一个一元计数器的二维向量加法系统的可覆盖性属于非确定性多项式时间复杂度类

Filip Mazowiecki * Henry Sinclair-Banks † Karol Węgrzycki ‡

arXiv:2301.13543v1 [cs.FL] 31 Jan 2023

摘要

Petri网中的可覆盖性可应用于反应式系统安全性质的验证。我们研究其等价模型中的可覆盖性：带状态的向量加法系统（向量加法系统）。

一个 k维向量加法系统可被视为具有 k 个计数器的有限自动机，其转移标记为 k 整数。计数器值通过加上相应的转移标签进行更新。该系统中的一个配置由一个状态和 k 个计数器值组成。重要的是，计数器的值绝不允许为负。可覆盖性问题要问的是，是否可以从初始配置遍历该 k维向量加法系统，到达一个至少具有目标计数器值的配置。

在关于 k维向量加法系统的一系列成熟研究中，当整数更新采用二进制编码时，二维向量加法系统中的可覆盖性已经是 PSPACE-困难的。这一下界限制了应用的实用性，因此关注限制条件是很自然的。在本文中，我们开启了对具有一个一元计数器的二维向量加法系统的研究。在这种系统中，一个计数器接收二进制编码的更新，另一个计数器接收一元编码的更新。我们的主要结果是：具有一个一元计数器的二维向量加法系统中的可覆盖性属于非确定性多项式时间复杂度类。这改进了沿用至今的 PSPACE 上界。我们的主要技术贡献是，只需考虑具有某种压缩线性形式的运行。

1 引言

带状态的向量加法系统（VASS）是一类经过深入研究的无限状态系统（参见综述 [37]）。它们是带有计数器的有限自动机，计数器可以更新，但其值绝不允许为负。因此，一个配置由一个状态和一个取值于自然数的向量组成。核心判定问题是可达性问题和可覆盖性问题。可达性问题询问：是否能够从给定的初始配置到达目标配置。可覆盖性问题与之相同，但目标配置不必被精确到达，计数器的值可以更大。这两个问题不仅在数学上优雅，也有有趣的理论应用 [7] 和实际实现 [6]。可证明，可覆盖性是一个更简单、更适用于实际应用的问题；可达性工具大多用于可覆盖性基准 [14]。然而，可覆盖性在反应式系统安全条件的验证中也有应用 [17, 21]。为了准确表示这类系统，可能需要额外的数据结构，例如计数器。安全条件通常归结为判断某个特定状态是否可达，而非某个特定配置是否可达 [8]。

*波兰华沙华沙大学，f.mazowiecki@mimuw.edu.pl。获ERC资助项目INFSYS支持，协议编号950398。

†离散数学及其应用中心与计算机科学系，英国考文垂华威大学，h.sinclair-banks@warwick.ac.uk。获EPSRC标准研究生奖学金（DTP）支持，资助编号EP/T5179X/1。

‡德国萨尔布吕肯萨尔大学和马克斯·普朗克信息学研究所，wegrzycki@cs.uni-saarland.de。获ERC TIPE A 资助支持，协议编号850979。

European Research Council
Established by the European Commission

Number of binary counters	一元计数器的数量 0	1	≥ 2
0	NL 完全 [3]	NL 完全 [38]	NL 完全 [35]
1	在 $NC^2 \subseteq P$ [2]	**在非确定性多项式时间复杂度类** [本文]	
≥ 2	PSPACE 完全 [5]	PSPACE 完全	PSPACE 完全 [35]

图 1：固定数量的一元编码和二进制编码计数器的 VASS 中，可覆盖性问题的复杂度。所有 NL 下界都来自零计数器的情形；此时，可覆盖性就是有向图可达性，而众所周知，该问题是 NL 完全 [3]。对于一个二进制计数器和至少两个一元计数器的情形，据我们所知，目前还没有低于 PSPACE 的非平凡上界。当至少有两个二进制计数器且一元计数器数量任意时，可覆盖性是 PSPACE 完全。该下界适用于含两个二进制计数器的二维向量加法系统 [5]，而 Rackoff 给出了适用于任意固定维度的上界 [35]。请注意，对于一般 VASS（其中计数器数量不固定），可覆盖性是 EXPSPACE 完全 [35]。

可覆盖性和可达性已经研究了数十年。等价的 Petri网模型早在六十年代就已被提出 [34]。对于一般的向量加法系统，Lipton 于 1976 年证明了适用于可覆盖性和可达性的 EXPSPACE 下界 [31]。两年后，Rackoff 为可覆盖性证明了匹配的 EXPSPACE 上界 [35]。后来在 1981 年，Mayr 证明了可达性是可判定的 [32]，但没有为该算法给出上界。Kosaraju [24] 和 Lambert [25], 简化了这一构造，Leroux 和 Schmitz 随后发表的一系列论文最终于 2019 年证明了 Ackermann 上界 [27]。匹配的 Ackermann 下界由两个独立的研究组于 2021年发表 [12, 26]。

人们对固定维度的向量加法系统给予了大量关注，也就是说，计数器的数量 k 保持不变，记作 k-VASS。对于固定维数 VASS，计数器更新采用一元编码还是二进制编码至关重要。Rackoff 早已分别给出了一元编码和二进制编码 k-VASS 中可覆盖性的 NL 和 PSPACE 上界 [35]。没有计数器时的可覆盖性问题就是有向图可达性，而这是 NL 完全的 [3]。因此，对于每个固定的 k，一元编码 k-VASS 中的可覆盖性都是 NL 完全的。二进制编码的 1-VASS 中的可覆盖性属于 NC^2 [2], ，因此可以在确定性多项式时间内判定。如果有两个或更多二进制计数器，则通过从有界单计数器自动机中的可达性进行归约（该问题是 PSPACE 完全的 [18]），可覆盖性是 PSPACE 困难的 [5] 。因此，对于每个 $k \geq 2$，二进制编码的 k-VASS 中的可覆盖性都是 PSPACE 完全的。关于具有固定数量的一元编码和二进制编码计数器的 VASS 中可覆盖性的复杂度，请参见图 1。这与固定维数 VASS 中的可达性问题形成鲜明对比，因为已知 8-VASS 中的可达性已经是非初等的 [13]。

关于采用各种编码的二维向量加法系统，已有大量重要研究。Hopcroft 和 Pansiot 于1979年发表的开创性论文 [23] 表明，二维向量加法系统中的可达性问题是可判定的，并证明其可达集是有效半线性的。此外，作者还在同一篇论文中通过一个例子表明，3-VASS 的可达集未必是半线性的。后来，相关结果得到改进：研究者证明，二维向量加法系统的可达关系是有效半线性的 [28]。该证明表明，每个二维向量加法系统都可以用一种平坦模型来刻画，即其底层有限自动机不包含嵌套循环。对该论文进行更细致的分析后，研究者得出了二进制编码的二维向量加法系统的可达性问题属于 PSPACE 上界的结果 [5]。由于二进制编码的二维向量加法系统中的可覆盖性问题是 PSPACE 困难的 [5], ，作者得以得出结论：可覆盖性问题和可达性问题均为 PSPACE 完全。正如可覆盖性问题展示了编码方式对复杂度的影响，可达性问题也体现了这一差异；后来，研究者证明，一元编码的二维向量加法系统中的可达性问题是 NL 完全的 [16]。

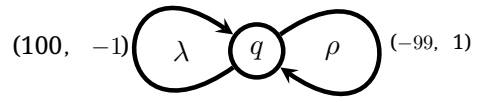

图2：带有一个一元计数器的二维向量加法系统示例 V。考虑由 V、初始配置 $q(0,1)$ 和目标配置 $q(0,10)$ 构成的覆盖实例。考虑路径 $\pi = \lambda\rho\ \lambda\rho\cdots\lambda\rho\ \rho\cdots\rho$，它在 V 中从初始配置 $q(0,1)$ 诱导出一次运行。循环对 $\lambda\rho$ 重复 990 次，从而见证配置 $q(990,1)$。这些循环交替进行，因此在整个运行过程中，两个计数器始终保持非负。随后，循环 ρ 迭代 10 次，从而见证配置 $q(0,11)$，实现对目标配置 $q(0,10)$ 的可覆盖性。

我们的结果与技术。我们研究带有一个一元计数器的二维向量加法系统的可覆盖性问题。这里，一个计数器的更新以二进制编码，另一个计数器的更新以一元编码；示例见图2。请注意，一元计数器的取值不必局限于多项式有界值。否则，对于一个二进制编码的 1-VASS 可覆盖性实例，可以将一元计数器的取值编码到状态中。此外，我们不对初始配置和目标配置施加任何限制，即这两个向量的两个坐标均以二进制编码。我们的主要结果是：带有一个一元计数器的二维向量加法系统的可覆盖性问题属于非确定性多项式时间复杂度类。

二进制编码的 k-向量加法系统的可覆盖性是 PSPACE 完全的，其中 $k \geq 2$。这一复杂度下界限制了应用的实用性。因此，考虑受限变体并量化其复杂度是合理的。值得指出的是，对于固定维数 VASS，如果恰好有一个二进制计数器和至少一个一元计数器，其可覆盖性的复杂度此前一直悬而未决。已知结果汇总见图 1。

自然的起点是通过线性路径方案 [4]对运行的刻画。直观地说，作者证明了：如果可覆盖性或可达性成立，那么就存在一条具有特定形状的见证路径。具体而言，所有路径都可以由一个形如 $\tau_0\gamma_1^*\tau_1\ldots\tau_{k-1}\gamma_k^*\tau_k$ 的正则表达式所定义的有界语言来刻画。其中，τ_0，...，τ_k 是连接不相交循环 γ_1，...，γ_k 的路径。由于该语言是有界的，检查给定表达式是否存在一条路径，本质上相当于求解一个整数线性规划实例。特别是，作者认为 k 和 $|\tau_0|+|\gamma_1|+|\tau_1|+\ldots+|\tau_{k-1}|+|\gamma_k|+|\tau_k|$ 都是伪多项式有界的 [4]。然而，多项式界将立即给出一个 NP 上界，因为可以猜测出这样的正则表达式。鉴于具有两个二进制计数器的二维向量加法系统中的可覆盖性是 PSPACE 困难的 [5]，，在处理具有一个二进制计数器和一个一元计数器的二维向量加法系统时，我们不能简单地直接应用已知结果。在第3节中，我们将在图 3 中详细讨论一个困难但富有启发性的例子。

为克服这一问题，我们证明了可覆盖性可以由压缩线性形式中的路径见证。我们放宽了有界语言的条件，允许嵌套线性形式，前提是指数是固定的。直观地说，形如（$\tau\gamma^*\tau'$）*的表达式仍然是禁止的，但我们允许（$\tau\gamma^e\tau'$）*，其中 e是固定的，不过可能非常大（使用多项式数量的比特进行编码）。这种形式很容易给出 NP 上界。

我们依靠两个关键观察来证明，可以将注意力集中于采用压缩线性形式的路径。首先，请注意，线性路径方案中的 $*$ 操作对应于在向量加法系统中迭代某个循环。由于 γ_1、.....、γ_k需要较短，因此自然应关注短循环。问题在于，具有多项式规模的循环数量呈指数级增长。在第 4 节中，我们证明，对于可覆盖性而言，只有多项式数量的“最优”循环。在第 5 节中，我们处理这样的问题：在线性路径方案中，某个循环 γ 为了证明可覆盖性而出现了许多次，从而对线性路径方案的宽度 k给出一个多项式界。随后我们证明，要么可以合并某些 γ_i 和 γ_j，从而减小宽度；要么存在一个循环，它对一个计数器具有正效果、对另一个计数器具有非负效果。直观地说，在

后一种情况下，我们可以通过泵送这样的循环，将一个计数器强制取任意大的值，从而将问题归约为 1-VASS 中的可覆盖性。此外，这样的循环由一个线性路径方案见证。由于我们需要泵送该循环，因此需要使用压缩线性形式来描述该循环的重复次数。

我们特别指出，我们的两个关键观察都依赖于所研究的是可覆盖性问题，而不是可达性问题。我们还要强调，我们通过技术贡献来处理这些关键观察，而这些技术贡献往往依赖于存在一个一元计数器这一事实。

进一步的相关工作。 此前已有研究考虑了对向量加法系统中计数器的不对称处理。回顾一下，Minsky 机器可以看作具有额外零测试能力的向量加法系统。对于这一模型，即使只有两个计数器，可覆盖性也是不可判定的 [33], 。这自然引发了这样的问题：当只有一个计数器能够被重置或进行零测试时，情况会怎样？这一问题，以及更一般的具有分层零测试的向量加法系统中的可达性问题，都是已知可判定的 [36]。此外，还有研究进一步探讨了带有单个零测试的向量加法系统 [20]。最近，有关二维向量加法系统的研究已出现，其中对计数器具有不同能力的情况进行了详细分析 [19, 29]。最后，领域内最著名的开放问题之一是：带有下推栈的 1-VASS 的可达性是否可判定。对于这些系统，已知可覆盖性是可判定的 [30]。已知的最佳下界是：可覆盖性，以及因而可达性，也是 PSPACE 困难的 [15]。我们的模型——带有一个一元计数器的二维向量加法系统——可以看作带有单字母表下推栈的 1-VASS。

二进制编码的 3-VASS 中可达性的复杂度仍然是一个引人关注的开放问题。与二维情形一样，它是 PSPACE 困难的，而目前已知的唯一上界是原始递归的，但甚至不是初等递归的 [27]。近期关于固定维数 VASS [11, 9, 13] 中可达性的研究提供了新的例子，并加深了我们对 VASS 模型的理解。有趣的是，应用于固定维数 VASS 的许多技术，都与近期关于一般 VASS 的非初等下界和 Ackermann 下界 [10, 12, 26]的进展密切相关。最后，我们还进一步阐明了研究具有一个二进制计数器和至少一个一元计数器的 VASS 的可覆盖性，可能有助于找到处理 VASS 问题的新技术。

2 预备知识

给定一个整数 $z \in \mathbb{Z}$，我们将 $\mathsf{bitsize}(z) =$ 定义为 $\log_2(|z|+1)+1$。对于向量 $\mathbf{v} := (v_1, v_2)$，我们分别使用 $(\mathbf{v})_1 := v_1$ 和 $(\mathbf{v})_2 := v_2$ 表示其在第一个和第二个坐标上的投影。我们使用 $|\mathbf{v}|_{\max} := \max\{|v_1|, |v_2|\}+1$ 表示向量 $\mathbf{v}$ 的大小。若每个坐标上的不等式均成立，我们记作$\mathbf{v} \leq \mathbf{w}$；若至少有一个不等式是严格的，则记作 $\mathbf{v} < \mathbf{w}$。

一个带有一个一元计数器的二维向量加法系统 $V = (Q, T)$由有限个控制状态 Q和一组转移 $T \subseteq Q \times \mathbb{Z} \times \{-1, 0, 1\} \times Q$组成。我们将第一个计数器称为二进制计数器，第二个计数器称为一元计数器。 V 的大小为 $|V| := |Q| + \sum_{(p,\ b,\ u,\ q)\in T} \mathsf{bitsize}(b)$。用 $|V|_{\max} := |Q| + |T| \cdot |T|_{\max}$ 表示该自动机的总“伪多项式规模”，其中 $|T|_{\max}$ 表示转移中出现的最大绝对值。注意，在标准的二维向量加法系统中，两个计数器都采用二进制表示，即第二个计数器的更新值域也为 $\mathbb{Z}$。

V 中的路径 π 是一个可能为空的转移序列 $\pi = (t_i)_{i=1}^{m}$，满足 $t_i = (q_{i-1},\ b_i,\ u_i,\ q_i) \in T$。若 $q_0, \ldots, q_m$ 互不相同，则称路径为简单路径。若 $q_0 = q_m$ 且 $m > 0$，则称路径为循环（因此空环不被允许）。为强调循环的首状态和末状态，我们称其为 q_0-循环。若 $q_1, \ldots, q_m$ 互不相同，则称循环为简单循环。若 $m \leq |Q|$，则称循环为短循环。路径的长度是路径中转移的数量，记作 $\mathsf{len}(\pi) = m$。我们用 $\pi[i..j]$表示 π中由转移$(t_i, \ldots, t_j)$组成的子序列路径。

一个配置 $(p,\ \mathbf{u}) \in Q \times \mathbb{N}^2$，记作 $p(\mathbf{u})$，是一个与当前二元和一元计数器值配对的状态。一个运行 是配置序列 $(q_i(\mathbf{v}_i))_{i=0}^{m}$，满足

$(q_{i-1},\ (\mathbf{v}_i)_1-(\mathbf{v}_{i-1})_1,(\mathbf{v}_i)_2-(\mathbf{v}_{i-1})_2,\ q_i)\in T$。运行也可以等价地定义为沿着一条路径 π 从初始配置$q_0(\mathbf{v}_0)$开始所得到的配置序列。我们将此运行记作 $q_0(\mathbf{v}_0)\xrightarrow{\pi}q_m(\mathbf{v}_m)$。我们还写作 $q_0(\mathbf{v}_0)\xrightarrow{*}q_m(\mathbf{v}_m)$，以表示两个配置之间存在一条运行。

本文研究向量加法系统的可覆盖性问题。

向量加法系统的可覆盖性

输入： 一个向量加法系统 $V=(Q,\ T)$，以及两个配置 $p(\mathbf{u})$ 和 $q(\mathbf{v})$。**问题：** 对于某个 $\mathbf{v}'\geq\mathbf{v}$，$p(\mathbf{u})\xrightarrow{*}q(\mathbf{v}')$ 是否成立?

请注意，初始配置 $p(\mathbf{u})$ 和目标配置 $q(\mathbf{v})$ 的二进制分量和一元分量均编码为二进制整数。向量加法系统的可达性问题 ——我们不会在本文中研究该问题——要求$\mathbf{v}'=\mathbf{v}$。

考虑一条路径 $\pi=(t_i)_{i=1}^m$，其中 $t_i=(q_{i-1},\ b_i,\ u_i,\ q_i)$。$\pi$ 的效果 是计数器更新之和，即向量 $\mathrm{eff}(\pi):=\sum_{i=1}^m(b_i,\ u_i)$。我们通常关注两个投影：二进制效应 $\mathrm{eff}_b(\pi):=\sum_{i=1}^m b_i$，以及一元效应 $\mathrm{eff}_u(\pi):=\sum_{i=1}^m u_i$。

我们称循环 γ 为单调的，如果 $\mathrm{eff}(\gamma)\geq\mathbf{0}$ 或 $\mathrm{eff}(\gamma)\leq\mathbf{0}$。否则，我们称$\gamma$ 为非单调的。注意，非单调循环有两种形式：正-负循环 $\mathrm{eff}_b(\gamma)>0$ 且 $\mathrm{eff}_u(\gamma)<0$，以及负-正循环 $\mathrm{eff}_b(\gamma)<0$ 且 $\mathrm{eff}_u(\gamma)>0$。

设 γ 是一个循环。给定 $e\in\mathbb{N}$，我们用 γ^e 表示通过将 γ 重复 e 次而得到的路径。我们称 e 为指数。线性路径方案是形如 $\tau_0\gamma_1^*\tau_1\cdots\tau_{k-1}\gamma_k^*\tau_k$ 的正则表达式，其中路径 τ_0、τ_1、.....、τ_k 连接不相交循环 γ_1、.....、γ_k。注意，若任意两个循环没有共同的状态，则称一组循环彼此不相交。给定 $\ell=(\tau_0,\gamma_1,\tau_1,\ldots,\tau_{k-1},\gamma_k,\tau_k)$，若对于某些指数$e_1$、.....、$e_k$，有 $\pi=\pi_\ell=\tau_0\gamma_1^{e_1}\tau_1\cdots\tau_{k-1}\gamma_k^{e_k}\tau_k$，则称路径 π 具有线性形式 ℓ。注意，根据此定义，每条路径都有一种线性形式，例如 $\tau_0=\pi$ 就是有效的。为了利用这一定义，我们将考察路径是否具有某种规模的线性形式。线性形式 ℓ 的大小为 $\sum_{i=0}^k\mathrm{len}(\tau_i)+\sum_{i=1}^k\mathrm{len}(\gamma_i)$。$\pi_\ell$ 的大小为 $\sum_{i=0}^k\mathrm{len}(\tau_i)+\sum_{i=1}^k\mathrm{len}(\gamma_i)+\sum_{i=1}^k\mathrm{bitsize}(e_i)$，也就是说，大小包含指数。我们称 k 为线性形式的宽度。

3 一个一元计数器二维向量加法系统的可覆盖性

本节简要讨论为什么现有技术不足以证明带有一个一元计数器的二维向量加法系统的可覆盖性属于非确定性多项式时间复杂度类。Blondin 等人 [4] 证明，对于给定的二维向量加法系统 V，存在一个线性路径方案集合 S，使得如果 $p(\mathbf{u})\xrightarrow{*}q(\mathbf{v})$ 属于 V，那么在线性路径方案 $\rho\in S$ 中存在一条路径 π，使得 $p(\mathbf{u})\xrightarrow{\pi}q(\mathbf{v})$。对于每个线性路径方案 $\rho\in S$，ρ的宽度以及每条路径的宽度都由 $\mathrm{poly}(|Q|,|T|_{\max})$ [4, Theorem 3.1]从上界约束。这样的路径 π不一定是多项式大小的见证，因为其宽度以 $|T|_{\max}$ 的多项式形式依赖于输入规模。我们给出了一个带有一个一元计数器的二维向量加法系统示例，其中一条路径的每个线性形式 ℓ 的宽度都关于输入规模呈指数增长。这表明，仅凭线性路径方案的组合结构，无法证明可覆盖性总是存在一个多项式大小的见证。

压缩线性形式中的路径。 不过，仍然存在一种自然的方法，可以简洁地描述图 3 中所示的路径。令 $\sigma=\lambda\rho$，并注意到

$$\sigma^N=\left(t_{qa}\ \alpha^{N^2}\ t_{ab}\ \beta^{N^2}\ t_{bq}t_{qp}t_{pc}\ \gamma^{N^2}\ t_{cd}\ \delta^{N^2}\ t_{dq}\right)^N.$$

所有路径和环都很“小”，且 N 和 N^2 的位大小关于 n是多项式级的，因此 σ 本身就是一个线性形式路径。我们引入以下线性形式路径的推广，以概括这类排列路径背后的思想。

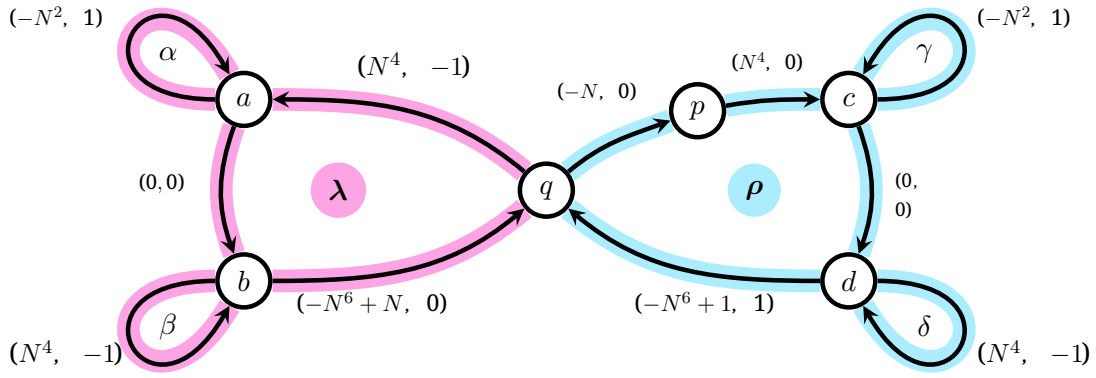

图 3：一个带有一个一元计数器 V 的二维向量加法系统，其中 $N = 2^n$，其中 n 是输入参数（从而使 N 呈指数级增长）。考虑可覆盖性实例，其初始配置为 $q(0,\ 1)$，目标配置为 $q(N,\ 1)$。令 $\lambda = t_{qa}\alpha^{N^2}t_{ab}\beta^{N^2}t_{bq}$ 和 $\rho = t_{qp}t_{pc}\gamma^{N^2}t_{cd}\delta^{N^2}t_{dq}$，其中 t_{xy} 是从状态 x 到状态 y 的转移。注意，$\mathrm{eff}(\lambda) = (N,\ -1)$ 且 $\mathrm{eff}(\rho) = (-N+1,\ 1)$，因此 $\mathrm{eff}(\lambda\rho) = (1,\ 0)$。于是很容易看出，$q(0,\ 1) \xrightarrow{(\lambda\rho^{N})} q(N,\ 1)$。直观地说，循环 λ 和 ρ 交替执行，因此在整个运行过程中两个计数器始终保持非负。在附录 A 中，我们证明不存在一个适用于会导出可覆盖性运行的路径、且规模为多项式的线性形式（断言A.1）。

定义 3.1（压缩线性形式路径）。如果存在若干个连通路径，其为线性形式，，；若干个线性形式的环σ_1、……、σ_k；以及指数 f_1、……、f_k，则路径 π $\pi = \rho_0\sigma_1^{f_1}\rho_1\cdots\rho_{k-1}\sigma_k^{f_k}\rho_k$ $\rho_0\ \rho_1\ \cdots\ \rho_k$ 属于压缩线性形式。

压缩线性形式路径的大小，等于所有 ρ_i 和 σ_i 的大小之和（包括其指数的位大小），再加上指数 f_i的位大小。



图 4：一条压缩线性形式路径。

以下定理是我们的主要贡献。

定理 3.1。设 V是一个具有一个一元计数器的二维向量加法系统，并固定两个配置 $p(\mathbf{u})$ 和 $q(\mathbf{v})$。若 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v})$，则存在一条压缩线性形式路径 π，使得 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi} q(\mathbf{v}')$ 且$\mathbf{v}' \geq \mathbf{v}$。该压缩线性形式路径的大小关于 $|V|$+位大小$(\mathbf{u})$+位大小$(\mathbf{v})$是多项式级的。

推论 3.1。具有一个一元计数器的二维向量加法系统的可覆盖性属于非确定性多项式时间复杂度类。

证明。根据定理 3.1，只需考虑多项式规模的压缩线性形式路径，这类路径可以在非确定性多项式时间复杂度类中猜测。只需注意，在给定的压缩线性形式上，一个可覆盖性实例相当于一个整数线性规划实例。直观地说，这是因为嵌套循环是固定的。因此，要检查一次运行是否降至零以下，只需在应用某个循环之前，以及最后一次应用该循环之后进行检查（参见例如 [5, 第 V 节，引理 14]）。 □

我们强调，对于一个带有一个一元计数器的二维向量加法系统而言，仅增加线性形式路径的一个额外“层级”就足以获得可覆盖性的多项式规模见证，这一点相当出人意料，因为对于一般的二维向量加法系统，该问题是 PSPACE 完全的。粗略地说，图 3 中给出的示例展现了可能出现的最复杂行为，而这个覆盖实例可以由一条压缩线性形式路径提供见证。更具体地说，只包含一个线性形式循环的压缩线性形式路径，就足以作为带有一个一元计数器的二维向量加法系统中可覆盖性的见证。因此，所有见证都可以表示为一条压缩线性形式路径$\rho\sigma^N\tau$，其中 ρ 和 τ 是通往并离开该唯一线性形式循环的线性形式路径 σ，该循环重复迭代 N 次。

本文其余部分致力于证明定理 3.1。我们充分利用了该问题的两个显著特征：一个计数器接收一元编码更新（而不是两个计数器都接收二进制更新），以及我们的目标是断言可覆盖性（而不是可达性）。我们采用的方法正如引言中所述。在第 4 节中，我们注意到可以将不同短环的总数限制为多项式规模。我们对这一点进行了形式化，并证明只有多项式数量的“不可替换”短环。在第 5 节中，我们给出一个“重排过程”。如果某个短环 γ 重复指数次，我们就试图通过将这些环 γ 移到彼此相近的位置来修改路径 π。这样，要么每个短环 γ 只会出现在多项式数量的“束” γ^e中，要么我们找到一个循环 σ，使得 $\mathsf{eff}(\sigma) > 0$。在后一种情况下，通过泵送 σ，我们实际上只剩下一个计数器。最后，在第 6 节中，我们完成定理 3.1 的证明。

4 替换短循环

本节将证明，在见证可覆盖性的运行中，需要出现的短循环只有多项式多个。固定一条路径 $\pi = (q_{i-1}, b_i, u_i, q_i)_{i=1}^{k}$。令 $0 \le i_b, i_u \le k$ 分别为使得 $g_b = \sum_{i=1}^{i_b} b_i$ 和 $g_u = \sum_{i=1}^{i_u} u_i$ 达到各自最低值的首个指标。注意，$g_b, g_u \le 0$，因为按照约定，如果我们考虑 $i_b, i_u = 0$，那么总和的值为 0。我们将这两个数称为并分别记作二进制守卫 $\mathsf{grd}_b(\pi) = g_b$ 和一元守卫 $\mathsf{grd}_u(\pi) = g_u$。以下命题由附录 B 中的证明直接得出。

命题 4.1。 两者$\mathsf{grd}_b(\pi[i_b + 1..k]) = 0$ 和$\mathsf{grd}_u(\pi[i_u + 1..k]) = 0$。

与单计数器网中循环的谷底类似，其定义见 [1], ，我们将二进制谷底状态定义为 q_{i_b}，即执行 π时二进制计数器首次达到最低值的第一个状态。对于 $\pi_1^b = \pi[1..i_b]$ 和 $\pi_2^b = \pi[i_b + 1..k]$，我们将 $\pi = \pi_1^b \pi_2^b$称为二进制谷底分解，如命题 4.1 所述。注意，该分解要求路径 π 的二进制守卫等于前缀 π_1^b的二进制效应，即 $\mathsf{grd}_b(\pi) = \mathsf{eff}_b(\pi_1^b) = \mathsf{grd}_b(\pi_1^b)$。此外，二进制谷底分解的后缀具有零二进制守卫 $\mathsf{grd}_b(\pi_2^b) = 0$。我们主要使用二进制谷底状态和二进制谷底分解，因此省略与之对应的一元谷底状态和一元谷底分解。

定义 4.1（可替换环）。 设 γ 是一个 q-环， p 是 γ的二进制谷底状态。若存在一个具有相同二进制谷底状态 p的 q-环 γ'，使得 γ 是可替换的，则称 γ 是可替换的，且

（a） $\mathsf{eff}_b(\gamma') \ge \mathsf{eff}_b(\gamma)$ 且$\mathsf{eff}_u(\gamma') \ge \mathsf{eff}_u(\gamma)$；
（b） $\mathsf{grd}_b(\gamma') \ge \mathsf{grd}_b(\gamma)$ 且 $\mathsf{grd}_u(\gamma') \ge \mathsf{grd}_u(\gamma)$；
以及（c） $\mathsf{len}(\gamma') \le \mathsf{len}(\gamma)$。

此外，至少有一个不等式是严格的，我们记作 $\gamma \prec \gamma'$。

我们称一个循环为不可替换的，如果它不可替换。我们还称一个具有二进制谷底状态的不可替换 q-循环 γ p 可由以下五个值刻画：$\mathsf{eff}_b(\gamma)$、$\mathsf{eff}_u(\gamma)$、$\mathsf{grd}_b(\gamma)$、$\mathsf{grd}_u(\gamma)$ 和 $\mathsf{len}(\gamma)$。以下引理在附录 B 中证明。

引理 4.1（替换环）。设 $\pi = \pi_1\gamma\pi_2$，其中 γ 是一个 q-循环。假设 p（$\mathbf{u}$）$\xrightarrow{\pi} q$（$\mathbf{v}$），则以下结论成立。

- 如果 γ 是可替换的，那么存在一个不可替换的 q-环 $\gamma \prec \gamma'$，使得 p（$\mathbf{u}$）$\xrightarrow{\pi_1\gamma'\pi_2} q$（$\mathbf{v}'$）。
- 如果 γ 是不可替换的，那么对于每个与 γ 具有相同刻画的不可替换 q-环 γ'，都有 p（$\mathbf{u}$）$\xrightarrow{\pi_1\gamma'\pi_2} q$（$\mathbf{v}'$）。

在这两种情况下 $\mathbf{v}' \geq \mathbf{v}$ 以及 $\mathrm{len}(\pi) \geq \mathrm{len}(\pi_1\gamma'\pi_2)$。

为方便起见，我们定义多项式 $R(|Q|) := |Q|^4(|Q|+1)(2|Q|+1)^2$。

引理 4.2。至多存在 R（$|Q|$）个具有不同刻画的不可替换短环。

证明。我们固定两个状态 q 和 p，并且只考虑具有二进制谷底状态 p 的 q-环 γ。因此，在最终论证中必须将所有量乘以 $|Q|^2$。由于我们考虑的是短环，一元效应和一元守卫都很小，即 $-|Q| \leq \mathsf{eff}_u(\gamma) \leq |Q|$ 以及 $-|Q| \leq \mathsf{grd}_u(\gamma) \leq 0$。

为导出矛盾，假设存在多于 $|Q|^2(|Q|+1)(2|Q|+1)^2$ 个具有不同刻画的、不可替换的 q-环。根据鸽巢原理，必然存在两个环，在二进制谷底分解中记为 $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ 和 $\gamma' = \gamma_1'\gamma_2'$，它们具有相同的值 $\mathsf{eff}_u(\gamma_1) = \mathsf{eff}_u(\gamma_1')$、$\mathsf{eff}_u(\gamma_2) = \mathsf{eff}_u(\gamma_2')$、$\mathsf{grd}_u(\gamma) = \mathsf{grd}_u(\gamma')$、$\mathsf{len}(\gamma_1) = \mathsf{len}(\gamma_1')$ 以及 $\mathsf{len}(\gamma_2) = \mathsf{len}(\gamma_2')$。

我们知道不可替换的 q-环 γ 和 γ' 具有不同的刻画，因此它们的二进制效应必然不同，即 $\mathsf{eff}_b(\gamma) \neq \mathsf{eff}_b(\gamma')$。否则，具有较小二进制守卫的环就是可替换的，因为一元效应、一元守卫和长度均没有差异。不失一般性地，假设 $\mathsf{eff}_b(\gamma) > \mathsf{eff}_b(\gamma')$，则 $\mathsf{grd}_b(\gamma) < \mathsf{grd}_b(\gamma')$。否则，$\gamma'$ 将同样是可替换的。

现在考虑 q-循环 $\sigma = \gamma_1'\gamma_2$，其同样具有二进制谷底状态 p。我们将证明 $\gamma \prec \sigma$，这与 γ 是不可替换的 q-循环这一事实相矛盾。首先，注意到 σ 的二进制效应大于 γ，因为

$$\mathrm{eff}_b(\sigma) = \mathrm{eff}_b(\gamma_1') + \mathrm{eff}_b(\gamma_2) > \mathrm{eff}_b(\gamma_1) + \mathrm{eff}_b(\gamma_2) = \mathrm{eff}_b(\gamma),$$

其中不等式成立是因为 $\mathsf{grd}_b(\gamma) < \mathsf{grd}_b(\gamma')$。其次，$\sigma$ 和 γ 具有相等的一元效应，因为 $\mathsf{eff}_u(\gamma_1') = \mathsf{eff}_u(\gamma_1)$。第三，我们证明 σ 具有比 γ 更大的二进制守卫。由于 γ_2 是 γ 的二进制谷底分解的后缀，因此必有 $\mathsf{grd}_b(\gamma_2) = 0$。根据命题 4.1，$\mathsf{grd}_b(\sigma) = \mathsf{grd}_b(\gamma_1')$。结合这些事实，$\mathsf{grd}_b(\sigma) = \mathsf{grd}_b(\gamma') > \mathsf{grd}_b(\gamma)$。第四，$\sigma$ 至少具有 γ 的一元守卫，因为特别地，路径前缀的一元守卫至多等于整条路径的一元守卫。

$$\begin{aligned}\mathrm{grd}_u(\sigma) &= \min\{\mathrm{grd}_u(\gamma_1'), \mathrm{eff}_u(\gamma_1') + \mathrm{grd}_u(\gamma_2)\}\\ &\geq \min\{\mathrm{grd}_u(\gamma'), \mathrm{eff}_u(\gamma_1') + \mathrm{grd}_u(\gamma_2)\}\\ &= \min\{\mathrm{grd}_u(\gamma), \mathrm{eff}_u(\gamma_1) + \mathrm{grd}_u(\gamma_2)\} = \mathrm{grd}_u(\gamma).\end{aligned}$$

第五，最后，σ 和 γ 长度相等，因为 $\mathsf{len}(\gamma_1') = \mathsf{len}(\gamma_1)$。我们至少有一个严格不等式。因此，我们得出了所需的矛盾。 □

5 重排线性形式路径

5.1 重排过程

一条路径 π可以有许多线性形式。我们将尝试找到一个“最优”的线性形式，因此引入代价函数来量化线性形式。回顾一下，线性形式 ℓ 是一个序列

由若干路径 $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k$ 和若干循环组成的序列 $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$。如果 π 属于线性形式 $\ell = (\tau_0, \gamma_1, \tau_1, \ldots, \tau_{k-1}, \gamma_k, \tau_k)$，那么我们记作 $\pi_\ell = \tau_0 \gamma_1^{e_1} \tau_1 \cdots \tau_{k-1} \gamma_k^{e_k} \tau_k$，其中 $\pi = \pi_\ell$（此处的下标用于强调具体的线性形式）。在本节中，我们只考虑包含短循环 γ 的线性形式；它们将在接下来的论证中发挥关键作用。

我们定义一个代价函数，将线性形式 ℓ 赋予以下一对自然数 $C(\ell) := \left(\sum_{i=0}^{k} \mathrm{len}(\tau_i)\ k\right)$。为方便起见，我们定义多项式 $P(|Q|) := 2(|Q|^2+1)(|Q|^2+2) \cdot R(|Q|)$，其中 R 是引理 4.2 中定义的多项式。若线性形式 ℓ 满足 $C(\ell) \le (|Q|(P(|Q|)+1)\ P(|Q|))$，则称其为 窄；否则称 ℓ 为 宽。如果 σ 是单调循环、$\pi = \pi'\sigma\pi''$，且 $\mathrm{len}(\sigma) < \mathrm{len}(\pi)$，则称三元组 $(\pi',\ \sigma,\ \pi'')$ 是路径 π 的单调循环分解。

引理 5.1（重排）。设 π 是一条路径，使得 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi} q(\mathbf{v})$。则存在一条路径 ρ，使得 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\rho} q(\mathbf{w})$，其中 $\mathbf{w} \ge \mathbf{v}$，$\mathrm{len}(\rho) \le \mathrm{len}(\pi)$，并且以下两者之一成立：

（*i*）存在一个关于 ρ 的窄线性形式；或

（*ii*）存在一个关于 ρ 的单调循环分解。

证明。我们首先进行一系列准备工作。在证明的前半部分，我们给出一些简单的观察，以确定我们的路径具有某些良好性质。在证明的后半部分，我们介绍“重排过程”，并以本引理陈述中的一种情形结束。在本证明中，我们使用字典序 $\prec_{lex}$ 比较线性形式；众所周知，该序是线性序和良序。形式化地说，

$$C(\ell') \prec_{lex} C(\ell) \iff (C(\ell'))_1 < (C(\ell))_1 \text{ or, } (C(\ell'))_1 = (C(\ell))_1 \text{ and } (C(\ell'))_2 < (C(\ell))_2.$$

我们从一条路径 π' 开始，该路径满足 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi'} q(\mathbf{v}')$，其中 $\mathbf{v}' \ge \mathbf{v}$，$\mathrm{len}(\pi') \le \mathrm{len}(\pi)$，并且 π' 具有一个线性形式 ℓ'，其代价在所有与其同路径的路径中最小。这意味着不存在另一条路径 π''，使得 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi''} q(\mathbf{v}'')$，其中 $\mathbf{v}'' \ge \mathbf{v}$，$\mathrm{len}(\pi'') \le \mathrm{len}(\pi)$，并且 π'' 具有一个线性形式 ℓ''，使得 $C(\ell'') \prec_{lex} C(\ell')$。

对于第一个观察，假设存在 $0 \le i \le k$ 使得 $\mathrm{len}(\tau_i) > |Q|$。那么路径 τ_i 可以写成 $\tau_i = \tau'\gamma\tau''$，其中 γ 是一个短环。我们可以通过修改 ℓ' 来定义线性形式 ℓ''，其中 τ_i 被替换为 $\tau'\gamma\tau''$。尽管这会使环的数量增加 k，但我们将路径的总长度减少为 $\mathrm{len}(\tau') + \mathrm{len}(\tau'') < \mathrm{len}(\tau_i)$（回想一下，空环是不允许的）。因此，$C(\ell'') \prec_{lex} C(\ell')$，这与假设 ℓ 具有最小代价相矛盾。因此，我们假设对于所有 $0 \le i \le k$，$\mathrm{len}(\tau_i) \le |Q|$。

对于第二个观察，我们定义 $U := \{0 \le i \le m : (\mathbf{v}_i)_2 < |Q|\}$ 为运行中一元计数器值小于 $|Q|$ 的配置所对应的索引集合。注意，若 $|U| > |Q|^2 + 1$，则存在两个索引 $0 < i < j \le m$，使得运行中对应的两个配置具有匹配状态 $q_i = q_j$，且一元计数器值相等 $(\mathbf{v}_i)_2 = (\mathbf{v}_j)_2$。那么，无论其二进制效应的符号如何，$\pi'[i..j]$ 都是一个单调循环。此时，给定 $i > 0$ 且 $j \le m$ 蕴含 $\mathrm{len}(\pi'[i..j]) = j - i < m = \mathrm{len}(\pi')$，情形 (ii) 可立即通过使用单调循环 $\pi'[i..j]$ 对 π' 本身进行分解而成立。因此，我们假设 $|U| \le |Q|^2 + 1$。接下来，我们旨在通过寻找单调循环分解来满足情形 (ii) 的条件。

令 $d = |\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}|$ 为线性形式 ℓ' 中不同环的数量。根据引理 4.1 和引理 4.2，我们可以假设 $d \le R(|Q|)$。否则，我们可以利用引理 4.1 中的第一点，将可替换的 q-环替换为不可替换的 q-环。对于某个特定的刻画，可能会观察到多个不可替换的 q-环。然后利用引理 4.1 中的第二点，我们可以任意选择其中一个具有相同刻画的不可替换 q-环，用它替换所有其他环。将这些环替换应用于 π' 后，

我们得到另一条路径 ρ。定义 4.1 确保这样做不会降低效果 (a)，不会使计数器取负值 (b)，也不会增加路径长度 (c)。因此 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\rho} q(\mathbf{w})$ 且 $\mathbf{w} \geq \mathbf{v}' \geq \mathbf{v}$，并且 $\mathsf{len}(\rho) \leq \mathsf{len}(\pi') \leq \mathsf{len}(\pi)$。我们注意到，由于环是逐一交换的，因此 ρ 取一种线性形式 ℓ，其中路径片段与 ℓ'相同。因此，很明显，环的数量 k以及环之间路径的长度总和都没有改变。我们还知道，根据本证明开头的初始化，ℓ 是 ρ 的具有最小代价 $C(\ell) = C(\ell')$的线性形式。

假设 $\rho = \rho_\ell = \tau_0\gamma_1^{e_1}\tau_1 \cdots \tau_{k-1}\gamma_k^{e_k}\tau_k$。令 $(q_j(\mathbf{v}_j))_{j=0}^m$ 表示沿着路径 ρ_ℓ 从初始配置 $q_0(\mathbf{v}_0) = p(\mathbf{u})$ 运行至最终配置 $q_m(\mathbf{v}_m) = q(\mathbf{w})$ 所得到的运行。我们可以假设 ℓ 是宽的。否则，情况 (i) 立即成立。我们还知道 $\mathsf{len}(\rho_\ell) \geq \max\{(C(\ell))_1, (C(\ell))_2\} > P(|Q|)$。我们还可以假设每个循环 γ_1、...、γ_k 都是非单调的，即它是正-负或负-正的。否则，通过使用某个单调循环 γ_i 对 ρ 本身进行分解，情况 (ii) 立即成立，因为 $\mathsf{len}(\gamma_i) \leq |Q| < P(|Q|) < \mathsf{len}(\rho_\ell)$。注意，由于 $C(\ell)$ 的极小性，每个 $e_i > 0$ 都满足这一点；否则，你可以用少一个循环的方式写出 $\cdots\tau_{i-1}\gamma_i^0\tau_i\cdots$，从而减小 $(C(\ell))_2$。

根据第一个观察，我们得到 $\sum_{i=0}^k \mathsf{len}(\tau_i) \leq (k+1)|Q|$。鉴于 ℓ 很宽，要么$|Q|(P(|Q|)+1) < (C(\ell'))_1 = \sum_{i=0}^k \mathsf{len}(\tau_i) \leq (k+1)|Q|$，这意味着 $P(|Q|) < k$；要么 $P(|Q|) < (C(\ell'))_2 = k$。无论哪种情况，$P(|Q|) < k$都成立。回顾第二个观察中的 $|U| \leq |Q|^2 + 1$。由于由 U索引的配置相对“少”，必然存在一对相对“相距较远”的连续配置，其索引由 U 给出。更正式地说，存在 i和 j，使得 $0 \leq i < j \leq k$和 $j - i \geq 2(|Q|^2+2)R(|Q|)$，并且在沿路径段 $\tau_i\gamma_{i+1}^{e_{i+1}}\cdots\gamma_j^{e_j}\tau_j$运行过程中出现的所有配置的一元计数器值至少为 $|Q|$。注意，$j-i$是该路径段中循环的数量。由于 $j - i \geq 2(|Q|^2+2)R(|Q|)$，并且根据不可替换循环数量的鸽巢原理，存在一个公共的不可替换循环γ，它至少重复了 $x = 2(|Q|^2+2)$ 次。我们将关注该循环最先出现的 x 次。令 s_1，.....，s_x 为该循环 γ的索引，即 $\gamma = \gamma_{s_1} = \ldots = \gamma_{s_x}$。为突出显示这些循环，我们将该路径段分解为

$$\tau_i\gamma_{i+1}^{e_{i+1}}\cdots\gamma_j^{e_j}\tau_j = \Lambda_0\gamma^{f_1}\Lambda_1\cdots\Lambda_{x-1}\gamma^{f_x}\Lambda_x,$$

其中，$f_j := e_{s_j}$ 和 Λ_j 是 γ各次迭代之间连接起来的路径（和环），见图 5。再次说明，我们知道，沿此路径段运行过程中出现的所有配置，其一元计数器值都至少为 $|Q|$，且 γ 是一个短环。

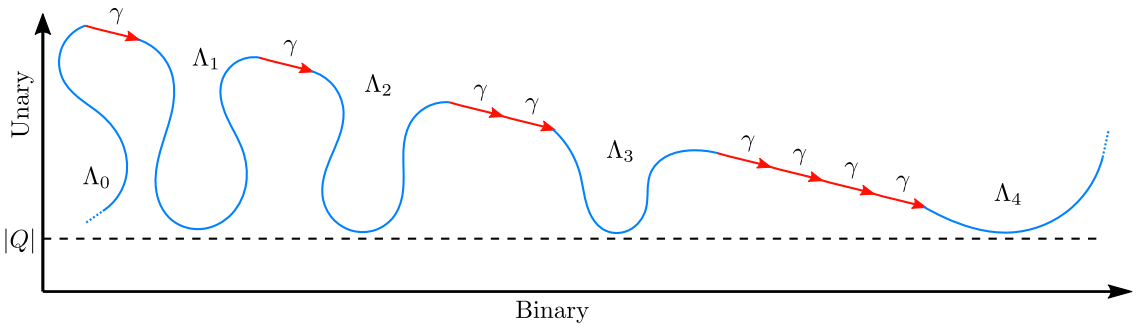

图 5：如上所述，将路径段分解为 $\Lambda_0\gamma^{f_1}\Lambda_1\cdots\Lambda_{x-1}\gamma^{f_x}\Lambda_x$。请注意，一元计数器始终至少为 $|Q|$，因为不存在由 U 索引的配置。

重排过程。在证明的其余部分，我们将通过一种称为重排的过程修改路径 ρ_ℓ 上面的路径段。在此过程结束时，我们将找到一个单调循环，并满足本引理的情形 (ii)。我们要么直接找到该循环，要么得到一个线性形式 ℓ''，使得 $C(\ell'') \prec_{lex} C(\ell)$，这与 ℓ 具有最小代价的假设矛盾。

注意，$x = 2(|Q|^2 + 2)$ 是偶数。对于每一对连续的环 γ_{2j-1} 和 γ_{2j}（其中 $1 < 2j \leq x$），考虑子段 $\gamma^{f_{2j-1}}\Lambda_{2j-1}\gamma^{f_{2j}}$。根据非单调循环 γ的变体，存在两种情况。如果 γ 是正-负，我们就将 γ 的一次迭代从右向左移动，从而得到 $\gamma^{f_{2j-1}+1}\Lambda_{2j-1}\gamma^{f_{2j}-1}$。如果 γ 是负-正，我们就朝相反方向移动 γ 的一次迭代，从而得到$\gamma^{f_{2j-1}-1}\Lambda_{2j-1}\gamma^{f_{2j}+1}$。

我们重复这一过程，直到满足以下两个条件之一。第一种情况是，γ一侧不再有迭代，因此 f_{2j-1} 或 f_{2j} 变为 0。第二种情况是，在重排后的路径子段上运行时，出现了一个一元计数器值小于 $|Q|$的配置。当 γ 为正-负时，重排的示意图见图 6。

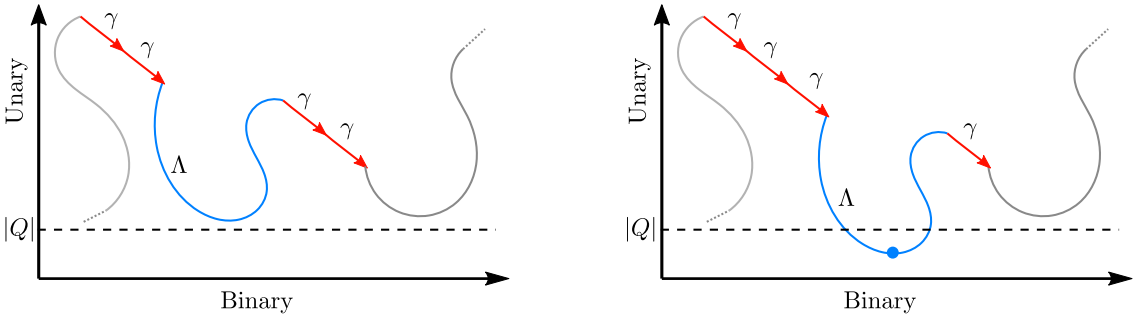

图 6：围绕路径 Λ （蓝色）进行重排，其中 γ （红色）为正-负。在重排之前，运行中的路径子段 $\cdots\gamma\Lambda\gamma\cdots$的所有配置的一元计数器值至少为 $|Q|$（左）。重排之后，路径子段 $\cdots\gamma\gamma\Lambda\cdots$中出现了一个配置，其在运行中的一元计数器值小于 $|Q|$ （右）。

我们声称，在每一步重排之后，相应的运行仍然是可执行的，因此必须检查两个计数器是否始终保持非负。注意，仅移动一个循环并不会改变该路径子段的总效果。因此，如果运行在重排之前是可执行的，我们可以放心地假设路径子段之前的前缀和路径子段之后的后缀仍然是可执行的。基于这一点，考虑运行中经过重排后的路径子段时所出现的配置的计数器值。我们聚焦于重排过程中的一个步骤，该步骤涉及子段 $\gamma^{f_{2j-1}}\Lambda_{2j-1}\gamma^{f_{2j}}$。

假设 γ 是一个正负循环。那么，重排过程会将 γ 从右侧移至左侧。我们声称，由于 $f_{2j-1} > 0$ 和 $\Lambda_0\gamma^{f_1}\Lambda_1\cdots\Lambda_{2j-1}\gamma^{f_{2j-1}}$ 可执行，因此子段$\Lambda_0\gamma^{f_1}\Lambda_1\cdots\Lambda_{2j-1}\gamma^{f_{2j-1}+1}$ 从初始配置出发可执行。这是因为重排过程的一个前提是，在沿路径子段运行时出现的所有配置中，一元计数器值至少为 $|Q|$ 。此外，循环 γ 的长度至多为 $|Q|$ ，因此 $\mathbf{grd}_u(\gamma) \geq -|Q|$ 意味着一元计数器值始终非负。至于二进制计数器值，由于执行一次 γ 会使二进制计数器的值增加，并且在重排之前已经执行过一次 γ 的迭代，因此 $\Lambda_0\gamma^{f_1}\Lambda_1\cdots\Lambda_{2j-1}\gamma^{f_{2j-1}+1}$ 可执行。同理，从初始配置出发，$\Lambda_0\gamma^{f_1}\Lambda_1\cdots\Lambda_{2j-1}\gamma^{f_{2j-1}+1}\Lambda_{2j}\gamma_{2j}^{f_{2j}-1}$ 可执行。这是因为 $\mathbf{eff}_u(\gamma) \geq -|Q|$，而且在沿路径子段运行时出现的所有配置中，一元计数器值都至少为 $|Q|$；同时，这也得益于二进制计数器的单调性。

当 γ 是负-正循环时，论证也类似。至此，重排过程的正确性分析完毕。

完成重排。我们分析重排完成时的情况。假设存在一对 $2j-1$ 和 $2j$，使得重排在满足第一个条件时结束：γ 的所有迭代都已移到 Λ_{2j-1}的一侧。在这种情况下，我们得到关于 ρ的一个新线性形式 ℓ''，其中循环 γ 的一组已被移除（使 k递减）。因此，$(C(\ell''))_2 = k-1 < (C(\ell))_2$，并且相邻的两个路径段可以合并，而不改变路径长度总和，因此$(C(\ell''))_1 = (C(\ell))_1$。因此，$C(\ell'') \prec_{lex} C(\ell)$，这与 ℓ 具有最小代价的假设矛盾。

否则，对于每个 $1 \le j \le x/2$，在满足第二个条件的情况下，$2j-1$ 和 $2j$ 对的重排都会结束。因此，对于每一对 $2j-1$ 和 $2j$，由路径 ρ 诱导的运行中都存在一个配置，其一元计数器值小于$|Q|$（见图 7）。回顾 $\frac{x}{2} = |Q|^2 + 2$，即配对的数量。类似于第一个观察（在本证明开头），我们对这类配置的数量应用鸽巢原理，从而得到两个状态匹配且一元计数器值相等的配置。诱导这两个配置之间运行部分的路径段是一个单调循环，而与二进制效应无关。同样，该循环的长度必然小于整个路径的长度，因此我们得到 ρ 的单调循环分解。于是，引理的情形（ii）成立。

□

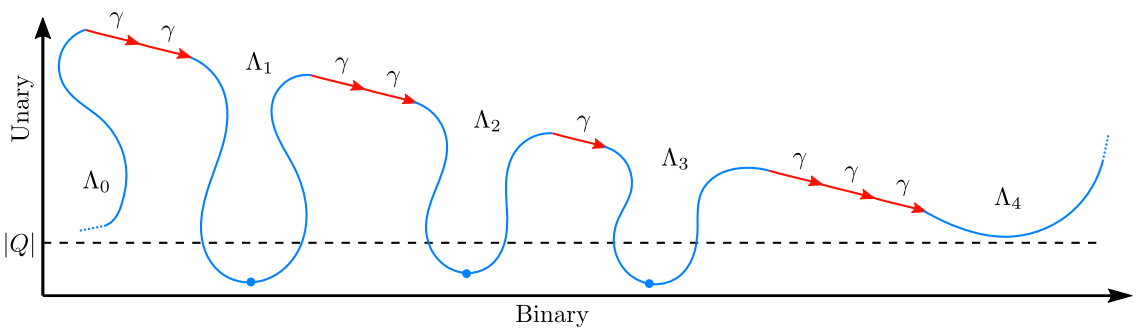

图 7：在满足第二个条件的情况下完成重排后，我们可以利用一元计数器小于 $|Q|$的（足够多的）配置找到一个零一元效应循环。

5.2 应用重排

引理 5.1 不一定会为一条证明可覆盖性的路径 π 返回一个窄线性形式。相反，它可能会返回 π 的一个单调循环分解（ρ、σ、τ）。我们的下一个目标是证明存在 ρ 和 σ 的多项式大小证书（引理 5.2），然后证明存在 τ 的多项式大小证书（引理 5.4）。与线性形式一样，一条路径可能有许多单调循环分解。下面，我们将使用一个将单调循环分解映射到自然数对 D（ρ、σ、τ）的代价函数 $=$（len（$\rho\sigma$）、len（σ））。注意，即使两个分解分别对应两条不同的路径，我们仍然可以使用它们的代价进行比较。

引理 5.2。假设 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v})$，但不存在对任意路径 π 的窄线性形式 ℓ，使得$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi} q(\mathbf{w})$ 且 $\mathbf{w} \ge \mathbf{v}$，那么存在一条路径 π' 使得

(a) $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi'} q(\mathbf{w}')$ *where* $\mathbf{w}' \ge \mathbf{v}$,

(b) 存在 π' 的单调循环分解(ρ, σ, τ)，其中$\mathbf{eff}(\sigma) > \mathbf{0}$，并且

(c) 对于 ρ 和 σ都存在窄线性形式。

证明。我们将再次使用字典序 $\prec_{lex}$ 来比较单调循环分解的代价。令 π 为满足 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi} q(\mathbf{w})$ 且 $\mathbf{w} \ge \mathbf{v}$ 的最短路径。

令 $c=(\rho,\ \sigma,\ \tau)$ 为 π 在字典序 $\prec_{lex}$ 下使代价 $D(c)$ 最小的单调循环分解。这样的分解必然存在，否则应用引理 5.1 将得到一个关于 ρ 的窄线性形式 ℓ'，使得 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\rho} q(\mathbf{w}')$ 且 $\mathbf{w}' \geq \mathbf{w} \geq \mathbf{v}$，这与本引理的一个假设矛盾。注意，$\mathbf{eff}(\sigma) > \mathbf{0}$，否则可以移除 σ 并考虑更短的路径 $\rho\tau$，从而与 π的最短长度矛盾。接下来，我们论证 ρ 和 σ 没有单调循环分解，然后利用引理 5.1 得到所需的窄线性形式。

路径 ρ 无法进一步分解。 </style}反设存在 (,σ', τ') 的单调循环分解。注意，π 的以下单调循环分解 $c'=(\rho', \sigma', \tau'\sigma\tau)$ 的代价 $D(c')\ \prec_{lex}\ D(c)$ 低于 $(D(c'))_1 = \mathrm{len}(\rho') + \mathrm{len}(\sigma') < \mathrm{len}(\rho) + \mathrm{len}(\sigma) = (D(c))_1$。这与 (ρ, σ, τ) 具有最小代价的假设矛盾。

假设 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\rho} p'(\mathbf{x})$。由于不存在单调循环分解，对 ρ 应用引理 5.1 得到一条路径 ρ'，其线性形式是窄的，且 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\rho'} p'(\mathbf{x}')$，其中 $\mathbf{x}' \geq \mathbf{x}$ 并且 $\mathrm{len}(\rho') \leq \mathrm{len}(\rho)$。

循环 σ 无法进一步分解。为导出矛盾，假设存在 σ 的单调循环分解（ρ'、σ'、τ'）。注意，以下 π 的单调循环分解 $c'=$（$\rho\rho'$、σ'、$\tau'\tau$）的代价更低 D（c'）$\prec_{lex}$ D（c），因为（D（c'））$_1$ =len（ρ）+len（ρ'）+len（σ'）≤len（ρ）+len（σ）=（D（c））并且（D（c'））$_2$ = len（σ'）<len（σ）=（D（c））$_2$。这与（ρ、σ、τ）具有最小代价的假设相矛盾。

假设 p'（$\mathbf{x}$）$\xrightarrow{\sigma}$ p'（$\mathbf{y}$）。由于不存在单调循环分解，将引理 5.1 应用于 σ，可得到一条路径 σ'，其具有窄线性形式，使得 p'（$\mathbf{x}$）$\xrightarrow{\sigma'}$ p'（$\mathbf{y}'$），其中 $\mathbf{y}' \geq \mathbf{y}$，且 len（$\sigma'$）≤len（$\sigma$）。特别地，eff（$\sigma'$）≥eff（$\sigma$）$>\mathbf{0}$ 也成立。

在 π 中将 ρ' 替换为 ρ，并将 σ' 替换为 σ，得到路径 π'。显然，若 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi} q(\mathbf{w})$，其中 $\mathbf{w} \geq \mathbf{v}$，则 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi'} q(\mathbf{w}')$，其中 $\mathbf{w}' \geq \mathbf{w} \geq \mathbf{v}$。最后，$(\rho', \sigma', \tau)$ 是 π' 的单调循环分解，使得 $\mathbf{eff}(\sigma') > \mathbf{0}$，且 ρ' 和 σ' 都具有窄线性形式，符合要求。 □

现在我们要为 τ 求得一个窄线性形式。注意，引理 5.2 给出了一个单调循环 σ，其对至少一个计数器具有正效果，即 $\mathbf{eff}(\sigma) > \mathbf{0}$。通过对 σ 进行泵送，我们可以迫使其中一个计数器取任意大的值（在此过程中，向量 $\mathbf{x}$ 表示这个大值，这一点对引理 5.4 很重要）。粗略来说，问题随后归结为 1-VASS 中的可覆盖性。然而，要证明定理 3.1 中存在一条多项式规模的压缩线性形式路径，还需要更加谨慎。注意，引理 5.4 针对的是二维向量加法系统（不一定只有一个一元计数器）。首先，我们需要回顾运行过程中观察到的计数器值界。回想一下，$|V|_{\max} := |Q| + |T| \cdot |T|_{\max}$ 是输入的伪多项式规模。

定理 *5.3*（[4]中定理 *3.2* 的推论）。考虑一个二维向量加法系统（两个计数器均以二进制表示）$V = (Q, T)$，并设 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v})$，则存在一个运行 $p(\mathbf{u}) = q_0(\mathbf{v}_0),\ q_1(\mathbf{v}_1)\ldots\ldots,\ q_m(\mathbf{v}_m) = q(\mathbf{v})$，使得 $|\mathbf{v}_0|_{\max}$、$|\mathbf{v}_1|_{\max}$、……、$|\mathbf{v}_m|_{\max} \leq (|V|_{\max} + |\mathbf{u}|_{\max} + |\mathbf{v}|_{\max})^{\mathcal{O}(1)}$。

在以下引理中（其证明见附录 C），给定一个二维向量加法系统 V、初始配置 $p(\mathbf{u})$ 和目标配置 $q(\mathbf{v})$，我们用 B 代替定理 5.3 中的 $(|V|_{\max}+|\mathbf{u}|_{\max}+|\mathbf{v}|_{\max})^{\mathcal{O}(1)}$，并固定 $\mathbf{x} = (4B|Q|^2|V|^2_{\max}, 0)$。

引理 5.4。考虑一个二维向量加法系统（两个计数器均以二进制表示）$V = (Q, T)$ 并令 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v})$，则存在一条窄线性形式路径 π'，使得 $p(\mathbf{u} + \mathbf{x}) \xrightarrow{\pi'} q(\mathbf{v}')$ 对于某个$\mathbf{v}' \geq \mathbf{v}$。

6 定理 3.1 的证明

在证明定理 3.1 之前，我们利用这样一个事实：对于一般的二维向量加法系统（不一定带有一个一元计数器），线性形式中的循环指数可以伪多项式有界。

引理 *6.1*（ [5]中引理 *18* 的推论）。设 π 是二维向量加法系统中的路径，且具有线性形式 $\pi = \tau_0\gamma_1^{f_1}\tau_1 \ldots \gamma_k^{f_k}\tau_k$，使得 $p(u) \xrightarrow{\pi} q(v)$。那么存在一条路径 $\pi' = \tau_0\gamma_1^{e_1}\tau_1 \cdots \tau_{k-1}\gamma_k^{e_k}\tau_k$，使得 $p(u) \xrightarrow{\pi'} q(v')$，其中 $v' \geq v$，并且 $bitsize(e_1) \ldots, bitsize(e_k)$ 都由 $|V| + bitsize(u) + bitsize(v)$的多项式所界定。

定理 *3.1* 的证明。令 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi} q(\mathbf{v})$，其中路径为 π。如果对于 π存在一个窄线性形式 ℓ，那么根据引理 6.1，我们得到 $\pi' = \tau_0\gamma_1^{e_1}\tau_1 \cdots \tau_{k-1}\gamma_k^{e_k}\tau_k$，使得 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi'} q(\mathbf{v}')$，其中$\mathbf{v}' \geq \mathbf{v}$，并且 $\text{bitsize}(e_1) \ldots, \text{bitsize}(e_k)$都由 $|V| + \text{bitsize}(\mathbf{u}) + \text{bitsize}(\mathbf{v})$的多项式所界定。由于 ℓ 是一个窄线性形式，我们知道 $k \leq P(|Q|)$，因此 $\sum_{i=1}^{k} \text{len}(\gamma_i) \leq k|Q| \trianglelefteq Q|P(|Q|)$；我们还知道 $\sum_{i=0}^{k} \text{len}(\tau_i) \leq |Q|(P(|Q|) + 1)$。综上，这意味着线性形式路径 π' 具有多项式规模。

接下来考虑不存在窄线性形式 ℓ 适用于 π的情况。根据引理 5.2（通过引理 5.1），存在一条路径 π'，使得 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi'} q(\mathbf{v}')$，并且 $\mathbf{v}' \geq \mathbf{v}$。此外，$\pi'$存在一个单调循环分解（$\rho, \sigma, \tau$），使得 $\text{eff}(\sigma) > \mathbf{0}$，并且 ρ 和 σ各自都有窄线性形式。

假设 $(\text{eff}(\sigma))_1 > 0$。不失一般性，因为如果 $(\text{eff}(\sigma))_1 = 0$，则可以交换 V、$\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 中的坐标（在证明的其余部分，一个计数器是一元计数器这一点并不重要）。令 $p'(\mathbf{m})$ 为满足 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\rho} p'(\mathbf{m}) \xrightarrow{\sigma\tau} q(\mathbf{v}')$ 的配置。注意，由于对于每个 $i \in \mathbb{N}$ 都有 $\text{eff}(\sigma) > \mathbf{0}$，路径 $\rho\sigma^i$ 诱导出运行 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\rho\sigma^i} p'(\mathbf{m} + i \cdot \text{eff}(\sigma))$。考虑 $x = (\mathbf{x})_1 = 4B|Q|^2|V|^2_{\max}$（针对引理 5.4），显然，$x$ 足够大，使得$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\rho\sigma^x} p'(\mathbf{m}')$ 且 $\mathbf{m}' \geq \mathbf{m} + \mathbf{x}$。根据引理 5.4，存在一条路径$\tau'$，其具有窄线性形式，使得 $p'(\mathbf{m}') \xrightarrow{\tau'} q(\mathbf{v}'')$ 且 $\mathbf{v}'' \geq \mathbf{v}'$。

我们最后考虑压缩线性形式路径 $\rho\sigma^x\tau'$，使得 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\rho\sigma^x\tau'} q(\mathbf{v}'')$，以及 $\mathbf{v}'' \geq \mathbf{v}' \geq \mathbf{v}$。由于 ρ、σ 和 τ' 具有窄线性形式，我们同样可以像本证明开头那样，利用引理 6.1 对指数进行界定。最后，$\text{bitsize}(x)$ 关于$|V| + \text{bitsize}(\mathbf{u}) + \text{bitsize}(\mathbf{v})$是多项式级的，这与线性形式中循环的指数非常相似。因此，压缩线性形式 $\rho\sigma^x\tau'$ 的大小关于 $|V| + \text{bitsize}(\mathbf{u}) + \text{bitsize}(\mathbf{v})$是多项式级的。 □

7 结论与未来工作

本文证明了，一个一元计数器的二维向量加法系统中的可覆盖性属于非确定性多项式时间复杂度类，相较于一般二维向量加法系统的 PSPACE，复杂度有所降低。我们通过使用新技术实现了这一点。其中最重要的是，我们将需要使用的短环数量界定为多项式级（第 4 节）。随后，我们通过替换短环并重排路径，尝试寻找一条多项式线性形式路径（第 5 节）。

一个自然的延伸问题是：带有一个二进制计数器和两个一元计数器的 3-VASS 中的可覆盖性是否也属于非确定性多项式时间复杂度类。用于对所需短循环数量进行多项式界定的技术，可以轻松推广到带有一个二进制计数器和多个一元计数器的高维 VASS。然而，目前尚不清楚如何修改并应用我们的重排技术。另一个未决问题是，带有一个一元计数器的二维向量加法系统中的可达性是否也属于非确定性多项式时间复杂度类。注意到，由于二进制编码的 1-VASS 中的可达性是 NP-困难的，完备性将立即得出 [22]。

参考文献

[1] Shaull Almagor、Udi Boker、Piotr Hofman 和 Patrick Totzke。《单计数器网的参数化普适性问题》。载于 Igor Konnov 和 Laura Kovács（编），第*31*届并发理论国际会议，*CONCUR 2020*，*2020*年*9*月*1*日至*4*日，奥地利维也纳（线上会议），*LIPIcs* 第171卷，第47:1–47:16页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2020年。doi:10.4230/LIPIcs.CONCUR.2020.47。[2] Shaull Almagor、Nathann Cohen、Guillermo A. Pérez、Mahsa Shirmohammadi 和 James Worrell。《带不等式测试的 1-VASS 中的可覆盖性》。载于 Igor Konnov 和 Laura Kovács（编），第*31*届并发理论国际会议，*CONCUR 2020*，*2020*年*9*月*1*日至*4*日，奥地利维也纳（线上会议），*LIPIcs* 第171卷，第38:1–38:20页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2020年。doi:10.4230/LIPIcs.CONCUR. 2020.38。[3] Sanjeev Arora 和 Boaz Barak。《计算复杂性：一种现代方法》。剑桥大学出版社，2009年。[4] Michael Blondin、Matthias Englert、Alain Finkel、Stefan Göller、Christoph Haase、Ranko Lazić、Pierre McKenzie 和 Patrick Totzke。《带状态二维向量加法系统的可达性问题》。*ACM*期刊，68(5):34:1–34:43，2021年。doi: 10.1145/3464794。[5]Michael Blondin、Alain Finkel、Stefan Göller、Christoph Haase 和 Pierre McKenzie。《带状态二维向量加法系统中的可达性是 PSPACE-完全的》。载于第*30*届 *ACM/IEEE* 计算机科学逻辑年会，*LICS 2015*，日本京都，*2015*年*7*月*6*日至*10*日，第32–43页。IEEE Computer Society，2015年。doi: 10.1109/LICS.2015.14。[6] Michael Blondin、Christoph Haase 和 Philip Offtermatt。《无限状态系统的有向可达性》。载于 Jan Friso Groote 和 Kim Guldstrand Larsen（编），系统构造与分析工具和算法——第*27*届国际会议，*TACAS 2021*，作为欧洲软件理论与实践联合会议 *ETAPS 2021* 的一部分举行，卢森堡卢森堡市，*2021*年*3*月*27*日至*4*月*1*日，会议录，第二部分，计算机科学讲义 第12652卷，第3–23页。施普林格，2021年。doi:10.1007/ 978-3-030-72013-1_1。[7] Mikołaj Bojańczyk、Claire David、Anca Muscholl、Thomas Schwentick 和 Luc Segoufin。《数据词上的二变量逻辑》。*ACM Trans. Comput. Log.*，12(4):27:1–27:26，2011年。doi: 10.1145/1970398.1970403。[8] Hubert Comon 和 Yan Jurski。《多计数器自动机、安全性分析与 Presburger算术》。载于 Alan J. Hu 和 Moshe Y. Vardi（编），计算机辅助验证，第*10*届国际会议，*CAV '98*，加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华，*1998*年*6*月*28*日至*7*月*2*日，会议录，计算机科学讲义 第1427卷，第268–279页。施普林格，1998年。doi: 10.1007/BFb0028751。[9] Wojciech Czerwiński、Slawomir Lasota、Ranko Lazic、Jérôme Leroux 和 Filip Mazowiecki。《固定维度带状态向量加法系统中的可达性》。载于 Igor Konnov 和 Laura Kovács（编），第*31*届并发理论国际会议，*CONCUR 2020*，*2020*年*9*月*1*日至*4*日，奥地利维也纳（线上会议），*LIPIcs* 第171卷，第48:1–48:21页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2020年。doi:10.4230/ LIPIcs.CONCUR.2020.48。

[10] Wojciech Czerwiński、Sławomir Lasota、Ranko Lazic、Jérôme Leroux 和 Filip Mazowiecki。Petri网可达性问题并非初等复杂度。*ACM*期刊，68(1):7:1–7:28，2021年。doi:10.1145/3422822。[11] Wojciech Czerwiński、Sławomir Lasota、Christof Löding 和 Radoslaw Piórkowski。二维向量加法系统的新泵送技术。收录于 Peter Rossmanith、Pinar Heggernes 和 Joost-Pieter Katoen 编，《style id='5'>第44届国际计算机科学数学基础研讨会，MFCS 2019，2019年8月26日至30日，德国亚琛，第138卷，*LIPIcs*，第62:1–62:14页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2019年。doi:10.4230/LIPIcs.MFCS.2019.62。[12] Wojciech Czerwiński 和 Łukasz Orlikowski。向量加法系统中的可达性是阿克曼完全的。收录于第*62*届*IEEE*计算机科学基础年度研讨会，*FOCS 2021*，丹佛，科罗拉多州，美国，*2022*年*2*月*7*日至*10*日，第1229–1240页。IEEE，2021年。doi: 10.1109/FOCS52979.2021.00120。[13] Wojciech Czerwiński 和 Łukasz Orlikowski。固定维向量加法系统可达性问题的下界。收录于 Christel Baier 和 Dana Fisman 编，《style id='13'>LICS '22：第37届ACM/IEEE计算机科学逻辑年度研讨会，海法，以色列，2022年8月2日至5日，第40:1–40:12页。ACM，2022年。doi:10.1145/3531130.3533357。

[14] Alex Dixon 和 Ranko Lazic。KReach：Petri网可达性工具。载于 Armin Biere 和 David Parker（编），系统构造与分析工具和算法——第*26*届国际会议，*TACAS 2020*，作为欧洲软件理论与实践联合会议 *ETAPS 2020* 的一部分举行，爱尔兰都柏林，*2020*年*4*月*25*日至*30*日，会议录，第一部分，计算机科学讲义第12078卷，计算机科学讲义，第405–412页。施普林格，2020年。doi:10.1007/978-3-030-45190-5_22。

[15] Matthias Englert、Piotr Hofman、Sławomir Lasota、Ranko Lazić、Jérôme Leroux 和 Juliusz Straszyński。无环下推向量加法系统可覆盖性问题的下界。《信息处理快报》，167:106079，2021年。doi:10.1016/j.ipl.2020.106079。[16] Matthias Englert、Ranko Lazić 和 Patrick Totzke。二维一元带状态向量加法系统中的可达性是 NL 完全问题。载于 Martin Grohe 、 Eric Koskinen 和 Natarajan Shankar （编），第*31*届*ACM/IEEE*计算机科学逻辑年度研讨会论文集（*LICS '16*），美国纽约州纽约，*2016*年*7*月*5*日至*8*日，第477–484页。ACM，2016年。doi:10.1145/2933575.2933577。[17] Javier Esparza、Ruslán Ledesma-Garza、Rupak Majumdar、Philipp J. Meyer 和 Filip Niksic。基于SMT的方法进行覆盖性分析。载于 Armin Biere 和 Roderick Bloem（编），计算机辅助验证——第*26*届国际会议（*CAV 2014*），作为维也纳逻辑之夏（*VSL 2014*）的一部分举办，奥地利维也纳，*2014*年*7*月*18*日至*22*日。论文集，计算机科学讲义第8559卷，第603–619页。施普林格，2014年。doi:10.1007/978-3-319-08867-9_40.[18] John Fearnley 和 Marcin Jurdzinski。双时钟定时自动机中的可达性问题是 PSPACE 完全的。载于 Fedor V. Fomin、Rusins Freivalds、Marta Z. Kwiatkowska 和 David Peleg（编），自动机、语言与编程——第*40*届国际学术讨论会，*ICALP 2013*，拉脱维亚里加，*2013*年*7*月*8*日至*12*日。论文集，第二部分，计算机科学讲义第7966卷，第212–223页。施普林格，2013年。doi:10.1007/978-3-642-39212-2\ 21。_[19] Alain Finkel、Jérôme Leroux 和 Grégoire Sutre。带一次测试和一次重置的双计数器机中的可达性。载于 Sumit Ganguly 和 Paritosh K. Pandya（编），第*38*届*IARCS*软件技术与理论计算机基础年度会议

科学技术与理论计算机基础，*FSTTCS 2018*，*2018*年*12*月*11*日至*13*日，印度艾哈迈达巴德，LIPIcs 第122卷，第31:1–31:14页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2018年。doi:10.4230/ LIPIcs.FSTTCS.2018.31。

[20] Alain Finkel 和 Arnaud Sangnier。结合可覆盖性与可达性分析带有单个零测试的向量加法系统。载于 Jan van Leeuwen、Anca Muscholl、David Peleg、Jaroslav Pokorný 和 Bernhard Rumpe 编，*SOFSEM 2010*：计算机科学理论与实践，第*36*届计算机科学理论与实践当前趋势会议，捷克共和国施平德莱鲁夫姆林，*2010*年*1*月*23*日至*29*日。会议论文集，计算机科学讲义，第5901卷，第394–406页。施普林格，2010年。doi:10.1007/978-3-642-11266-9_33。

[21] Pierre Ganty 和 Rupak Majumdar。异步程序的算法验证。*ACM*程序设计语言与系统汇刊，34(1):6:1–6:48，2012年。doi:10.1145/2160910.2160915。[22] Christoph Haase、Stephan Kreutzer、Joël Ouaknine 和 James Worrell。紧致参数化单计数器自动机中的可达性。载于 Mario Bravetti 和 Gianluigi Zavattaro（编），*CONCUR 2009*——并发理论，第*20*届国际会议，*CONCUR 2009*，博洛尼亚，意大利，*2009*年*9*月*1*日至*4*日。论文集，计算机科学讲义第5710卷，第369–383页。施普林格，2009年。doi:10.1007/978-3-642-04081-8\25。_[23] John E. Hopcroft 和 Jean-Jacques Pansiot。关于五维向量加法系统的可达性问题。理论计算机科学，8:135–159，1979年。doi:10.1016/0304-3975(79)90041-0。[24] S. Rao Kosaraju。向量加法系统中可达性的可判定性（初步版本）。载于 Harry R. Lewis、Barbara B. Simons、Walter A. Burkhard 和 Lawrence H. Landweber（编），第*14*届*ACM*计算理论年度研讨会论文集，*1982*年*5*月*5*日至*7*日，美国加利福尼亚州旧金山，第267–281页。ACM，1982年。doi:10.1145/800070.802201。[25] Jean-Luc Lambert。判定Petri网中可达性的一种结构。理论计算机科学，99(1):79–104，1992年。doi:10.1016/0304-3975(92)90173-D。[26] Jérôme Leroux。Petri网的可达性问题不是原始递归的。载于第*62*届*IEEE*计算机科学基础年度研讨会，*FOCS 2021*，美国科罗拉多州丹佛，*2022*年*2*月*7*日至*10*日，第1241–1252页。IEEE，2021年。doi:10.1109/FOCS52979.2021.00121。[27] Jérôme Leroux 和 Sylvain Schmitz。固定维度向量加法系统中的可达性是原始递归的。载于第*34*届*ACM/IEEE*计算机科学逻辑年度研讨会，*LICS 2019*，加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华，*2019*年*6*月*24*日至*27*日，第1–13页。IEEE，2019年。doi:10.1109/LICS.2019.8785796。[28] Jérôme Leroux 和 Grégoire Sutre。带状态二维向量加法系统的平坦性。载于 Philippa Gardner 和 Nobuko Yoshida（编），*CONCUR 2004*——并发理论，第*15*届国际会议，英国伦敦，*2004*年*8*月*31*日至*9*月*3*日，论文集，计算机科学讲义第3170卷，第402–416页。施普林格，2004年。doi:10.1007/978-3-540-28644-8_26.[29] Jérôme Leroux 和 Grégoire Sutre。带状态二维向量加法系统中的可达性：一次测试免费。载于 Igor Konnov 和 Laura Kovács（编），第*31*届并发理论国际会议，*CONCUR 2020*，*2020*年*9*月*1*日至*4*日，奥地利维也纳（线上会议），第171卷*LIPIcs*，第37:1–37:17页。Schloss Dagstuhl

- 莱布尼茨信息学中心，2020年。doi:10.4230/LIPIcs.CONCUR.2020.37。[30] Jérôme Leroux、Grégoire Sutre 和 Patrick Totzke。一维下推向量加法系统的可覆盖性问题。载于 Magnús M. Halldórsson、Kazuo Iwama、Naoki Kobayashi 和 Bettina Speckmann（编），自动机、语言与程序设计——第*42*届国际学术会议，*ICALP 2015*，日本京都，*2015*年*7*月*6*日至*10*日，论文集，第二部分，计算机科学讲义第9135卷，第324–336页。施普林格，2015年。doi:10.1007/978-3-662-47666-6_26. [31] Richard Lipton。可达性问题需要指数空间。耶鲁大学计算机科学系，62，1976年。[32] Ernst W. Mayr。一般Petri网可达性问题的算法。*SIAM*计算学报，13(3):441–460，1984年。doi:10.1137/0213029。[33] Marvin L. Minsky。计算：有限与无限机器。Prentice-Hall公司，1967年。[34] C. Petri。与自动机通信，博士学位论文。波恩大学，1962年。[35] Charles Rackoff。向量加法系统的覆盖与有界性问题。理论计算机科学，6:223–231，1978年。doi:10.1016/0304-3975(78)90036-1。[36] Klaus Reinhardt。带抑制弧的Petri网中的可达性。电子理论计算机科学笔记，223:239–264，2008年。doi:10.1016/j.entcs.2008.12.042。[37] Sylvain Schmitz。向量加法系统中可达性的复杂度。*ACM SIGLOG*新闻，3(1):4–21，2016年。URL：https://dl.acm.org/citation.cfm?id=2893585.[38] Leslie G. Valiant 和 Mike Paterson。确定性单计数器自动机。计算机系统科学杂志，10(3):340–350，1975年。doi:10.1016/S0022-0000(75)80005-5。

第3节的证明

断言A.1。 给定由图 *3*中的 V 构成的覆盖实例，以及两个配置 $q(0,1)$ 和 $q(N,\ 1)$，不存在一条 π 具有多项式规模的线性形式路径，使得 $q(0,1) \xrightarrow{\pi} q(\mathbf{v}')$，其中$\mathbf{v}' \geq (N,\ 1)$。

证明。 首先，考虑从配置 q(0，1)开始的一次运行场景，该配置是初始配置。唯一的选择是执行 λ的第一个转移 t_{qa}，因此我们考虑该循环的一次迭代。为了使二进制计数器不取负值，在 λ中的最后一次转移t_{bq}之前，其值必须至少为 $N^6 - N$。只有当 α 和 β 都已耗尽时，才能满足这一条件。换言之， α 会被迭代（恰好 N^2 次），直到二进制计数器的值小于 N^2。随后，β会被迭代（同样恰好 N^2次），直到一元计数器的值等于0。因此，循环 $\lambda = t_{qa}\alpha^{N^2}t_{ab}\beta^{N^2}t_{bq}$的一次迭代得以执行。其效果为（$N$，$-1$），于是观察到配置 q(N，0)。

其次，让我们考虑一次运行中从配置 q(N，0) 出发的情形。这发生在执行了 λ 的一次迭代之后，具体如上所述。唯一的选择是执行 ρ 的第一条转移t_{qp}，因此让我们考虑该循环的一次迭代。和之前一样，为使二进制计数器不取负值，在 ρ的最后一条转移之前 t_{dq}，其值必须至少为N^6。只有当 γ 和 δ 都耗尽时，才能满足这一条件，这与上文的 λ 十分类似。换言之， γ 会被迭代（恰好 N^2 次），直到二进制计数器的值小于 N^2。然后， δ 会被迭代（同样恰好 N^2 次），直到一元计数器上的值为

0。因此，执行循环 $\rho = t_{qp}t_{pc}\gamma^{N^2}t_{cd}\delta^{N^2}t_{dq}$ 的一次迭代。这产生的效果为（$-N+1$，1），于是观察到配置 q(1，1)。

我们再次处于相同的情形，其中 λ 的第一次转移可以迭代。重复上述论证，交替执行循环 λ 和 ρ，其净效果为 (1，0)。经过 N 次循环对 $\lambda\rho$ 的迭代后，最终可以见证配置 $q(N,\ 1)$。

λ 内每个循环 α 和 β 的迭代次数均等于 N^2。λ 内每个循环 γ 和 δ 的迭代次数同样如此。此外，为了见证一个保证目标配置 $q(N,\ 1)$ 可覆盖性的配置，至少需要对循环对 $\lambda\rho$ 进行 N 次迭代。鉴于此次运行中有 $4N$ 个这样的循环，不可能以线性形式构造出多项式规模的路径。 □

B 第 4 节的证明

命题 *4.1* 的证明。 假设 $\mathrm{grd}_b(\pi[i_b+1..k]) < 0$。那么存在 $i_b+1 \le j \le k$，使得 $\mathrm{grd}_b(\pi[i_b+1..k]) = \sum_{i=i_b+1}^{j} b_i < 0$。现在考虑整个路径 π 的二进制守卫。

$$\mathrm{grd}_b(\pi) = \sum_{i=1}^{b_i} b_i > \sum_{i=1}^{b_i} b_i + \mathrm{grd}_b(\pi[i_b+1..k]) = \sum_{i=1}^{j} b_i$$

前缀路径 $\pi[1..j]$ 的效果小于 $\pi[1..i_b]$。这与 π 的二进制守卫定义相矛盾，因此 $\mathrm{grd}_b(\pi[i_b+1..k]) \ge 0$。我们知道 $\mathrm{grd}_b(\pi[i_b+1..k]) \le 0$，因此得出 $\mathrm{grd}_b(\pi[i_b+1..k]) = 0$。同样的论证可以用来证明 $\mathrm{grd}_u(\pi[i_u+1..k]) = 0$。 □

引理 *4.1* 的证明。 在这两种情况下，我们都引用定义 4.1。由 (a) 可得 $\mathrm{eff}_b(\gamma') \ge \mathrm{eff}_b(\gamma)$ 和 $\mathrm{eff}_u(\gamma') \ge \mathrm{eff}_u(\gamma)$，这意味着 $\mathbf{v}' \ge \mathbf{v}$。由 (b) 可得 $\mathrm{grd}_b(\gamma') \ge \mathrm{grd}_b(\gamma)$ 和 $\mathrm{grd}_u(\gamma') \ge \mathrm{grd}_u(\gamma)$，这意味着二进制计数器和一元计数器始终非负。由 (c) 可得 $\mathrm{len}(\gamma') \le \mathrm{len}(\gamma)$，因此可以得出 $\mathrm{len}(\pi) \ge \mathrm{len}(\pi_1\gamma'\pi_2)$。 □

C 第 5 节的证明

引理 *5.4* 的证明。 由于我们处理的是二维向量加法系统，因此我们写作 $\mathrm{grd}_1(\pi)$ 和 $\mathrm{grd}_2(\pi)$（而不是 $\mathrm{grd}_b(\pi)$ 和 $\mathrm{grd}_u(\pi)$），分别表示第一坐标和第二坐标上的守卫。令 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi} q(\mathbf{v})$，使得 π 是定理 5.3 中的有界运行。

与 [11], 中的定义大致类似，我们称循环 σ 为<style id='3'>半正，如果 $(\mathrm{eff}(\sigma))_2 > 0$。我们称 (ρ,σ,τ) 是 π 的半正环分解，如果 $\pi = \rho\sigma\tau$ 且 σ 是半正环。

考虑不存在 π 的半正环分解的情况。此时，我们从右向左从 π 中移除最大长度环，从而移除 π 中的所有环，得到一条简单路径 π'。由于我们只移除了非半正环，可以观察到 $\mathrm{eff}(\pi) \le \mathrm{eff}(\pi') + \mathbf{x}$，并且 $\mathrm{grd}_2(\pi) \le \mathrm{grd}_2(\pi')$。这是因为 $\mathrm{len}(\pi') < |Q|$（否则我们还可以移除另一个环），且 $\mathrm{grd}_1(\pi') > -|Q|\cdot|V|_{\max}$。我们可以将窄线性形式 π' 写成一条满足引理条件的单一路径。

现在我们聚焦于 π 包含半正环 σ 的情况。注意，我们可以假设 σ 是一个简单环，否则 σ 中包含一个更短的环 σ'。如果 σ' 是半正环，那么它要么是简单环，要么我们同样可以在 σ' 中寻找更短的环。如果在某一步找到一个非半正环，我们就将其删除，从而缩短之前的半正环。我们穷尽地重复这一过程。最终，由于每次都会缩短一个环，因此我们得到一个简单半正环。

令 $\rho\gamma$ 为满足 γ 是简单半正环的最短前缀，并假设 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\rho} p'(\mathbf{m})$（从而形成 γ 一个 p'-循环）。根据上一段中的观察，这样的 ρ 和 γ 必定存在。现在，令 ρ' 为通过依次移除简单环而构造的简单路径

从 ρ 得到。根据 ρ 的极小性，被移除的只有非半正环。回想一下，根据定理 5.3， $|\mathbf{m}|_{\max} \le B$。因此，对于某个 $\mathbf{m}' \ge \mathbf{m}$，有 $p\left(\mathbf{u} + \left(B\left(1 + |V|_{\max}\right), \mathbf{0}\right)\right) \xrightarrow{\rho'} p'(\mathbf{m}')$。

设 τ 是从 p' 到 q 的简单路径。这样的路径存在，因为 π 是一条从 p 出发、经过 q'、到达 q 的路径。我们定义路径 $\pi' := \rho'\gamma^e\tau$，其中 $e := B \cdot |Q| \cdot |V|_{\max}$。这为 π' 提供了一个窄线性形式，因为 ρ' 是简单路径， γ 是简单环，而 τ 是简单路径。由于 γ 是简单环，它很短，因此 $\mathrm{grd}_1(\gamma) > -|Q| \cdot |V|_{\max}$ 和 $(\mathrm{eff}(\gamma^e))_1 > -e|Q| \cdot |V|_{\max}$ 都有下界 $-B|Q|^2|V|^2_{\max}$。因此 $p(\mathbf{u} + \mathbf{x}) \xrightarrow{\rho'\gamma^e} p'(\mathbf{m}'')$，其中 $\mathbf{m}'' \ge \mathbf{v} + \mathbf{x}\,2$。最后，由于 τ 是简单的 $\mathrm{grd}_1(\tau)$，$(\mathrm{eff}(\tau))_1 \ge -|Q| \cdot |V|_{\max}$。因此 $p(\mathbf{u} + \mathbf{x}) \xrightarrow{\pi'} q(\mathbf{v}')$，其中 $\mathbf{v}' \ge \mathbf{v}$。 □