基于参数化非均匀边界条件的室内声学仿真降阶建模

Hermes Sampedro Llopis, [1,2,和] Cheol-Ho Jeong, [1] 以及 Allan P. Engsig-Karup[3]

[1] *Acoustic Technology Group, Department of Electrical and Photonics Engineering, Technical University of Denmark, Kongens Lyngby, Denmark*[2] *Rambøll Denmark, Copenhagen, Denmark*

[3] *Scientific Computing Section, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Technical University of Denmark, Kongens Lyngby, Denmark*

（日期：2023年2月1日）

在建筑设计中，快速仿真对于多设计变量和边界条件的迭代评估至关重要，有助于找到最佳声学条件。我们提出在真实室内声学场景中采用约化基方法（RBM），这些场景中的表面具有非均匀声学属性；该方法能够在室内声学仿真中快速评估不同表面采用不同吸声材料时的效果。研究表明，对于均匀边界条件，RBM 可将室内声学仿真的速度提高三个数量级。本研究主要考察 RBM 的两个方面：1）多样几何形状中的不同声源位置，例如正方形、矩形、L 形和不规则比例房间。2）二维和三维情况下的非均匀表面吸声：通过对表面的多种声学参数进行参数化，例如多孔材料的厚度、空腔深度，以及在频率无关（如硬表面）与频率相关的边界条件之间切换。数值实验结果表明，在三维情况下，与高保真数值求解器相比，仿真加速比超过两个数量级；所有频率倍频带中的混响时间变化均不超过一个最小可觉差。

[https://doi.org(DOI 编号)]

[XYZ]

页码： 1–11

arXiv:2301.13634v1 [cs.CE] 16 Dec 2022

I. 引言

室内声学仿真通常用于建筑设计阶段，根据房间的用途确定材料的最佳用量、选择和位置。不良的声学条件可能产生负面影响，例如工作效率降低[1,2],学习质量下降[3,4], 以及压力水平升高[5,6]。通过使用数值方法求解声波方程来执行室内声学仿真，例如有限差分时域方法（FDTD）[7], 有限元方法（FEM）[8] 或谱元方法（SEM）[9]，能够获得准确结果，因为所有重要的波动现象都可以纳入考虑。然而，与几何声学方法相比，这种方法的计算成本较高[10]。因此，目前的研究正积极寻求加快数值方法的方法，以便将其应用于建筑设计。常见策略包括采用模型降阶（MOR）[11], 在多核处理单元上进行并行计算[12], 以及近年来兴起的机器学习技术[13]。

有关各学科 MOR 领域最先进研究现状的综述可参见文献[14]。

降阶基函数方法（RBM）[11] 属于模型降阶技术的一类。它通过组合一组参数值变化所对应的不同解，利用偏微分方程（PDE）解中的参数依赖性。大型偏微分方程系统的问题被有效地降至低维子空间，以实现计算加速，并转换回原始问题规模[15–22]；然而，加速比取决于所关注的问题。近年来，模型降阶已被应用于一些声学应用[23–25]，以及许多不同领域，例如电磁学[26,27], 、计算流体动力学[28,29], 、热传递[30], 、振动声学[31–33] 等[34–38]，总体上证明了其能够有效降低计算负担。在室内空间设计阶段，使用带有参数化边界条件的基函数方法进行室内声学仿真，可以通过求解降阶系统，在多个参数变化的情况下利用较低计算成本的优势，从而探索各种声学条件，例如多孔材料的厚度、空气间隙距离等。如今，尽管模型降阶在加速方面具有巨大潜力，但将其应用于带边界参数化的室内声学仿真仍然较为少见。最近的一项研究[39] 提出了一种在

[a]hsllo@elektro.dtu.dk

时域中使用有限元法求解器的模型降阶策略，该策略采用Krylov子空间算法，并实现了11–36倍的加速比。该研究针对一个简单的计算域，其中所有表面均假设为刚性边界，只有地板采用表面阻抗进行建模。此外，另一项研究展示了基函数方法在室内声学应用中的潜力，但仅针对简化的均匀边界条件[40]。在线阶段实现了两到三个数量级的加速比。

关于具有现实非均匀边界条件的降阶基方法（RBM）的研究在现有文献中十分匮乏；在这类边界条件下，吸声材料以非均匀方式分布于各个表面。例如，教室通常具有高吸声天花板，且一侧墙壁的后表面和窗户附近放置有散射物体。本研究探讨如何在具有非均匀边界条件的现实环境中有效应用降阶基方法（RBM）、降阶基方法（RBM）的性能如何随房间几何形状和声源/接收器位置变化，以及在此类条件下预期能够实现何种加速效果。

本研究的创新之处在于构建并分析一种适用于现实场景的降阶基方法（RBM）策略，重点关注两个方面：一是降阶基方法（RBM）在各种房间形状和声源位置下的性能，二是在包含大量以非均匀方式分布的声学材料参数时的性能。首先，本研究针对一个复杂的二维情形提出概念性概念验证，因为这样可以降低计算负担。其次，研究分析了两个三维房间。本研究对未来工作至关重要，例如将该方法扩展至大型建筑项目，以拓展降阶基方法（RBM）的应用。

在第 II 节中，将介绍控制方程、边界条件、约化基方法和误差度量，以及不同的计算域和仿真参数。第 III 节将介绍数值实验及其结果，并在第 IV节中进行分析和讨论。

II. 方法

本节概述本研究所采用的方法和仿真条件。作为参考模型所使用的全阶模型（FOM）求解器以及降阶模型（ROM）的更详细描述，见前期工作[40]。

A. 控制方程和边界条件

我们考虑拉普拉斯域中的声波方程

$$s^2 p - c^2 \Delta p = 0, \tag{1}$$

其中 $p(\boldsymbol{x},\ t)$ 表示声压，$\boldsymbol{x} \in \Omega$ 是计算域 Ω 中的位置 $\subset \mathbb{R}^d$，其中 $d = \{2,3\}$，t 是区间 $(0,\ T]$ s 内的时间，且 c是声速（$c = 343$ m/s）。方程（1）使用谱元法公式进行离散化，该公式广为人知，其概述可参见[9,41,42]。用拉普拉斯变换表示的最终公式计算域表示为

$$\left(s^2\mathcal{M} + c^2\mathcal{S} + sc^2\frac{\rho}{Z_s}\mathcal{M}_\Gamma\right)\mathbf{p} = 0, \tag{2}$$

其中，$\mathcal{M}$ 表示质量矩阵，$\mathcal{S}$ 是刚度矩阵，ρ 是介质密度（$\rho = 1.2\text{kg/m}^3$），Z_s 是表面阻抗。需要注意的是，阻抗边界被考虑在内，将边界域表示为 Γ。

频率相关边界条件通过辅助微分方程法（ADE）实现[9,43,44]。多孔吸声体的表面阻抗采用Miki模型进行建模[45] 并结合传递矩阵法[46]，再通过向量拟合算法将其映射为六极点有理函数[47]，从而表面导纳 $Y_s = 1/Z_s$可写成有理函数，并通过部分分式分解表示[44]。然后，系统（2）可表示为线性方程组，并使用稀疏直接求解器求解，如[9,40]

$$\mathbf{K}\mathbf{p} = 0, \quad \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \tag{3}$$

其中，$\mathbf{K}$ 表示式（2）中的算子，且 N对应自由度（DOF）。请注意，若出于实现目的将系统拆分为实部和虚部，则算子的大小为$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$[40, 48]。系统（2）通过具有空间分布$\sigma_g$ 的高斯脉冲进行初始化，该脉冲通过添加右端项来确定所覆盖的频率范围 $s\mathcal{M}p_0$，其中 p_0 是时域中的初始声压状态。

拉普拉斯域中的解最终通过 Weeks方法[40,49]变换到时域。

B. 降阶模型

采用RBM的目的是在确保一定精度的同时，大幅减小问题的规模。具体而言，自由度会减少；当RDOF $\ll$ 自由度，其中RDOF是应用RBM后数值格式中相应的自由度。RBM由两个阶段组成。首先，将偏微分方程或其离散形式（2）中的一个或多个变量选作参数，例如 Z_s，这些参数取值覆盖一个离散范围。随后，在第一阶段，即所谓的离线阶段，对参数空间进行探索，通过收集感兴趣范围内不同参数值对应的全阶模型解，生成问题相关基。利用所生成的基进行Galerkin投影，从而降低问题的维数。在第二阶段，即所谓的在线阶段，对于离线阶段未探索过的新参数值，以显著更低的计算成本求解降阶问题。离线阶段通常计算成本较高，因为它需要多次全阶模型解

，这些解能够捕捉参数变化中的相关信息，并有助于生成代表该变化的基函数。计算问题规模的缩减伴随着基的截断。求解器在拉普拉斯域中表述，以确保降阶模型解的稳定性[48]。基的生成可视为一种基于本征正交分解（POD）的数据驱动技术。该方法依赖于辛分解（PSD）和辛Galerkin投影。具体而言，应用[50]中介绍的余切提升方法，该方法在将问题拆分为实部和虚部并分别求解时，能够保持算子的结构。降阶模型解表示为基函数 ϕ_i 及其系数 a_i的展开式，即

$$p_{rom} = \mathbf{\Phi a}, \tag{4}$$

其中 $\Phi_{ij} \equiv \phi_i(x_j)$。将 (4) 代入 (3) 后可得到一个类似的问题，此时系统针对系数 **a** 求解

$$\mathbf{K}_{rom}\mathbf{a} = 0, \tag{5}$$

其中 $\mathrm{K}_{rom} = \mathbf{\Phi}_{cl}^T \mathrm{K} \mathbf{\Phi}_{cl}$ ， $\mathbf{\Phi}_{cl}$ 表示构造的辛基，其形式为

$$\mathbf{\Phi}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

此外，降阶算子也可写为

$$\mathbf{K}_{rom} = s^2 \mathbf{\Phi}^T \mathcal{M} \mathbf{\Phi} + c^2 \mathbf{\Phi}^T \mathcal{S} \mathbf{\Phi} + sc^2 \frac{\rho}{Z_s} \mathbf{\Phi}^T \mathcal{M}_\Gamma \mathbf{\Phi}, \tag{7}$$

在线阶段可以选择一个新的参数值（例如， Z_s）。基函数的生成过程如下：首先，将离线阶段获得的所有全阶模型解收集到快照矩阵[40] $\boldsymbol{S}_N \in \mathbb{R}^{N \times 2N_s}$中，其中 N 已在上文描述， N_s 是由 Weeks方法确定的复频率采样点数量[48]。可以使用基于奇异值分解（SVD）的适当正交分解（POD）技术对$\boldsymbol{S}_N$进行分解，以获得相应的基函数，定义为$\mathbf{\Phi} = [U_1, ..., U_{N_{rb}}] \in \mathbb{C}^{N \times N_{rb}}$。降阶基通过截断该基得到，截断依据是奇异值的衰减速率。

奇异值衰减显示了基之间的能量分布，为问题的降阶程度提供信息。其定义为

$$E/E_0 = \frac{\mathrm{diag}(\sigma_1, .., \sigma_N)}{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i}, \tag{8}$$

其中， $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma, .., \sigma_N)$ 通过 SVD 获得，其中 $S = U\Sigma V^T$。可以选择基的数量，使投影误差小于给定的容差 ϵ_{POD}

$$I(N_{rb}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_{rb}} \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2} \geq 1 - \epsilon_{POD}, \tag{9}$$

其中 N_{rb} 表示基函数的数量， $I(N_{rb})$ 表示由前者捕获的全阶模型解集合能量的百分比。对于给定的ϵ_{POD}，能量衰减越快，所需的基数量就越少，因此有望实现更好的问题约化。约化伴随着基的截断，这决定了 (7) 的大小为 N_{rb}。

C. 误差度量

本研究考虑两类误差，以比较降阶模型与全阶模型。首先，介绍基于均方根（rms）声压的相对误差

$$\epsilon_{rel} = \frac{p_{rms_{ROM}} - p_{rms_{FOM}}}{p_{rms_{FOM}}} \times 100 \quad (\%). \tag{10}$$

其次，考虑以 dB 表示的频域误差

$$\Delta L(f) = 20 \log_{10} \left| \frac{p_{FOM}(f)}{p_{ROM}(f)} \right|, \tag{11}$$

其中， p_{FOM} 和 p_{ROM} 分别表示全阶模型和降阶模型沿频谱的声压。

降阶模型的性能以加速比（sp）衡量，其定义为

$$sp = \frac{CPU_{FOM}}{CPU_{ROM}}, \tag{12}$$

其中， CPU_{FOM}和 CPU_{ROM}分别对应全阶模型和降阶模型的计算时间。

D. 测试房间和仿真条件

首先，III A节讨论了具有多种二维几何形状和不同声源位置的降阶模型，如图1所示。本文考虑了四种不同的几何形状和两个声源位置：一个位于角落，另一个位于中心。首先介绍一个边长为 4×4 m^2 的正方形区域，声源分别位于$(s_{x_1}, s_{y_1})_{SQ}$ =(0.2, 0.2) m（SQ1）和$(s_{x_2}, s_{y_2})_{SQ}$ =(2, 2) m（SQ2）（图1a）。其次，考虑一个 4×2.5 m^2 的矩形区域，其中声源位于$(s_{x_1}, s_{y_1})_{RC}$ =(0.2, 0.2) m（RC1）和$(s_{x_2}, s_{y_2})_{SQ}$ =(2, 1.25) m（RC2）（图1b）。第三，考虑一个L形房间，其长边为4 m、短边为2 m，且仅有一个位于角落的声源，位置为$(s_x, s_y)_{LS}$ =(0.2, 0.2) m（LS1）（图1c）。最后，给出了尺寸为 10×1 m^2 的走廊形状，其中声源位于$(s_x, s_y)_{CO}$ =(0.2, 0.2) m（CO1）（图1d）。最大单元尺寸根据高阶三角形单元（$P = 4$）选定，并采用每个波长4个点（PPW），由此得到 $f_u = 2.8$kHz的上限频率，约为2 kHz倍频带的上限截止频率。模型以高斯脉冲作为初始条件激励， $\sigma_g = 0.1$ m[2][51]。每种房间类型和声源位置对应的降阶模型

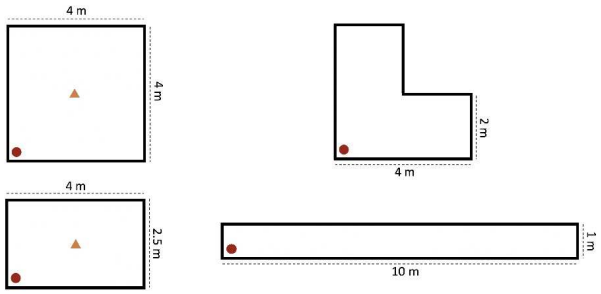


图1. 几何形状和声源位置。

通过对所有侧面的表面阻抗进行采样构建，采样值如下：$Z_s = [500, 5250, 10000]$ Nsm^{-3}。

其次，第 IIIB 讨论了针对声学材料非均匀分布的若干二维降阶模型；本研究将其称为非均匀边界条件。考虑一个具有非均匀边界条件的二维矩形房间（4 m ×2.5 m），其仿真参数与之前相同。声源位于 $(s_x, s_y) = (3, 1.2)$ m，接收器位于 $(r_x, r_y) = (1, 1.2)$ m。此外，本节还构建了一个上限频率为$f_u = 4$ kHz 的附加降阶模型。

第三，对于第 III C 节，考虑了两个三维模型。文中介绍了一个边长为 1 m 的立方体（组件模态综合）封闭空间，其中六个表面中的三个采用参数化描述。仿真采用多项式阶数 $P = 4$，使用$N = 35937$ 单元。假设 $PPW = 4$，上限频率为 $f_u = 2.8$ kHz。模型以高斯脉冲作为初始条件激励，$\sigma_g = 0.1$ m^2 位于 $(s_x, s_y, s_z)_{CB}$ =(0.7, 0.5, 0.5) m。接收器位于 (r_x, r_y, r_z) =(0.25, 0.25, 0.50) m。另考虑一个长宽高比例（Guy an约简，GR）为 1.9:1.4:1 的三维房间，以确保房间模态均匀分布[52]。房间尺寸为 (L_x, L_y, L_z) =(1.615, 1.190, 0.850) m，声源位于 $(s_x, s_y, s_z)_{GR}$ = (1.200, 0.600, 0.425) m，接收器位于 (r_x, r_y, r_z) =(0.500, 0.200, 0.425) m。同样，采用多项式阶数 $P = 4$，以及 $N = 35937$。假设空间分辨率约为最高频率（$f_u = 1.7$ kHz）对应的 4PPW。

E. 非均匀边界参数化

首先，在IIIB节中考虑二维域。天花板（CE）采用多孔吸声体进行建模。影响多孔吸声体吸声特性的关键参数包括流阻率、厚度和空气腔深度[53]。为对多孔天花板进行参数化，离线阶段模拟了具有 $\sigma_{mat} = [10, 30, 50]$ kNsm^{-4}、d_{mat} =[0.02, 0.12, 0.22] m 和 $d_0 = [0.02, 0.12, 0.22]$ m 的全阶模型。地板（FL）设计有两种不同方案：一种是采用与频率无关边界建模的硬表面，另一种是覆盖地毯并将其建模为多孔层。与频率无关的

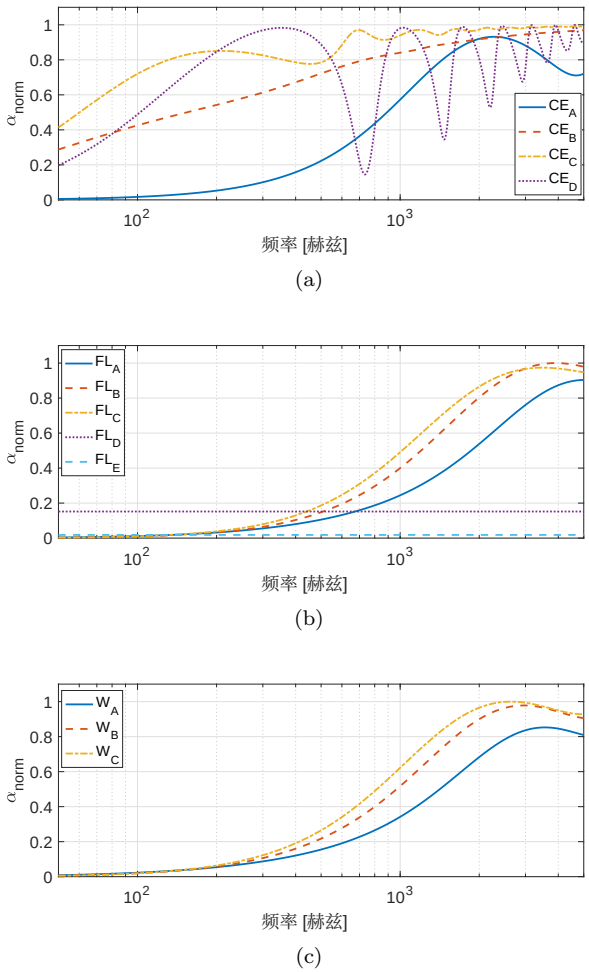


图2. 吸声系数。a）天花板（CE），b）地板（FL），c）墙壁（W）。

边界条件的范围为 $Z_s = [10, 50, 90]$kNsm^{-3}，而用于模拟地毯的频率相关边界条件采用固定厚度 0.02 m、变化的 $\sigma_{mat} = [10, 30, 50]$ kNsm^{-4}进行计算。最后，左侧墙壁（WL）和右侧墙壁（WR）采用多孔板建模，其中 $d_{mat} = 0.03$ m、$d_0 = 0$m 和 $\sigma_{mat} = [5, 12, 19]$ kNsm^{-4}。图2 展示了每种表面吸声性最强和最弱情况下的吸声系数，相应的参数值见表I。

构建降阶模型的一种方法，是针对参数值的每种组合分别进行全阶模型仿真。为涵盖非均匀边界的变化，总共可能需要进行 3^7 （2187）次全阶模型仿真，这远远超出实际运行时间的限制。因此，我们仅选择了 3×7 （= 21）次全阶模型仿真，具体见附录（表A1），其中列出了每次全阶模型仿真所选取和固定的参数值。表格的行对应 21 次仿真，列则对应

表 I. 图中所示吸声系数的参数值2。

	σ_{mat} [kNsm^{-4}]	d_{mat} [m]	d_0 [m]	Z_s [kNsm^{-3}]
$\mathbf{CE}_A$	10	0.02	0.02	-
$\mathbf{CE}_B$	30	0.12	0.12	-
$\mathbf{CE}_C$	10	0.12	0.22	-
$\mathbf{CE}_D$	30	0.02	0.22	-
$\mathbf{FL}_A$	10	0.02	0	-
$\mathbf{FL}_B$	30	0.02	0	-
$\mathbf{FL}_C$	50	0.02	0	-
$\mathbf{FL}_D$	-	-	-	10
$\mathbf{FL}_E$	-	-	-	90
$\mathbf{W}_A$	5	0.03	0	-
$\mathbf{W}_B$	12	0.03	0	-
$\mathbf{W}_C$	19	0.03	0	-

表 II. 用于构建二维降阶模型的参数值。降阶模型中包含的变化参数以 * 标记。

	CE	FL	WL	WR
σ_{mat} $[kNsm^{-4}]$	[10, 30, 50]*	[10, 30, 50]*	[5, 12, 19]*	[5, 12, 19]*
d_{mat} $[m]$	[0.02, 0.12, 0.22]*	0.02	0.03	0.03
d_0 $[m]$	[0.02, 0.12, 0.22]*	0	0	0
Z_s [kNsm^{-3}]	-	[10, 50, 90]*	-	-

表II中所示的不同参数值。所选参数以 X 标记。据作者所知，本研究首次报告了在如此复杂的房间声学设置下的 MOR 性能，因此有助于确立该方法的可行性。

其次，第 III C 节讨论了立方体和良好比例形状的三维域。两种情况下，天花板 (CE) 均建模为厚度固定为 $d_{mat} = 0.05$ m 的多孔声学材料，其中 $\sigma_{mat} = [10, 30, 50]$kNsm^{-4} 和 $d_0 = [0.02, 0.12, 0.22]$ m 为参数。地板 (FL) 建模为与频率无关的边界，参数为 $Z_s = 50$kNsm^{-3}。东墙 (WE) 建模为与频率无关的砖表面，参数为 $Z_s = 50$ kNsm^{-3}。南墙 (WS) 不作参数化处理，其表面覆盖多孔材料，其中 $\sigma_{mat} = 7$ kNsm^{-4}、 $d_{mat} = 0.02$ m 和 $d_0 = 0$ m。西墙 (WW) 建模为厚度为 $d_{mat} = 0.05$ m、 $d_0 = 0$ m 的多孔材料，其流阻率以 $\sigma_{mat} = [5, 12, 19]$ kNsm^{-4} 的值进行参数化。北墙 (WN) 建模为硬表面，参数为 $Z_s = 50$ kNsm^{-3}。此外，墙面中央放置了一块由多孔材料制成的 0.5×0.5 m^2 方形声学面板。该面板的厚度和流阻率分别固定为 $d_{mat} = 0.1$ m 和 $\sigma_{mat} = 30$ kNsm^{-4}。面板与墙之间的空气间隙以 $d_0 = [0.2, 0.12, 0.22]$ m 为参数。表 III 总结了各表面的参数值。

表 III. 用于构建三维降阶模型的参数值。降阶模型中纳入变化范围的参数以 * 标记。

	CE	FL	WE	WS	WW	WN
σ_{mat} $[kNsm^{-4}]$	[10, 30, 50]*	-	-	70	[5, 12, 19]*	30
d_{mat} $[m]$	0.05	-	-	0.02	0.05	0.1
d_0 $[m]$	[0.02、0.12、0.22]*	-	-	0	0	[0.02, 0.12, 0.22]*
Z_s $[kNsm^{-3}]$	-	50	50	-	-	-

降阶模型是针对每个由四个不同参数构成的三维房间构建的（CE 有 2 个参数，WW 有 1 个，WN 有 1 个），每个参数有三个不同取值。因此，可能的全阶模型仿真总数为 $3^4 = 81$ 。相反， $3 \times 4 = 12$ 次全阶模型仿真按照与二维情形相同的方式进行，以构建降阶模型。每次全阶模型仿真的参数值见附录（表 A2）。

III. 结果

本节主要展示奇异能量衰减 E/Eo、（10）中所示的相对误差、加速比（12）、声压级（SPL）频谱以及混响时间（RT）的结果。

A. 二维 - 声源位置和几何形状的影响

对于所测试的几何形状和声源位置，奇异值衰减如图3所示。衰减越快，意味着能量越集中在前几个奇异值中，这表明在给定的误差容限下，所需基 N_{rb} 的数量越少。衰减较慢时，则需要更多的N_{rb} 才能达到相同的误差。请注意， N_{rb}越小，所能实现的加速比就越高。从图3可以看出，无论从几何形状还是声源位置来看，问题越对称，奇异值所显示的衰减就越快，效率（加速比）也就越高。例如， SQ 的衰减比 RC 和 LS更快。不过，直到能量达到 10^{-10}之前，差异都不显著，因此可以得出结论：房间几何形状不会显著改变基之间的能量分布。另一方面，与角落声源相比，居中的声源位置会使奇异值衰减得更快。 $SQ2$ 的衰减比 $SQ1$更快， $RC2$ 与$RC1$ 相比也是如此。这是因为将声源放在房间中心时，某些房间模态不会被激发，因为这些模态的节点线/节点与声源位置重合。因此，只需较少的基，就能准确描述房间中波传播的物理动力学。

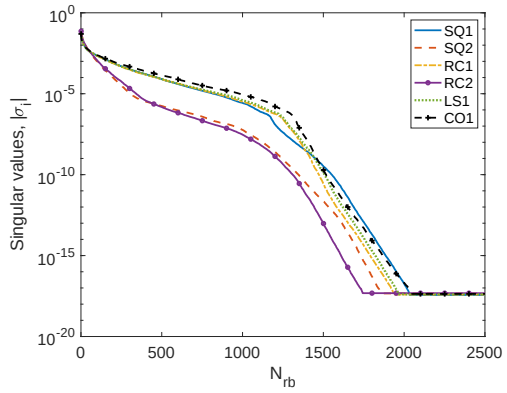


图3. 与频率无关的边界条件下，基的前2500个模态的奇异值衰减，以及基之间的能量分布（E/E_0）。

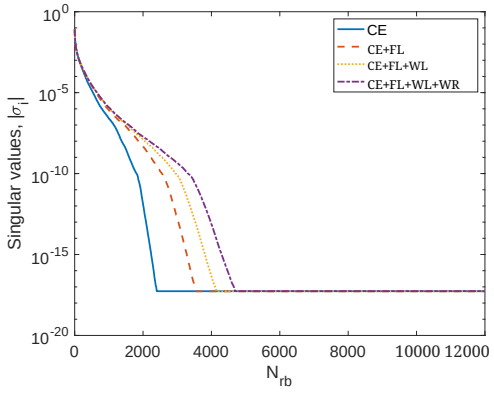


图 4. 案例 1 和案例 2 中不同参数数量对应的奇异值衰减。

B. 二维 - 不同吸声特性的参数化

图4展示了模型中纳入不同数量参数时的奇异值衰减：仅纳入天花板参数（CE）；纳入天花板和地板参数（CE+FL）；纳入天花板、地板和左侧墙壁参数（CE+FL+WL）；以及纳入所有侧面参数（CE+FL+WL+WR）。纳入的参数越多，衰减曲线越缓慢，因此，向 ROM 中添加更多参数会明显影响奇异值衰减，进而影响 ROM 的基选择。不过，最初几个基函数的衰减仍然相似，而这些基函数正是用于构建 ROM 的。

在线阶段中，对两个降阶模型（ROM）案例进行仿真，并与各自对应的全阶模型（FOM）进行比较。案例 1 处理频率相关边界，案例 2 则允许将地板改为刚性表面，并将其建模为与频率无关的边界。边界参数

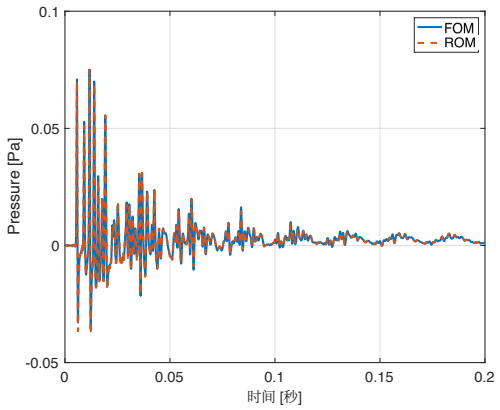
表 IV. 二维降阶模型在线阶段的参数值。带有 * 标记的值表示已进行参数化的参数。

	σ_{mat} $[kNsm^{-4}]$	d_{mat} $[m]$	d_0 $[m]$	Z_s $[kNsm^{-3}]$
CE1	2*	0.1*	0.1*	-
FL1	12*	0.02	0	-
WL1	10*	0.03*	0	-
WR1	15*	0.03	0	-
CE2	45*	0.05*	0.2*	-
FL2	-	-	-	7*
WL2	10*	0.2*	0	-
WR2	6*	-	0	-

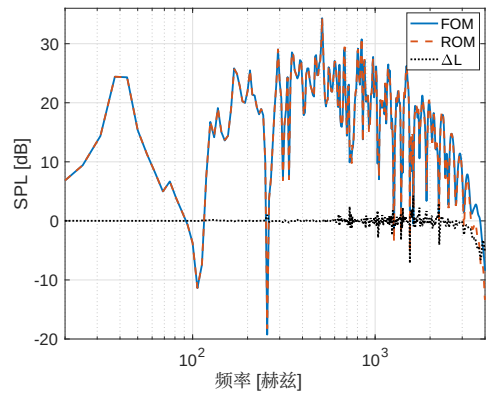
值见表 IV，冲激响应（IR）和声压级（SPL）见图 5。图中比较了多种不同的在线 ROM 仿真结果：上限频率为 2 kHz 的 ROM 对应 $N_{rb} = 69$、158、274、410、571、752，其参数值为 $\epsilon_{POD} = 10^{-2}, 10^{-3}, ..., 10^{-7}$；上限频率为 4 kHz 的 ROM 对应 $N_{rb} = 132$、310、531、810，其参数值为 $\epsilon_{POD} = 10^{-2}, ..., 10^{-5}$。图 5 展示了截至 4 kHz、$N_{rb} = 531$条件下的结果。图 5(a) 展示冲激响应，图 5(b) 展示 20 Hz 至 4 kHz 的声压级（SPL），表明 ΔL 在 600 Hz 以下几乎为零，并随频率升高而增大。注意，由于声源激励的影响，约 4 k Hz 处出现滚降。此案例在误差为 $\epsilon_{rel} = 0.03\%$ 时实现了 37 倍的计算加速。对于使用 $N_{rb} = 274$ 构建且上限频率为 2 kHz 的 ROM，案例 1 的误差为 $\epsilon_{rel} = 0.2\%$，加速比为 70。此外，案例 2 的误差为 $\epsilon_{rel} = 0.3\%$，加速比为 50。请注意，精度取决于N_{rb}。图 6 展示了相对于式 (10) 中 ϵ_{rel} 的加速比。结果表明，二维情况下的加速比约为两个数量级。

C. 三维——不同吸声特性的参数化

本节采用三维测试案例进行了类似分析。通过改变 N_{rb}，对仿真结果进行比较。在线仿真所选参数如表V所示。对于CB，考虑以下基数量： $N_{rb} = 30$、81、175、275、543、837，分别对应 $\epsilon_{POD} = 10^{-2}$、...、10^{-9} 的取值，并与相应的全阶模型解进行比较以供验证。此外，对于GR房间，降阶模型采用 $N_{rb} = 62$、303、478、649、1500构建，分别对应 $\epsilon_{POD} = 10^{-2}$、...、10^{-9}的取值。表V列出了立方域和良好比例域中所有表面的选定参数值。图 7(a)和图 7(b)分别展示了CB的冲激响应和频率响应。此外，图 7(c)和图 7(d)分别展示了GR房间的冲激响应和频率响应。两种情况下均纳入了 ΔL ，这证实了对于给定的 N_{rb}，全阶模型与降阶模型具有良好的一致性。CB采用 $N_{rb} = 273$ 构建，其误差为



(a)



(b)

图 5。（a）二维全阶模型和降阶模型案例 1 的冲激响应，以及（b）频谱，所用 $N_{rb} = 531$ 和 $f_u = 4$ 千赫兹（使用表4中的参数）。

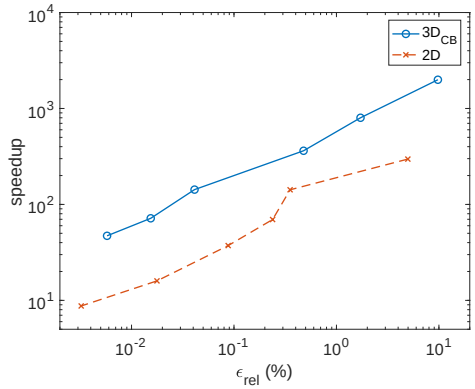


图 6。二维域（案例 1）在 $f_u = 2$ 千赫兹下以及三维组件模态综合的加速比与相对均方根误差的关系。

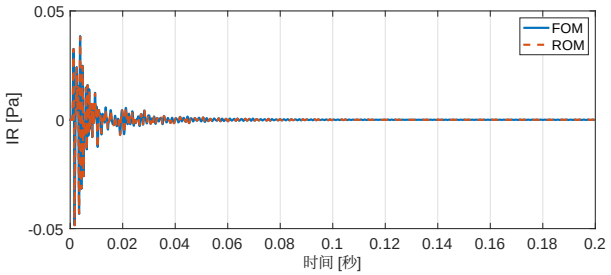
$\epsilon_{rel} = 0.04\%$，加速比为143。另一方面，GR房间采用 $N_{rb} = 478$构建，其误差为 $\epsilon_{rel} = 0.66\%$，加速比为90。请注意， ΔL在方程（11）中的 ϵ_{rel} 也针对不同基数量进行了展示，见图8，其中包括CB（图8(a)）和良好比例房间（图8(b)）。同样， ΔL在低频处几乎为零，并随频率升高而增大，在反共振处差异更为明显。图6展示了CB案例1的加速比与误差之间的关系，加速比约为三个数量级。

为了解不同房间比例的行为，对给定容差 ϵ_{POD} 下的基函数数量 N_{rb}（如公式（9）所述）进行了比较。使用 $f_u = 1.7$ 千赫兹计算立方体房间的新降阶模型。图 9 展示了 $\mathrm{GR}_{1.7kHz}$、 $\mathrm{CB}_{1.7kHz}$ 和 $\mathrm{CB}_{2.8kHz}$ 的比较结果。结果表明，对于固定的上限频率，与对称几何形状 $\mathrm{CB}_{1.7kHz}$ 相比，非对称几何形状 $\mathrm{GR}_{1.7kHz}$ 对于给定的 ϵ_{POD} 需要更多基函数。这并不一定会带来更低的加速比，因为 GR 的自由度数量更多。此外，在自由度数量固定的情况下，比较 $\mathrm{GR}_{1.7kHz}$ 和 $\mathrm{CB}_{2.8kHz}$ 对应的曲线可知，$\mathrm{GR}_{1.7kHz}$ 对于给定的 ϵ_{POD} 会产生更多的 N_{rb}。因此，由于对于 $\mathrm{GR}_{1.7kHz}$ 和 $\mathrm{CB}_{2.8kHz}$，公式（12）的分子保持不变，GR 将导致更低的加速比。同时，在给定 ϵ_{POD} 的情况下，与 $\mathrm{CB}_{2.8kHz}$ 相比，$\mathrm{GR}_{1.7kHz}$ 的分母变大。

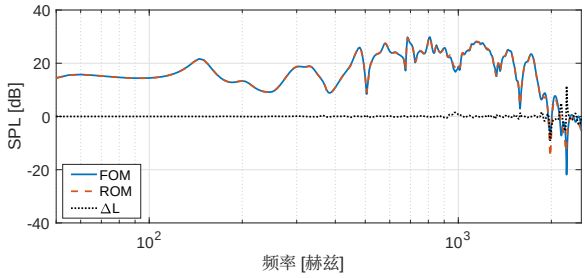
混响时间是 ISO 3382-1[54] 中定义的最常用声学参数之一，指能量衰减 60 dB 所需的时间。可通过最小可觉差（JND）评估全阶模型与降阶模型之间的混响时间误差。JND 是能够被感知的混响时间最小变化量。标准中规定，混响时间的 JND 为 5%[54]。请注意，若差异大于 1 个 JND，脉冲响应可能会被听出不同。 T_{20}通过全阶模型和降阶模型计算脉冲响应，并据此量化降阶模型对混响时间精度的影响。图10(a)显示了不同频率倍频带的混响时间。组件模态综合降阶模型采用 $N_{rb} = 185$，而Guyan约简降阶模型采用 $N_{rb} = 649$。两种情况下，所有频率倍频带中的混响时间差异均低于一个 JND，这表明与全阶模型相比，当前降阶模型在感知上不会产生差异。此外，图10(b) 和图10(c) 显示了不同 T_{20} 下的 JND 数量，针对多种 N_{rb}。降低 N_{rb} 会增大较高频带中的混响时间差异。请注意，在此情况下，降阶模型的速度比全阶模型快 365 倍，且组件模态综合所需的基函数少于 Guyan约简；这支持了对称条件更有利于实现更大幅度约简这一结论。

IV. 讨论

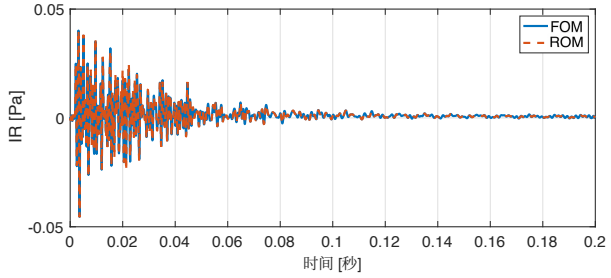
降阶模型的加速比表现因案例而异，且很难



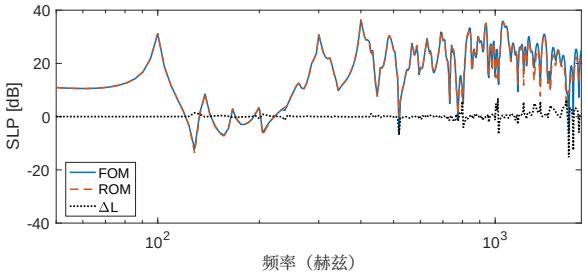
(a)



(b)



(c)

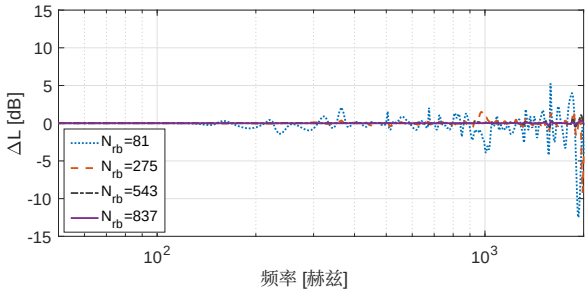


(d)

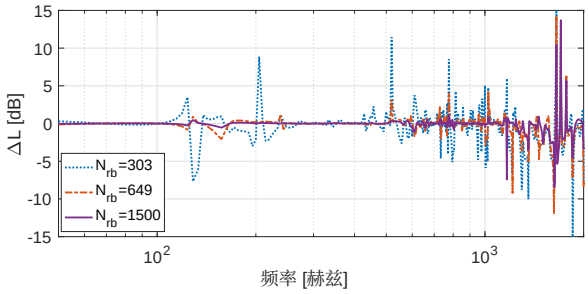
图7。使用三维全阶模型和降阶模型的模拟压力。a) CB域声压，$N_{rb} = 275$；b) CB域频率响应，$N_{rb} = 275$；c) GR域声压，$N_{rb} = 478$；d) GR域频率响应，$N_{rb} = 478$。

表V。三维房间的在线阶段边界参数。标有*的值表示参数化。

CB域						
	CE	FL	WE	WS	WW	WN	
$\boldsymbol{\sigma_{mat}}$ $[kNsm^{-4}]$	12*	-	-	7	10*	30
$\boldsymbol{d_{mat}}$ [米]	0.05	-	-	0.02	0.05	0.1
$\boldsymbol{d_0}$ [米]	0.06*	-	-	0	0	0.1*
$\boldsymbol{Z_s}$ $[kNsm^{-3}]$	-	50	50	-	-	50
GR域						
	CE	FL	WE	WS	WW	WN	
$\boldsymbol{\sigma_{mat}}$ $[kNsm^{-4}]$	10.5*	-	-	7	5.5*	30
$\boldsymbol{d_{mat}}$ [m]	0.05	-	-	0.02	0.05	0.1
$\boldsymbol{d_0}$ [m]	0.025*	-	-	0	0	0.03*
$\boldsymbol{Z_s}$ $[kNsm^{-3}]$	-	50	50	-	-	50



(a)



(b)

图8。 ΔL 误差。a）对于 $N_{rb} = 81$、275、543、837的CB案例1。b）对于 $N_{rb} = 303$、649、1500的Guyan约简。

预测，尤其是在复杂场景中包含大量参数时。本研究通过改变二维和三维场景中的几何形状、声源位置和非均匀边界，分析真实房间声学场景的表现。根据奇异能量衰减，房间几何形状对降阶基的选择影响不大，因此对加速比的影响也不大。此外，新增参数时降阶模型的性能也可根据先前的计算进行估计，如图 4所示，奇异值衰减在.....中实际上几乎相同

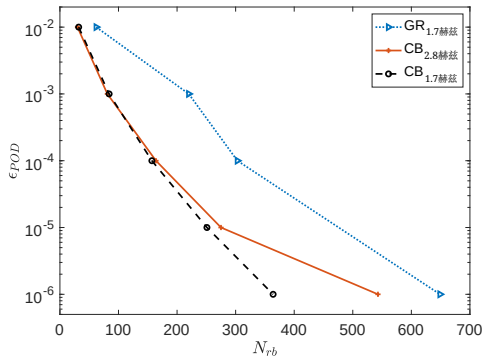


图9. 基函数数量 N_{rb} 与容差的关系ϵ_{POD}，如（9）中所示，针对两个不同的上限频率1.7 kHz和2.8 kHz下的GR和CB

向ROM中添加新参数时所需的首批基函数，这清楚地表明了ROM在所研究应用类型中的潜力。

当空间维度从二维增加到三维时，对于相同的误差值，可以获得更高的加速比（图6）。与FOM相比，二维仿真最高可获得两个数量级的加速比，三维仿真最高可获得三个数量级的加速比。这些结果与先前针对均匀边界条件的研究[40]一致。

近期一项采用自动化克雷洛夫子空间算法进行时域房间声学模拟的 MOR 研究报告称，在一个简单场景中，加速比达到 11–36，且未引入可听差异[39]。本研究针对更大的计算域（考虑更高频率）展示了更高的加速比。对于具有$f_u = 2$ kHz 的二维域（案例 1），将自由度从 DOF$= 12039$ 降至 $N_{rb} = 158$ 和 $N_{rb} = 752$，加速比分别达到 142（$\epsilon_{rel} = 0.35\%$）和 9（$\epsilon_{rel} = 3.2 \times 10^{-3}\%$）。此外，对于三维立方体案例，将自由度从 DOF$= 35937$ 降至 $N_{rb} = 81$和 $N_{rb} = 837$，加速比分别达到 800（$\epsilon_{rel} = 1.7\%$）和 47（$\epsilon_{rel} = 5.8 \times 10^{-3}\%$）。

全阶模型与降阶模型之间的混响差异，已根据文献[54]中定义的混响时间最小可觉差 5% 进行了量化。需要注意的是，不同研究表明，人们对混响的感知会随声音衰减[55] 和刺激信号[56–59]的性质而变化，最小可觉差范围为 3%–20%。

V. 结论

本研究关注的是：在大量参数变化以及房间不同表面吸声分布不均匀的情况下，ROM 采用不同边界条件的能力。首先，我们的结果证实，对于对称问题，例如声源位于

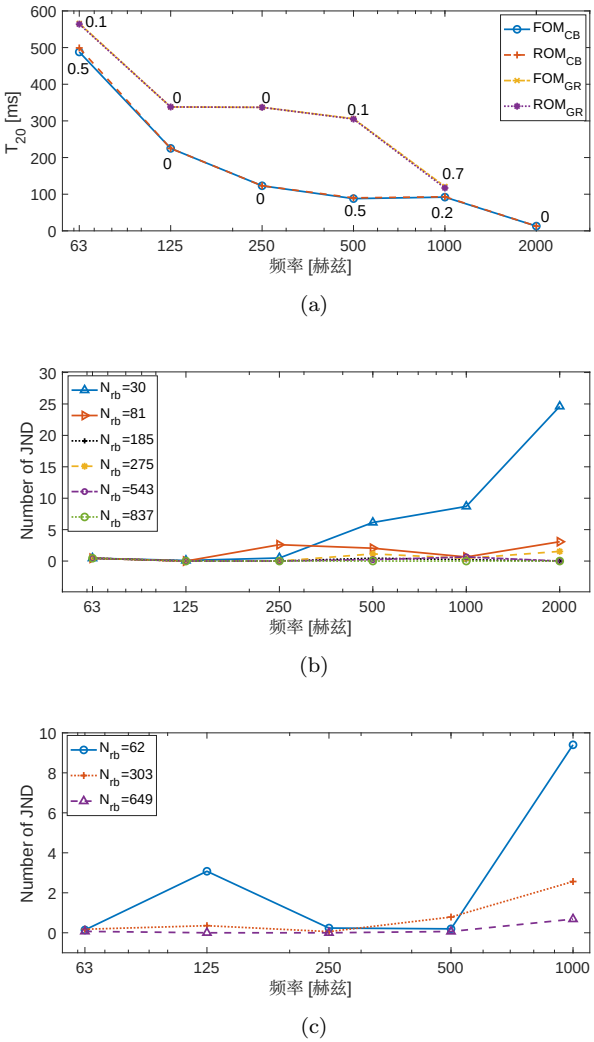


图10. 全阶模型与降阶模型的混响时间比较及其以最小可觉差数量表示的差异。a）包含 $N_{rb} = 185$ (组件模态综合)的立方体域和包含 $N_{rb} = 649$ (Guyan约简)的良好比率域，以及每个倍频带的最小可觉差数量；b）组件模态综合的最小可觉差数量；c）Guyan约简的最小可觉差数量。

中心而非角落时，RBM 在计算缩减方面更具优势。其次，结果表明，将更多参数纳入 ROM 后，奇异值衰减会变得更加平缓。第三，对于二维问题，加速比达到一个至两个数量级；对于三维问题，则达到两个至三个数量级。第四，对混响时间的分析证实，ROM 生成的脉冲响应，其混响时间与全阶模型相比差异小于 5%。在三维对称情形下，截断基所需的基模数量更少，其性能比全阶模型快 365 倍。

可以得出结论：具有大量参数且声学材料分布不均匀的复杂降阶模型，其表现与简单且均匀的模型相似，并且能够实现相近的加速比

性能。然而，不对称的声源位置和几何形状以及大量参数可能导致奇异值衰减变慢；如果降阶模型中包含大量基函数，这可能会降低降阶效果。尽管全阶模型仿真的计算成本很高，但对于多次设计评估而言，使用全阶模型仿真创建降阶模型所付出的代价是值得的，因为在此过程中需要探索或优化不同的参数配置，以用于房间声学。

致谢

本研究在丹麦技术大学完成，部分得到Innovationsfonden、丹麦（资助编号9065-00115B）、Rambøll Danmark A/S以及瑞典Saint-Gobain Ecophon A/S的支持。

参考文献

[1]D. Abbot, 《平息办公室的嘈杂声》, Safety Health Pract. 22(1), 34–36（2004年）。[2]N. A. Oseland和A. Burton, 《量化环境条件对员工绩效的影响，以便为商业论证提供依据，从而证明改善工作场所设计特征的合理性》, J. Build. Survey, Appr. Val. 1(2), 151–164（2012年）。[3]B. M. Shield和J. E. Dockrell, 《噪声对在校儿童的影响：综述》, Build. Acoust. 10(2), 97–116（2003年）。[4]M. Klatte、J. Hellbr¨uck、J. Seidel和P. Leistner, 《教室声学对小学生表现和福祉的影响：一项现场研究》, Environ. Behav. 42(5), 659–692（2010年）。[5]A. Seddigh、E. Berntson、F. J¨onsson、C. B. Danielson和H. Westerlund, 《开放式办公室中的噪声吸声变化效应：一项采用交叉设计的现场研究》, J. Environ. Psych. 44, 34–44（2015年）。[6]G. W. Evans和D. Johnsson, 《压力与开放式办公室噪声》, J. Appl. Psych. 85(5), 779–783（2000年）。[7]D. Botteldooren, 《低频房间声学问题的时域有限差分仿真》, J. Acoust. Soc. Am 98(6), 3302–3308（1995年）。[8]A. Craggs, 《采用有限元法研究管道和房间中带吸声墙的空气自由振动》, J. Sound Vib 73(4), 568–576（1994年）。[9]F. Pind、A. P. Engsig-Karup、C. H. Jeong、J. S. Hesthaven、M. S. Mejling和J. S. Andersen, 《采用谱元法进行时域房间声学仿真》, J. Acoust. Soc. Am 145(6), 3299–3310（2019年）。[10]L. Savioja和U. P. Svensson, 《几何房间声学建模技术概述》, JASA 138(2), 708–730（2015年）。[11]J. S. Hesthaven、G. Rozza和B. Stamm, *Certified Reduced Basis Methods for Parametrized Partial Differential Equations*（Springer, 2016年）。[12]A. Melander、E. S. . F. Pind、A. Engsig-Karup、C. Jeong、T. War-burton、N. Chalmers和J. S. Hesthaven, 《用于房间声学的大规模并行节点间断伽辽金有限元法仿真器》, Int. J. of High Performance Computing Appli-cations（2022年审稿中）（2020年）。[13]N. Borrel-Jensen、A. Engsig-Karup和C.-H. Jeong, 《采用参数化声源和阻抗边界的一维声场预测物理信息神经网络》, JASA Express Letters. 1(12), 122402（2021年）。[14]P. Benner、S. Gugercin和K. Willcox, 《参数化动力系统基于投影的模型约简方法综述》, SIAM 57(4), 10.1137/130932715（2015年）。[15]A. Quarteroni, G. Rozza, and A. Manzoni, “参数化偏微分方程及其应用的认证降阶基近似,” J. Math Ind 1(3), . (2011).[16]N. N. Cuong, K. Veroy, and A. T. Patera, *Certified real-time solution of parametrized partial differential equations*（材料建模手册, 2005, pp. 1529-1564).[17]G. Rozza, D. B. P. Huynh, and A. T. Patera, “仿射参数化椭圆强制偏微分方程的降阶基近似与后验误差估计,” 计算工程方法档案 15(3), 229–275 (2008).[18]M. Drohmann and K. Carlberg, “ROMES方法：降阶模型误差的统计建模,” SIAM/ASA J. o n Uncer. Quant. 3(1), 116–145 (2015).[19]C. Prud’homme and A. Patera, “近似参数化椭圆强制偏微分方程的降阶基输出界,” 科学计算与可视化 6(2-3), 147–162 (2004).[20]A. Quarteroni, A. Manzoni, and F. Negri, *Reduced Basis Methods for Partial Differential Equations: An Introduction* (Springer, 2015).[21]G. Berkooz, P. Holmes, J. L. Lumleyand, and C. W. Rowley, *Turbulence Coherent Structures Dynamical Systems and Symmetry* , , 1996 (剑桥大学出版社,).[22]M. Ohlberger and S. Rave, “约化基方法：成果、局限与未来挑战”, Algoritmy会议论文集, 1-12 (2016).[23]Q. Aumanna, E. Deckersb, S. Jonckheerec, W. Desmetc, and G. Muller, “针对具有频率相关材料属性的系统的自动模型降阶,” Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 397, 115076 (2022).[24]Q. A. G. Muller, “利用回归模型预测参数化模型降阶的近最优插值点,” App. Math and Mech. 20(1), 10 (2021).[25]X. Xiea, W. Wanga, K. Hea, and G. Lia, “针对涉及表面阻抗的大规模声学系统的快速模型降阶边界元法,” Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 400, 115618 (2022).[26]M. Ganesh, J. Hesthaven, and B. Stamm, “三维多个粒子电磁散射的约化基方法,” J. Comput. Physics 231(23), 7756–7779 (2012).[27]Y. Chen and J. S. Hesthaven, “谐波麦克斯韦方程的认证约化基方法与输出界,” SIAM J. Sci. Comput., 32(2), 970–996 (2010).[28]D. Amsallem, J. Cortial, and C. Farhat, “利用降阶信息数据库实现实时计算流体力学气动弹性计算,” 美国航空航天学会期刊, 48(9), 2029–2037 (2010).[29]S. Giere, “计算流体力学中基于POD的降阶建模的数值与解析方面,” 博士论文, 柏林自由大学, 德国, 2016.[30]M. A. Grepl, “抛物型偏微分方程的降阶基近似与后验误差估计,” 博士论文, 麻省理工学院, 美国, 2005.[31]R. S. Puri, D. Morrey, A. J. Bell, J. F. Durodola, E. B. Rud- nyi, and J. G. Korvink, “通过隐式矩匹配实现全耦合结构声学降阶分析,” Appl. Math. Mod 33(11), 4097–4119 (2009).[32]U. Hetmaniuk, R. Tezaur, and C. Farhat, “频率响应结构动力学与声学问题插值型模型降阶方法的综述与评估,” Int. J. Num. Meth. Eng. 90(13), 1636–1662 (2012).[33] J. Herrmann, M. Maess, and L. Gaul, “包含界面降阶的子结构法：用于充液管道系统的高效振动声学仿真,” Mech. Sys. Sig. Proc 24(1), 153–163 (2010).

[34]H. Basir, A. Javaherian, Z. Shomali, R. Firouz-Abadi, and S. Gholamy, “基于降阶建模的声波传播仿真,” 《勘探地球物理学》 49(3), 386–397 (2017).[35]L. Borcea, J. Garnier, A. Mamonov, and J. Zimmerling, “基于降阶模型的波成像方法,” 《逆问题》38(2), 0025004 (2022).[36]J. Willhite, K. Frampton, and D. W. Grantham, “虚拟声学显示器中头部相关传递函数的降阶建模,” JASA 113(4), 2270–2270 (2003).[37]S. Bukka, Y. Law, H. Santo, and R. Chan, “非线性多向海浪传播的降阶模型,” Physics of Fluids 33(11), 117115 (2021).[38]A. Tello and R. Codina, “场间耦合流固耦合：一项降阶模型研究,” International Journal for Numerical Methods in Engineering 122(1), 53–81 (2021).[39]M. Miller, S. Ophem, E. Deckers, and W. Desmet, “声学有限元仿真的时域阻抗边界条件,” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 387(15), 114173 (2021).[40]H. S. Llopis, A. P. Engsig-Karup, C.-H. Jeong, F. Pind, and J. S. Hesthaven, “具有参数化边界的室内声学数值仿真的约化基方法,” JASA 152(2), 851–865 (2022).[41]J. S. Hesthaven and T. Warburton, *Nodal Discontinuous Galerkin Methods—Algorithms* 2008 (Springer, 纽约,).[42]H. Xu, C. Cantwell, C. Monteserin, C. Eskilsson, A. P. Engsig-Karup, and S. Sherwin, “谱/hp单元方法：最新进展、应用与展望,” Journal of Hydro-dynamics 30(1), 1–22 (2018).[43]B. Cott´e, P. Blanc-Benon, C. Bogey, and F. Poisson, “室外声音传播仿真的时域阻抗边界条件,” 美国航空航天学会期刊 47, 10 (2009).[44]R. Troian, D. Dragna, C. Bailly, and M.-A. Galland, “平均流存在时多模态声传播的宽带衬垫阻抗反演,” J. Sound Vib. 392, 200–216 (2017).[45]Y. Miki, “多孔材料的声学特性——Delany-Bazley模型的修正,” J. Acoust. Soc. Jpn. 11(1), 19.24 (1990).[46]J. F. Allard and N. Atalla, *Propagation of Sound in Porous Media: Modelling sound absorbing materials 3* , 第三版 (Wiley, West Sussex, 2009).[47]B. Gustavsen and A. Semlyen, “通过矢量拟合对频域响应进行有理逼近,” IEEE Trans. Power Delivery 14(3), 1052–1061 (1999).[48]C. Bigoni and J. S. Hesthaven, “基于仿真的异常检测与损伤定位：在结构健康监测中的应用,” Comput. Meth. Appl. Mech. Eng 63, 12896 (2020).[49]W. T. Weeks, “利用拉格尔函数对拉普拉斯变换进行数值反演,” J. Assc. Comp. Mach. 13(3), 419–429 (1966).[50]L. Peng and K. Mohseni, “哈密顿系统的辛模型降阶,” SIAM J. Sci. Comput. 38(1), A1–A27 (2016).[51]S. Sakamoto, “高阶时域有限差分格式的相位误差分析及其对封闭声场中冲激响应计算结果的影响,” Acoust. Sci.Tech 28(5), 295–309 (2007).[52]C. Jeong and J. lh, “声源与接收器位置对采用相控波束追踪法预测房间传递函数的影响,” J. Acoust. Soc. Am 131(5), 3864–3875 (2012).[53]T. Cox and P. D'Antonio, *Acoustic absorbers and diffusers : the-ory, design and application : Theory, design and application* (Spon, 2004).[54]“EN ISO 3382-1:2009，室内声学参数的测量，第1部分：演出空间。”标准，国际标准化组织 (2009).[55]P. Luizard, B. F. G. Katz, and C. Guastavino, “大型耦合空间中真实双斜率衰变混响的感知阈值,” J. Acoust. Soc. Am 137(1), 75–84 (2015).

[56]M. G. Blevins、A. T. Buck、Z. Peng 和 L. M. Wang，“使用以1000 赫兹为中心的带限噪声和变换式上下自适应法量化混响时间的最小可觉差”，载于《国际房间声学研讨会（ISRA）论文集》，加拿大多伦多（2013年）。[57]M. Karjalainen 和 H. J¨arvel¨ainen，“关于混响科学的更多探讨：感知上良好的晚期混响”，载于《第111届音频工程学会大会论文集》，美国纽约（2001年）。[58]Z. Meng、F. Zhao 和 M. He，“噪声时长的最小可觉差与混响感知”，载于《国际通信与信息技术研讨会论文集》，泰国曼谷（2006年）。[59]K. Prawda、S. J. Schlecht 和 V. V¨alim¨aki，“反馈延迟网络中的改进混响时间控制”，载于《国际数字音频效果会议论文集》，英国伯明翰（2019年）。

附录

表A1。用于构建二维降阶模型的参数。每一行对应一次全阶模型仿真，各列中标出了相应参数，其数值列于表II。

	CE_{σ_1}	CE_{σ_2}	CE_{σ_3}	CE_{d_1}	CE_{d_2}	CE_{d_3}	$CE_{d_0{}^1}$	$CE_{d_0{}^2}$	$CE_{d_0{}^3}$	FL_{σ_1}	FL_{σ_2}	FL_{σ_3}	FL_{d_1}	FL_{d_2}	FL_{d_3}	WL_{σ_1}	WL_{σ_2}	WL_{σ_3}	WR_{σ_1}	WR_{σ_2}	WR_{σ_3}	
FOM_1	X	X	X	X																		
FOM_2		X			X			X						X			X			X		
FOM_3			X		X			X						X			X			X		
FOM_4		X		X				X						X			X			X		
FOM_5		X			X			X						X			X			X		
FOM_6		X				X		X						X			X			X		
FOM_7		X			X		X							X			X			X		
FOM_8		X			X			X						X			X			X		
FOM_9		X			X				X					X			X			X		
全阶模型$_{10}$		X			X			X		X							X			X		
全阶模型$_{11}$		X			X			X			X						X			X		
FOM_{12}		X			X			X				X					X			X		
全阶模型$_{13}$		X			X			X					X				X			X		
全阶模型$_{14}$		X			X			X						X			X			X		
全阶模型$_{15}$		X			X			X							X		X			X		
FOM_{16}		X			X			X						X		X				X		
全阶模型$_{17}$		X			X			X						X			X			X		
全阶模型$_{18}$		X			X			X						X			X	X				
FOM_{19}		X			X			X						X			X		X			
全阶模型$_{20}$		X			X			X						X			X			X		
全阶模型$_{21}$		X			X			X						X			X					X

表 A2。用于构建三维降阶模型的参数。每一行对应一个全阶模型仿真，每列中标出了相应的参数，其数值列于表 III。

	CE_{σ_1}	CE_{σ_2}	CE_{σ_3}	$CE_{d_0{}^1}$	$CE_{d_0{}^2}$	$CE_{d_0{}^3}$	WW_{σ_1}	WW_{σ_2}	WW_{σ_3}	$WN_{d_0{}^1}$	$WN_{d_0{}^2}$	$WN_{d_0{}^3}$	
FOM_1	X				X			X			X		
FOM_2		X			X			X			X		
FOM_3			X		X			X			X		
FOM_4		X		X				X			X		
FOM_5		X			X			X			X		
FOM_6		X				X		X			X		
FOM_7		X			X		X				X		
FOM_8		X			X			X			X		
FOM_9		X			X				X		X		
全阶模型$_{10}$		X			X					X			
FOM_{11}		X			X			X			X		
FOM_{12}		X			X			X					X