arXiv:2301.13557v3 [math.CO] 1 Aug 2024

稀疏图的定位染色与邻域定位染色

Dipayan Chakraborty [a]、 Florent Foucaud [a]、 Soumen Nandi [b]、
Sagnik Sen [c]、 D K Supraja [b, c]

（a）克莱蒙奥弗涅大学、法国国家科学研究中心、克莱蒙奥弗涅国立高等工程学院、圣艾蒂安国立高等矿业学院、LIMOS实验室，63000克莱蒙费朗，法国（b）内塔吉·苏巴斯开放大学，印度（c）印度理工学院达尔瓦德分校，印度

2024年8月5日

摘要

图 G 的一个正规 k–着色称为邻域定位 k–着色，如果对于同一颜色类中的每一对顶点，它们各自邻域中出现的颜色集合均不相同。邻域定位色数 $\chi_{NL}(G)$ 是使得 G允许邻域定位 k–着色的最小 k。图 G 的一个正规 k–顶点染色称为定位k–着色，如果对于同一颜色类中的每一对顶点 x 和 y，存在一个颜色类S_i，使得 $d(x,S_i) \neq d(y,S_i)$。定位色数 $\chi_L(G)$ 是使得 G 允许定位 k– 着色的最小 k。

我们的主要结果涉及给定邻域定位色数的稀疏图所能达到的最大阶。更准确地说，我们证明：若连通图 G 的阶为n、邻域定位色数为 k 且平均度为 d，则 n 的上界为$\mathcal{O}(d^2k^{\lceil d\rceil+1})$。我们还构造了一族最大度有界的图，其阶接近达到这一上界。我们的上界推广了文献中的两个已有上界，后者分别针对最大度有界的图和圈秩有界的图。

此外，我们证明了判定 $\chi_L(G) \leq k$ 和 $\chi_{NL}(G) \leq k$ 是否为稀疏图上的 NP 完全问题：更准确地说，对于平均度至多为 7、最大平均度至多为 20 且为 4-部图的图，这一问题是 NP 完全的。

我们还研究了图的普通色数、定位色数和邻域定位色数之间可能存在的关系。

关键词：定位着色、邻域定位着色、邻域定位色数、稀疏图、计算复杂性。

1 引言

我们的目标是研究图识别领域中的两个图着色问题，即定位着色和邻域定位着色，并重点关注后者。

识别问题。上述两个问题属于识别问题的一般框架：给定一个图（或超图），通过为图中的每个顶点赋予一个唯一属性，来区分图中的所有顶点。传统上，这一领域的问题

主要分为两大类：（i）局部识别问题；（ii）基于距离的识别问题。前一类问题的研究由R´enyi于20世纪60年代针对超图发起，当时称为分离集 [27] （后来也称为分离系统 [9], 、测试覆盖 [25], 、判别码 [11], 等）。随后，Slater于20世纪80年代将这一概念应用于图，并称之为定位支配集 [30]。另一方面，著名的基于距离的识别问题是图的度量维数问题，该问题由Harary和Melter [18] 以及Slater [29] 于20世纪70年代分别独立提出。

在所有这些问题中，人们都要寻找一个（较小的）解顶点集（对于超图，也可能是超边集），并希望通过以下方式区分各个顶点：对于局部问题，根据它们在解集中的邻域进行区分；对于基于距离的问题，则根据它们到解顶点的距离进行区分。这类问题非常基础，并且在诸多领域中有着广泛应用，例如网络中的故障检测 [26, 31],生物诊断 [25], 机器学习 [14], 图的规范表示 [5, 21], 称重问题 [28], 博弈 [15], 学习理论 [17],等。

图着色问题是最基本的图问题之一，因为它对于建立聚类、资源分配等应用的模型至关重要。因此，将着色与识别这两个概念结合起来是一种自然的做法。作为这一努力最早的实例之一，Chartrand等人在2002年引入了定位着色的概念 [12]„ 为上述基于距离的识别问题（如度量维数）提供了着色版本。在这里，人们要对图进行正常着色，使得每个顶点都能通过其到各颜色类的距离被唯一识别。2014年，Behtoei和Anbarloei引入了上述局部识别问题的着色版本 [6] （称为邻接定位着色），随后Alcon等人又以邻域定位着色之名重新发现了这一概念 2020 [2] （形式化定义见下文）。这两个问题的设定非常自然：我们不再像经典识别问题那样最小化解集的大小，而是希望为每个顶点分配一种颜色，从而对顶点集进行划分，例如用于资源分配；因此，我们希望最小化颜色的数量。此外，考虑到识别问题的上述应用（例如故障检测），我们还希望能够唯一识别每个颜色类中的顶点。

虽然前一种定位着色的概念自 2002 [?, ?, ?, 6, 7, 8, 12, 13, ?], 以来已得到广泛研究，但我们关注的是后一种（邻域定位着色）。这一概念出现较晚，但近些年来已开始受到关注 [1, 2, 3, 19, 24]。

记号与术语。本文中，我们只考虑简单图（即没有自环和重边的图）。此外，我们采用 West 所著《Introduction to Graph Theory》中的标准术语和记号 [32]。

给定一个图 G，一个（正常） k-着色是一个函数 $f: V(G) \to S$，其中 S 是一个 k颜色集合，并且只要 u 与 v相邻，就有 $f(u) \neq f(v)$。通常，除非另有说明，我们假设k颜色集合 S 等于 $\{1, 2, \cdots, k\}$。 G的色数记作 $\chi(G)$，它是使 G存在一个 k-着色的最小 k 。

给定一个 k-着色 f G，其 i^{th} 颜色类是由获得颜色 i的顶点组成的集合 S_i 。顶点 x 与顶点集合 S 之间的距离定义为 $d(x, S) = \min\{d(x, y): y \in S\}$，其中，顶点 x与 y之间的距离 $d(x, y)$ 是连接 x 和 y的最短路径所包含的边数。若对于某个颜色类 S_i， x 与 y 关于 f 满足 $d(x, S_i) \neq d(y, S_i)$，则称这两个顶点是度量可区分的。若任意两个不同顶点关于 f都是度量可区分的，则称 k-着色 f G为定位k-着色。 G的定位色数记为 $\chi_L(G)$，它是使 G 具有定位k-着色的最小 k 。

给定一个 k-着色 f G，设顶点 x 的一个邻点 y 属于颜色类S_i。在这种情况下，我们称 i 为 x 的颜色邻居（关于 f）。 x 的所有颜色邻居组成的集合记为 $N_f(x)$。若 x 与 y 关于 f 满足以下任一条件： $f(x) \neq f(y)$，或 $N_f(x) \neq N_f(y)$，则称这两个顶点是邻居可区分的。若每一对不同顶点都是邻居可区分的，则称 k-着色 f为邻域定位k-着色。 G的邻域定位色数记为 $\chi_{NL}(G)$，它是使 G 具有邻域定位 k-着色的最小 k 。

一个具有 G n 个顶点和 m 条边的图的平均度，是其顶点的度的平均值。根据握手引理，该平均度等于 $\frac{2m}{n}$ 。 G 的平均度是衡量图密度的指标：如果它被某个常数所界定，则该图的边数呈线性增长，可以称为稀疏图。然而，一个图的平均度可能较低，但仍然包含非常稠密的部分。 G 的最大平均度，是在 G的所有子图上取平均度所得的最大值。这一概念可以作为衡量图密度的一种更“均匀”的指标。两个不相邻的顶点 x、 $y \in G$ 是假孪生点，当且仅当 $N(x) = N(y)$，其中 x的开邻域记为 $N(x)$，是所有与 x相邻的顶点组成的集合。

应用。邻域定位着色（以及经过略微修改的定位着色）可以用于建模以下故障检测问题。这类网络和复杂系统中的故障检测在工业领域具有重要的实际意义，例如多芯控制与仪表电缆 [23], 和智能电网 [22]等场景。我们希望监测网络中的故障（或设施中的危险）。设施被划分为若干个区段（每个区段由一种颜色表示），每个区段由多个节点组成，故障可能发生在其中的任一节点。我们为每个区段配备一个探测器，用于监测该区段是否存在潜在故障。为避免检测错误，两个相邻节点不能属于同一区段。当故障发生在恰好一个节点上时，每个探测器都能够报告以下两项信息：（i）发生故障的区段；（ii）与故障节点相邻的区段。

因此，如果给定分段中的所有节点在其邻域内具有不同的分段集合，那么来自所有检测器的信息 (i) 和 (ii) 就足以定位发生故障的节点。为了降低成本，人们希望使检测器（即分段）的数量最少。在这种情况下，网络可用一个图来建模，节点对应顶点，节点邻接关系对应边，而分段对应颜色类。因此，这种故障检测场景对应于邻域定位着色问题。

为了进一步减少检测器的数量（但需要功能更强大的检测器），可以对 (ii) 稍作修改：如果每个检测器都能测量其分段中的某个节点到发生故障的节点之间的最小距离。在这种情况下，这种故障检测场景对应于定位着色问题。

背景与贡献。请注意，邻域定位着色尤其也是一种定位着色。因此，三个参数之间存在如下显然的关系 [2]:

$$\chi(G) \leq \chi_L(G) \leq \chi_{NL}(G).$$

注意，对于完全图，这三个参数的值都相同，也就是说，上述关系中等号成立。不过，参数$\chi(\cdot)$ $\chi_{NL}(\cdot)$与 $\chi_L(\cdot)$ $\chi_{NL}(\cdot)$这两对取值之间的差距可以任意大。此外，已有证明表明，对于任意一对满足 $3 \leq p \leq q$的整数 p, q，都存在一个连通图 G_1，使得 $\chi(G_1) = p$且 $\chi_{NL}(G_1) = q$ [2]；也存在一个连通图 G_2，使得 $\chi_L(G_2) = p$ 且 $\chi_{NL}(G_2) = q$ [24]。这

后一个结果肯定地解决了 [2]中提出的一个猜想。我们将这些结果加强如下。

定理1. 对所有 $2 \le p \le q \le r$，除非 $p = q = 2$ 和 $r > 2$，存在一个连通图$G_{p,q,r}$，满足 $\chi(G_{p,q,r}) = p$, $\chi_L(G_{p,q,r}) = q$，且 $\chi_{NL}(G_{p,q,r}) = r$。

着色与定位着色（分别地，邻域定位着色）的一个根本区别是，将 G 的着色限制到一个（诱导）子图 H 上必然仍是一个着色，而定位着色（分别地，邻域定位着色）不具有类似性质。有趣的是，我们证明， G 的诱导子图 H 的定位色数（分别地，邻域定位色数）可以任意大于 G的定位色数（分别地，邻域定位色数）。

定理2. 对每个 $k \ge 0$，都存在一个图 G_k，它有一个诱导子图 H_k，使得 $\chi_L(H_k) - \chi_L(G_k) = k$，且 $\chi_{NL}(H_k) - \chi_{NL}(G_k) = k$。

Alcon等人 [2] 证明， G 的顶点数 n 至多为 $k(2^{k-1} - 1)$，其中 $\chi_{NL}(G) = k$ 且 G 没有孤立顶点，并且该界是紧的。当 G 的最大度为 Δ时，这个指数界可降低为多项式界。事实上，[2] 进一步证明了上界 $n \le k\sum_{j=1}^{\Delta}\binom{k-1}{j} = \mathcal{O}(k^{\Delta+1})$成立（对于没有孤立顶点的图，且当 $\Delta \le k - 1$时）。这个界是否紧仍未解决。Alcon等人 [3] 给出了阶为 n、邻域定位色数为 k 且圈秩为 c的图的上界 $n \le \frac{1}{2}(k^3 + k^2 - 2k) + 2(c - 1) = \mathcal{O}(k^3)$；图 G的圈秩 c 定义为 $c = |E(G)| - n + 1$。此外，他们还根据邻域定位色数 [3], 给出了树和单圈图的紧上界，其中单圈图是恰有一个环的连通图。

一个圈秩为 c 且阶为 n 的连通图有 $n + c - 1$ 条边，而一个阶为n 且最大度为 Δ 的图至多有 $\frac{\Delta}{2}n$ 条边。因此，后两个界分别以圈秩 c 和最大度 Δ 为参数，可以视为研究稀疏图的邻域定位着色的两种方法。我们通过研究具有给定平均度和邻域定位色数 k的图，将这一方法加以推广。对于此类图，我们证明如下结果。

定理3. 设 G 是一个具有 n 个顶点的连通图，其邻域定位色数为k，平均度为 d。则有 $n = \mathcal{O}(d^2k^{\lceil d\rceil+1})$。更确切地说：

（i）若 $k \le \lceil d\rceil$，则 $n < \lceil d\rceil k^{\lceil d\rceil-1}$；（ii）若 $k \ge \lceil d\rceil + 1$，则 $n \le k\sum_{i=1}^{\lceil d\rceil}(\lceil d\rceil + 1 - i)\binom{k-1}{i}$. 此外，任何阶为 G 且达到上界的图，其最大度为 $\Delta \le \lceil d\rceil + 1$，并且恰有 $k\binom{k-1}{i}$ 个度为 i的顶点。

此外，我们设计了一种构造，表明上述上界在渐近意义下几乎是紧的，具体如下。

定理4. 对于每个整数 $\Delta \ge 2$，都存在一个连通图 G，其最大度为 Δ，阶为 $n = \Omega\left(\Delta\left(\frac{k}{\Delta-1}\right)^{\Delta+1}\right)$，其中 k是 G的邻域定位色数。

注意，上述下界也是Ω$\left(d^{-d}k^{d+1}\right)$。这意味着，我们的界和定理3中的界，以及来自 [2] 的界，分别只差一个关于 Δ 或d （当 d 是整数时）的函数所确定的乘法因子，因此都是紧的。换言之，若将 Δ 或 d 视为固定常数，我们的构造表明这两个界都只差一个常数因子，因此是紧的。

一个自然的问题是：在稀疏图上，能否高效地确定定位色数和邻域定位色数的值。我们证明事实并非如此：即使对于最大平均度有界的图，相关判定问题仍然是NP完全的。

定理5。 L-Coloring和 NL-Coloring 问题即使限制在平均度至多为7且最大平均度至多为20的4-部图中，仍然是NP完全的。

论文结构。在第2节中，我们研究具有给定色数、定位色数和邻域定位色数的连通图。我们还研究图的定位色数（分别为邻域定位色数）与其诱导子图之间的关系。特别地，我们在本节中证明定理1和定理2。在第3节中，我们通过证明定理3，给出以邻域定位色数表示的稀疏图顶点数上界。在第4节中，我们通过证明定理4，证明所得到的上界几乎是紧的。最后，在第5节中，我们证明 L-Coloring 和 NL-Coloring 问题对于稀疏图是NP完全的；更确切地说，对于4-部图、平均度至多为7且最大平均度至多为20的图，这些问题是NP完全的。特别地，我们证明定理5。

注：本工作的初步版本（不含 NP完全性证明、不含图示，且证明和陈述的详细程度较低）曾发表于 CALDAM 2023 会议论文集 [10]。

2 $\chi(G)$、 $\chi_L(G)$与 $\chi_{NL}(G)$之间的差距

我们希望证明的第一个结果涉及三个不同的参数，即色数、定位色数和邻域定位色数。

定理1的证明。首先，假设 $p = q = r$。在这种情况下，对于$G_{p,\ q,\ r} = K_p$，显然有 $\chi(G_{p,\ q,\ r}) = \chi_L(G_{p,\ q,\ r}) = \chi_{NL}(G_{p,\ q,\ r}) = p$。这就完成了$p = q = r$时的情形。

其次，处理 $p < q = r$时的情形。若 $2 = p < q = r$，则取$G_{p,\ q,\ r} = K_{1,\ q-1}$。因此，由于它是一个二部图，我们有 $\chi(G_{p,\ q,\ r}) = 2$，并且已知$\chi_L(G_{p,\ q,\ r}) = \chi_{NL}(G_{p,\ q,\ r}) = q$ [2, 12]。

如果 $3 \leq p < q = r$，那么我们按如下方式构造$G_{p,q,r}$： 从顶点为 $v_0, v_1, \cdots, v_{p-1}$的完全图 K_p开始，取$(q-1)$个新顶点 $u_1, u_2, \cdots, u_{q-1}$，并使它们与$v_0$相邻。显然，在这种情况下， $\chi(G_{p,q,r}) = p$。此外，注意，在任何定位着色或邻域定位着色下，都需要为 $v_0, u_1, u_2, \cdots, u_{q-1}$ 赋予 q 种互不相同的颜色。另一方面， $f(v_i) = i + 1$ 以及 $f(u_j) = j + 1$ 都是$G_{p,q,r}$的有效定位 q-着色和邻域定位 q-着色。因此，当 $p < q = r$时，这种情况就得证了。

第三，我们考虑 $p = q < r$ 的情形。如果 $3 = p = q < r$，那么令 $G_{p,\ q,\ r} = C_n$，其中 C_n 是一个长度适当的奇圈，即其长度将推出 $\chi_{NL}(C_n) = r$。已知这样的环存在 [1, 6]。由于我们知道 $\chi(G_{p,\ q,\ r}) = 3$、 $\chi_L(G_{p,\ q,\ r}) = 3$ [12]，并且 $\chi_{NL}(G_{p,\ q,\ r}) = r$ [1, 6]，因此结论成立。

如果 $4 \le p = q < r$，那么我们按如下方式构造 $G_{p、q、r}$：从一个完全图 K_p 开始，其顶点为 v_0、v_1、$\cdots$、v_{p-1}；再取一个奇圈 C_n，其顶点为 u_0、u_1、$\cdots$、u_{n-1}，并将顶点 v_0 与 u_0 识别。此外，我们称奇圈 C_n 的长度为适当长度，即其长度满足 $\chi_{NL}(C_n) = r$。注意，$\chi(G_{p、q、r}) = p$。可以按如下方式为 f 指定 $G_{p、q、r}$ 的定位着色：对于奇整数 $1 \le j \le n-1$，$f(v_i) = i+1$；对于偶整数 $2 \le l \le n-1$，$f(u_j) = a$，其中 a、$b \in \{2,3,\ldots,p\}$。顶点 $v_i \in K_p$（不同于 v_0）与满足 $f(v_i) = f(u_j)$ 的顶点 $u_j \in C_n$，关于 f 是度量可区分的，因为对于至少一个 $l \in \{2,3,\ldots,p\} \setminus \{a,b\}$，$d(v_i、S_l) = 1 \ne d(u_j、S_l)$。因此，$\chi_L(G_{p、q、r}) = p$。另一方面，由于环 C_n 的顶点的邻域（$G_{p、q、r}$ 的子图）在将其视为诱导子图时不会发生变化，除了顶点 $v_0 = u_0$ 外。因此，在 C_n 作为 $G_{p、q、r}$ 的子图包含于其中时，至少需要 r 种颜色为其着色。按如下方式将邻域定位着色 c 指定给 $G_{p、q、r}$：为完全图 K_p 中的顶点指定 p 种互不相同的颜色。使用来自 K_p 的 p 种颜色和 $r-p$ 种新颜色，为奇圈 C_n 提供邻域定位着色。顶点 $v_i \in K_p$（不同于 v_0）与满足 $c(v_i) = c(u_j)$ 的顶点 $u_j \in C_n$，关于 c 是邻居可区分的，因为 v_i 具有 $p-1$ 个颜色各不相同的颜色邻点，而 u_j 至多可以有两个可区分的颜色邻点。因此，$\chi_{NL}(G_{p、q、r}) = r$。所以，在这种情形下结论也成立。

最后，我们进入 $p < q < r$ 的情形。若 $2 = p < q < r$，则参见 [24] 关于此情形的内容。若 $3 = p < q < r$，则我们从一个奇圈 C_n 开始，该圈有 n 个顶点 v_0、v_1、v_2、$\cdots$、v_{n-1}。这里，令 $k = \frac{r}{(r-1)(r-2)/2}$ 并

$$n = \begin{cases} k & \text{if } k \text{ is odd,} \\ k-1 & \text{if } k \text{ is even.} \end{cases}$$

已知 $\chi_{NL}(C_n) = r$ 来自 [1, 6]。取 $q-1$ 个独立顶点 u_1、u_2、$\cdots$、u_{q-1}，并使它们都与 v_0 相邻。由此得到的图为 $G_{p,q,r}$。显然，在这种情形下，$\chi(G_{p,q,r}) = 3$。注意，在任何定位着色或邻域定位着色中，我们都需要为 v_0、u_1、u_2、$\cdots$、u_{q-1} 分配 q 种互不相同的颜色。现在，我们按如下方式为 G_p f 赋予定位着色 $G_{p,q,r}$:

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 0, \\ 2 & \text{if } i \text{ is odd and } 1 \le i \le n-1, \\ 3 & \text{if } i \text{ is even and } 2 \le i \le n-1. \end{cases}$$

此外，对于所有 $1 \le j \le q-1$，$f(u_j) = j+1$。这给出了 $\chi_L(G_{p,q,r}) = q$。另一方面，由于将环 C_n（$G_{p,q,r}$ 的子图）的顶点邻域视为诱导子图时，除了顶点 v_0 外均不发生变化。因此，当 C_n 作为子图包含于 $G_{p,q,r}$ 中时，至少需要 r 种颜色对其进行着色。如下为 $G_{p,q,r}$ 指定一个邻域定位 r-着色：为奇环 C_n 指定一个邻域定位 r-着色，使得在 $n = k$ 的情况下每个顶点都有两个不同的颜色邻点；而在 $n = k-1$ 的情况下，除两个顶点（记为 v_i 和 v_j）外，所有顶点都有两个不同的颜色邻点（此类邻域定位 r-着色见 [1]）。从赋予环 C_n 的 r 种颜色中任取 $q-1$ 种（在 $n = k-1$ 的情况下，排除 $c(v_i)$ 和 $c(v_j)$），为 $q-1$ 个叶顶点赋予互不相同的颜色。环中的顶点 v_i 与叶顶点 u_j（其中 $f(v_i) = f(u_j)$）的邻域可区分，因为 v_i 有两个不同的颜色邻点，而 u_j 只有一个颜色邻点。因此，我们得到 $\chi_{NL}(G_{p,q,r}) = r$。

若 $4 \le p < q < r$，那么我们首先从一条 P_n 阶、具有 n 个顶点的路径开始，其中 $n = \frac{r}{(r-1)(r-2)/2}$。已知 $\chi_{NL}(P_n) = r$ 自 [1, 6]。令 $P_n = u_0u_1\cdots u_{n-1}$。现在取一个具有 p 个顶点的完全图 $v_0, v_1, \cdots, v_{p-1}$。在 u_0 和 v_0 处将这两个图识别，得到一个新图。此外，取 $(q-2)$ 个独立顶点 $w_1, w_2, \cdots, w_{q-2}$，并使它们与

u_{n-2}。这样得到的图是 $G_{p,q,r}$。显然，$\chi(G_{p,q,r}) = p$。注意，在任何定位着色或邻域定位着色下，都必须为顶点 q 分配不同的颜色$u_{n-2}, w_1, w_2, \cdots, w_{q-2}, u_{n-1}$。现在，定义一个定位着色 $f$of $G_{p,q,r}$ 如下：

$$f(u_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 0 \text{ or } i = n-3, \\ 2 & \text{if } i \text{ is odd and } 1 \le i \le n-4, \\ 3 & \text{if } i \text{ is even and } 2 \le i \le n-4, \\ 3 & \text{if } i = n-2 \text{ and } n \text{ is odd}, \\ 2 & \text{if } i = n-2 \text{ and } n \text{ is even}, \\ 2 & \text{if } i = n-1 \text{ and } n \text{ is odd}, \\ 3 & \text{if } i = n-1 \text{ and } n \text{ is even}. \end{cases}$$

此外，将颜色 1、4、5、6、…、q 分配给叶顶点，并将 $f(v_j) = j+1$ 分配给所有 $1 \le j \le p-1$。因此，$\chi_L(G_{p,q,r}) = q$。

此外，若将路径 P_n（G_p、q、r的子图）视为诱导子图，则其顶点的邻域除顶点 u_0 和 u_{n-2}外均不变。回顾一下，对于一条含有 n 个顶点的路径 P_n，若 $(r-1)^2 r-2 < n \le r^2 ( ) (r-1)$ 2，则有 $\chi_{NL}(P_n) = r$ [1, 6]。由于 $n-3 = \frac{r(r-1)}{2} > (r-2-6)(r-1)^2(r-2)$ 2，其中 $r \ge 6$，因此至少需要 r 种颜色，才能在G_p、q、r中区分顶点 u_1、u_2、$\cdots$、u_{n-3} 的邻域。

如下为 $G_{p,q,r}$ 赋予一个邻点定位 r-着色 c：为路径 P_n 赋予一个邻点定位 r-着色，使得每个顶点（端点 u_0 和 u_{n-1}除外）都有两个不同的颜色邻点（此类邻点定位 r-着色参见 [1]）。从用于对 P_n 进行邻点定位 r-着色的 r 种颜色中（除 $c(u_0)$外）任取 $p-1$种不同的颜色，并将其赋给完全图中剩余的 $p-1$ 个顶点。从 P_n 的 r 种颜色中任取 $q-2$ 种颜色（不包括颜色 $c(u_0)$、$c(u_{n-2})$和 $c(u_{n-1})$），并将不同的颜色赋给 $q-2$个叶顶点。路径 P_n 上的顶点 $u_i (i \ne 0, n-2, n-1)$ 与叶顶点 w_j 满足 $c(u_i) = c(w_j)$，因而可由邻点区分，因为 u_i 有两个不同的颜色邻点，而 w_j只有一个颜色邻点。因此，我们有 $\chi_{NL}(G_{p,q,r}) = r$。 □

此外，我们证明，与普通色数的情形不同，诱导子图的定位色数（分别为邻域定位色数）可以任意大于原图的定位色数（分别为邻域定位色数）。

定理2的证明。图 G_k 的构造如下。我们首先取 $2k$ 个互不相交的 K_1，分别命名为 a_1、a_2、$\cdots$、a_{2k}，以及 k 个互不相交的 K_2，分别命名为 $b_1b'_1$、$b_2b'_2$、$\cdots$、$b_kb'_k$。随后，将上述所有顶点都与一个特殊顶点 v 相邻，从而得到图 G_k。注意，在任何定位着色或邻域定位着色下，v 和这些 a_i 都必须获得彼此不同的颜色。另一方面，由 f 给出的着色 f：v 为 $=1$，a_i 为 $=i+1$，b_i 为 $=2i+1$，以及 b'_i 为 $=2i$，确实既是 G_k 的定位着色，也是其邻域定位着色。因此，我们有 $\chi_L(G_k) = \chi_{NL} G_k = 2k+1$。

现在令 H_k 为由 v、a_is 和 b_is 诱导的子图。它是图 $K_{1,\ 3k}$。因此，我们有 $\chi_L(H_k) = \chi_{NL}(H_k) = 3k+1$ [2, 12]。 □

3 稀疏图的界

本节研究邻域定位色数有界的图的密度。其中第一个结果给出了图的顶点数的上界，

并以其邻域定位色数表示。特别地，这表明图 G 的顶点数有 $\chi_{NL}(G)$ 的多项式函数上界。

定理3的证明。我们可以假设 $k \geq 2$，否则 G 只有一个顶点。

（i）首先，假设 $k \leq \lceil d \rceil$。由 [2] 我们知道 $n \leq k(2^{k-1}-1)$，因此：

$$\begin{aligned} n &< \lceil d \rceil 2^{\lceil d \rceil - 1} \\ &\leq \lceil d \rceil k^{\lceil d \rceil - 1}, \end{aligned}$$

以及 t 所需的界成立。此外，在此情况下显然有 $n = \mathcal{O}(d^2 k^{\lceil d \rceil + 1})$ e.

（ii）因此，在证明的其余部分中，我们假设 $k \geq \lceil d \rceil + 1$，并为方便起见，令 $\lceil d \rceil = a$。

令 D_i 和 d_i 分别表示 G 中度等于 i 的顶点集合及其顶点数；令 D_i^+ 和 d_i^+ 分别表示 G 中度至少为 i 的顶点集合及其顶点数，其中对所有 $i \geq 1$ 均成立。由于 G 是连通的，因此不含有度为0的顶点，所以可以写成

$$\sum_{v \in V(G)} deg(v) = \sum_{i=1}^{a} i \cdot d_i + \sum_{v \in D_a^+} deg(v) \tag{1}$$

且 G 的顶点数可表示为

$$n = (d_1 + d_2 + \cdots + d_a) + d_{a+1}^+ = d_{a+1}^+ + \sum_{i=1}^{a} d_i. \tag{2}$$

由于 $\sum_{v \in V(G)} deg(v) \leq an$，结合等式 (1) 和 (2)，可得

$$\sum_{i=1}^{a} i \cdot d_i + \sum_{v \in D_{a+1}^+} deg(v) \leq a \left(d_{a+1}^+ + \sum_{i=1}^{a} d_i \right) = a d_{a+1}^+ + a \sum_{i=1}^{a} d_i \tag{3}$$

这意味着

$$\begin{aligned} d_{a+1}^+ &\leq \sum_{v \in D_{a+1}^+} (deg(v) - a) \\ &= \left(\sum_{v \in D_{a+1}^+} deg(v) \right) - a d_{a+1}^+ \\ &\leq \sum_{i=1}^{a} (a-i) d_i. \end{aligned} \tag{4}$$

第一个不等式源于求和式中恰有 d_{a+1}^+ 项这一事实 $\sum_{v \in D_{a+1}^+} (deg(v) - a)$，其中每一项都大于或等于 1，因为对于所有 $v \in D_{a+1}^+$，$deg(v) \geq a+1$。第二个不等式可通过重新整理不等式 (3) 得到。

令 f 为 G 的任意一个邻域定位 k-着色。考虑有序对（$f(u)$ $N_f(u)$），其中 $deg(u) \leq s$，对某个整数 $s \leq k-1$。因此，u 可以取 k 种可用颜色之一，而其色邻域至多由剩余的（$k-1$）种颜色中的 s 种构成。

因此，有序对（f（u） N_f（u））至多有 $k\sum_{i=1}^{s}\binom{k-1}{i}$种选择。注意，$_{i=1}$对于任意两个度至多为 s的顶点 u、v，有序对（f（u） N_f（u））和（f（v） N_f（v））必须不同。因此：

$$\sum_{i=1}^{s} d_i \leq k\sum_{i=1}^{s}\binom{k-1}{i}. \tag{5}$$

由于根据假设有 $a \leq k-1$，利用上述关系，我们可以推导出

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{a}(a+1-i)d_i &= \sum_{s=1}^{a}\left(\sum_{i=1}^{s} d_i\right)\\ &\leq \sum_{s=1}^{a}\left(k\sum_{i=1}^{s}\binom{k-1}{i}\right)\\ &= k\sum_{i=1}^{a}(a+1-i)\binom{k-1}{i}.\end{aligned} \tag{6}$$

在上述不等式中，两个等式是代数恒等式，而不等式则是利用不等式（5）得到的。因此，

$$\begin{aligned}n &= d_{a+1}^{+} + \sum_{i=1}^{a} d_i\\ &\leq \sum_{i=1}^{a}(a-i)d_i + \sum_{i=1}^{a} d_i \text{ [using Inequality (4)]}\\ &= \sum_{i=1}^{a}(a+1-i)d_i\\ &\leq k\sum_{i=1}^{a}(a+1-i)\binom{k-1}{i} \text{ [using Inequality (6)]}\\ &< k\sum_{i=1}^{a}\left(a\binom{k-1}{i}\right)\\ &< ak\sum_{i=1}^{a} k^i\\ &< a^2k^{a+1}\\ &\leq (d+1)^2k^{\lceil d\rceil+1}\\ &= \mathcal{O}(d^2k^{\lceil d\rceil+1}).\end{aligned}$$

特别地，根据（ii）的第一部分，我们得到了所需的界。此外，在这种情况下，我们还有一般界 $n = \mathcal{O}(d^2k^{\lceil d\rceil+1})$。因此，我们只需证明（ii）的第二部分。

对于 (ii) 的第二部分证明，我们注意到，如果一个满足 (ii) 中约束的图 G^* 达到上界，那么上述所有不等式中都取等号。特别地，必须有 $d_{a+1}^{+} = \sum_{v\in D_{a+1}^{+}}(deg(v) - a)$，这意味着 G^* 不可能含有度大于 $a+1$ 的顶点。此外，我们还有以下等式。

$$\sum_{i=1}^{s} d_i = k\sum_{i=1}^{s}\binom{k-1}{i} \text{ for } s = 1, 2, \ldots, a+1$$

这意味着 G^* 恰好有 $k\binom{k-1}{i}$ 个度为 i 的顶点。 □

将上述界应用于平面图类（其平均度小于6），可得到以下上界。

$$n \le k\sum_{i=1}^{6}(7-i)\binom{k-1}{i} = \mathcal{O}(k^7).$$

4 所得界的紧性：定理4的证明

接下来，我们证明定理3的渐近紧性。

定理4的证明包含若干观察和引理。此外，该证明是构造性的，而这些构造取决于特定的部分着色。因此，我们将依次介绍一系列图构造、相应的着色及其结构性质，并给出所需的观察和引理。由于证明稍显复杂，我们先概述如下。

最终的图 G 将通过多次迭代构造一系列图来得到。首先，我们取基图 G_1 为一条包含一定数量顶点的路径（顶点数将根据证明中提及的论证来确定并说明），其邻域定位色数为 s。

我们还固定一个特定的邻域定位 s着色。基于这个固定的邻域定位 s着色，我们将添加一些顶点和边来构造 G_2。在添加新顶点和边的同时，我们将把邻域定位 s着色扩展为具有多于 s 种颜色的邻域定位着色（ s 中增量的确切值将在证明中给出并解释）。类似地，我们将继续从 G_i 构造 G_{i+1}，最终构造出相关的示例 G。

引理6. 对于两个正整数 p、q 且满足 $p<q$，考虑一个（$p\times q$）矩阵，其 ij^{th} 项为$m_{i,\ j}$。令 M 为一个完全图，其顶点是该矩阵的各项。则存在一个 M 的匹配，满足以下条件：

（i）匹配中一条边的两个端点来自不同的列。

（ii）令 e_1 和 e_2 为匹配中的两条边。如果 e_1 和 e_2 的一个端点来自同一列，那么它们的另一个端点必须属于不同的列。

（iii）每列中， M 的顶点除至多一个外，均被该匹配饱和。

证明。该匹配由形如 $m_{(2i-1),j}m_{2i,i+j}$ 的边组成，其中 $i\in\{1,2,\cdots,\lfloor\frac{p}{2}\rfloor\}$ 和 $j\in\{1,2,\cdots,q\}$ 取遍所有可能值。注意，在整个证明过程中，我们对指标进行模 q 的加减运算，其中模 q 的整数代表元为 1、2、$\cdots$、q。下面证明该匹配满足上述所有条件。

首先注意，匹配中的一条典型边形如 $m_{(2i-1),j}m_{2i,i+j}$。这意味着，相关边的两个端点分别来自第 j 列和第 $i+j$ 列。由于

$$0<i\le\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor<p<q,$$

我们必须有 $j\neq i+j$。因此，题述条件（i）得证。

接下来，假设存在两条类型为 $m_{(2i-1),j}m_{2i,i+j}$ 和 $m_{(2i'-1)\ j'}m_{2i',i'+j'}$的边。如果 $m_{(2i-1),j}$ 和 $m_{(2i'-1)\ j'}$ 来自同一列，即 $j=j'$，那么我们必须有 $i\neq i'$

因为它们是不同的顶点。这将意味着另一个端点 $m_{2i,i+j}$ 和 $m_{2i',i'+j'}$ 来自不同的列，即 $i+j \neq i'+j=i'+j'$。另一方面，如果 $m_{(2i-1),j}$ 和 $m_{2i',i'+j'}$来自同一列，那么我们有 $j=i'+j'$。此外，如果 $j'=i+j$，则意味着

$$j=i'+j'=i'+i+j.$$

仅当 q 整除（$i+i'$）时这才可能，但由于.....这是不可能的，

$$0<i+i' \leq 2\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \leq p<q.$$

因此，我们也验证了该陈述的条件（ii）。

注意，当 p 为偶数时，该匹配饱和 M 的所有顶点；而当 p 为奇数时，除矩阵的第 p^{th} 行中的顶点外，它饱和其余所有顶点。这验证了该陈述的条件（iii）。

□

推论7. 对于满足 $p<q$的两个正整数 p、q，设 G 为一个图，其中有一个大小为（$p \times q$）的独立集 M，且 $M=\{m_{ij}:\ 1 \leq i \leq p、\ 1 \leq j \leq q\}$。此外，设 ϕ 是 G 的一个正常（$s'+q$）-着色，并满足以下条件:

（i）所有 s' 种颜色均被分配给 $G \setminus M$中的顶点，

（ii）对于 G中的任意顶点 x，$\leq s'+q$（x）当且仅当 $x \in M$，

（iii）对于任意两个 顶点 x、y 属于 G、x，且 y 是邻居可区分的，除非二者都属于 M ，

（iv）对于所有满足 $1 \leq i \leq p$ 和 $1 \leq j \leq q$、$\phi\ (m_{ij})\ =s'+j$ 的 i、j。

那么，可以通过在 M 的顶点之间添加一个匹配，找到 G' 的生成超图，从而使 ϕ 成为 G' 的邻居可区分（$s'+q$）着色。

证明。首先构造一个矩阵，其中 ij^{th} 项对应于顶点 m_{ij}。然后，构造一个完全图，其顶点是该矩阵的各项。现在利用引理6，我们可以找到该完全图的一个匹配，使其满足引理6陈述中提到的三个条件。我们通过仅包含与匹配的边相对应的边，在 M 的顶点之间构造 G'。我们要证明，添加这些边并得到 G' 后，ϕ 确实是 G' 的邻居可区分（$s'+q$）着色。

注意，根据 ϕ 的定义，使用了 $(s'+q)$ 种颜色。因此，只需证明 G' 的顶点关于 ϕ 是邻居可区分的。更准确地说，由于陈述中的条件 (ii)，只需证明 M 中的两个顶点 x、y 关于 ϕ 在 G' 中是邻居可区分的。若对于某些 x、$y \in M$，我们有 $\phi(x)=\phi(y)$，那么这意味着 x、y 来自 M 的同一列。因此，根据匹配的条件，x、y 必须拥有来自 M 不同列的邻居，也就是说，它们拥有不同颜色的邻居。这足以使 x、y 成为邻居可区分的。

□

让我们回顾一下 [1, 6] 中的一个结果，我们将在构造中使用该结果；事实上，G_1 将被定义为一条路径（见下方构造的第 (iii) 点）。

定理 8（[1, 6]）。设 $k \geq 4$ 为一个整数，P_n 为一条具有 n 个顶点的路径。若 $\frac{(k-1)^2(k-2)}{2} \leq n \leq k^2(k-1)^2$，则 $\chi_{NL}(P_n)=k$。

关于 G_{i+1} 来自 G_i的构造：现在我们可以介绍迭代构造了。不过，由于该构造较为复杂，我们需要使用一些特定术语来描述它。为方便起见，下面列出几点，用以描述整个构造。

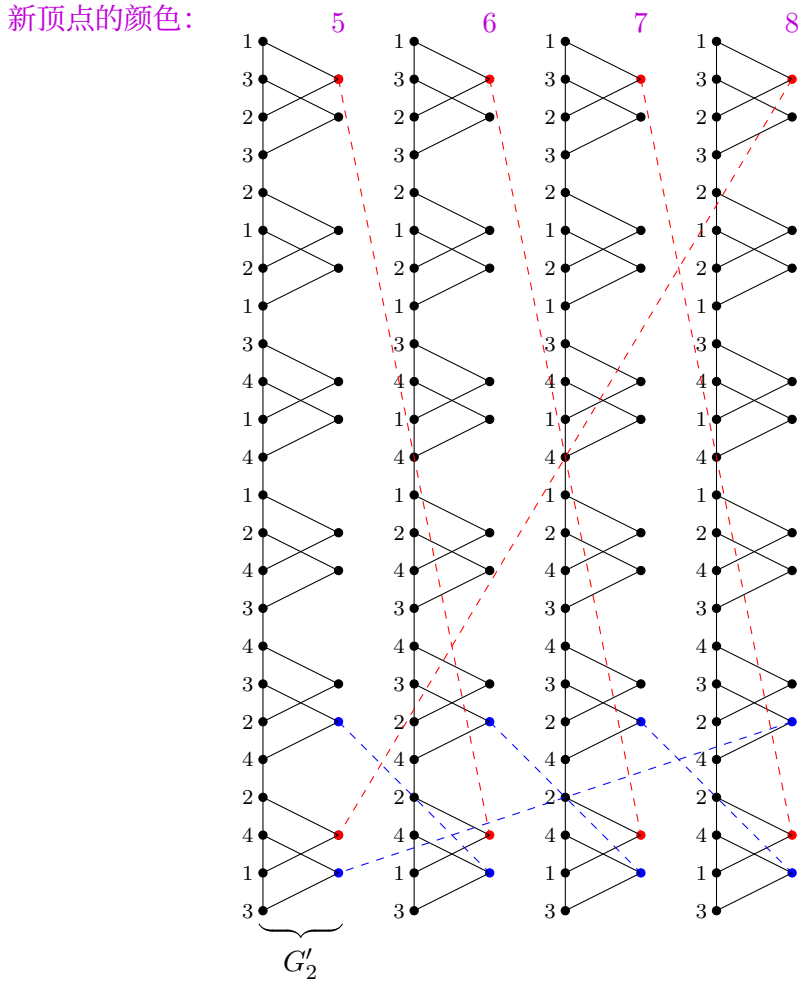


图 1：由 $G_1 = P_{24}$构造 G_2。其中，$\chi_{NL}(P_{24}) = 4$，红色和蓝色的边是新添加的两组匹配。

(i) i-三元组是形如（G_i，ϕ_i，X_i）的三元组，其中 G_i 是一个图，ϕ_i 是 G_i的邻点定位（is）-着色，X_i 是由 G_i的顶点组成的（$i+1$）-元组构成的集合，且每个元组中的元素各不相同。此外，X_i 不相交地覆盖 G_i的顶点；也就是说，G_i的每个顶点恰好出现在 X_i的某个（$i+1$）-元组中。

(ii) 我们将假设对 X_i 进行划分：如果 X_i 中的两个元素（x_1、x_2、$\cdots$、x_{i+1}）和（x'_1、x'_2、$\cdots$、x'_{i+1}）被置于划分的同一单元中，则

$$\{\phi_i(x_j) : j = 1, 2, \cdots, i+1\} = \{\phi_i(x'_j) : j = 1, 2, \cdots, i+1\}.$$

也就是说，该划分基于用于属于（$i+1$）元组的顶点的颜色集。此外，划分的各个单元表示为 $Y_i = \{X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{ik_i}\}$，其中 k_i 表示 Y_i中的单元数。在引理 9 中，我们将证明，这种划分的每个单元所含顶点数都少于 s。目前，我们先将其视为事实，继续进行构造。

(iii) 下面明确描述 1-三元组（G_1、ϕ_1、X_1）。这里 G_1 是路径 $P_t = v_1v_2\cdots v_t$ 上的

t 个顶点，其中 $t = 4\left\lfloor \frac{s^2\ (s-1}{8} \right\rfloor)$ 。

作为

$$\frac{(s-1)^2(s-2)}{2} < 4\left\lfloor \frac{s^2(s-1)}{8} \right\rfloor \leq \frac{s^2(s-1)}{2},$$

我们必须有 $\chi_{NL}(P_t) = s$ （根据定理 8）。

令 ϕ_1 为 G_1 的任意邻域定位 s-着色，并且

$$X_1 = \{(v_{i-1}, v_{i+1}) : i \equiv 2, 3 \pmod 4\}.$$

显然， X_1 中的每个二元组都包含互异元素，并且 X_1 不相交地覆盖 G_1 的顶点。因此，(G_1, ϕ_1, X_1) 满足 (i)。

(iv) 假设给定了一个 i-三元组 (G_i, ϕ_i, X_i)。我们将（部分地）描述一种由此构造 ($i+1$)-三元组的方法。为此，首先按如下方式构造一个中间图 G'_{i+1} ： 对于每个 ($i+1$)-元组 ($x_1, x_2, \cdots, x_{i+1}$) $\in X_i$ ，我们添加一个新顶点 x_{i+2} ，使其与该 ($i+1$)-元组中的每个顶点相邻。此外，(x_1, x_2, $\cdots, x_{i+1}, x_{i+2}$) 在 G'_{i+1} 中被指定为一个 ($i+2$)-元组。之后，我们取 s 个 G'_{i+1} 的副本，并将所得图称为 G''_{i+1}。此外，我们将 ϕ_i 扩展为函数 ϕ_{i+1} ，方法是将颜色 ($is + j$) 赋予来自 j^{th} 副本 G'_{i+1} 的新顶点。($i+2$)-元组的副本就是 G''_{i+1} 的 ($i+2$)-元组。注意，所有 ($i+2$)-元组组成的集合 X_{i+1} 不相交地覆盖 G''_{i+1} 的顶点。

(v) 回顾 (ii) 中划分的概念。由于在我们从 G''_{i+1} 构造 G_{i+1} （事后看来）时添加一些边， ϕ_i 和 X_i 将保持不变，因此我们现在已经可以谈论 ϕ_i 的划分

$$Y_{i+1} = \{X_{(i+1)1}, X_{(i+1)2}, \cdots, X_{(i+1)k_{i+1}}\}$$

。回顾一下，一个 ($i+2$)-元组的最后一个顶点是 G''_{i+1} 的新顶点。注意， G''_{i+1} 中的两个新顶点具有相同的颜色，当且仅当它们属于 G'_{i+1} 的同一个副本。因此，特定单元 $X_{(i+1)r}$ 中 ($i+2$)-元组的顶点必须属于 G''_{i+1} 中 G'_{i+1} 的同一个副本。因此，如果对所有 $r \in \{1, 2, \cdots, k_1\}$ 都有 $|X_{1r}| < s$ ，那么对所有 i 以及所有 r 都有 $|X_{ir}| < s$ 。在引理 9 中，我们将证明 Y_1 的每个单元都少于 s 个顶点。目前，我们先将其作为事实接受，并继续进行构造。

(vi) 这里我们将使用一些新顶点构造矩阵 M 。设 $X_{(i+1)r}$ 是划分 Y_{i+1} 中的一个单元，其顶点属于 1st 副本，即 G'_{i+1} 在G''_{i+1}中的副本。取属于 $X_{(i+1)r}$的($i+2$)元组的最后一项（新顶点），并将它们不重复地放入一列中。这将成为矩阵 M的第一列。矩阵的 l^{th} 列可通过将1^{st} 列中的各项替换为它们在 G''_{i+1}中 G'_{i+1} 的 l^{th} 副本里的对应副本来得到。该矩阵 M 是一个($p \times q$)矩阵，其中 $p = |X_{ir}|$ 且 $q = s$。假设引理 9，我们得到 $p < q$ 。

(vii) 从 G''_{i+1} 中删除除 M 中顶点以外的所有新顶点。该图与推论7中的图 G 具有完全相同的性质，其中 M 充当独立集。因此，可以添加一个匹配并扩展着色（如推论7所示）。对于划分 Y_{i+1} 的每个单元 $X_{(i+1)r}$ ，其顶点属于 G''_{i+1} 中 G'_{i+1} 的 1st 副本，我们都进行上述操作。添加所有此类匹配后，得到的图为 G_{i+1}。参见图1和图2。

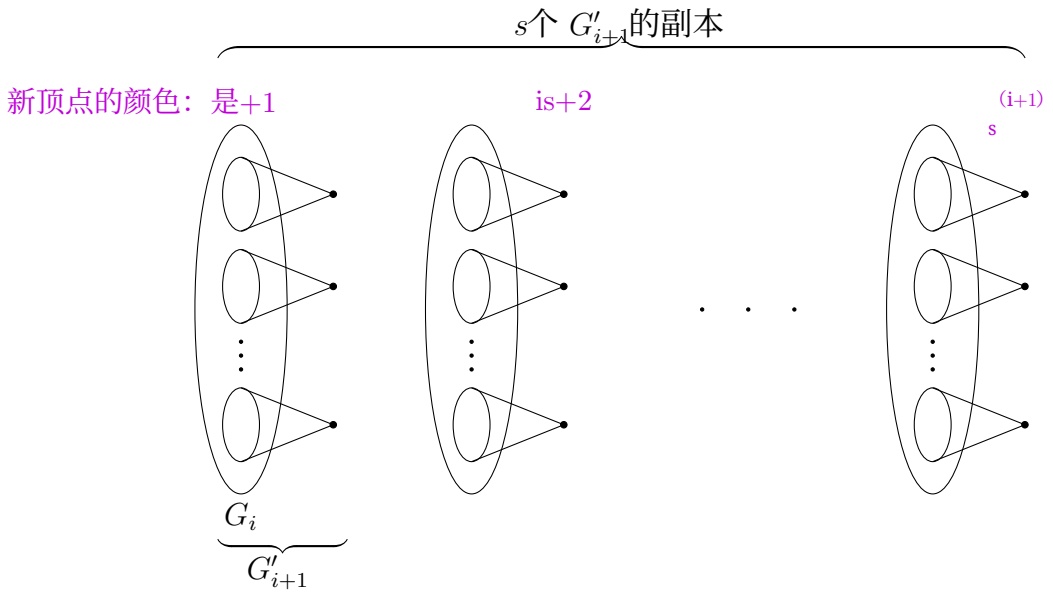


图2：由 G_i构造G''_{i+1}。

引理 9。我们有 $|X_{1r}| < s$，其中 X_{1r} 是划分 Y_1 的任意单元。

证明。 G_1 中的任意顶点（端点之外）都有两个颜色邻点，记为 i 和 j （i 可能等于 j）。固定这两个颜色邻点后，该顶点至多有 $s-1$种颜色选择。因此 $|X_{1r}| < s$。

□

引理10。函数 ϕ_{i+1} 是 G_{i+1}的一个邻点定位（$i+1$）s-着色。

证明。函数 ϕ_{i+1} 由 ϕ_i构造，同时构造三元组 G_{i+1} ，其构造基于G_i。在构造过程中，我们采用了推论7中的相同步骤。因此，在 ϕ_{i+1}下，新着色的顶点在 G_{i+1} 中变得邻居可区分。

□

上述两个引理验证了 G_i的迭代构造的正确性。然而，我们仍需说明 G_i如何帮助我们证明结果。为此，我们来证明 G_i的某些性质。

引理 11。图 G_i 的最大度为（$i+1$）。

证明。我们将通过归纳法证明这一点。由于我们以一条路径开始，因此 G_1 的最大度为2。这证明了基础情形。假设对于所有 $i \le j$， G_i 的最大度为（$i+1$）。这就是我们的归纳假设。注意，在从 G_i构造图G_{i+1} 的迭代步骤中，旧顶点（或其副本）的度至多增加1，而 G_{i+1} 中的新顶点恰好与（$i+1$）个旧顶点以及至多一个新顶点相邻。因此， G_{i+1} 中的新顶点的度至多为（$i+2$）。

□

最后，我们准备证明定理4。

定理4的证明。我们考虑图 G 如构造中所述为 $G_{\Delta-1}$。根据引理 11， G 的最大度为 Δ。令 k 表示 G的邻域定位色数。注意到 $\chi_{NL}(G_1) = s$ ，并回顾根据定理 8， $s \ge 4$ 。在每次迭代中，都会加入 s 种新颜色，因此我们有 $k = \chi_{NL}(G) \le (\Delta-1)s$。首先，我们来计算

G中的顶点数。令 n_i 表示图 G_i中的顶点数。根据构造，基图 G_1 有 $n_1 = t = 4\left\lfloor \frac{s^3-s^2}{8} \right\rfloor$ 个顶点。此外，在 G_1 的每个副本中加入 $\frac{n_1}{2}$个新顶点，从而得到 G_2的顶点。因此， $n_2 = s($ $n_1 + \frac{n_1}{2}) = \frac{3sn_1}{2}$。此外，在 G_2 的 s 个副本中各加入 $\frac{n_2}{3}$个新顶点，从而得到 G_3的顶点。由此得到$n_3 = s(n_2 + \frac{n_2}{3}) = \frac{4}{3}sn_2 = \frac{4}{3}\frac{3}{2}s^2n_1 = \frac{4}{2}s^2n_1$。依此类推，一般而言，$n_i = {}_{(i+1)}{}_2 \ s^{i-1}n_1$。因此，代入 $i = \Delta - 1$ 并利用 $n_1 \geq \frac{s^3-s^2}{2} - 4$ 这一事实，很容易看出， $G = G_{\Delta-1}$ 中的顶点数为

$$\begin{aligned} n_{\Delta-1} \geq \frac{\Delta}{4}(s^{\Delta+1} - s^{\Delta} - 8s^{\Delta-2}) &= \frac{\Delta}{4}s^{\Delta+1}\left(1 - \frac{1}{s} - \frac{8}{s^3}\right) \\ &= \frac{\Delta}{4}s^{\Delta+1}\left(1 - \frac{(s^2+8)}{s^3}\right) \\ &\geq \frac{5}{32}\Delta s^{\Delta+1} \ (\text{as } s \geq 4) \\ &\geq \frac{5}{32}\Delta\left(\frac{k}{\Delta-1}\right)^{\Delta+1} \\ &= \Omega\left(\Delta\left(\frac{k}{\Delta-1}\right)^{\Delta+1}\right). \end{aligned}$$

这就证明了该结论。 □

5 稀疏图的定位着色与邻域定位着色的复杂性

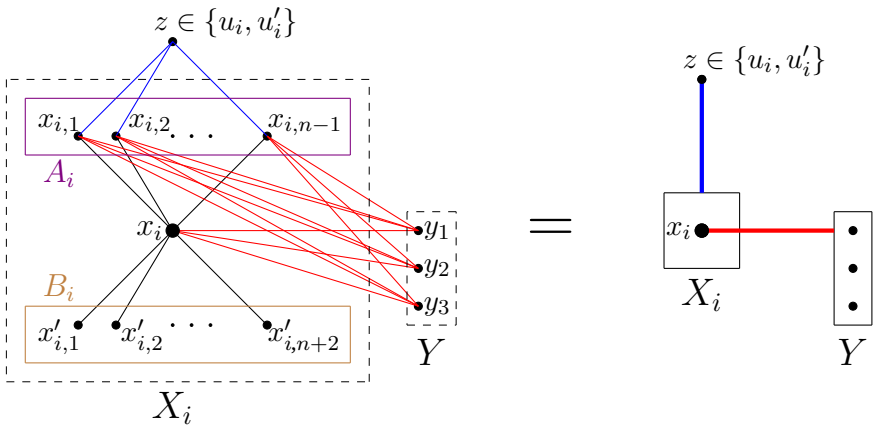
在本节中，我们将证明，即使将问题限制在稀疏图族上，定位着色问题和邻域定位着色问题仍然是NP完全的。为严谨起见，我们正式定义3-着色、定位着色和邻域定位着色问题。

3-Coloring实例：给定一个图 G。问题：是否存在 G 的正常3-着色?

L-Coloring 实例：给定一个图 G 和一个正整数 k。问题：是否存在 G 的定位 k-着色?

NL-Coloring 实例：给定一个图 G 和一个正整数 k。问题：是否存在 G 的邻域定位 k-着色?

众所周知， 3-Coloring 问题是NP完全的 [20]。此外，即使将该问题限制在最大度为4的平面图族上，它仍然是NP完全的。



F图3：由 G 构造 G^* 时使用的构件 X_i 及其连接 s.

定理12（[16]）。即使对于最大度为4的平面图， 3-Coloring 问题仍然是NP完全的。

为证明定理5，我们从 3-Coloring 问题进行归约。证明中，我们根据给定的连通图 G 构造图 G^* ，并通过若干引理分析其性质。

构造 G^*：设 G 是一个顶点为 u_1、u_2、$\cdots$、u_n的连通图。取 G 的一个副本，并将其记为 G'，其顶点为 u'_1、u'_2、$\cdots$、u'_n。若 u_i 与 u_j 相邻，则令 u'_i 与 u_j 相邻，并令 u_i 与 u'_j 相邻，其中 i、$j \in \{1, 2, \cdots, n\}$。

接下来，我们为所有 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$构造构件 X_i。构件 X_i 由一个称为 x_i 的顶点和两个独立集 $A_i = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \cdots, x_{i,n-1}\}$、 $B_i = \{x'_{i,1}, x'_{i,2}, \cdots, x'_{i,n+2}\}$组成。此外， x_i 与 A_i 和 B_i 中的所有顶点相邻。当我们说构件 X_i 连接到顶点 z时，意指令顶点 z 与 A_i中的所有顶点相邻。之后，对于每个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$，将构件 X_i 连接到顶点 u_i 和u'_i。

最后，取另一个含有三个顶点的独立集 $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ 。对于每个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$，我们将 Y中的每个顶点连接到构件 X_i，并使其也与顶点 x_is相邻。图3和图4给出了示意图。

引理13. 设 G 是一个具有 n 个顶点的连通图。如果 G 具有3-着色，则图G^* 具有邻域定位（$n+3$）-着色。

证明。设 G 是一个具有 n 个顶点且具有3-着色 f的连通图。我们希望将 f 扩展为 G^*的邻域定位（$n+3$）-着色 f^*。在这种情况下，我们将使用 $K = \{1, 2, 3, c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n\}$ 作为 f^*的（$n+3$）种颜色的集合。我们首先定义 f^*，然后证明它是一个邻域定位着色。

如前所述， f^*是 f的扩展，因此，在 f 下分配给 G 中顶点的颜色得以保留。换言之，我们有

$$f^*(u_i) = f(u_i)$$

对于所有 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$。此外，我们将颜色 c_i 分配给顶点 u'_i 和 x_i，即，

$$f^*(u'_i) = f^*(x_i) = c_i.$$

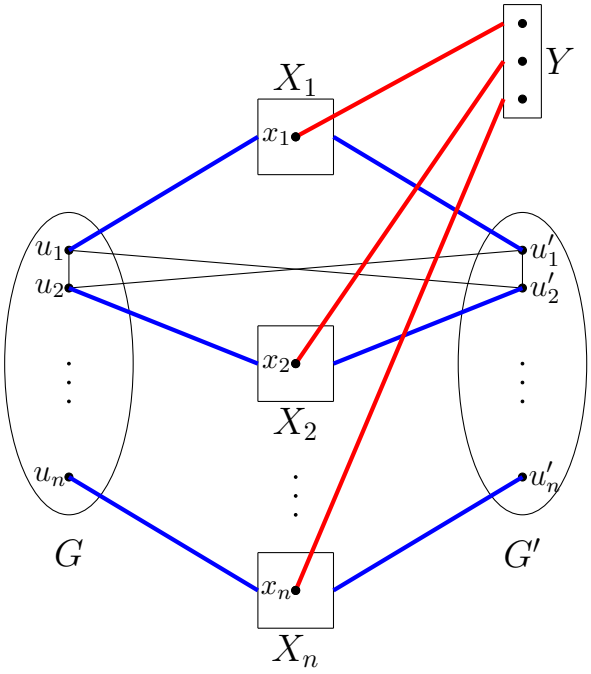


图4： G^*构造的示意图。

To 顶点 y_1、y_2 和 y_3，我们分别分配颜色 1、2 和 3。也就是说， s,

$$f^*(y_j) = j$$

对所有 $j \in \{1, 2, 3\}$。

接下来需要为独立集 A_is 和 B_is 的顶点分配颜色。注意，对于每个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$，集合 A_i 恰好有 $(n-1)$ 个顶点，其中每个顶点都恰好与 x_i、y_1、y_2、y_3、u_i、u'_i 这六个顶点相邻，因此它们两两构成假孪生点。此外，注意到顶点 x_i、y_1、y_2、y_3 在 f^* 下分别获得了四种不同的颜色，即 c_i、1、2、3。因此，为了事后维持邻点定位染色的条件，我们将使用集合 $K \setminus \{c_i, 1, 2, 3\}$ 中的颜色，为 A_i 的顶点分配不同的颜色。具体而言， A_i 中顶点的 f^* 值被确定为以下集合论方程的任意有效（固定）解：

$$\{f^*(x_{i,1}), f^*(x_{i,2}), \cdots, f^*(x_{i,n-1})\} = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\} \setminus \{c_i\}.$$

类似地，集合 B_i 恰有（$n+2$）个顶点，其中每个顶点都恰好与一个顶点相邻，即 x_i，因此它们两两互为假孪生点。为事后维持邻域定位着色的条件，当 f^*（x_i） $= c_i$时，我们将为 B_i 中的顶点赋予互不相同的颜色，所用颜色取自集合 $K \setminus \{c_i\}$。具体而言， f^* 对于 B_i 中顶点的取值，确定为以下集合论方程的任一有效（固定）解：

$$\{f^*(x'_{i,1}), f^*(x'_{i,2}), \cdots, f^*(x'_{i,n+2})\} = K \setminus \{c_i\}.$$

接下来，我们将证明 f^* 是 G^*的邻居定位（$n+3$）-着色。为此，我们将证明具有相同颜色的顶点彼此不相邻，且邻居可区分。

• 首先，我们将处理对于某个 $j \in \{1,2,3\}$获得颜色 j 的顶点。注意，获得颜色 j 的唯一顶点是原图 G中的某些顶点、来自 Y的顶点 y_j，以及对于每个 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$， B_i中恰好一个顶点，例如 b_i。

由于 f^* 是 G的 3-着色 f 的扩展， G 中具有相同颜色的任意两个顶点都不相邻。它们也不与 Y 中的顶点相邻。此外， B 中的顶点均不与 G 或 Y中的任何顶点相邻。因此，在 f^* 下具有颜色 j 的 G^*中的顶点彼此独立。

要观察到它们也是邻居可区分的，请注意， G中颜色为 j 的一个顶点（例如 u_p）将除 $i=p$之外的所有 c_i作为其颜色邻点。此外，由于 G 是连通的，u_p 至少有一个来自 $\{1,2,3\}$ 的颜色邻点。这意味着，u_p 的颜色邻点集合为

$$N_{f^*}(u_p) = (\{c_1, c_2, \cdots, c_n\} \setminus \{c_p\}) \cup (S \setminus \{f(u_p)\})$$

其中 S 是 $\{1,2,3\}$的非空真子集。y_j 与 A_i中的所有顶点以及顶点 x_i相邻，因此将所有 c_i 作为其颜色邻点。由于 y_j 除上述提及的顶点外没有其他邻点，y_j 的颜色邻点集合恰好为

$$N_{f^*}(y_j) = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}.$$

此外，顶点 b_i 仅与顶点 x_i相邻，这意味着 b_i 的同色邻点集合为

$$N_{f^*}(b_i) = \{c_i\}.$$

由此可直接推出，具有颜色 j 的顶点两两邻居可区分。

• 接下来，我们将处理对于某个 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$，被赋予颜色 c_i的顶点。注意，唯一被赋予颜色 c_i 的顶点是：来自 G'的u_i' 、来自构件 X_i的顶点 x_i ，以及对于所有 $p \neq i$， A_p （分别为 B_p）中恰好一个顶点，记作 a_p （分别为 b_p）。

根据 G^*的构造，我们知道 u_i' 与 x_i 不相邻。此外，只要 $p \neq i$， u_i' 和x_i 都与 A_p 和 B_p中的顶点不相邻。并且，对于所有 p和$q \in \{1,2,\cdots,n\}$，集合 A_p与 B_q中的顶点之间都没有边。因此，我们证明了 G^* 中被赋予颜色 c_j 的顶点构成一个独立集。

要注意到它们同样是邻居可区分的，只需注意顶点 u_i' 与 G 中的一些顶点相邻，因为 G 是连通的。然而，根据该构造， u_i' 不与 G 中那些被赋予颜色 $f(u_i)$ 的顶点相邻。顶点 u_i 也与 G' 中的一些顶点以及 A_i 中的所有顶点相邻。由于除 u_i' 外， G' 中的所有顶点都使用集合 $\{c_1, c_2, \cdots, c_n\} \setminus \{c_i\}$ 中的颜色进行着色，并且集合 $\{c_1, c_2, \cdots, c_n\} \setminus \{c_i\}$ 中的所有颜色都用于 A_i 中的顶点，因此可以说， u_i' 的颜色邻居集合为

$$N_{f^*}(u_i') = (\{c_1, c_2, \cdots, c_n\} \setminus \{c_i\}) \cup (S \setminus \{f(u_i)\})$$

其中， S 是 $\{1,2,3\}$ 的非空真子集。顶点 x_i 恰好与 A_i、B_i 和 Y 中的顶点相邻。这意味着， x_i 的颜色邻居集合为

$$N_{f^*}(x_i) = K \setminus \{c_i\}.$$

此外， b_p 只有一个同色邻点，即c_p，而a_p 的同色邻点集合为

$$N_{f^*}(a_p) = \{1, 2, 3, c_p\}.$$

这些观察结果直接表明，具有 c_i 颜色的顶点两两邻点可区分。

这证明了 f^* 确实是 G^*的邻域定位（$n+3$）-着色。 □

引理 14. 设 G是一个具有 n个顶点的连通图。若 G^*存在邻域定位（$n+3$）-着色，则 G 存在 3-着色。

证明。假设 G^* 存在一个使用颜色集 $K=\{1,2,3,c_1,c_2,\cdots,c_n\}$的邻域定位（$n+3$）-着色 f。由于顶点 y_1、y_2和 y_3具有相同的开邻域，因此在 G^*的任意邻域定位（$n+3$）-着色 f 下，必须为这三个顶点赋予三种不同的颜色。不失一般性，设 f（y_1）为 $=1$，f（y_2）为 $=2$，且 f（y_3）为 $=3$。

对于每个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，B_i 中都有 $(n+2)$ 个度为一的顶点，它们都与 x_i 相邻。因此，B_i 中的顶点必须使用 $(n+2)$ 种不同的颜色。注意，$f(x_i)\notin\{1,2,3\}$，因为它与 Y 中的所有顶点都相邻。因此，x_i 必须使用其中一种颜色，不妨称为 $c\in\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$。此外，$x_i$ 的所有颜色邻居组成的集合为 $N_f(x_i)=K\setminus\{c\}$。因此，为了使邻点可区分，只要 $i\neq j$，x_i 和 x_j 就必须使用不同的颜色。这将迫使 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 中的顶点使用与 $\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ 不同的颜色。因此，不失一般性，我们可以假设对所有 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$f(x_i)=c_i$。

由于 A_i 的（$n-1$）顶点都与顶点 x_i 相邻，而该顶点已被赋予颜色c_i；并且 Y 的所有顶点都已被赋予颜色 1、2 和 3，因此它们不能获得集合 $\{1,2,3,c_i\}$ 中的颜色。此外，由于 A_i 的顶点是假孪生点，它们必须获得互不相同的颜色。这意味着 A_i 的顶点必须获得集合 $\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}\setminus\{c_i\}$ 中的（全部）颜色。

由于 u_i 和 u_i' 与 A_i的所有顶点都相邻，因此它们不能获得集合 $\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}\setminus\{c_i\}$ 中的颜色。换言之，u_i 和 u_i' 只能获得集合 $\{1,2,3,c_i\}$ 中的颜色。由于 u_i 和u_i' 是假孪生点，它们不能获得相同的颜色。因此，它们中的一个必须获得集合 $\{1,2,3\}$ 中的颜色。如果 u_i 获得颜色 c_i，且 f（u_i'）$\in\{1,2,3\}$，那么我们交换 u_i 和 u_i' 的颜色，使得我们有 f（u_i'）$=c_i$ 和 f（u_i）$\in\{1,2,3\}$。由于 u_i 和 u_i' 是假孪生点，这不会影响 G^* 的邻域定位着色。因此，将 f 限制在诱导子图 G 上，就会得到 G 的 3-着色。 □

引理15：设 G 是一个含有 n 个顶点的连通图。如果 G admits 3-着色，则图G^* admits 定位（$n+3$）-着色。

证明。由于每个邻域定位着色也是一种定位着色，因此结论由引理13立即得到。

□

引理16：设 G是一个含有 n个顶点的连通图。如果 G^* admits 定位（$n+3$）-着色，则 G admits 3-着色。

证明。注意，在任意定位着色下，假孪生点必须获得不同的颜色，因为它们到每个顶点的距离都相同。设 G^* admits 定位（$n+3$）-着色 f，使用颜色集 $K=\{1,2,3,c_1,c_2,\cdots,c_n\}$。由于顶点 y_1、y_2和 y_3两两为假孪生点，因此它们必须获得不同的颜色，分别记为 f（y_1）$=1$、f（y_2）$=2$ 和 f（y_3）$=3$。

有$(n+2)$个度为1的顶点位于 B_i中，对所有 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$而言，它们两两为假孪生点。因此，它们必须获得$(n+2)$种不同的颜色。此外，$f(x_i)\notin\{1,2,3\}$，因为 x_i与 Y的所有顶点相邻。令 $c\in\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ 为赋予 x_i的颜色，其中 c没有出现在B_i中。如果 x_i 和x_j $(i\neq j)$获得相同的颜色 c，那么它们便无法度量区分，因为它们

与所有其他颜色类的距离均为一。因此， x_i 和x_j 必须获得不同的颜色。这意味着顶点 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 必须获得不同于 $\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$的颜色。不失一般性，令 $f(x_i) = c_i$ 对所有 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$成立。

注意到， A_i 的（$n-1$）个顶点都与顶点 x_i相邻，而 x_i已被赋予颜色 c_i；同时，它们也都与 Y的所有顶点相邻，而后者分别被赋予了颜色1、2和3。因此，它们不能从颜色集 $\{1, 2, 3, c_i\}$中选择颜色。此外，由于 A_i的顶点两两为假孪生点，它们必须接受彼此不同的颜色。这意味着 A_i 的顶点必须接受颜色集 $\{c_1, c_2, \cdots, c_n\} \setminus \{c_i\}$中的（全部）颜色。

由于 u_i 和 u_i' 与 A_i的所有顶点相邻，因此它们不能从颜色集$\{c_1, c_2, \cdots, c_n\} \setminus \{c_i\}$中选择颜色。允许赋予 u_i和 u_i'的唯一颜色集是 $\{c_i, 1, 2, 3\}$。此外，由于 u_i 和 u_i' 是假孪生点，它们必须接受不同的颜色。因此，其中一个必然要从颜色集 $\{1, 2, 3\}$中选择颜色。如果 u_i接受颜色 c_i，且 $f(u_i') \in \{1, 2, 3\}$，那么我们交换 u_i和 u_i'的颜色，从而得到 $f(u_i') = c_i$和 $f(u_i) \in \{1, 2, 3\}$。由于 u_i和 u_i'是假孪生点，这不会影响 G^*的邻域定位着色。因此，将着色 f 限制在诱导子图 G 上，即可得到 G的3-着色。 □

引理17。若 G是最大度为4的连通平面图，则 G^* 的平均度至多为7。

证明。设 G 是一个有 n 个顶点、最大度为4的连通平面图。则 G 有$m \leq 2n$ 条边。首先统计 G^*中的顶点数 n^*。 G 和 G'中各有 n 个顶点， n 个构件 X_i中各有（$2n+2$）个顶点，集合 Y中有3个顶点。因此，我们有

$$n^* = (n+n) + n(2n+2) + 3 = 2n^2 + 4n + 3.$$

接下来，统计 G^*中的边数 m^*。 G 和 G'中各有 m 条边， G与 G'的顶点之间有$2m$ 条边，每个顶点 u_i（分别为 u_i'）与构件 X_i之间有（$n-1$）条边， X_i中的每个构件有（$2n+1$）条边，每个 X_i 与 Y之间有 $3n$ 条边。因此，我们有

$$m^* = (m+m) + 2m + 2n(n-1) + n(2n+1) + 3n^2 = 7n^2 - n + 4m \leq 7n^2 + 7n.$$

因此， G^* 是一个平均度至多为7的图。 □

引理18. 如果 G 是一个最大度为4的连通平面图，那么 G^* 的最大平均度至多为20。

证明。设 G 是一个具有 n 个顶点且最大度为4的连通平面图。我们将考察 G^*的一个边分解。

设 G_1^* 是由 G^* 中 G 和 G'的顶点诱导的子图。由于 G 的最大度为4， G_1^* 的最大度为8。因此，G_1^* 的最大平均度至多为8。

设G_2^* 是从 G^* 中删除 G' 和 Y的顶点以及 G的边后得到的图。这是一个无三角形平面图，因此其最大平均度小于4。

设G_3^* 是由 G' 的顶点和 X_i以及顶点 y_1构成的图。此外， G_3^* 还包含 G' 的顶点与 X_i之间的边，以及顶点 y_1与 X_i之间的边。即使如此，这仍是一个无三角形平面图，因此其最大平均度小于4。

令G_4^* 为由顶点 y_2、 y_3以及 X_i的顶点构成的图。此外，G_4^* 还包含连接顶点 y_2、 y_3 与 X_i 中各顶点的边。这也是一个无三角形平面图，因此其最大平均度小于4。

注意到，子图 G_1^*、 G_2^*、 G_3^*和 G_4^* 的边合在一起正好构成了 G^* 的全部边。因此，我们可以说， G^* 的最大平均度至多为 20。 □

引理 19. 如果 G 是一个最大度为4的连通平面图，那么图 G^* 是 4-部图。

证明。根据四色定理， [4], 每个平面图都可以进行 4-着色。因此，图 G存在一个 4-着色，记为 f。我们希望将 f扩展为 G^*的一个 4-着色 f^*。由于可进行 4-着色与为 4-部图是等价的，只要我们能按上述方式扩展 f，就能完成证明。

如前所述， f^*是 f的一个扩展，因此，在 f 下分配给 G 中各顶点的颜色保持不变。此外，对于 G中的一个顶点，我们为其在 G'中的假孪生点分配相同的颜色。换言之，我们有

$$f^*(u_i') = f^*(u_i) = f(u_i)$$

对所有 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$均成立。

接下来，如果 $f^*(u_i) = 1$，那么我们将分配 $f^*(x_i) = 1$。另一方面，如果 $f^*(u_i) \neq 1$，那么我们将分配 $f^*(x_i) = 2$。此外，如果 $f^*(x_i) = 1$（分别为 $f^*(x_i) = 2$），我们将颜色 2（分别为 1）分配给 A_i和 B_i的所有顶点。最后，我们为 Y的所有顶点分配颜色 3。注意，这构成了 G^*的一个 4-着色。

□

定理5的证明。验证给定的着色是否为邻域定位着色（分别为定位着色）很容易，因此该问题属于NP。

另一方面，引理13、14表明， NL-Coloring 问题是NP-困难的，而引理15、16表明，对于 G^*其中 G 为连通图的类型的图， L-Coloring 问题是NP-困难的。此外，由于即使将 3-Coloring 问题限制在最大度至多为4的连通平面图族中，该问题仍然是NP-困难的，并且引理17、18和19表明，在这种条件下， G^* 的平均度至多为7、最大平均度至多为20，且为4-部图，结论得证。 □

6 结论

在本文中，我们研究了稀疏图的邻域定位着色。首先，我们研究了相关参数 $\chi(G)$ $\chi_L(G)$ 与 $\chi_{NL}(G)$ 之间的差距可以有多大。随后，我们根据稀疏图的邻域定位色数，得到了其顶点数的一个上界。此外，我们通过给出几乎达到该上界的图的构造，证明了该界是紧的。进一步地，我们证明，对于平均度至多为7、最大平均度至多为20且为4-部图的稀疏图，L-Coloring 和 NL-Coloring 问题是NP完全的。基于我们的工作，并且总体上结合与该主题相关的问题，我们希望列出一系列开放问题。

问题 1. 邻域定位色数为 k 的平面图的最大阶的紧界是多少？界 $n = \mathcal{O}(k^7)$ 是紧的吗?

问题 2. 在什么条件下，图的邻域定位色数等于其定位色数（分别为色数）？

问题 3. 删除图的一个顶点（分别为一条边）后，邻域定位色数最多会增加或减少多少?

问题4。对于其他受限的稀疏图类，例如平面图或最大度有界的图（例如次立方图），L-Coloring 和 NL-Coloring 问题是否为NP-困难问题?

问题5。由定理4中的构造得到的下界能否进一步改进，使其更接近定理3给出的上界？

致谢：我们感谢 IIT Dharwad 计算机科学与工程系的 Koteswararao Kondepu 教授就可能的应用提出宝贵建议。本研究得到以下项目的部分支持：“MA/IFCAM/ 18/39”、“SRG/2020/001575”、“MTR/2021/000858”、“NBHM/RP-8 (2020)/Fresh”以及“NSOU项目编号 Reg/0520，日期为2024年6月7日”。第一作者和第二作者的研究部分由法国国家研究署监管的公共资助项目提供支持，该项目属于“未来投资”（“Investissements d’Avenir”）计划，资助来源包括 IMobS3卓越实验室（ANR-10-LABX-0016）、IDEX-ISITE倡议 CAP 20-25（ANR-16-IDEX-0001）以及 ANR项目 GRALMECO（ANR-21-CE48-0004）。

参考文献

[1] L. Alcon, M. Gutierrez, C. Hernando, M. Mora, and I. M. Pelayo. 伪树的邻域定位色数。arXiv预印本 arXiv:1903.11937, 2019年。[2] L. Alcon, M. Gutierrez, C. Hernando, M. Mora, and I. M. Pelayo. 图的邻域定位染色。《理论计算机科学》, 806:144–155, 2020年。[3] L. Alcon, M. Gutierrez, C. Hernando, M. Mora, and I. M. Pelayo. 树和单圈图的邻域定位色数。Discussiones Mathematicae Graph Theory, 43(3):659–675, 2023年。[4] K. Appel, W. Haken, and J. Koch. 每个平面图都可四色着色。Illinois Journal of Mathematics, 21:439–567, 1977年。[5] L. Babai. 强正则图规范标记的复杂性。《SIAM计算杂志》, 9(1):212–216, 1980年。[6] A. Behtoei and M. Anbarloei. 图的联结的定位色数。《伊朗数学学会通报》, 40(6):1491–1504, 2014年。[7] A. Behtoei and B. Omoomi. Kneser图的定位色数。《离散应用数学》, 159(18):2214–2221, 2011年。[8] A. Behtoei and B. Omoomi. 图的笛卡尔积的定位色数。《组合学论丛》, 126:221–235, 2016年。[9] B. Bollob´as and A. D. Scott. 关于分离系统。《欧洲组合学杂志》, 28(4):1068–1071, 2007年。[10] D. Chakraborty, F. Foucaud, S. Nandi, S. Sen, and D. K. Supraja. 图的邻域定位染色的新界与构造。载于《算法与离散应用数学：第九届国际会议，CALDAM 2023》，印度甘地讷格尔，2023年2月9–11日，会议论文集，第121–133页。Springer, 2023年。[11] E. Charbit, I. Charon, G. D. Cohen, O. Hudry, and A. Lobstein. 二部图中的判别码：界、极值基数与复杂性。《通信数学进展》, 2(4):403–420, 2008年。

[12] G. Chartrand, D. Erwin, M. A. Henning, P. J. Slater, and P. Zhang. 图的定位色数。《组合学及其应用研究所通报》, 36:89 – 101, 2002年。[13] G. Chartrand, D. Erwin, M. A. Henning, P. J. Slater, and P. Zhang. 定位色数为 n的图。《离散数学》, 269(1-3):65–79, 2003年。[14] B. S. Chlebus and S. H. Nguyen. 关于为两个属性寻找最优离散化。载于第一届粗糙集与计算当前趋势国际会议论文集，第1424卷，第537–544页，柏林、海德堡，1998年。Springer柏林海德堡。[15] V. Chv´atal. Mastermind。《组合学》, 3(3):325–329, 1983年。[16] M. R. Garey, D. S. Johnson, and L. Stockmeyer. 若干简化的NP完全问题。载于第六届ACM计算理论年度研讨会论文集，第47–63页，1974年。[17] S. A. Goldman, R. L. Rivest, and R. E. Schapire. 二元关系与全序的学习。《SIAM计算杂志》, 22(5):1006–1034, 1993年。[18] F. Harary and R. Melter. 关于图的度量维数。《组合学论丛》, 2:191–195, 1976年。[19] C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, L. Alc´on, and M. Gutierrez. 邻域定位染色：图运算与极值基数。《离散数学电子笔记》, 68:131–136, 2018年。[20] R. M. Karp. 组合问题之间的可归约性。《计算复杂性》, 1:85–103, 1972年。[21] J. H. Kim, O. Pikhurko, J. H. Spencer, and O. Verbitsky. 随机图在一阶逻辑中有多复杂? 《随机结构与算法》, 26(1-2):119–145, 2005年。[22] Z. Krivohlava, S. Chren, and B. Rossi. 智能电网的故障与故障分类。《能源信息学》, 5(1):33, 2022年。[23] C.-K. Lee and Y.-J. Shin. 使用簇时频域反射测量法进行多芯电缆故障诊断。载于2018年IEEE国际仪器与测量技术会议（I2MTC）, 第1–6页。IEEE, 2018年。[24] D. A. Mojdeh. 关于图的邻域定位着色猜想。《理论计算机科学》, 922:300–307, 2022年。[25] B. M. E. Moret and H. D. Shapiro. 关于最小化测试集。《SIAM科学与统计计算杂志》, 6(4):983–1003, 1985年。[26] N. Rao. 基于图的系统运行诊断中的计算复杂性问题。《IEEE计算机学报》, 42(4):447–457, 1993年。[27] A. R´enyi. 关于有限布尔代数的随机生成元。《塞格德数学科学学报》, 22:75–81, 1961年。

[28] A. Seb˝o and E. Tannier. 关于图的度量生成集。《运筹数学》，29(2):383–393, 2004.
[29] P. J. Slater. 树叶。载于《第六届东南部组合数学、图论与计算会议论文集》，《数论会议录》第14卷，第549–559页，1975.[30] P. J. Slater. 图中的支配集与参照集。《数学与物理科学杂志》，22(4):445–455, 1988.[31] R. Ungrangsi, A. Trachtenberg, and D. Starobinski. 基于识别码的室内位置检测系统实现。载于《通信系统智能》，IFIP国际会议，I NTELLCOMM 2004，曼谷，泰国，2004年11月23–26日，论文集，《计算机科学讲义》第3283卷，第175–189页。Springer，2004.[32] D. B. West. Introduction to graph theory，第2卷。普伦蒂斯·霍尔，上萨德尔河，2001。