一个最优等周区域。其表面积 $S$ 等于与 $\Omega_2$, 对应的球冠的表面积，而球冠的表面积可由 $\Omega_2$, 底面的面积下界估计，即 $S_n(OH)$。由此我们证明，$\omega_n B^n \cap B_r^n(A)$的体积 $V$ 和自由表面积 $S$ 满足

$$\Psi(-d)+\delta_1 \geq V$$

$$S \geq S_n(OH) \geq \Psi'(-d-\delta_2)$$

对于所有充分大的 $n$，并且此处的数 $d$ 可以取为 $(0;D]$ 中的任意数，这就证明了我们的结论。 □

用 $d_n(\varepsilon)$ 表示 $\omega_n B^n$ 内两个体积为 $\varepsilon \in (0; 1/2)$ 的子集之间所有可能距离的上确界。

利用我们的等周不等式，我们推导出

**定理 3.3**。对于每个 $\varepsilon \in (0; 1/2)$，

$$\limsup_{n\to\infty} d_n(\varepsilon) \le -2\frac{1}{\sqrt{e}}\Phi^{-1}(\varepsilon),$$

其中函数 $-2\frac{1}{\sqrt{e}}\Phi^{-1}(\varepsilon)$ 渐近等价于

$$-2\frac{1}{\sqrt{\pi e}}\sqrt{-\ln\varepsilon}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时。

证明。任取 $\varepsilon_0 \in (0;\varepsilon)$ 和 $\tau \in (0;\varepsilon)$。根据定理 3.2，存在一个数$N$，使得不等式

$$I_\mu(\Psi(t)+\tau) \ge \Psi'(t) \tag{7}$$

对所有满足 $\Psi(t) \in (\varepsilon_0; \frac{1}{2}-\tau)$ 的 $n > N$ 和 $t$ 成立。

假设 $n > N$。我们考虑单位体积欧几里得球 $\omega_n B^n$内体积为 $\varepsilon$ 的两个几何体 $A$ 和 $B$。

我们关注最小值 $\delta_A, \delta_B$，使得体 $A$ 在 $\omega_n B^n$ 中的 $\delta_A$-扩张的体积为 $1/2$，而体 $B$ 的 $\delta_B$-扩张的体积也为 $1/2$。对于这些扩张，我们有

$$\operatorname{dist}(A_{\delta_A}, B_{\delta_B}) = 0,$$

由此

$$\operatorname{dist}(A,B) \le \delta_A + \delta_B$$

可得。

等周不等式 (7) 给出了我们几何体的 $\delta$-扩张增长的估计：

$$\partial_+\mu(A_\delta) \ge \Psi'(\Psi^{-1}(\mu(A_\delta)-\tau)) \tag{8}$$

当 $\mu(A_\delta) \le \frac{1}{2}$ 时。

用 $\delta_0$ 表示 $\Psi^{-1}(\varepsilon-\tau)$。现在考虑函数

$$y(\delta) = \Psi(\delta_0+\delta)+\tau$$

用 $\delta_M$ 表示 $y$ 达到 $\frac{1}{2}$ 的时刻，即 $y(\delta_M) = \frac{1}{2}$。假设 $\delta_M < \delta_A$。函数 $\mu(A_\delta)$ 和 $y(\delta)$ 在 $\delta = 0$ 处重合。此外，由于不等式 (8)，我们应有

$$\begin{aligned}\mu(A_\delta) \geq y(\delta) \text{ and } \partial_+\mu(A_\delta) &\geq \Psi'(\Psi^{-1}(\mu(A_\delta) - \tau)) \\ &\geq \Psi'(\Psi^{-1}(y(\delta) - \tau)) = \Psi'(\Psi^{-1}(\Psi(\delta_0 + \delta))) = \partial_+ y(\delta)\end{aligned}$$

对所有 $\delta \in [0;\ \delta_M]$ 均成立。但这样就产生了矛盾

$$\frac{1}{2} = \mu(A_{\delta_A}) > \mu(A_{\delta_M}) \geq y(\delta_M) = \frac{1}{2}$$

因此 $\delta_A$，同样地，$\delta_B$ 均被 $\delta_M$ 从上方界定，这意味着

$$\operatorname{dist}(A, B) \leq \delta_A + \delta_B \leq 2\delta_M$$

数值 $\delta_M$ 满足

$$\frac{1}{2} = y(\delta_M) = \Psi(\delta_0 + \delta_M) + \tau$$

$$\frac{1}{2} - \tau = \Psi(\delta_0 + \delta_M)$$

$$\delta_M = \Psi^{-1}\left(\frac{1}{2} - \tau\right) - \Psi^{-1}(\varepsilon - \tau)$$

当 $\tau$ 趋于 0 时

$$\Psi^{-1}\left(\frac{1}{2} - \tau\right) - \Psi^{-1}(\varepsilon - \tau) \to -\Psi^{-1}(\varepsilon) = -\frac{1}{\sqrt{e}}\Phi^{-1}(\varepsilon)$$

又由于我们可以将 $\tau$ 选为区间 $(0;\ \varepsilon)$ 中的任意数

$$\limsup_{n\to\infty} d_n(\varepsilon) \leq -2\frac{1}{\sqrt{e}}\Phi^{-1}(\varepsilon)$$

□

**结论**。对称化技术使我们能够在其他不同情形下求解等周问题：$\mathbb{R}^n$ 中的经典等周问题；球面上的等周不等式（[8, 附录], [10,定理 2.2.1]），由此可以推导出高斯等周不等式（[10, 定理 2.2.3], [16, 定理 20]）。

# 4 个单位立方体。

**引言**。与欧几里得球不同，立方体没有“许多”对称性。为了推导等周剖面的下界，我们将进行一次向另一种空间的“转换”。关于这一思想的描述可见于 [16, 定理 7], [13, 命题 2.8]。本节将采用 [16]中提出的方法。

考虑一个 $n$ 维单位立方体 $(0;1)^n$。我们可以将其视为空间，并赋予勒贝格测度 $\mu$ 和欧几里得度量。现在，我们希望能够给出关于 $\mu$ 的等周剖面的估计。然而，如何处理相应的空间并不明确。例如，该立方体只有有限个对称性，因此对称化方法无法让我们取得多大进展。这就是为什么考虑一种将其转移到另一个“更好”空间的方法是有意义的——这一思路在我们的方法中发挥着关键作用。

**命题 4.1** （[16,命题 1]）。假设对于两个空间 $M$ 和 $M'$，其测度分别为 $\upsilon$ 和 $\upsilon'$，存在一个映射 $\phi\colon\ M \to M'$，该映射将测度 $\upsilon$ 变换为 $\upsilon'$，即 $\mu'(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$，并且对于某个 $c > 0$，它还是 $c$-利普希茨的，即 $M$ 中一对距离为 $d$ 的点，其像之间的距离至多为 $c \cdot d$。则以下不等式成立

$$I_\upsilon \le c \cdot I_{\upsilon'}$$

证明。考虑一个闭集 $R' \subseteq M'$ 及其原像 $R = \phi^{-1}(R')$。由于$\phi$ 将 $\upsilon$ 变换为 $\upsilon'$，我们有 $\upsilon'(R') = \upsilon(R)$。由 $\phi$ 是$c$-利普希茨函数可得 $\phi(R_\varepsilon) \subseteq R'_{c\varepsilon}$，由此可推出

$$\upsilon'(R'_{c\varepsilon}) = \upsilon(\phi^{-1}(R'_{c\varepsilon})) \ge \upsilon(\phi^{-1}(\phi(R_\varepsilon))) \ge \upsilon(R_\varepsilon)$$

将这个不等式与 $\upsilon'(R') = \upsilon(R)$结合，可得

$$\frac{\upsilon'(R'_{c\varepsilon}) - \upsilon'(R')}{c\varepsilon} \ge \frac{\upsilon(R_\varepsilon) - \upsilon(R)}{c\varepsilon}$$

再令 $\varepsilon \to 0$ 取极限，便得到结论

$$(\upsilon')^+(R') \ge \frac{1}{c}\upsilon^+(R)$$

因此，对于每个闭 $R' \subseteq M'$，我们都可以找到一个 $R \subseteq M$，使其具有相同的测度，并且其表面积至多为 $R'$的表面积的 $c$ 倍。因此，我们将有

$$I_\upsilon(t) \le cI_{\upsilon'}(t)$$

□

我们将应用上述引理来获得关于 $I_\mu$的下界。 $M'$ 将由我们的立方体充当，其上的勒贝格测度为 $\mu$ 。 $M$ 将由带有高斯测度 $\gamma_n$ 的空间 $\mathbb{R}^n$ 充当，该高斯测度由其在点 $x = （x_1，.....，\ x_n）$处的密度定义为

$$\frac{d\gamma_n}{dx} = e^{-\pi(x_1^2+\ldots+x_n^2)}$$

在一维情形下，由 Φ定义的映射为

$$\Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} e^{-\pi x^2} dx$$

将（$-\infty$; $+\infty$）变换为（0; 1）。此外， Φ 将高斯测度 $\gamma_1$ 在（$-\infty$; $+\infty$）上的测度变为（0; 1）上的勒贝格测度。事实上，线段 $[a; b]$ 的高斯测度等于积分

$$\int_a^b e^{-\pi x^2} dx$$

其密度的积分，而该积分又等于 Φ(*b*) − Φ(*a*)，但在我们的映射 Φ 下， $[a$; $b]$的像是 [Φ(*a*); Φ(*b*)], , 其勒贝格测度等于 Φ(*b*) –Φ(*a*)。

现在，上述引理中 $\phi$ 的作用将由以下对象承担

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = (\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n)),$$

也就是说，我们逐坐标应用 Φ 。它确实将（$-\infty$; $+\infty$）$^n$ $=\mathbb{R}^n$ 变换为（0; 1）$^n$。对于每个盒子 $[a_1; b_1] \times \ldots \times [a_n; b_n]$ ，我们可以注意到

$$\begin{aligned}\gamma_n([a_1; b_1] \times \ldots \times [a_n; b_n]) &= \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} e^{-\pi x_1^2} \cdot \ldots \cdot e^{-\pi x_n^2} dx_n \ldots dx_1 \\ &= \left(\int_{a_1}^{b_1} e^{-\pi x_1^2} dx_1\right) \ldots \left(\int_{a_n}^{b_n} e^{-\pi x_n^2} dx_n\right) \\ = (\Phi(b_1) - \Phi(a_1)) \ldots (\Phi(b_n) - \Phi(a_n)) &= \mu(\phi([a_1; b_1] \times \ldots \times [a_n; b_n])),\end{aligned}$$

因此， $\phi$将测度 $\gamma_n$ 变为 $\mu$。最后，映射 $\phi$ 是1-利普希茨的，因为 $|\Phi'(x)| = |e^{-\pi x^2}| \leq 1$ ，且 $\phi$ 逐坐标应用 Φ 。

由此可见，命题 4.1 的条件均已满足。因此，我们的单位立方体的等周轮廓 $I_\mu$ 有如下下界： $I_{\gamma_n}$。但关于 $I_{\gamma_n}$，我们知道些什么呢？高斯测度的等周轮廓有紧确不等式，不过这里我们只需要下面这个定理。

**定理 4.1** ([10, 引理 2.2。2])。 设 $\gamma^n$ 为标准高斯测度，其在点 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 处的密度为

$$\frac{d\gamma^n}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)}$$

在所有子集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 中，当测度固定为 $\gamma_n(A) \in (0; 1\ 2)$ 时，半空间取得最小表面积。

一般来说，高斯测度 $\gamma_{\mu\ ,\sigma^2}^n$ 是由其在点 $x \in \mathbb{R}^n$ 处的密度定义的测度，形式如下:

$$\frac{d\gamma_{\mu,\sigma^2}^n}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|x-\mu\|^2}$$

不过，平移和缩放可以使不同的高斯测度彼此等价。例如，如果将标准高斯测度 $\gamma^n$ 缩小 $\sqrt{2\pi}$ 倍，所得测度的密度 $\rho'$ 与 $\gamma^n$ 的密度$\rho$ 之间的关系如下:

$$\rho'(x) = \sqrt{2\pi}^n \rho(\sqrt{2\pi}x) = \sqrt{2\pi}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2}\|\sqrt{2\pi}x\|^2} = \frac{d\gamma_n}{dx}$$

我们还可以注意到，对于 $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\gamma^n(A) = \gamma_n\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}A\right) \quad (\gamma^n)^+(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\gamma_n^+\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}A\right)$$

因此，在定理 4.1 中将所有内容缩小 $\sqrt{2\pi}$ 倍，不会改变半空间是等周问题最优解这一事实。这就是为什么在求 $I_{\gamma_n}$ 的下界时，我们只需考虑半空间。

$\gamma_n$ 在点 $x$ 处的密度仅取决于 $\|x\|$，因此我们的测度是旋转不变的，这意味着我们只需考虑由 $x_n \le a$ 定义的半空间 $H_a$，其中某个 $a$。首先，我们可以注意到

$$\begin{aligned}\gamma_n(H_a) &= \gamma_n(\underbrace{(-\infty;+\infty) \times \ldots \times (-\infty;+\infty)}_{n-1 \text{ times}} \times (-\infty; a]) \\ &= \underbrace{\gamma_1((-\infty;+\infty)) \times \ldots \times \gamma_1((-\infty;+\infty))}_{n-1 \text{ times}} \times \gamma_1((-\infty; a]) \\ &= \gamma_1((-\infty; a]) = \Phi(a)\end{aligned}$$

而且，正是由于最后这个观察，

$$\begin{aligned}\gamma_n^+(H_a) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\gamma_n((H_a)_\varepsilon)-\gamma_n(H_a)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\gamma_n(H_{a+\varepsilon})-\gamma_n(H_a)}{\varepsilon}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\gamma_1((-\infty;a+\varepsilon])-\gamma_1((-\infty;a])}{\varepsilon}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\gamma_1((-\infty;a]_\varepsilon)-\gamma_1((-\infty;a))}{\varepsilon} = \gamma_1^+((-\infty;a])\end{aligned}$$

等式

$$\gamma_n(H_a)=\gamma_1((-\infty;a]) \quad \gamma_n^+(H_a)=\gamma_1^+((-\infty;a])$$

推出

$$I_{\gamma_n}=I_{\gamma_1}$$

现在我们只需估计 $I_{\gamma_1}$。为此，我们需要考虑区间（$-\infty$； $a$] 对于 $a<0$。此类区间的测度为 $\Phi(a)$，表面积为 $\Phi'(a)=e^{-\pi a^2}$，由此得到

$$I_{\gamma_1}(\Phi(a))=e^{-\pi a^2}$$

结合我们的观察，我们得出

**定理 4.2** ([16,定理 7])。对于单位立方体 $(0;1)^n$ 上的勒贝格测度，等周不等式

$$I_\mu(t)\geq e^{-\pi\Phi^{-1}(t)^2}$$

对所有 $t\in(0;1/2)$均成立。

证明。注意，对于所有 $a<0$

$$I_\mu(\Phi(a))\geq I_{\gamma_n}(\Phi(a))=I_{\gamma_1}(\Phi(a))=e^{-\pi a^2}$$

□

利用这个等周不等式，我们推导出

**定理 4.3**。在单位立方体 $(0;1)^n$ 中，体积为 $\varepsilon\in(0;1/2)$ 的两个几何体 $A$ 和 $B$ 之间的距离至多为

$$-2\Phi^{-1}(\varepsilon)$$

函数 $-2\Phi^{-1}(\varepsilon)$ 渐近等价于

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{-\ln\varepsilon}$$

作为 $\varepsilon \to 0$。

证明。我们关注最小值 $\delta_A$、$\delta_B$，使得体 $A$ 在单位立方体 $(0;1)^n$ 中的 $\delta_A$-扩张体积为 $1/2$，且体 $B$ 的 $\delta_B$-扩张体积也为 $1/2$。对于这些扩张，我们有

$$\operatorname{dist}(A_{\delta_A}, B_{\delta_B}) = 0,$$

由此

$$\operatorname{dist}(A, B) \le \delta_A + \delta_B$$

可得。

定理 4.2 中的等周不等式给出了我们几何体的 $\delta$-扩张增长的估计：

$$\partial_+\mu(A_\delta) \ge e^{-\pi\Phi^{-1}(\mu(A_\delta))^2} \tag{9}$$

当 $\mu(A_\delta) < \frac{1}{2}$ 时。

用 $\delta_M$ 表示 $-\Phi^{-1}(\varepsilon)$。现在考虑函数

$$y(\delta) = \Phi(-\delta_M + \delta)$$

假设 $\delta_M < \delta_A$。函数 $\mu(A_\delta)$和 $y(\delta)$在 $\delta = 0$处重合。此外，由于不等式（9），我们应有

$$\mu(A_\delta) \ge y(\delta) \text{ and } \partial_+\mu(A_\delta) \ge e^{-\pi\Phi^{-1}(\mu(A_\delta))^2} \ge e^{-\pi\Phi^{-1}(y(\delta))^2} = e^{-\pi(-\delta_M+\delta)^2} = \partial_+ y(\delta)$$

对于所有 $\delta \le \delta_M$均成立。但这样我们就得到了矛盾

$$\frac{1}{2} = \mu(A_{\delta_A}) > \mu(A_{\delta_M}) \ge y(\delta_M) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

因此，$\delta_A$ 同样地，$\delta_B$ 被 $\delta_M$所限制，这意味着

$$\operatorname{dist}(A, B) \le \delta_A + \delta_B \le 2\delta_M = -2\Phi^{-1}(\varepsilon)$$

□

**结论**。从一个空间转移到另一个空间可能会在一定程度上损失精度，因此我们无法对这些估计的精确程度多作评论。在 $n$-立方体中寻找最优超曲面的问题似乎也相当复杂。关于立方体中的等周不等式及其应用，读者可参阅 [16]第 1.5 节。

类似地，我们可以推导出欧几里得球体等周剖面的下界，因为可以转移到带有高斯测度的空间 $\mathbb{R}^n$ （见 [13, 命题 2.9]）。

# 5 单纯形与 $\ell_p$-球体。

**引言。** 本节将介绍[19] 中用于证明 $\ell_p$ 球体的等周不等式（$p \in [1;\ 2]$）的方法，并通过给出单纯形等周不等式的一个非常相似的证明来加以说明。与单位立方体的情形类似，我们将转移到另一个空间（见引理 5.1、5.2）。不过，为了解决利普希茨连续性方面的问题（见引理 5.3），还需要引入一些新思路和新方法。

## 5.1 单纯形。

用 $\mathbb{R}_+$ 表示区间 $(0; +\infty)$。考虑定义如下的正则单纯形 $\Delta_n$

$$\Delta_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ \mid x_1 + \ldots + x_n = 1\}$$

用 $\mu$ 表示 $\Delta_n$上的归一化勒贝格测度。注意，$\mu(\Delta_n) = 1$。简单计算可得，$\Delta_n$ 的面积等于 $\frac{n\sqrt{n}}{n}$！。因此，若令

$$\omega_n = \left(\frac{n!}{n\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{n-1}} \sim \frac{n}{e},$$

$\omega_n\Delta_n$ 的面积将等于 1。用 $\lambda$表示$\omega_n\Delta_n$上的勒贝格测度。可以注意到

$$\mu^+\left(\frac{1}{\omega_n}A\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mu\left(\left(\frac{1}{\omega_n}A\right)_\varepsilon\right) - \mu\left(\frac{1}{\omega_n}A\right)}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda(A_{\omega_n\varepsilon}) - \lambda(A)}{\varepsilon} = \omega_n\lambda^+(A) \quad (10)$$

对于 $A \subseteq \Delta_n$。

在本截面中，我们将采用一种略有不同的等周度量剖面概念。

**定义 5。** 等周函数是指这样一个函数：它将 $t \in\ 0\ \frac{1}{2}$ $\mu^+\ A$ $t \le (;\ )$ 映射为 () 在() 时可能 $\mu\ A\ < \frac{1}{2}$ 取值的下确界

$$\mathcal{I}_\mu(t) = \inf_{t\le\mu(A)<\frac{1}{2}} \mu^+(A)$$

我们的观察（10）意味着

$$\mathcal{I}_\mu = \omega_n \mathcal{I}_\lambda, \tag{11}$$

也就是说，等周函数成比例。

要解决我们的问题，我们需要对 $\mathcal{I}_\lambda$进行估计，但为简便起见，我们将改为研究 $\mathcal{I}_\mu$。然而，再次说明，如何将 $\Delta_n$ 作为一个空间来处理仍然相当不明确，因此我们希望能够转移到一个“更好”的空间。

映射 $T\colon\ \mathbb{R}^n_+ \to \Delta_n$ 定义为

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \left( \frac{x_1}{x_1 + \ldots + x_n}, \ldots, \frac{x_n}{x_1 + \ldots + x_n} \right)$$

将 $\nu_n$ 上的测度转换为 $\mathbb{R}^n_+$ 上的测度，该测度在点（$x_1$，.....，$x_n$）处的密度 $\in \mathbb{R}^n_+$ 为

$$\frac{d\nu_n}{dx} = e^{-x_1 - \ldots - x_n}$$

根据下面的引理，将其转换为 $\Delta_n$ 上的归一化勒贝格测度 $\mu$。

**引理 5.1** ([18, 引理 2。1])。设 $X_1$，.....，$X_n$ 是相互独立的随机变量，且每个变量的密度函数均为$\frac{1}{2}e^{-|t|}$，并令$S = \sum_i |X_i|$。则$(\frac{X_1}{S}$，.....，$\frac{X_n}{S})$在 $\ell_1^n$维球体的球面上诱导出归一化勒贝格测度。此外，$(\frac{X_1}{S}$，.....，$\frac{X_n}{S})$与 $S$相互独立。

事实上，由于 $\mathbb{R}^n$的各个[2] 之间具有对称性，我们可以在引理 5.1 中只考虑 $\mathbb{R}^n_+$ 正正交象限，从而得到所需结论。

但是，我们对 $I_{\nu_n}$的等周剖面了解多少呢？下面的引理完全确定了一维情形下的这个等周剖面。

**引理 5.2** ([21,注 1])**.** 用 $\nu$ 表示 $\nu_1$，则

$$I_\nu(t) = \min(t, 1 - t),$$

其中，$I_\nu$ 的定义域是整个区间 (0;1)。

[2] $\mathbb{R}^n$ 的各个象限是 $\mathbb{R}^2$的各个象限的多维类比

对于测度 $\upsilon$，我们可以考虑其等周常数——使得以下内容对所有满足 $\upsilon(A) \in (0;1)$ 的子集 $A$ 都成立的 $Is(\upsilon)$ 的最大值

$$\upsilon^+(A) \geq Is(\upsilon)\min(\upsilon(A), 1-\upsilon(A))$$

根据引理 5.2，我们有 $Is(\nu) = 1$。现在我们可以注意到[3] $\nu_n = \nu^n$，因为 $\nu_n$ 在点（$x_1$，.....，$x_n$）$\in \mathbb{R}^n_+$ 处的密度可以写成乘积

$$e^{-x_1} \dots e^{-x_n}$$

因此得到以下定理

**定理 5.1**（[2, 定理 1。1]）。对于三元组（$X$，$d$，$\psi$）——空间、度量、测度，

$$Is(\psi^n) \geq \frac{1}{2\sqrt{6}} Is(\psi)$$

给出

$$I_{\nu^n}(t) \geq \frac{1}{2\sqrt{6}}\min(t, 1-t)$$

or[4]

$$I_{\nu_n}(t) \geq \frac{1}{2\sqrt{6}} t \tag{12}$$

因此，我们有一个映射 $T\colon\ \mathbb{R}^n_+ \to \Delta_n$，它将 $\nu_n$ 变换为 $\mu$，并且有关于 $I_{\nu_n}(t)$ 的下界。但要使用命题 4.1，我们还需要我们的映射$T$ 是 Lipschitz 连续的。

在点 $x \in \mathbb{R}^n_+$ 的邻域内，我们的映射 $T$ 的行为可以由一个由矩阵定义的线性算子描述，其元素为

$$\frac{\partial T_j(x)}{\partial x_i},$$

其中 $T_j(x)$ 是 $T(x)$ 的第 $j$ 个坐标。我们关注该线性算子的范数。下一个引理给出了一个上界

**引理 5.3**（对应于 [19]中的引理 1）。

$$\left\| \frac{\partial T_j(x)}{\partial x_i} \right\|_{\underbrace{\nu \times \dots \times \nu}_{n \text{ 乘以}}} \leq \frac{1}{\|x\|_1}(1 + \sqrt{n}\|T(x)\|_2)$$

[3]这里所说的是乘积测度

[4]请注意，通常来说，当我们讨论等周剖面时，只关注 $t \in (0; \frac{1}{2})$ 的取值，即 $I_{\nu_n}$ 的定义域为 $(0; \frac{1}{2})$

证明。 首先，我们将计算矩阵的各个元素，即偏导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}T_j(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_j}{x_1+\ldots+x_n}\\ &= \frac{(x_1+\ldots+x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}x_j - x_j\frac{\partial}{\partial x_i}(x_1+\ldots+x_n)}{(x_1+\ldots+x_n)^2}\\ &= \frac{1}{x_1+\ldots+x_n}\left(\delta_{ij}-\frac{x_j}{x_1+\ldots+x_n}\right)\end{aligned}$$

如果 $\Delta y$ 是 $\Delta x$的像，那么

$$\Delta y_j = \sum_i \frac{\partial T_j}{\partial x_i}\Delta x_i = \frac{1}{\|x\|_1}\left(\Delta x_j - \frac{x_j}{\|x\|_1}\sum_i \Delta x_i\right) \tag{13}$$

坐标为$\frac{x_j}{\|x\|_1}\sum_i \Delta x_i$的向量的长度可估计为

$$\|T(x)\|_2\left|\sum_i \Delta x_i\right| \le \sqrt{n}\|T(x)\|_2\|\Delta x\|_2$$

因为坐标 $\frac{x_j}{\|x\|_1}$ 定义了 $T(x)$，并且显然有

$$\sum_i |\Delta x_i| \le \sqrt{n}\left(\sum_i (\Delta x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

现在由(13)中的三角不等式可得

$$\begin{aligned}\|\Delta y\|_2 &\le \frac{1}{\|x\|_1}\left(\|\Delta x\|_2 + \sqrt{n}\|T(x)\|_2\|\Delta x\|_2\right)\\ &= \frac{1}{\|x\|_1}\left(1+\sqrt{n}\|T(x)\|_2\right)\|\Delta x\|_2,\end{aligned}$$

由此即可得到该引理的结论。 □

事实上，我们无法在此情形下应用命题 4.1，因为在某些位置，映射 $T$ 的变化极其剧烈。例如，由 $x_1+\ldots+x_n=\delta$在 $\mathbb{R}^n_+$ 中定义的单纯形，其中 $\delta$ 是一个非常小的数。

然而，引理 5.3 给出的上界

$$\left\| \frac{\partial T_j(x)}{\partial x_i} \right\|_2 \leq \frac{1}{\|x\|_1}(1 + \sqrt{n}\|T(x)\|_2)$$

这告诉我们，$\mathbb{R}^n_+$中唯一可能具有高方差的部分，是 $\|x\|_1$ 过小的区域，这对应于正交象限 $\mathbb{R}^n_+$的一个小角点区域；或者是 $\|T(x)\|_2$ 过大的区域。而且，由于从原点到 $\Delta_n - \frac{1}{\sqrt{n}}$ 中心的距离，远小于从原点到 $\Delta_n - 1$顶点的距离，因此 $\|T(x)\|_2$ 过大的区域，对应于 $\Delta_n$ 靠近顶点的小角点区域。[5]

我们最后的观察表明，在我们的空间中，$T$ 表现不如预期（即具有高方差）的部分可能是可忽略的。现在，我们将给出一个论证，使我们能够“摆脱”这些区域，将其转移到测度为 $\nu_n$ 的空间 $\mathbb{R}^n_+$ 中，然后应用 $I_{\nu_n}$的下界。

不过，首先，由于我们希望在整个半区间 $(0; \frac{1}{2}]$，（包括 $t$ 的较小取值）上估计 $\mathcal{I}_\mu(t)$，并且我们打算在主要论证中去掉空间中的某些可忽略部分，因此对于那些可能小于我们所去掉区域的测度的 $t$ 值，需要采用不同的方法。换言之，需要估计 $\Delta_n$ 的“较小”子集的表面积。

这可以借助下面的定理来完成。

**定理 5.2** ([1, 定理1。1])。 设 $\psi$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的对数凹概率测度。对于所有可测集 $A \subset \mathbb{R}^n$、每个点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 以及每个数 $r > 0$,

$$\psi^+(A) \geq \frac{1}{2r}\Big(\psi(A)\ln\frac{1}{\psi(A)} + (1-\psi(A))\ln\frac{1}{1-\psi(A)} + \ln\psi(\{|x - x_0| \leq r\})\Big)$$

$\Delta_n$ 的凸性确保其上的归一化勒贝格测度 $\mu$ 是对数凹的。

在将上述定理应用于测度 $\mu$ on $\Delta_n$ 时，可以设为 $x_0 = (0, \ldots, 0)$，尽管有 $x_0 \notin \Delta_n$，因为当 $r > \frac{1}{\sqrt{n}}$ 时，对于 $x_1 =$

[5]这里讨论的是 $T$ 的像

$(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n})$，并且 $r'=\sqrt{r^2-\frac{1}{n}}$我们将得到

$$\ln\mu(\{|x|\le r\})=\ln\mu(\{|x-x_1|\le r'\})$$

$$\frac{1}{2r'}\ge\frac{1}{2r}$$

考察下界后会产生一个问题：我们如何估计 $\psi(\{|x-x_0|\le r\})$——即以 $x_0$ 为中心、半径为 $r$ 的球的测度？根据引理 5.1，我们有以下结果

**定理 5.3** ([18, 定理 2.2]). 存在绝对正常数 $T,c$，使得对于所有 $t>\frac{T}{\sqrt{n}}$，令 $X=(X_1,\ldots,X_n)$ 且 $S=X_1+\ldots+X_n$，

$$\Pr\left(\frac{\|X\|_2}{S}>t\right)\le e^{-ctn}$$

同样，由于对称性，我们可以将注意力限制在正正交象限 $\mathbb{R}^n_+$。

结合定理 5.3 和引理 5.1，我们得到

$$\mu(\{|x|\le r\})\ge 1-e^{-cnr}$$

对于 $r>\frac{T}{\sqrt{n}}$。现在注意到

$$r>\frac{T}{\sqrt{n}}\Rightarrow cnr\ge c\sqrt{n}T\ge cT\Rightarrow e^{-cnr}\le e^{-cT},$$

这意味着对于 $r>\frac{T}{\sqrt{n}}$

$$\ln\mu(\{|x|\le r\})\ge\ln(1-e^{-cnr})\ge -Ce^{-cnr}$$

对于某个常数 $C>0$。

如果我们假设 $\mu(A)<c'$ 对于某个常数 $0<c'<1$，那么我们将得到

$$(1-\mu(A))\ln\left(\frac{1}{1-\mu(A)}\right)\ge C_1\mu(A)$$

对于某个常数 $C_1>0$。

我们希望最后两项之和

$$\mu(A)\ln\frac{1}{\mu(A)}+(1-\mu(A))\ln\frac{1}{1-\mu(A)}+\ln\mu(\{|x-x_0|\le r\})$$

为非负数，以下条件足以保证这一点

$$C_1\mu(A) \geq Ce^{-cnr},$$

这可以改写为

$$\ln \frac{C_1\mu(A)}{C} \geq -cnr \Leftrightarrow r \geq \frac{1}{cn} \ln \frac{C}{C_1\mu(A)} = \frac{1}{cn}\left(\ln \frac{1}{\mu(A)} + \ln \frac{C}{C_1}\right)$$

如果将上面的 $\geq$ 替换为等式，并对 $x_0 = 0$ 应用定理 5.2，我们将得到

$$\mu^+(A) \geq \frac{1}{2} cn\mu(A) \frac{\ln \frac{1}{\mu(A)}}{\ln \frac{1}{\mu(A)} + \ln \frac{C}{C_1}}$$

条件 $r > \frac{T}{\sqrt{n}}$ 意味着我们需要

$$\ln \frac{1}{\mu(A)} + \ln \frac{C}{C_1} > cT\sqrt{n}$$

在此处应用定理 5.2。因此，这些最后的不等式意味着

**命题 5.1**。存在普适常数 $c_s$，$C > 0$ 使得 [6]

$$\mu^+(A) \geq c_s n \mu(A)$$

对于所有满足 $\mu(A) < e^{-C\sqrt{n}}$ 的子集 $A \subset \Delta_n$。

现在我们已经处理了“较小”集合的情形，可以继续进行主要论证。

**定义 6.** 局部 *Lipschitz* 函数 $f$的梯度模 $\|\nabla f\|_2$ 为

$$\|\nabla f(x)\|_2 = \limsup_{\|x-y\|_2 \to 0^+} \frac{\|f(x) - f(y)\|_2}{\|x - y\|_2}$$

下一个引理将使我们能够在等周问题的两种等价表述之间进行转换。

[6]这里为简单起见，我们忽略在本命题证明过程中引入的辅助常数 $c', C, C_1$

**引理 5.4** ([19, 命题 A])。 设 $\mu$ 是一个概率测度， $0 < a < \frac{1}{2}$ 且 $b > 0$。以下各项等价

***(a)*** $\mathcal{I}_\mu(a) \geq b$***(b)*** 对任意局部 ***Lipschitz*** 函数 $\phi : \operatorname{supp}\ \mu \to [0; 1]$ ，若满足 $\mu\{\phi = 0\} \geq \frac{1}{2}$ 且 $\mu\{\phi = 1\} \geq a$,

$$\int \|\nabla\phi\|_2 d\mu \geq b$$

**注 1**。 在本文的这个定理及其应用中，我们可以将$(b)$ 中的**"局部 *Lipschitz*"**改为**"*Lipschitz*"**，因为这不会影响蕴含关系$(a) \Rightarrow (b)$；而在蕴含关系$(b) \Rightarrow (a)$的证明（*[19]*）中，只考虑了 ***Lipschitz*** 函数 $\phi$: $\operatorname{supp}\ \mu \to [0; 1]$ 。

通过所谓的截断函数，可以实现"去除"空间中不需要部分的想法。截断函数将空间映射到 $[0; 1]$, 其中，0 对应于我们要去除的区域，1 对应于我们要保留的区域；此外，为确保连续性，我们还需要函数取介于 0 和 1 之间的值。

下面的引理说明如何应用截断函数 $h$ 。

**引理 5.5** ([19, 引理 2])。 若 $k, h$: $\mathbb{R}^n \to [0; 1]$ 是两个局部 ***Lipschitz*** 函数，则

$$\|\nabla k\|_2 \geq \|\nabla(kh)\|_2 - \|\nabla h\|_2$$

由引理 5.4 可知，我们可以用梯度模 $\|\nabla\phi\|_2$ 的积分来表述等周问题。引理 5.5 使我们能够以误差项 $\|\nabla h\|_2$ 为代价，将 $\phi$ 替换为函数 $\phi \cdot h$，该函数在空间中不需要的区域上为零。

$$\int \|\nabla\phi\|_2 d\mu \geq \int \|\nabla(\phi \cdot h)\|_2 d\mu - \int \|\nabla h\|_2 d\mu$$

回顾一下，我们对映射 $T : \mathbb{R}^n_+ \to \Delta_n$ 的梯度模上界为

$$\|\nabla T\|_2 = \left\| \frac{\partial T_j(x)}{\partial x_i} \right\|_2 \leq \frac{1}{\|x\|_1}(1 + \sqrt{n}\|T(x)\|_2)$$

因此，我们需要两个截断函数：一个用于处理距离原点过远的 $\Delta_n$ 部分，其形式为

$$h_1 : \mathbb{R}^n \to [0; 1], \quad h_1(x) = \max(0, \min(1, 2 - c_1\sqrt{n}\|x\|_2)),$$

它将处理 $\|T(x)\|_2$的较大值；另一个用于处理 $\mathbb{R}^n$中 $\|x\|_1$ 较低的区域，其形式为

$$h_2 \colon \mathbb{R}^n \to [0;1], \quad h_2(x) = \max(0, \min(1, c_2 n^{-1} \|x\|_1 - 1)).$$

常数 $c_1$ 和 $c_2$ 将在稍后选定。注意，这两个截断函数分别针对不同的定义域： $h_1$ 针对 $\Delta_n$， $h_2$ 针对 $\mathbb{R}^n_+$；但由于 $\mathbb{R}^n_+$和 $\Delta_n$ 都位于 $\mathbb{R}^n$ 内，我们选择 $\mathbb{R}^n$ 作为它们的定义域。

为了在论证中使用引理 5.5，我们需要对所产生的误差项进行一些估计。在下面的引理中，我们将建立这些截断函数及其梯度的一些性质。

**引理 5.6** （对应于 [19]中的引理 3）。 截断函数 $h_1$具有以下性质

$$h_1(x) = 1 \Leftrightarrow \|x\|_2 \leq \frac{1}{c_1\sqrt{n}} \tag{14}$$

$$h_1(x) = 0 \Leftrightarrow \|x\|_2 \geq \frac{2}{c_1\sqrt{n}} \tag{15}$$

$$\|\nabla h_1\|_2 \leq c_1\sqrt{n} \tag{16}$$

截断函数 $h_2$ 具有以下性质

$$h_2(x) = 1 \Leftrightarrow \|x\|_1 \geq \frac{2}{c_2} n \tag{17}$$

$$h_2(x) = 0 \Leftrightarrow \|x\|_1 \leq \frac{n}{c_2} \tag{18}$$

$$\|\nabla h_2\|_2 \leq \frac{c_2}{\sqrt{n}} \tag{19}$$

证明。 性质 (14)、(15)、(17) 和 (18) 由截断函数的定义立即得到。

根据三角不等式，我们注意到，将 $\|x\|_2$视为从 $\mathbb{R}^n_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的函数时，其梯度模不超过 1，因此

$$\|\nabla h_1\|_2 \leq c_1\sqrt{n}$$

不等式

$$\|x + \Delta x\|_1 \leq \|x\|_1 + \|\Delta x\|_1,$$

$$\|\Delta x\|_1 \leq \sqrt{n}\|\Delta x\|_2$$

意味着 $\|x\|_1$ 的梯度模不大于 $\sqrt{n}$，由此我们推导出

$$\|\nabla h_2\|_2 \leq \frac{c_2}{\sqrt{n}}$$

□

**引理 5.7**（对应于 [19] 中的引理 4）. 对于 $\alpha \geq 0$ 我们有

$$\nu^n\{\|x\|_1 \leq \alpha n\} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}(\alpha e)^n$$

对于每个 $\alpha > T$，根据引理 *5.3*，我们有

$$\mu\left\{\|x\|_2 \geq \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right\} \leq e^{-\alpha c\sqrt{n}}$$

证明。由于 $\nu^n$ 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中各处的密度都不大于 1，因此 $\nu^n\{\|x\|_1 \leq \alpha n\}$ 的上界可取为由 $\|x\|_1 \leq \alpha n$ 定义的 $\mathbb{R}^n_+$ 区域的体积，该体积等于

$$\frac{1}{n!}(\alpha n)^n$$

根据斯特林近似

$$n! \geq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}}$$

因此我们得到

$$\nu^n\{\|x\|_1 \leq \alpha n\} \leq \frac{1}{n!}(\alpha n)^n \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n (\alpha n)^n e^{-\frac{1}{12n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}(\alpha e)^n$$

注意到 $\frac{\alpha}{\sqrt{n}} > \frac{T}{\sqrt{n}}$，因此由定理 5.3

$$\mu\left\{\|x\|_2 \geq \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right\} \leq e^{-c\frac{\alpha}{\sqrt{n}}n} = e^{-\alpha c\sqrt{n}}$$

□

现在我们可以介绍主要论证了。

**命题 5.2**（对应于 [19]中的命题 2）。存在一个通用常数 $c_b > 0$，使得对于所有 $e^{-C\sqrt{n}} \le t < \frac{1}{2}$

$$\mathcal{I}_\mu(t) \ge c_b n t.$$

证明。取 $e^{-C\sqrt{n}} \le a < \frac{1}{2}$。根据引理 5.4 和注 1，求 $\mathcal{I}_\mu(a)$ 下界的问题等价于估计

$$\int_{\Delta_n} \|\nabla f\|_2 d\mu$$

对于一个 Lipschitz 函数 $f\colon\ \Delta_n \to [0;\ 1]$ 使得

$$\mu\{f = 0\} \ge \frac{1}{2} \text{ and } \mu\{f = 1\} \ge a \tag{20}$$

为了“摆脱” $\Delta_n$ 中距离原点过远的部分，我们可以使用截断函数 $h_1$，根据引理 5.5 可得

$$\int_{\Delta_n} \|\nabla f\|_2 d\mu \ge \int_{\Delta_n} \|\nabla (f h_1)\|_2 d\mu - \int_{\Delta_n} \|\nabla h_1\|_2 d\mu \tag{21}$$

这里根据引理 5.6，我们可以将误差项估计为

$$\int_{\Delta_n} \|\nabla h_1\|_2 d\mu \le c_1 \sqrt{n}\, \mu \left\{ \|x\|_2 \ge \frac{1}{c_1 \sqrt{n}} \right\} \tag{22}$$

映射 $T\colon\ \mathbb{R}^n_+ \to \Delta_n$ 将测度 $\nu^n$ 变为 $\mu$，因此我们可以将关于 $\Delta_n$ 的积分替换为关于 $\mathbb{R}^n_+$ 的积分，如下所示

$$\int_{\Delta_n} w\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n_+} (w \circ T) d\nu^n$$

将 $(f h_1) \circ T$ 记为 $g$。正如我们已经指出的

$$\int_{\Delta_n} \|\nabla (f h_1)\|_2 d\mu = \int_{\mathbb{R}^n_+} \|\nabla (f h_1) \circ T\|_2 d\nu^n \tag{23}$$

可以做出一个类似于微分的链式法则的观察

$$\|\nabla (a \circ b)\|_2 \le \|(\nabla a) \circ b\|_2 \cdot \|\nabla b\|_2,$$

在我们的情形下，这意味着

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \|\nabla(fh_1)\circ T\|_2 d\nu^n \geq \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\|\nabla g\|_2}{\|\nabla T\|_2} d\nu^n, \tag{24}$$

并且由于 $\|\nabla T\|_2 \neq 0$ 根据引理 5.3 可由 $\frac{1}{\|x\|_1}(1+\sqrt{n}\|T(x)\|_2)$ 作为上界，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\|\nabla g\|_2}{\|\nabla T\|_2} d\nu^n \geq \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\|\nabla g\|_2\|x\|_1}{1+\sqrt{n}\|T(x)\|_2} d\nu^n \tag{25}$$

但是根据引理 5.6， $h_1$ 在 $\|x\|_2 \geq \frac{2}{c_1\sqrt{n}}$ 时为零。因此，梯度模 $\|\nabla g\|_2$ 在 $\|T(x)\|_2 > \frac{2}{c_1\sqrt{n}}$ 时等于零。正因如此，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\|\nabla g\|_2\|x\|_1}{1+\sqrt{n}\|T(x)\|_2} d\nu^n &\geq \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\|\nabla g\|_2\|x\|_1}{1+\sqrt{n}\frac{2}{c_1\sqrt{n}}} d\nu^n \\ &= \frac{1}{1+\frac{2}{c_1}} \int_{\mathbb{R}^n_+} \|\nabla g\|_2\|x\|_1 d\nu^n \end{aligned} \tag{26}$$

现在，为了“去除” $\mathbb{R}^n_+$ 中 $\|x\|_1$ 过小的区域，我们将应用截断函数 $h_2$，并根据引理 5.5 得到

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \|\nabla g\|_2\|x\|_1 d\nu^n \geq \int_{\mathbb{R}^n_+} \|\nabla(gh_2)\|_2\|x\|_1 d\nu^n - \int_{\mathbb{R}^n_+} \|\nabla h_2\|_2\|x\|_1 d\nu^n \tag{27}$$

根据引理 5.6，我们对误差项有如下上界

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} \|\nabla h_2\|_2\|x\|_1 d\nu^n &\leq \frac{c_2}{\sqrt{n}}\frac{2n}{c_2}\nu^n\left\{\|x\|_1 \leq \frac{2n}{c_2}\right\} \\ &= 2\sqrt{n}\nu^n\left\{\|x\|_1 \leq \frac{2n}{c_2}\right\} \end{aligned} \tag{28}$$

截断函数 $h_2$ 在 $\|x\|_1 \leq \frac{n}{c_2}$ 时为零，因此当 $\|x\|_1 < \frac{n}{c_2}$ 时， $\|\nabla(gh_2)\|_2$ 等于零，由此可得

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \|\nabla(gh_2)\|_2\|x\|_1 d\nu^n \geq \frac{n}{c_2}\int_{\mathbb{R}^n_+} \|\nabla(gh_2)\|_2 d\nu^n \tag{29}$$

现在考虑函数 $gh_2$: $\mathbb{R}^n_+ \to [0;\ 1]$

$$gh_2 = ((f \cdot h_1) \circ T) \cdot h_2$$

注意到，如果 $(f \circ T)(x) = 0$ 对于 $x \in \mathbb{R}^n_+$，那么 $(gh_2)(x) = 0$ 也成立。根据我们的假设 $\mu\{f = 0\} \geq \frac{1}{2}$，这意味着 $\nu^n\{gh_2 = 0\} \geq \frac{1}{2}$。函数 $gh_2$在点 $x \in \mathbb{R}^n_+$ 处等于 1，当且仅当

$$(f \circ T)(x) = 1, \text{ and } (h_1 \circ T)(x) = 1, \text{ and } h_2(x) = 1.$$

为估计 $\nu^n\{gh_2 = 1\}$，我们将从 $\nu^n\{(f \circ T) = 1\} = \mu\{f = 1\}$ 中减去 $\nu^n\{(h_1 \circ T) < 1\} = \mu\{h_1 < 1\}$ 和 $\nu^n\{h_2 < 1\}$，根据我们的假设 (20)，前者大于 $a$，从而得到

$$\nu^n\{gh_2 = 1\} \geq a - \mu\{h_1 < 1\} - \nu^n\{h_2 < 1\}$$

根据引理 5.6

$$\mu\{h_1 < 1\} = \mu\left\{\|x\|_2 > \frac{1}{c_1\sqrt{n}}\right\}$$

$$\nu^n\{h_2 < 1\} = \nu^n\left\{\|x\|_1 < \frac{2n}{c_2}\right\}$$

$\nu^n$ 上的等周不等式 (12)结合引理 5.4可得

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \|\nabla(gh_2)\|_2 d\nu^n \geq \frac{1}{2\sqrt{6}}\Bigg(a - \mu\left\{\|x\|_2 > \frac{1}{c_1\sqrt{n}}\right\} - \nu^n\left\{\|x\|_1 < \frac{2n}{c_2}\right\}\Bigg) \quad (30)$$

综合不等式（21）、（22）、（23）、（24）、（25）、（26）、(29)（27）和（28），我们得到

$$\int_{\Delta_n} \|\nabla f\|_2 d\mu \geq \frac{1}{c_2}\frac{1}{1+\frac{2}{c_1}} n \int_{\mathbb{R}^n_+} \|\nabla(gh_2)\|_2 d\nu^n - c_1\sqrt{n}\mu\left\{\|x\|_2 \geq \frac{1}{c_1\sqrt{n}}\right\} - \frac{2}{1+\frac{2}{c_1}}\sqrt{n}\nu^n\left\{\|x\|_1 \leq \frac{2n}{c_2}\right\}$$

将其与不等式（30）结合可得

$$\int_{\Delta_n} \|\nabla f\|_2 d\mu \geq \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{1}{c_2} \frac{1}{1+\frac{2}{c_1}} na - \left( \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{1}{c_2} \frac{1}{1+\frac{2}{c_1}} n + c_1\sqrt{n} \right) \mu \left\{ \|x\|_2 \geq \frac{1}{c_1\sqrt{n}} \right\} - \left( \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{1}{c_2} \frac{1}{1+\frac{2}{c_1}} n + \frac{2}{1+\frac{2}{c_1}} \sqrt{n} \right) \nu^n \left\{ \|x\|_1 \leq \frac{2n}{c_2} \right\},$$

这可以改写为

$$\int_{\Delta_n} \|\nabla f\|_2 d\mu \geq \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{1}{c_2} \frac{1}{1+\frac{2}{c_1}} n \Bigg( a - \left( 1 + 2\sqrt{6} c_1 c_2 \left( 1 + \frac{2}{c_1} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \mu \left\{ \|x\|_2 \geq \frac{1}{c_1\sqrt{n}} \right\} - \left( 1 + 4\sqrt{6} c_2 \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \nu^n \left\{ \|x\|_1 \leq \frac{2n}{c_2} \right\} \Bigg)$$

如果 $\frac{1}{c_1} > T \Leftrightarrow c_1 < \frac{1}{T}$，那么根据引理 5.7，我们应有

$$\int_{\Delta_n} \|\nabla f\|_2 d\mu \geq \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{1}{c_2} \frac{1}{1+\frac{2}{c_1}} n \Bigg( a - \left( 1 + 2\sqrt{6} c_2 \left( c_1 + 2 \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right) e^{-\frac{c}{c_1}\sqrt{n}} - \left( 1 + 4\sqrt{6} c_2 \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left( \frac{2e}{c_2} \right)^n \Bigg)$$

现在我们可以为常数 $c_1$ 和 $c_2$ 选择适当的值。我们选择 $c_2$ 足够大，使得

$$\left( 1 + 4\sqrt{6} c_2 \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left( \frac{2e}{c_2} \right)^n \leq \frac{1}{3} e^{-C\sqrt{n}}$$

对所有自然数 $n$ 都成立。这是可行的，因为可以注意到

$$\left( \frac{2e}{c_2} \right)^n = e^{-\ln\left(\frac{2e}{c_2}\right) n}$$

之后，我们选择足够小的 $c_1$，使得

$$\left(1+2\sqrt{6}c_2\left(c_1+2\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\right)e^{-\frac{c}{c_1}\sqrt{n}} \leq \frac{1}{3}e^{-C\sqrt{n}}$$

对所有自然数 $n$均成立。

我们的 $a$至少为 $e^{-C\sqrt{n}}$，这意味着

$$\int_{\Delta_n}\|\nabla f\|_2 d\mu \geq \frac{1}{2\sqrt{6}}\frac{1}{c_2}\frac{1}{1+\frac{2}{c_1}}n\left(a-\frac{2}{3}e^{-C\sqrt{n}}\right) \geq \frac{1}{2\sqrt{6}}\frac{1}{c_2}\frac{1}{1+\frac{2}{c_1}}n\left(\frac{1}{3}a\right)$$

由于此处的 $f$可以是任意 Lipschitz 函数 $f\colon\ \Delta_n \to [0;\ 1]$ 其中

$$\mu\{f=0\} \geq \frac{1}{2} \text{ and } \mu\{f=1\} \geq a$$

由引理 5.4，我们得出

$$\mathcal{I}_\mu(a) \geq \frac{1}{6\sqrt{6}}\frac{1}{c_2}\frac{1}{1+\frac{2}{c_1}}na$$

□

命题5.1和命题5.2意味着

**定理 5.4**。 对于单位体积单纯形 $\omega_n\Delta_n$上的勒贝格测度 $\lambda$，以下等周不等式

$$\mathcal{I}_\lambda(t) \geq c_\lambda t$$

对所有 $t \in$ （0；$_{1\,2}$）均成立，其中 $c_\lambda > 0$ 是与维数 $n$无关的普适常数。

证明。 根据命题 5.1

$$\mu^+(A) \geq c_s n\mu(A)$$

对所有满足 $\mu(A) \in (0;\ e^{-C\sqrt{n}})$ 的 $A \subset \Delta_n$，以及根据命题 5.2

$$\mathcal{I}_\mu(t) \geq c_b n t$$

对于所有 $t \in [e^{-C\sqrt{n}};\ _{1\,2})$，这意味着

$$\mathcal{I}_\mu(t) \geq \min(c_s, c_b)nt$$

对于所有 $t \in (0; \frac{1}{2})$。

公式（11）将 $\mathcal{I}_\mu$ 和 $\mathcal{I}_\lambda$ 联系起来，如下所示

$$\mathcal{I}_\lambda = \frac{1}{\omega_n}\mathcal{I}_\mu$$

因此，对所有 $t \in (0; \frac{1}{2})$，都必须有

$$\mathcal{I}_\lambda(t) \geq \min(c_s, c_b)\frac{n}{\omega_n}t.$$

这里可以注意到，对于所有 $n$，$\frac{n}{\omega_n}$ 均为正，并且根据斯特林近似

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\omega_n} = e,$$

这必然意味着

$$\inf_n \frac{n}{\omega_n} > 0$$

因此我们可以取

$$\min(c_s, c_b)\inf_n \frac{n}{\omega_n}$$

作为常数 $c_\lambda$。 □

由此等周不等式可得

**定理 5.5**。 在一个单位体积单纯形内，体积为 $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ 的两个几何体 $\omega_n\Delta_n$ $A$ 和 $B$ 之间的距离至多为

$$-c\ln\varepsilon$$

对于某个与维数 $n$ 和体积$\varepsilon$无关的普适常数 $c > 0$。

证明。 我们关注最小的值 $\delta_A$和 $\delta_B$，使得几何体 $A$ 在 $\omega_n\Delta_n$ 中的 $\delta_A$-扩张体积为$\frac{1}{2}$，而几何体 $B$ 的 $\delta_B$-扩张体积也为$\frac{1}{2}$。对于这些扩张，我们有

$$\operatorname{dist}(A_{\delta_A}, B_{\delta_B}) = 0,$$

由此

$$\operatorname{dist}(A, B) \leq \delta_A + \delta_B$$

可得。

定理 5.4 中的等周不等式为我们的几何体的 $\delta$-扩张增长提供了估计

$$\delta_+\lambda(A_\delta) \geq c_\lambda \lambda(A_\delta)$$

只要 $\lambda(A_\delta) < \frac{1}{2}$，该估计就成立。

因此，为了给 $\delta_A$ 设定上界，我们希望考虑一个函数 $y(\delta)$，其变化符合我们的下界

$$y(0) = \lambda(A) \tag{31}$$

$$y' = c_\lambda y \tag{32}$$

如果我们用 $\delta_M$ 表示 $y$ 达到 $\frac{1}{2}$ 时的时刻，即 $y(\delta_M) = \frac{1}{2}$，那么 $\delta_A \leq \delta_M$。事实上，否则 $\delta_M < \delta_A$，但函数 $\lambda(A_\delta)$ 和 $y(\delta)$ 在 $\delta = 0$ 处相等，并且对所有 $\delta \in [0$ 都相等；因此 $\delta_M]$ 我们应有

$$\lambda(A_\delta) \geq y(\delta) \text{ and } \delta_+\lambda(A_\delta) \geq c_\lambda\lambda(A_\delta) \geq c_\lambda y(\delta) = \delta_+ y(\delta)$$

因此我们得出了矛盾

$$\frac{1}{2} = \lambda(A_{\delta_A}) > \lambda(A_{\delta_M}) \geq y(\delta_M) = \frac{1}{2}$$

微分方程 (32) 的解应具有如下形式

$$Ce^{c_\lambda \delta}$$

并且由于根据我们的初始条件（31），在 $\delta = 0$ 处应有 $y(0) = \lambda(A)$，我们得出结论

$$y(\delta) = \lambda(A)e^{c_\lambda \delta}$$

因此，$\delta_M$ 将是方程的一个解

$$\lambda(A)e^{c_\lambda \delta_M} = \frac{1}{2},$$

两边取对数后可化为

$$\ln \lambda(A) + c_\lambda \delta_M = -\ln 2$$

$$\delta_M = -\frac{1}{c_\lambda}\left(\ln \lambda(A) + \ln 2\right)$$

根据同样的推理 $\delta_B \leq \delta_M$，因此

$$\operatorname{dist}(A, B) \leq \delta_A + \delta_B \leq -\frac{2}{c_\lambda}(\ln \lambda(A) + \ln 2) \leq -\frac{2}{c_\lambda}\ln \lambda(A)$$

□

## 5.2 $\ell_p$-球体。

我们所说的 $\ell_p^n$ 单位球体是指

$$\ell_p^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_1|^p + \ldots + |x_n|^p \leq 1\}$$

令 $\mu$ 为其上的归一化勒贝格测度。注意， $\mu(\ell_p^n) = 1$。 $\ell_p^n$ 的体积等于

$$2^n \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}$$

根据 [23]中的定理1。因此，为了得到一个单位体积的 $\ell_p^n$ 球体，我们需要将 $\ell_p^n$ 单位球拉伸，拉伸倍数为

$$\omega_n = \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)^{\frac{1}{n}}}{2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)} \sim \frac{n^{\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)(pe)^{\frac{1}{p}}}$$

用 $\lambda$ 表示 $\omega_n \ell_p^n$上的勒贝格测度。再次根据（11），我们应有等周函数之间的比例关系

$$\mathcal{I}_\mu = \omega_n \mathcal{I}_\lambda \tag{33}$$

以下定理由 Sasha Sodin 在 [19]中证明。

**定理5.6** ([19, 定理 1])。 存在一个普适常数 $c > 0$，使得对于 $1 \leq p \leq 2$，$0 < a < \frac{1}{2}$

$$\mathcal{I}_\mu(a) \geq c n^{\frac{1}{p}} a \log^{1-\frac{1}{p}} a$$

由此可得

**定理5.7**。 对于每个 $p \in [1;\ 2]$ ，存在一个正的常数 $c_p > 0$，使得

$$\mathcal{I}_\lambda(a) > c_p a \log^{1-\frac{1}{p}} a$$

证明。 根据 (33)，我们已经知道

$$\mathcal{I}_\lambda(a) \geq c \frac{1}{\omega_n} n^{\frac{1}{p}} a \log^{1-\frac{1}{p}} a$$

[1]数值 $\frac{c}{\omega_n} n^{\frac{1}{p}}$ 对所有 $n$ 都为正，并且根据斯特林近似

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{\omega_n} n^{\frac{1}{p}} = 2c\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)(pe)^{\frac{1}{p}} > 0$$

Thus

$$c_p = \inf_n c\frac{1}{\omega_n} n^{\frac{1}{p}} > 0$$

and

$$\mathcal{I}_\lambda(a) \geq c_p a \log^{1-\frac{1}{p}} a$$

□

由此等周不等式，我们推出

**定理5.8**。 在一个体积为 *1* 的 $\ell_n^p$ 球体 $\omega_n \ell_p^n$ 中，两个体 $A$ 和 $B$ 的体积为 $\varepsilon \in (0; 1\ 2)$，它们之间的距离至多为

$$C_p \log^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\varepsilon}$$

其中某个常数 $C_p > 0$ 与维数 $n$ 和体积 $\varepsilon$无关。

证明。 我们关注最小的 $\delta_A$、 $\delta_B$，使得体 $A$ 在 $\omega_n \ell_p^n$ 中的 $\delta_A$扩张体积为$1\ 2$，且体 $B$ 的 $\delta_B$扩张体积也为$1\ 2$。对于这些扩张，我们有

$$\operatorname{dist}(A_{\delta_A}, B_{\delta_B}) = 0,$$

由此

$$\operatorname{dist}(A, B) \leq \delta_A + \delta_B$$

可得。

定理5.7中的等周不等式允许估计 $\lambda(A_\delta)$的增长情况如下:

$$\delta_+ \lambda(A_\delta) \geq c_p \lambda(A_\delta) \log^{1-\frac{1}{p}} \frac{1}{\lambda(A_\delta)}$$

而 $\lambda(A_\delta) < \frac{1}{2}$。

因此，我们希望考虑一个函数 $y(\delta)$，其行为符合我们的下界

$$y(0) = \varepsilon \tag{34}$$

$$y' = c_p y \log^{1-\frac{1}{p}} \frac{1}{y} \tag{35}$$

如果我们用 $\delta_M$ 表示 $y$ 达到二分之一的时刻，即 $y(\delta_M) = \frac{1}{2}$，那么 $\delta_A \leq \delta_M$。事实上，否则 $\delta_M < \delta_A$，但函数 $\lambda(A_\delta)$ 和 $y(\delta)$ 在 $\delta = 0$ 处以及对所有 $\delta \in [0$ 都相同；因此我们应有

$$\lambda(A_\delta) \geq y(\delta) \text{ and } \delta_+ \lambda(A_\delta) \geq c_p \lambda(A_\delta) \log^{1-\frac{1}{p}} \frac{1}{\lambda(A_\delta)}$$
$$\geq c_p y(\delta) \log^{1-\frac{1}{p}} \frac{1}{y(\delta)} = \delta_+ y(\delta),$$

因为 $x(-\log x)^{1-\frac{1}{p}}$在 $(0; \frac{1}{2}]$ 上递增（见附录 B）。因此我们得出了矛盾

$$\frac{1}{2} = \mu(A_{\delta_A}) > \mu(A_{\delta_M}) \geq y(\delta_M) = \frac{1}{2}$$

微分方程 (35) 是可分离的

$$dy = c_p y(-\log y)^{1-\frac{1}{p}} d\delta$$
$$-(-\log y)^{\frac{1}{p}-1} \left(-\frac{1}{y} dy\right) = c_p d\delta$$
$$-\int (-\log y)^{\frac{1}{p}-1} d(-\log y) = \int c_p d\delta$$
$$-p(-\log y)^{\frac{1}{p}} = c_p \delta + C_0$$

我们的初始条件 (34) 给出

$$-p(-\log \varepsilon)^{\frac{1}{p}} = C_0$$

对于 $\delta = \delta_M$，我们应有

$$-p(\log 2)^{\frac{1}{p}} = c_p \delta_M - p(-\log \varepsilon)^{\frac{1}{p}}$$
$$\delta_M = \frac{1}{c_p} \left(p(-\log \varepsilon)^{\frac{1}{p}} - p(\log 2)^{\frac{1}{p}}\right) \leq \frac{p}{c_p} (-\log \varepsilon)^{\frac{1}{p}}$$

根据同样的推理 $\delta_B \leq \delta_M$，我们得出

$$\operatorname{dist}(A, B) \leq \delta_A + \delta_B \leq 2\delta_M \leq \frac{2p}{c_p} (-\log \varepsilon)^{\frac{1}{p}}$$

□

# 6 下界。

**引言。** 本文将关注体积为 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ 的两个子集之间最大距离的下界。我们将通过考察凸体的某些超平面切割，简单地推导出这些下界。对于由欧几里得球、立方体、超八面体、单纯形以及 $\ell_p$ 球体等凸体组成的族，定理6.1、6.3、6.4、6.5将给出具体的下界。事实证明，对于欧几里得球，我们的下界与上界一致（见定理6.2）。定理 6.6将建立一个一般性的下界，表明在某种意义上，欧几里得球族对于我们的问题是最优的。

此前已经证明，对于单位体积立方体、球体、单纯形以及满足 $p \in [1$ 的 $\ell_p$球体，最大距离被某个仅依赖于 $\varepsilon$ 、但不依赖于维数 $n$ 的常数所控制。因此，考虑当 $n$ 趋于无穷时，体积为 $\varepsilon$ 的两个子集之间所有可能距离的上确界的下界是有意义的。

对于由 $K_n$ 组成的凸体族 $d_n$（$\varepsilon$），我们在此将 $K_n$ 中两个体积为 $\varepsilon \in$ （0；1 2）的子集之间所有可能距离的上确界记为。

**定理 6.1。** 当 $K_n$ 为单位体积欧几里得球时，我们有

$$\liminf_{n\to\infty} d_n(\varepsilon) \geq -2\frac{1}{\sqrt{e}}\Phi^{-1}(\varepsilon)$$

函数 $-2\frac{1}{\sqrt{e}}\Phi^{-1}$（$\varepsilon$） 渐近等价于

$$-2\frac{1}{\sqrt{\pi e}}\sqrt{-\ln\varepsilon}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时。

证明。 在单位体积的 $n$-球体 $\omega_n B^n \subset \mathbb{R}^n$ 中，其半径为

$$\omega_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\pi}} \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi e}},$$

考虑从（$-\omega_n$, 0, . . . , 0）到（$\omega_n$, 0, . . ., 0）的对角线，即对应于 $X_1$-轴的对角线。我们将关注与该对角线正交的超平面，即由 $X_1 = t$ 定义的超平面。

取一个数 $a$，使得

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\Phi^{-1}(\varepsilon) < -a < 0$$

如果我们考虑 $\omega_n B^n$上的均匀概率分布，那么可以将 $X_1$ 视为一个随机变量。我们想要考虑球体中对应于 $X_1 \leq -a$的部分。其体积将等于

$$\Pr(X_1 \leq -a) = \Pr(\sqrt{n}\omega_n^{-1} X_1 \leq -\sqrt{n}\omega_n^{-1} a)$$

根据 [20] 的定理1，当 $n$趋于无穷大时， $n^{\frac{1}{2}}\omega_n^{-1} X_1$的概率分布在全变差意义下收敛于 $\mathbb{R}$上的标准正态分布，其概率密度函数为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

此外，注意到

$$\lim_{n\to\infty} -\sqrt{n}\omega_n^{-1} a = \lim_{n\to\infty} -\sqrt{n}\frac{\sqrt{2\pi e}}{\sqrt{n}} a = -\sqrt{2\pi e}a > \sqrt{2\pi}\Phi^{-1}(\varepsilon)$$

因此，对于所有充分大的 $n$，我们将有

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2\pi}\Phi^{-1}(\varepsilon) + \delta < -\sqrt{n}\omega_n^{-1} a \\
&\qquad \Rightarrow \Pr(\sqrt{n}\omega_n^{-1} X_1 \leq -\sqrt{n}\omega_n^{-1} a) \geq \Pr(\sqrt{n}\omega_n^{-1} X_1 \leq \sqrt{2\pi}\Phi^{-1}(\varepsilon) + \delta)
\end{aligned}$$

对于某个 $\delta > 0$。由于 $n^{\frac{1}{2}}\omega_n^{-1} X_1$的概率分布在全变差意义下收敛于标准正态分布，因此对于所有充分大的 $n$，我们有

$$\begin{aligned}
&\Pr(X_1 \leq -a) \geq \Pr(\sqrt{n}\omega_n^{-1} X_1 \leq \sqrt{2\pi}\Phi^{-1}(\varepsilon) + \delta) \\
&\qquad \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{2\pi}\Phi^{-1}(\varepsilon)} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{\sqrt{2\pi}\Phi^{-1}(\varepsilon)} e^{-\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\right)^2} d\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\right) \\
&\qquad\qquad = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(\varepsilon)} e^{-\pi x^2} dx = \varepsilon
\end{aligned}$$

根据对称性，对于由 $X_1 \geq a$ 定义的球体部分，我们也有类似的结果。这意味着，当 $n$ 足够大时，我们将得到

两个体积至少为 $\varepsilon$ 、距离为 $2a$ 的子集。但 $a$ 被选为任意小于

$$-\frac{1}{\sqrt{e}}\Phi^{-1}(\varepsilon),$$

由此可得该定理的表述。 □

将其与定理 3.3 结合，我们得到

**定理6.2**。 当 $K_n$ 为单位体积欧几里得球时

$$\lim_{n\to\infty} d_n(\varepsilon) = -2\frac{1}{\sqrt{e}}\Phi^{-1}(\varepsilon)$$

**定理 6.3**。 当 $K_n$ 为单位立方体时，我们有

$$\liminf_{n\to\infty} d_n(\varepsilon) \geq -2\sqrt{\frac{\pi}{6}}\Phi^{-1}(\varepsilon)$$

函数 $-2\sqrt{\frac{\pi}{6}}\Phi^{-1}(\varepsilon)$ 渐近等价于

$$\frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{-\ln\varepsilon}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时。

证明。 立方体 $(0;1)^n$ 的主对角线是指从原点到 $(1,\ldots,1)$ 的线段。我们考虑与主对角线正交的超平面。

对于主对角线上的每个点，我们都可以考虑 $(0;1)^n$的相应正交超平面截面的面积。这就在从 $(0,\ldots,0)$ 到 $(1,\ldots,1)$ 的线段上给出了一个概率分布，其长度为 $\sqrt{n}$。我们将该线段的中点作为原点，即我们在 $[-\frac{\sqrt{n}}{2};+\frac{\sqrt{n}}{2}]$ 上有一个概率分布。

线段 $[0;1]$ 上均匀分布的方差等于

$$\sigma^2 = \int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx = 2\frac{1}{3}\frac{1}{2^3} = \frac{1}{12}$$

而且，我们在 $[-\frac{\sqrt{n}}{2}$ 上的分布可以由均匀分布于 $[0$ 上的 $n$ 个随机变量 $X_1$, ....., $X_n$ 产生，如下所示:

$$\sqrt{n}\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-\frac{1}{2}\right)$$

因此，根据中心极限定理，当 $n$ 趋于无穷大时，我们的分布收敛于正态分布 $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$，其概率密度函数为

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}=\sqrt{\frac{6}{\pi}}e^{-6x^2}$$

选取一个数 $a$ 使得

$$\sqrt{\frac{\pi}{6}}\Phi^{-1}(\varepsilon)<-a<0$$

并考虑单位立方体 $(0;1)^n$ 中满足以下条件的部分：其在主对角线上的正交投影位于 $[0;\ \frac{1}{2}\sqrt{n}-a]$ 内，即一个特定的超平面截面。当 $n$ 趋于无穷大时，该区域的体积将收敛于 $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ 的累积分布函数在 $-a$ 处的值，该值等于

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{-a}\sqrt{\frac{6}{\pi}}e^{-6x^2}dx&=\int_{-\infty}^{-a}e^{-\pi\left(\sqrt{\frac{6}{\pi}}x\right)^2}d\left(\sqrt{\frac{6}{\pi}}x\right)\\&=\int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{6}{\pi}}a}e^{-\pi x^2}dx=\Phi\left(-\sqrt{\frac{6}{\pi}}a\right)>\Phi\left(\sqrt{\frac{6}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{6}}\Phi^{-1}(\varepsilon)\right)=\varepsilon\end{aligned}$$

因此，当 $n$ 足够大时，至少有体积为 $\varepsilon$ 的部分将被切除。由对称性可知，对应于 $[\frac{1}{2}\sqrt{n}+a;\ \sqrt{n}]$ 位于主对角线上的立方体正交超平面截面也同样如此。

因此，当 $n$ 足够大时，我们得到两个体积至少为 $\varepsilon$、距离为$2a$的子集。但是，$a$ 是任意选取的一个小于

$$-\sqrt{\frac{\pi}{6}}\Phi^{-1}(\varepsilon),$$

由此可得定理所述结论。 □

**定理 6.4.** 当 $K_n$ 为单位体积单纯形时，我们有

$$\liminf_{n\to\infty}d_n(\varepsilon)\geq-\frac{\sqrt{2}}{e}\ln(2\varepsilon).$$

证明。 由以下内容定义的单位单纯形 $\Delta_n$ 的体积

$$\Delta_n=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n\mid x_1+\ldots+x_n=1\}$$

等于

$$\frac{n\sqrt{n}}{n!}$$

设

$$\omega_n = \left(\frac{n!}{n\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{n-1}} \sim \frac{n}{e},$$

则 $\omega_n\Delta_n$ 将是一个正则单位体积单纯形，其边长为

$$\sqrt{2}\omega_n$$

现在考虑满足以下条件的任意数 $\varepsilon'$

$$\varepsilon < \varepsilon' < \frac{1}{2}$$

设 $P$ 和 $Q$ 是 $\omega_n\Delta_n$的两个顶点。经过边 $PQ$ 的中点且与其正交的超平面将我们的单纯形分成体积相等的两部分。令

$$\alpha = (2\varepsilon')^{\frac{1}{n-1}}.$$

对包含 $P$ 的部分进行以 $P$ 为中心、系数为 $\alpha$的位似变换，所得的我们单纯形的子集体积为 $\frac{1}{2}\alpha^{n-1} = \varepsilon' > \varepsilon$。类似地，我们构造一个与顶点 $Q$ 对应的、体积为 $\varepsilon'$的子集。

注意，我们对 $PQ$的两半分别施加了系数为 $\alpha$ 的两次位似变换。我们的子集之间的距离将等于

$$\sqrt{2}\omega_n\left(1-\alpha\right) = \sqrt{2}\omega_n\left(1-(2\varepsilon')^{\frac{1}{n-1}}\right)$$

现在我们取极限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\omega_n\left(1-(2\varepsilon')^{\frac{1}{n-1}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{e}n\left(1-(2\varepsilon')^{\frac{1}{n-1}}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} -\frac{\sqrt{2}}{e}\frac{n}{n-1}\frac{(2\varepsilon')^0-(2\varepsilon')^{\frac{1}{n-1}}}{0-\frac{1}{n-1}} = -\frac{\sqrt{2}}{e}\frac{d}{dt}(2\varepsilon')^t\Big|_{t=0} = -\frac{\sqrt{2}}{e}\ln(2\varepsilon')\end{aligned}$$

换句话说，对于每个 $n$，我们都有 $\omega_n\Delta_n$ 的两个体积至少为 $\varepsilon$ 的子集，它们之间的距离趋于

$$-\frac{\sqrt{2}}{e}\ln(2\varepsilon')$$

当 $n$ 趋于无穷大时。但 $\varepsilon'$ 是从 $(\varepsilon;\ 1\ 2)$ 中任意选取的一个数，由此即可得到定理的表述。 □

**T定理 6.5.** 当 $K_n$ 是 $p \in [1;2]$ 的单位体积球体时，我们有

$$\liminf_{n\to\infty} d_n(\varepsilon) \geq -2\Psi_p^{-1}(\varepsilon),$$

其中函数 $-2\Psi_p^{-1}(\varepsilon)$（见附录 C）渐近等价于

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{p}}\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)}(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{p}}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时。

证明。 在单位体积球体 $\ell_p$ $\omega_n \ell_p^n$ 中，其中

$$\omega_n = \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)^{\frac{1}{n}}}{2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)} \sim \frac{n^{\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)(pe)^{\frac{1}{p}}},$$

考虑从 $(-\omega_n, 0, \ldots, 0)$ 到 $(\omega_n, 0, \ldots, 0)$ 的线段。我们将考虑与该线段正交的超平面，即由 $X_1 = t$ 定义的超平面。用 $V_n(t)$ 表示测量 $X_1 \geq t$ 所给部分体积的函数。

我们采用附录 C 中的记号，其中已证明函数 $V_n(x)$ 在 $(-\infty;+\infty)$ 上一致收敛到 $\Psi_p(-x)$。任取一个数 $a$，使得

$$\Psi_p^{-1}(\varepsilon) < -a < 0$$

那么，对于所有充分大的 $n$ ，我们有

$$V_n(a) > \varepsilon$$

由于对称性，对于所有充分大的 $n$ ，我们都可以找到两个体积至少为 $\varepsilon$ 、距离至少为 $2a$ 的几何体，且位于 $\omega_n \ell_p^n$ 中。并且，由于上面对 $a$ 的选择是任意的，我们将有

$$\liminf_{n\to\infty} d_n(\varepsilon) \geq -2\Psi_p^{-1}(\varepsilon)$$

□

假设我们有一个由有界、体积为单位且中心对称的几何体组成的族 $K_n$，这些几何体不一定是凸的，其中原点将是每个 $K_n$ 的对称中心。用 $\mu_n$ 表示 $K_n$ 上的均匀概率测度。

固定 $\varepsilon \in (0; 1/2)$。由于 $K_n$ 有界，因此其直径有限；于是对每个 $K_n$，我们可以考虑 $d_n(\varepsilon)$——在 $K_n$ 的所有体积为 $\varepsilon$ 的子集之间，两个子集的距离的上确界。

事实证明，简单的平均论证即可得到该结论。

**定理 6.6**。对于每个 $\varepsilon \in (0; 1/2)$，

$$\liminf_{n\to\infty} d_n(\varepsilon) \geq -2\frac{1}{\sqrt{e}}\Phi^{-1}(\varepsilon),$$

其中函数 $-2\frac{1}{\sqrt{e}}\Phi^{-1}(\varepsilon)$ 渐近等价于

$$-2\frac{1}{\sqrt{\pi e}}\sqrt{-\ln \varepsilon}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时。

证明。 取一个数 $d$，使得

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\Phi^{-1}(\varepsilon) < -d < 0$$

我们希望证明，对于所有充分大的 $n$，都存在一个由单位向量 $u$ 确定的方向，该向量位于球面 $S^{n-1}$ 上，使得我们的体 $K_n$ 中满足 $\langle x, u\rangle \leq -d$ 的部分体积至少为 $\varepsilon$。由中心对称性，满足 $\langle x, u\rangle \geq d$ 的部分体积也相同。于是，我们将得到 $K_n$ 的两个子集，它们的体积至少为 $\varepsilon$，且距离至少为 $2d$；其中 $d$ 是任意选取的一个小于

$$-\frac{1}{\sqrt{e}}\Phi^{-1}(\varepsilon),$$

由此即可推出定理的结论。

我们正在寻找一个方向 $u \in S^{n-1}$，其

$$\mu_n(\langle x, u\rangle \leq -d) \geq \varepsilon$$

如果 $\mu_n(\langle x,u\rangle \le -d)$ 的平均值大于 $\varepsilon$，那么这样的方向就会存在。

用 $\vartheta_n$ 表示 $S^{n-1}$上的均匀概率测度。我们希望得到

$$\int_{S^{n-1}} \mu_n(\langle x,u\rangle \le -d)d\vartheta_n \ge \varepsilon \tag{36}$$

由 $\langle x、\ u\rangle \le -d$ 定义的超平面截面的体积，是 $K_n$上指示函数 $[\langle x,u\rangle \le -d]$ 的积分，因此可以将（36）改写为

$$\int_{S^{n-1}} \int_{K_n} [\langle x,u\rangle \le -d]d\mu_n d\vartheta_n \ge \varepsilon$$

我们可以交换积分次序

$$\int_{K_n} \left( \int_{S^{n-1}} [\langle x,u\rangle \le -d]d\vartheta_n \right) d\mu_n \ge \varepsilon \tag{37}$$

我们希望考察 $x \ne 0$时（37）的被积函数。首先，将$[\langle x,u\rangle \le -d]$ 改写为

$$\left[ \sqrt{n} \left\langle \frac{x}{\|x\|_2}, u \right\rangle \le -\frac{\sqrt{n}d}{\|x\|_2} \right]$$

现在，我们可以将 $u$ 视为单位球面 $S^{n-1}$上的一个随机向量。那么

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|_2}, u \right\rangle$$

对应于 $u$ 在从$-\frac{x}{\|x\|_2}$到 $+\frac{x}{\|x\|_2}$的直径上的投影。因此，根据 [20] 中的定理1，当 $n$ 趋于无穷时，随机变量的分布

$$\sqrt{n} \left\langle \frac{x}{\|x\|_2}, u \right\rangle$$

在全变差意义下收敛于标准正态分布。

注意，

$$\int_{S^{n-1}} \left[ \sqrt{n} \left\langle \frac{x}{\|x\|_2}, u \right\rangle \le -\frac{\sqrt{n}d}{\|x\|_2} \right] d\vartheta_n$$

仅取决于 $-\frac{\sqrt{n}d}{\|x\|_2}$。因此我们定义函数

$$\Psi_n(x) = \int_{S^{n-1}} \left[ \sqrt{n} \left\langle \frac{x}{\|x\|_2}, u \right\rangle \le x \right] d\vartheta_n$$

如上文所述，对于每个 $x$

$$\lim_{n\to\infty}\Psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

由于函数 $\Psi_n$ 是单调的，我们还应有

$$\lim_{n\to\infty}\Psi_n(x_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

对于趋于 $x$ 的任意序列 $x_n$，当 $n\to\infty$ 时。

将（37）改写为

$$\int_{K_n\setminus\{0\}}\Psi_n\left(-\frac{\sqrt{n}d}{\|x\|_2}\right)d\mu_n\geq\varepsilon \tag{38}$$

函数 $\Psi_n$ 是非递减的，因此

$$\|x\|_2\geq r>0\Rightarrow\Psi_n\left(-\frac{\sqrt{n}d}{\|x\|_2}\right)\geq\Psi_n\left(-\frac{\sqrt{n}d}{r}\right)$$

因此，对于（38），条件

$$\int_{K_n\setminus B_r^n}\Psi_n\left(-\frac{\sqrt{n}d}{r}\right)d\mu_n\geq\varepsilon \tag{39}$$

就足够了；我们还可以进一步要求

$$(1-V(B_r^n))\Psi_n\left(-\frac{\sqrt{n}d}{r}\right)\geq\varepsilon, \tag{40}$$

其中，$V(B_r^n)$ 是半径为 $r$ 的 $n$ 维球体的体积。

单位 $n$ 维球体的体积为 $B_1^n$

$$\frac{\sqrt{\pi}^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

单位体积对应于半径

$$\omega_n=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\pi}}\sim\sqrt{\frac{n}{2\pi e}}$$

选取一个数 $\alpha \in (0;\ 1)$，使得

$$\alpha \frac{1}{\sqrt{e}} \Phi^{-1}(\varepsilon) < -d \tag{41}$$

并令

$$r = \alpha \omega_n$$

不等式（40）变为

$$(1-\alpha^n)\Psi_n\left(-\frac{\sqrt{n}d}{\alpha\omega_n}\right) \geq \varepsilon \tag{42}$$

注意

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}d}{\alpha\omega_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2\pi e}{n}} \frac{\sqrt{n}d}{\alpha} = \frac{\sqrt{2\pi e}d}{\alpha}$$

现在取（42）左侧的极限，并应用条件（41）

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1-\alpha^n)\Psi_n\left(-\frac{\sqrt{n}d}{\alpha\omega_n}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{\sqrt{2\pi e}d}{\alpha}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ = \int_{-\infty}^{-\frac{\sqrt{2\pi e}d}{\alpha}} e^{-\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\right)^2} d\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\right) &= \int_{-\infty}^{-\frac{\sqrt{e}d}{\alpha}} e^{-\pi x^2} dx = \Phi\left(-\frac{\sqrt{e}d}{\alpha}\right) \\ &> \Phi(\Phi^{-1}(\varepsilon)) = \varepsilon\end{aligned}$$

因此，对于所有充分大的 $n$

$$(1-\alpha^n)\Psi_n\left(-\frac{\sqrt{n}d}{\alpha\omega_n}\right) > \varepsilon$$

从而，

$$\int_{S^{n-1}} \mu_n(\langle x, u\rangle \leq -d) d\vartheta_n \geq \varepsilon, \tag{43}$$

这意味着，对于所有充分大的 $n$，所需方向 $u \in S^{n-1}$ 具有该性质

$$\mu_n(\langle x, u\rangle \leq -d) \geq \varepsilon$$

存在。 □

定理 6.1 是定理 6.6 的直接推论。

**结论**。 粗略地说， [12], [11]中确立的结果告诉我们，通常情况下，凸体沿任意方向的超平面截面会形成高斯分布，这表明 $d_n(\varepsilon)$与 $\Phi^{-1}(\varepsilon)$的渐近行为之所以不同，可能是由少数几个退化方向造成的。例如，定理 6.4 和 5.5 告诉我们，单纯形的 $d_n(\varepsilon)$ 的渐近行为对应于一个函数 $-\ln \varepsilon$; 但也可以注意到，单纯形 $\Delta_n$ 在与其角点相对应的 $n$方向上异常「狭长」，并且根据定理 5.3，其几乎全部体积都集中在一个欧几里得球内，该球的直径远小于 $\Delta_n$的直径。

# 7 离散等周问题。

**引言。** 在本节中，我们不再考虑体积为 $\varepsilon$ 的两个子集之间的欧几里得距离，而是考虑曼哈顿距离。对于固定的 $\varepsilon$，我们不再能断言该距离有界，但我们将针对单位立方体 $[0;\ 1]^n$ 的情形，推导出一个关于其渐近行为的结果（定理 7.3）。证明该结果的关键思路，是用一个晶格替代单位立方体 $[0;\ 1]^n$，因为对于晶格，我们的问题已有解决方案（见定理 7.2）。

我们考虑单位立方体 $[0;\ 1]^n$ 中的曼哈顿距离 $d$。我们可以提出一个类似的问题：在单位立方体 $[0;\ 1]^n$ 中，两个体积为 $\varepsilon > 0$ 的几何体之间的最大曼哈顿距离是多少?

事实证明，这个问题可以通过离散化来处理。考虑 $[0$ 内的一个晶格 $L = \{\frac{0}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{m}{m}\}^n;\ 1]^n$，当且仅当 $d\ (x,\ y) = \frac{1}{m}$ 时，$L$ 中的两个点 $x$ 和 $y$ 相邻。我们把子集 $A \subseteq L$ 的 $t$-边界 $A_{(t)}$ 定义为 $L$ 中所有与 $A$ 的距离至多为 $\frac{t}{m}$ 的点所组成的集合。后一个概念类似于 $\delta$-扩张，可以将 $|A_{(1)} \setminus A|$ 视为表面积的一个类比。这就引出了离散等周问题：对于大小固定的集合 $A \subseteq L$，其 $t$-边界可以有多大? 这个问题在 [4] 中得到了回答。

**定理 7.1** ([4, 推论 9])。 设 $A \subset [k]^n$。对于任意 $t = 0,\ 1、\ldots\ldots、t$ 的边界，$A$ 至少与单纯形序中 $[k]^n$ 的前 $|A|$ 个元素的 $t$ 边界一样大。

这里 $[k]^n$ 是晶格 $\{0, \ldots, k-1\}^n$。在 $[k]^n$ 上，单纯形序定义为：当 $\sum x_i < \sum y_i$，或 $\sum x_i = \sum y_i$ 且存在某个 $j$ 使得 $x_j > y_j$，并且对所有 $i < j$ 都有 $x_i = y_i$ 时，规定 $x < y$。这一离散等周不等式意味着

**定理 7.2** ([4, 推论 10])。 存在集合 $A、B \subset [k]^n$，满足 $|A| = r、|B| = s$，以及 $d(A、B) \geq d$，当且仅当单纯形序中第一个 $r$ 与最后一个 $s$ 元素之间的距离至少为 $d$。

根据第一段中所讨论问题的这一离散版本，我们可以推导出

**定理 7.3。** 如果用 $d_n\ (\varepsilon)$ 表示单位立方体 $[0;\ 1]^n$ 中两个体积为 $\varepsilon \in (0;\ 1\,2)$ 的几何体之间的最大曼哈顿距离，那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n(\varepsilon)}{\sqrt{n}} = -2\sqrt{\frac{\pi}{6}}\Phi^{-1}(\varepsilon)$$

函数 $-2\sqrt{\frac{\pi}{6}}\Phi^{-1}(\varepsilon)$ 渐近等价于

$$\frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{-\ln\varepsilon}$$

如 $\varepsilon \to 0$。

证明。 取一个数 $a$，使得

$$-a < \sqrt{\frac{\pi}{6}}\Phi^{-1}(\varepsilon) < 0$$

如果我们用 $V_n$ 和 $W_n$ 表示由不等式 $\sum x_i \le \frac{1}{2}\sqrt{n} - a$ 和 $\sum x_i \ge \frac{1}{2}\sqrt{n} + a$ 分别定义的 $[0$ 的子集 $1]^n$，那么应用与定理 6.3 中相同的中心极限定理，我们将得到

$$\lim_{n\to\infty}\mu(V_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(W_n) = \int_{-\infty}^{-a}\sqrt{\frac{6}{\pi}}e^{-6x^2}dx = \Phi\left(-\sqrt{\frac{6}{\pi}}a\right)$$
$$< \Phi\left(\sqrt{\frac{6}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{6}}\Phi^{-1}(\varepsilon)\right) = \varepsilon$$

因此，存在一个数 $N$，使得对于所有 $n > N$，$V_n$ 和 $W_n$ 的体积都将小于 $\varepsilon$；并且可以注意到，它们之间的曼哈顿距离等于 $2a\sqrt{n}$。从现在起，我们假设 $n > N$。

现在考虑 $[0$ 内部的两个几何体 $A$ 和 $B$；它们的体积为 $\varepsilon$，以及一个晶格 $L_m = \{\frac{0}{m}, \ldots, \frac{m}{m}\}^n$。进行离散化的理由是，当我们将注意力限制在晶格 $L_m$ 上时，距离不会减小

$$d(A, B) \le d(A \cap L_m, B \cap L_m)$$

由于 $\mu(V_n) < \mu(A)$ 且 $\mu(W_n) < \mu(B)$，对于所有足够大的 $m$，我们将有

$$|V_n \cap L_m| \le |A \cap L_m| \quad |W_m \cap L_m| \le |B \cap L_m|$$

根据定理 7.2，这意味着

$$d(A \cap L_m, B \cap L_m) \le d(V_n \cap L_m, W_n \cap L_m),$$

因为 $V_n \cap L_m$ 和 $W_n \cap L_m$ 分别是 $L_m$ 上单纯形序中的第一个 $|V_n \cap L_m|$ 和最后一个 $|W_n \cap L_m|$ 元素。

我们得出结论：对于所有足够大的 $m$

$$d(A,B) \le d(V_n \cap L_m, W_n \cap L_m)$$

Also

$$\lim_{m\to\infty} d(V_n \cap L_m, W_n \cap L_m) = d(V_n, W_n) = 2a\sqrt{n}$$

因此，对于所有 $n > N$

$$d(A,B) \le 2a\sqrt{n},$$

但这里选择的 $a$ 是任意一个大于 $-\sqrt{\frac{\pi}{6}}\Phi^{-1}(\varepsilon)$ 的数，由此

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{d_n(\varepsilon)}{\sqrt{n}} \le -2\sqrt{\frac{\pi}{6}}\Phi^{-1}(\varepsilon) \tag{44}$$

可得。

如果我们假设

$$\sqrt{\frac{\pi}{6}}\Phi^{-1}(\varepsilon) < -a < 0,$$

那么，正如定理 6.3 的证明中已经表明的，对于所有足够大的 $n$

$$\mu(V_n) = \mu(W_n) > \varepsilon$$

但 $V_n$ 与 $W_n$ 之间的曼哈顿距离为 $2a\sqrt{n}$。

由此观察可得

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{d_n(\varepsilon)}{\sqrt{n}} \ge -2\sqrt{\frac{\pi}{6}}\Phi^{-1}(\varepsilon),$$

结合不等式（44），即可得到定理的结论。 □

**结论**。 离散等周问题还有其他变体。例如，定理 7.2 在整数格的非负正交象限中也有对应的结论 $\mathbb{Z}_+^n$（见 [22] 和 [4, 定理 4]）。

# 8 结论。

关于单位体积 $\ell_p$ 球体中子集间距离的$p \in [1$上界； $2] \cup \{+\infty\}$ 已经得到。 $p \in (2; +\infty)$ 的一种情形仍未解决。由于渐近而言，我们对单位体积欧几里得球（$p = 2$）和单位立方体（$p = +\infty$）所得的估计相同，因此我们预期所有 $p \in [2$； $+\infty]$的渐近行为也类似。正如之前所指出的， $p = 2$ 和 $p = +\infty$ 这两种情形都可以通过构造一个将高斯测度变换为相应$\ell_p$ 球体上均匀测度的利普希茨映射来处理。或许，同样的方法也适用于 $p \in (2; +\infty)$。在 [3] 第 4 页中曾指出，带有 $p \in [2$； $+\infty]$ 的 $\ell_p^n$ 球体上的均匀测度“可以由标准高斯测度经利普希茨变换得到”。不过，我们不确定这句话的确切含义及其影响。

在定理 6.6 中，我们针对这个问题建立了某种一般下界。但对于单位体积的凸体，是否可能找到两个体积为 $\varepsilon \in (0$； $_1{}_2)$ 的子集之间距离的一般上界？显然，我们只能考虑某些特定的“良好”凸体。例如，在某个方向上被大幅拉伸的凸体中，两个固定体积的子集之间的距离可能任意大。这类“良好”凸体的一种概念与各向同性位置有关。但这意味着，我们正在寻找各向同性凸体中等周问题的一般估计；这似乎是一个复杂的开放问题（Kannan-Lov´asz-Simonovits 猜想，见 [14]）。此外，即使是凸体的体积与各向同性常数之间的关系，似乎也属于另一个开放问题的核心（各向同性常数猜想，见 [5], [7]）。在论文 [6] 中，证明了一个与 KLS猜想有关的非常好的下界。关于各向同性凸体已有大量资料，例如 [9]。

对数凹概率测度推广了凸体上的均匀测度。因此，人们可能会尝试在更一般的情形下研究这一问题。高斯测度是对数凹的，这意味着在更一般的情形下，我们的估计对于一维情形中的某些特定分布可能是精确的。在论文 [15] 中，证明了关于该等周问题特定版本的一些一般估计（例如，见定理 1.3）。

# 参考文献

[1] S. G. Bobkov。《对数凹概率测度的等周不等式与解析不等式》。载于：《概率年刊》27.4（1999年），第 1903–1921 页。数字对象标识符：10.1214/aop/1022874820。网址：https://doi.org/10.1214/aop/10228748 20.

[2] S. G. Bobkov 和 C. Houdr´e。《乘积概率测度的等周常数》。载于：《概率年刊》25.1（1997年），第184–205页。数字对象标识符：10.1214/aop/1024404284。网址：https://doi.org/10.1214/aop/102440428 4.

[3] Sergey G. Bobkov。《关于对数凹概率分布的等周常数》。载于：《泛函分析的几何方面：*2004–2005*年以色列研讨会》。Vitali D. Milman 和 Gideon Schechtman 编。柏林，海德堡：施普林格柏林海德堡，2007年，第81–88页。国际标准书号：978-3-540-72053-9。数字对象标识符：10.1007/978-3-540-72053-9_4。网址：https://doi.org/10.1007/978-3-540-72053-9_4.

[4] B´ela Bollob´as 和 Imre Leader。《压缩与等周不等式》。载于：《组合理论杂志》*A*辑56.1（1991年），第47–62页。国际标准连续出版物号：0097-3165。数字对象标识符：https://doi.org/10.1016/0097-3165(91)90021-8。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0097316591900218。

[5] J. Bourgain。《高维凸集上的多项式的分布》。载于：《泛函分析的几何方面》。Joram Lindenstrauss 和 Vitali D. Milman 编。柏林，海德堡：施普林格柏林海德堡，1991年，第127–137页。国际标准书号：978-3-540-47355-8。

[6] Yuansi Chen。《KLS猜想中等周系数的近似常数下界》。载于：《几何与泛函分析》31（2021年2月）。数字对象标识符：10.1007/s00039-021-00558-4。

[7] Sean Dar。《关于 Bourgain 凸体截面问题的评论》。载于：《泛函分析的几何方面》。J. Lindenstrauss 和 V. Milman 编。巴塞尔：Birkh¨auser Basel，1995年，第61–66页。国际标准书号：978-3-0348-9090-8。

[8] T. Figiel、J. Lindenstrauss 和 V. D. Milman。《凸体近似球形截面的维数》。载于：《数学学报》139.none（1977年），第53–94页。数字对象标识符：10.1007/BF02392234。网址：https://doi.org/10.1007/BF02392

234

[9] Apostolos Giannopoulos 等。各向同性凸体的几何学。2014年5月。isbn：1-4704-1456-2,978-1-4704-1456-6。doi：10.13140/RG.2.1.1754.0640。

[10] Evarist Gin´e 和 Richard Nickl。无限维统计模型的数学基础。剑桥统计与概率数学丛书。剑桥大学出版社，2015年。doi：10.1017/CBO9781107337862.[11] B. Klartag。“凸集中心极限定理的幂律估计”。载于：《泛函分析杂志》245.1（2007年），第284–310页。issn：0022-1236。doi：https://doi.org/10.1016/j.jfa.2006.12.005。url：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123606004794。[12] Bo'az Klartag。“凸集的中心极限定理”。载于：《数学发明》168（2007年），第91–131页。[13] M. Ledoux。测度集中特性。数学综述与专著。美国数学学会，2001年。isbn：9780821837924。url：https://books.google.ru/books?id=mCX_cWL6rqwC。[14] Simonovits M. Lov´asz L. Kannan R. “凸体的等周问题与局部化引理。”载于：《离散与计算几何》13.3-4（1995年），第541–560页。url：http://eudml.org/doc/131379。[15] Emanuel Milman 和 Sasha Sodin。“关于一致对数凹测度与一致凸体的等周不等式”。载于：《泛函分析杂志》254.5（2008年），第1235–1268页。issn：0022-1236。doi：https://doi.org/10.1016/j.jfa.2007.12.002。url：https://www.sciencedirect.c

[16] Antonio Ros。《等周问题》。载于：*Clay Math. Proc.* 2（2005年1月）。[17] G. Schechtman 和 J. Zinn。《两个$L_p^n$ 球体的交集体积》。载于：《美国数学学会会刊》110.1（1990），第217–224页。国际标准书号：00029939，10886826。网址：http://www.jstor.org/stable/204826（访问日期：2022年12月7日）。[18] Gideon Schechtman 和 Joel Zinn。《关于 $\ell_p^n$ 球体上的集中性》。载于：2007年5月，第245–256页。国际标准书号：978-3-540-41070-6。数字对象标识符：10.1007/BFb0107218。[19] Sasha Sodin。《 $\ell_p$ 球体上的一个等周不等式》。英文。载于：*Annales de l'I.H.P. Probabilit´es et statistiques* 44.2（2008），第362–373页。网址：http://eudml.org/doc/77974。[20] A. J. Stam。《高维欧氏空间中球面上均匀分布的极限定理》。载于：《应用概率杂志》19.1（1982），第221–228页。国际标准书号：00219002。网址：http://www.jstor.org/stable/3213932（访问日期：2022年11月28日）。

[21] Marta Strzelecka。《平面上关于 $\ell_1$-度量的指数测度等周问题》。载于：*Positivity*（2016年6月）。数字对象标识符：10.1007/s11117-017-0476-y。[22] Da-Lun Wang 和 Ping Wang。《离散环面上的极值构形与广义麦考莱定理的推广》。载于：*SIAM*应用数学杂志 33.1（1977年），第55–59页。国际标准书号：00361399。网址：http://www.jstor.org/stable/2100602（访问日期：2023年1月27日）。[23] Xianfu Wang。《广义单位球的体积》。载于：数学杂志 78.5（2005年），第390–395页。国际标准书号：0025570X，19300980。网址：http://www.jstor.org/stable/30044198（访问日期：2022年11月24日）。

# A $\Phi^{-1}$的渐近行为。

我们希望证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{-\ln\varepsilon}}{-\Phi^{-1}(\varepsilon)}=1 \tag{45}$$

我们从以下观察开始

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-\pi x^2}}{-2\pi x}\right)=e^{-\pi x^2}+\frac{e^{-\pi x^2}}{2\pi x^2}$$

对两边从 $-\infty$ 积分到 $a<0$，我们得到

$$\frac{e^{-\pi a^2}}{-2\pi a}=\left(\frac{e^{-\pi x^2}}{-2\pi x}\right)\Bigg|_{-\infty}^{a}=\int_{-\infty}^{a}e^{-\pi x^2}\left(1+\frac{1}{2\pi x^2}\right)dx \tag{46}$$

由此我们可以推导出 $\Phi$的以下上界

$$\Phi(a)\le\int_{-\infty}^{a}e^{-\pi x^2}\left(1+\frac{1}{2\pi x^2}\right)dx=\frac{e^{-\pi a^2}}{-2\pi a}$$

现在我们将 $-\Phi^{-1}$ 应用于两边

$$-a\ge-\Phi^{-1}\left(\frac{e^{-\pi a^2}}{-2\pi a}\right)$$

请记住，$a<0$。将 $\frac{e^{-\pi a^2}}{-2\pi a}$ 代入（45）中的表达式，而不是将 $\varepsilon$ 代入，我们得到

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi a^2+\ln(-2\pi a)}}{-\Phi^{-1}(\frac{e^{-\pi a^2}}{-2\pi a})}\ge\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi a^2+\ln(-2\pi a)}}{-a}$$

但当 $a$ 趋近于 $-\infty$时

$$\frac{e^{-\pi a^2}}{-2\pi a}\to 0\text{ and }\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi a^2+\ln(-2\pi a)}}{-a}\to 1$$

So

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{-\ln\varepsilon}}{-\Phi^{-1}(\varepsilon)}\ge 1 \tag{47}$$

如果已定义。

由（46）我们还可以得到关于 $\Phi$ 的下界

$$\Phi(a) \geq \left(1+\frac{1}{2\pi a^2}\right)^{-1} \int_{-\infty}^{a} e^{-\pi x^2}\left(1+\frac{1}{2\pi x^2}\right) dx = \frac{e^{-\pi a^2}}{-2\pi a}\left(1+\frac{1}{2\pi a^2}\right)^{-1}$$

再次对两边应用 $-\Phi^{-1}$，得到

$$-a \leq -\Phi^{-1}\left(\frac{e^{-\pi a^2}}{-2\pi a}\left(1+\frac{1}{2\pi a^2}\right)^{-1}\right)$$

将 $\frac{e^{-\pi a^2}}{-2\pi a}\left(1+\frac{1}{2\pi a^2}\right)^{-1}$ 替代 $\varepsilon$ 代入（45）中的表达式，我们得到

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi a^2+\ln(-2\pi a)+\ln\left(1+\frac{1}{2\pi a^2}\right)}}{-\Phi^{-1}\left(\frac{e^{-\pi a^2}}{-2\pi a}\left(1+\frac{1}{2\pi a^2}\right)^{-1}\right)} \leq \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi a^2+\ln(-2\pi a)+\ln\left(1+\frac{1}{2\pi a^2}\right)}}{-a}$$

但是，当 $a$ 趋近于 $-\infty$ 时

$$\frac{e^{-\pi a^2}}{-2\pi a}\left(1+\frac{1}{2\pi a^2}\right)^{-1} \to 0,$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi a^2+\ln(-2\pi a)+\ln\left(1+\frac{1}{2\pi a^2}\right)}}{-a} \to 1$$

Thus

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{-\ln\varepsilon}}{-\Phi^{-1}(\varepsilon)} \leq 1 \tag{48}$$

结合（47）和（48）可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{-\ln\varepsilon}}{-\Phi^{-1}(\varepsilon)} = 1$$

## B 函数 $x\left(-\log x\right)^{1-\frac{1}{p}}$在 $\left(0;\ \frac{1}{2}\right]$上递增。

为证明函数 $x(-\log\ x)^{1-\frac{1}{p}}$在 $(0;\ \frac{1}{2}]$ 上对于 $p\in[1;\ 2]$递增，我们只需取导数

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x(-\log x)^{1-\frac{1}{p}}\right) &= (-\log x)^{1-\frac{1}{p}} + x\frac{d}{dx}(-\log x)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= (-\log x)^{1-\frac{1}{p}} + x\frac{d(-\log x)^{1-\frac{1}{p}}}{d(-\log x)}\frac{d(-\log x)}{dx} \\ &= (-\log x)^{1-\frac{1}{p}} + \left(1-\frac{1}{p}\right)x(-\log x)^{-\frac{1}{p}}\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= (-\log x)^{1-\frac{1}{p}} - \left(1-\frac{1}{p}\right)(-\log x)^{-\frac{1}{p}} \\ &= (-\log x)^{-\frac{1}{p}}\left((-\log x) - \left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\end{aligned}$$

显然，$(-\log\ x)^{-\frac{1}{p}}>0$。在半区间 $(0;\ \frac{1}{2}]$上，我们应有

$$(-\log x) - \left(1-\frac{1}{p}\right) \geq \left(-\log\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \log 2 - \frac{1}{2} > 0,$$

这意味着，对于所有 $x\in\ (0;\ \frac{1}{2}]$

$$\frac{d}{dx}\left(x(-\log x)^{1-\frac{1}{p}}\right) > 0$$

## C 函数 $V_n\left(x\right)$和 $S_n\left(x\right)$在极限处。

对于 $p\in[1;\ \infty)$，考虑由下式定义的单位 $\ell_p^n$ 球体

$$|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p = 1$$

其体积为

$$\frac{\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}$$

Let

$$\omega_n = \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)^{\frac{1}{n}}}{2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)} \sim \frac{n^{\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)(pe)^{\frac{1}{p}}} \tag{49}$$

对于非负数 $x$，记单位体积体 $\omega_n \ell_p^n$ 的截面$x_1 = x$ $S_n(x)$的体积为。对于 $x > \omega_n$，我们假设 $S_n(x) = 0$。对于$x \le \omega_n$，与该截面对应的 $\ell_p^{n-1}$球体定义为满足方程

$$|x_2|^p + \ldots + |x_n|^p = \omega_n^p - x^p$$

其体积为

$$\begin{aligned} S_n(x) &= (\omega_n^p - x^p)^{\frac{n-1}{p}} \frac{\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^{n-1}}{\Gamma\left(1+\frac{n-1}{p}\right)} \\ &= \left(1-\frac{x^p}{\omega_n^p}\right)^{\frac{n-1}{p}} \frac{1}{\omega_n}\omega_n^n \frac{\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^{n-1}}{\Gamma\left(1+\frac{n-1}{p}\right)} \\ &= \left(1-\frac{x^p}{\omega_n^p}\right)^{\frac{n-1}{p}} \frac{1}{\omega_n} \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}{\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^{n}} \frac{\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^{n-1}}{\Gamma\left(1+\frac{n-1}{p}\right)} \\ &= \left(1-\frac{x^p}{\omega_n^p}\right)^{\frac{n-1}{p}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}{2\omega_n\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(1+\frac{n-1}{p}\right)} \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)x^\alpha} = 1,$$

我们将得到

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}{2\omega_n\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(1+\frac{n-1}{p}\right)} &= \lim_{n\to\infty} \left(\omega_n 2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^{-1} \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n-1}{p}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)(pe)^{\frac{1}{p}}} 2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^{-1} \left(\frac{n}{p}\right)^{\frac{1}{p}} = e^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Also

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{p\omega_n^p}=\lim_{n\to\infty}n\left(p\frac{n}{2^p\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^p pe}\right)^{-1}=2^p\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^p e$$

因此在线段 $[0;\ D]$ 上，函数序列

$$\left(1-\frac{x^p}{\omega_n^p}\right)^{\frac{n-1}{p}}=\left(1-\frac{x^p}{\omega_n^p}\right)\left(1-\frac{x^p\frac{n}{p\omega_n^p}}{\frac{n}{p}}\right)^{\frac{n}{p}}$$

一致收敛于

$$e^{-x^p 2^p\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^p e}=e^{-\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)e^{\frac{1}{p}}x\right)^p}$$

当 $n$趋于 $\infty$时。

因此，在区间 $[0;D]$ 上，函数 $S_n(x)$一致收敛于

$$\psi_p(x)=e^{\frac{1}{p}}e^{-x^p 2^p\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^p e}=e^{\frac{1}{p}}e^{-\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)e^{\frac{1}{p}}x\right)^p}$$

对于任意 $\varepsilon>0$，取一个数 $D$，使得

$$\psi_p(D)<\varepsilon,$$

那么，对于所有充分大的 $n$

$$S_n(D)<2\varepsilon$$

并且，由于函数 $S_n(x)$和 $\psi_p(x)$均为非递增函数，因此有

$$|\psi_p(x)-S_n(x)|<3\varepsilon$$

对每个 $x\geq D$，对所有充分大的 $n$。这意味着函数 $S_n(x)$在整个 $[0;+\infty)$上一致收敛到 $\psi_p(x)$。

对于非负的 $x$，用 $V_n(x)$表示由 $x_1\geq x$定义的 $\omega_n\ell_p^n$部分的体积。对于 $x>\omega_n$，我们假设 $V_n(x)=0$。

注意，

$$V_n(x)=\frac{1}{2}-\int_0^d S_n(t)dt$$

并且，由于 $S_n(t)$ 在 $[0$ 上一致收敛于 $\psi_p(x)$； $D]$，我们将得到 $V_n(x)$ 一致收敛于

$$\Lambda_p(x) = \frac{1}{2} - \int_0^d \psi_p(t)dt$$

在 $[0; D]$ 上。

Also

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \psi_p(x)dx &= \int_0^\infty e^{\frac{1}{p}} e^{-\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)e^{\frac{1}{p}}x\right)^p} dx \\ &= \frac{1}{2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty e^{-\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)e^{\frac{1}{p}}x\right)^p} \left(\frac{1}{2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)e^{\frac{1}{p}}} dx\right) \\ &= \frac{1}{2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty e^{-x^p} dx = \frac{1}{2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty e^{-t} dt^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{2p\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{2p\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

对于任意 $\varepsilon$，存在一个数 $D$，使得

$$\Lambda_p(D) < \varepsilon$$

由于 $V_n(D)$ 收敛于 $\Lambda_p(D)$，我们将有

$$V_n(D) < 2\varepsilon$$

对于所有充分大的 $n$。并且，由于函数 $V_n(x)$ 和 $\Lambda_p(x)$ 都是非递增的，

$$|\Lambda_p(x) - V_n(x)| < 3\varepsilon$$

对于每个 $x \geq D$，对所有充分大的 $n$ 都成立。这意味着函数 $V_n(x)$ 一致收敛于

$$\Lambda_p(x) = \int_x^\infty \phi_p(t)dt$$

总体而言， $[0$； $+\infty)$ 。

对于第3节，请注意

$$\psi_2(x) = \sqrt{e}e^{-\pi e x^2} = \Psi'(-x)$$

$$\int_x^\infty \sqrt{e}e^{-\pi e t^2}dt = \int_x^\infty e^{-\pi(\sqrt{e}t)^2}d(\sqrt{e}t) = \int_{\sqrt{e}x}^\infty e^{-\pi x^2}dx = \Psi(-x)$$

为方便起见，我们引入定义在（$-\infty$；$+\infty$）上的新函数

$$\phi_p(x) = e^{-c_p|x|^p} \quad c_p = 2^p\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^p$$

$$\Phi_p(a) = \int_{-\infty}^a e^{-c_p|x|^p}dx$$

$$\Psi_p(a) = \int_{-\infty}^a \phi_p(x)dx$$

后一个函数是 $\Lambda_p$的反射。

我们希望证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{c_p^{-\frac{1}{p}}(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{p}}}{-\Phi_p^{-1}(\varepsilon)} = 1 \tag{50}$$

注意

$$\frac{d}{dx}\frac{e^{-c_p x^p}}{pc_p x^{p-1}} = \frac{-pc_p x^{p-1}e^{-c_p x^p}}{pc_p x^{p-1}} - \frac{e^{-c_p x^p}p(p-1)c_p x^{p-2}}{p^2c_p^2x^{2(p-1)}}$$

$$= -e^{-c_p x^p}\left(1+\frac{p-1}{p}\frac{1}{c_p}\frac{1}{x^p}\right)$$

Let

$$A = \frac{p-1}{p}\frac{1}{c_p}$$

我们得出，对于负的 $x$ ，有

$$\left(\frac{e^{-c_p|x|^p}}{pc_p|x|^{p-1}}\right)' = e^{-c_p|x|^p}\left(1+\frac{A}{|x|^p}\right)$$

对两边从 $-\infty$ 到 $a<0$ 进行积分可得

$$\frac{e^{-c_p|x|^p}}{pc_p|x|^{p-1}} = \int_{-\infty}^a e^{-c_p|x|^p}\left(1+\frac{A}{|x|^p}\right)dx \tag{51}$$

由此我们可以得到 $\Phi_p$ 的上界

$$\Phi_p(a) = \int_{-\infty}^{a} e^{-c_p|x|^p} dx \leq \frac{e^{-c_p|x|^p}}{pc_p|x|^{p-1}}$$

对两边应用 $-\Phi_p^{-1}$应得到

$$-a \geq -\Phi_p^{-1}\left(\frac{e^{-c_p|x|^p}}{pc_p|x|^{p-1}}\right)$$

将 $\varepsilon = \frac{e^{-c_p|x|^p}}{pc_p|x|^{p-1}}$ 代入（50）中的表达式，可得

$$\frac{c_p^{-\frac{1}{p}}(c_p|x|^p + \ln(pc_p|x|^{p-1}))^{\frac{1}{p}}}{-\Phi_p^{-1}\left(\frac{e^{-c_p|x|^p}}{pc_p|x|^{p-1}}\right)} \geq \frac{c_p^{-\frac{1}{p}}(c_p|x|^p + \ln(pc_p|x|^{p-1}))^{\frac{1}{p}}}{-a}$$

但是，当 $a$ 趋于 $-\infty$时

$$\frac{e^{-c_p|x|^p}}{pc_p|x|^{p-1}} \to 0 \text{ and } \frac{c_p^{-\frac{1}{p}}(c_p|x|^p + \ln(pc_p|x|^{p-1}))^{\frac{1}{p}}}{-a} \to 1,$$

由此我们得出

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{c_p^{-\frac{1}{p}}(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{p}}}{-\Phi_p^{-1}(\varepsilon)} \geq 1 \tag{52}$$

等式（51）还给出了 $\Phi_p$的下界

$$\Phi_p(a) \geq \left(1 + \frac{A}{|a|^p}\right)^{-1} \frac{e^{-c_p|x|^p}}{pc_p|x|^{p-1}}$$

再次对两边应用 $-\Phi_p^{-1}$，得到

$$-a \leq -\Phi_p^{-1}\left(\left(1 + \frac{A}{|a|^p}\right)^{-1} \frac{e^{-c_p|x|^p}}{pc_p|x|^{p-1}}\right)$$

将 $\varepsilon = \left(1+\frac{A}{|a|^p}\right)^{-1}\frac{e^{-c_p|x|^p}}{pc_p|x|^{p-1}}$ 代入（50）中的表达式，可得

$$\frac{c_p^{-\frac{1}{p}}\left(c_p|x|^p+\ln(pc_p|x|^{p-1})+\ln\left(1+\frac{A}{|a|^p}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{-\Phi_p^{-1}\left(\left(1+\frac{A}{|a|^p}\right)^{-1}\frac{e^{-c_p|x|^p}}{pc_p|x|^{p-1}}\right)} \leq \frac{c_p^{-\frac{1}{p}}\left(c_p|x|^p+\ln(pc_p|x|^{p-1})+\ln\left(1+\frac{A}{|a|^p}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{-a}$$

当 $a$ 趋于 $-\infty$时

$$\left(1+\frac{A}{|a|^p}\right)^{-1}\frac{e^{-c_p|x|^p}}{pc_p|x|^{p-1}} \to 0$$

$$\frac{c_p^{-\frac{1}{p}}\left(c_p|x|^p+\ln(pc_p|x|^{p-1})+\ln\left(1+\frac{A}{|a|^p}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{-a} \to 1$$

由此我们得出

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{c_p^{-\frac{1}{p}}(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{p}}}{-\Phi_p^{-1}(\varepsilon)} \leq 1$$

结合（52），可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{c_p^{-\frac{1}{p}}(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{p}}}{-\Phi_p^{-1}(\varepsilon)} = 1$$

若用 $\Psi_p$ 表示函数

$$\Psi_p(a) = \int_{\infty}^{a} e^{\frac{1}{p}}e^{-\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)e^{\frac{1}{p}}x\right)^p}dx = \Phi_p(e^{\frac{1}{p}}a),$$

那么我们将得到

$$-\Psi_p^{-1}(\varepsilon) \sim \frac{1}{2e^{\frac{1}{p}}\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)}(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{p}}$$

# D 平均距离。

单位体积欧几里得 $n$ 维球体的半径为

$$\omega_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\pi}} \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi e}} \tag{53}$$

对于任意 $\alpha \in (0; 1)$，定义

$$r_n = \alpha\sqrt{\frac{n}{2\pi e}} \tag{54}$$

由（53）可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{\omega_n} = \alpha < 1$$

若用 $V_n$ 表示半径为 $r_n$的 $n$-球体的体积，则

$$\lim_{n\to\infty} V_n = 0 \tag{55}$$

现在考虑任意单位体积的凸体 $K$。对于每个点$p \in K$， $K$ 中与 $p$ 的距离不超过 $r_n$ 的点所组成的集合，其体积不大于 $V_n$，因此$K$ 中点与点之间的平均距离 $d(K)$至少应为

$$d(K) \geq (1 - V_n)r_n$$

由（54）、（55）可得

$$(1 - V_n)r_n \sim \alpha\sqrt{\frac{n}{2\pi e}}$$

由于上面对 $\alpha \in (0; 1)$ 的选择是任意的，对于一族单位体积凸体 $K_n$，应有

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{d(K_n)}{\sqrt{\frac{n}{2\pi e}}} \geq 1$$