arXiv:2301.13641v1 [math.AC] 31 Jan 2023

理想上的广义斜导子与恩格尔条件

ASHUTOSH PANDEY, BALCHAND PRAJAPAT I

Abstract. 设 R 为特征不等于 2 的素环， U 为 R 的 Utumi 商环， C 为 R 的扩张中心。设F 为 R上的广义斜导子， I 为 R 的非零理想，且m、 n_1、 n_2、 ……、 $n_k \geq 1$为固定整数，使得对所有 $u \in I$ 均有 $[F(u^m)\ u^{n_1}$、 u^{n_2}、 ……、 $u^{n_k}] = 0$，则存在 $\lambda \in C$，使得对所有 $x \in R$均有 $F(x) = \lambda x$ 。

1. Introduction

本文中， R 表示中心为 $Z(R)$ 的素环。 R 的 Utumi 商环记为 U。 U 的中心称为 R 的扩张中心，记为 C。 U 的定义与构造可见于 [5]。 $ab - ba$ 中 a 与 b 这两个 R 元素的交换子记为 $[a, b]$。定义 $[a, b]_0 = a$；对于 $k \geq 1$， a 与 b 的 k 阶交换子定义为 $[a, b]_k = [[a, b], b]_{k-1} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} b^i a b^{k-i}$。此外，对所有 a_1、 a_2、……、 $a_k \in R$，以及对于 $k \geq 2$，均有 $[a_1, a_2, \ldots, a_k] = [[a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}], a_k]$。若加法映射 $d\colon R \to R$满足对所有 x、 $y \in R$均有 $d(xy) = d(x)y + xd(y)$，则称其为导子。若存在 d 上的导子 R，使得对所有 x、 $y \in R$均有 $F(xy) = F(x)y + xd(y)$，则称加法映射$F : R \to R$ 为广义导子。在 [13] 中，Posner 证明了：若 d 是素环 R 上的导子，且对所有 $x \in R$ 均有 $[d(x)\ x] \in Z(R)$，则 $d = 0$ 或 R 为交换环。在 [25] 中，Lanski 通过将 Posner 的结果推广到 R的李理想 L ，推广了 Posner 的结果。更确切地说，Lanski 证明了：若对所有 $x \in L$ 及 $k \geq 1$ 均有$[d(x)\ x]_k \in Z(R)$，则 char$(R) = 2$ ，且对于域 $\mathbb{F}$，有 $R \subseteq M_2(\mathbb{F})$；等价地， R 满足标准恒等式 s_4。2008 年，Arga̧c 等人在 [6],中以广义导子 F替代导子 d ，推广了 Lanski 的结果。更确切地说，他们证明了：若对所有 $x \in L$均有 $[F(x)\ x]_k = 0$，则 $F(x) = ax$且 $a \in C$，或 R 满足标准恒等式 s_4。关于李理想和左理想上的广义导子的研究见 $[2, 5, 4, 6]$ ，其中还可找到更多参考文献。最近，Dhara̧c 等人在 [9] 中证明了以下结果：

设 R 是一个素环，其 Utumi 商环为 U， G 是 R 的一个非零广义导子，且 L 是 R 的一个非中心李理想。假设对于所有 $x \in L$， $[G(x^m)\ x^{n_2}$， ……， $x^{n_k}] = 0$，其中 m、 n_1、 n_2、 ……、 $n_k \geq 1$ 是固定整数。则以下情形之一成立：

（1）存在 $\beta \in C$，使得对于所有 $x \in R$， $G(x) = \beta x$ 。

（2） R 满足标准恒等式 s_4。

本文继续探讨关于恒等式$[F(u^m)\ u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0$对所有 $u \in R$成立的这一研究方向，其中 $m, n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 1$是固定

2010 Mathematics Subject Classification. 16N60,16W25。*Key Words and Phrases.* 李理想、广义斜导子、扩张中心、Utumi 商环。

整数，且 F 是广义斜导子。更确切地说，我们将证明以下结论：

主定理：设 R 是特征不等于 2 的素环， U 是 R 的 Utumi 商环，且 C 是 R 的扩张中心。设 F 是 R上的广义斜导子， I是 R的双边理想，并且 m、 n_1、 n_2、.....、 $n_k \geq$1 是固定整数，使得对所有 $u \in I$，均有 $[F(u^m)\ u^{n_1},\ u^{n_2}$、.....、$u^{n_k}] = 0$。那么存在 $\lambda \in C$，使得对所有 $x \in R$，均有 $F(x) = \lambda x$。

我们回顾以下有助于证明主定理的事实：

事实1.1. 设 $f(x_i, d(x_i)\ \alpha(x_i))$是素环 R的广义多项式恒等式， d 是外斜导数，且 α 是 R 的外自同构，那么 R 也满足广义多项式恒等式 $f(x_i, y_i, z_i)$，其中 x_i、 y_i、 z_i 是互不相同的不定元。（[33, 定理 1]）

事实1.2。（[32, 定理6.5。9]）设 R 为满足以下类型多项式恒等式的素环： $f(x_j^{\alpha_i \triangle_k}) = 0$，其中 $f(z_j^{(i,k)})$是系数来自 U的广义多项式恒等式； $\triangle_1$、.....、 $\triangle_n$ 是来自斜导数约化集的彼此不同的正确词，它们与所有相应的自同构可交换；α_1、.....、 α_m 是彼此不同的外自同构。在这种情况下，对于 U，恒等式 $f(z_j^{(i,k)})$ =0成立。

事实 1.3。设 K 为无限域， $m \geq 2$ 为一个整数。若 P_1、.....、 P_k 是 $M_m(K)$中的非标量矩阵，则存在某个可逆矩阵 $P \in M_m(K)$，使得矩阵 PP_1P^{-1}、.....、 PP_kP^{-1} 的所有元素均非零。 [4]

事实1.4. 设 K 为任意域， $R = M_m(K)$为 K 上所有 $m \times m$矩阵构成的代数，且具有 $m \geq 2$。那么，对于所有 $1 \leq i \neq j \leq m$，矩阵单位 e_{ij} 都是 $[R, R]$ 的元素。

事实1.5. R 上的每个广义斜导子 F 都可以唯一地扩张为 U 上的广义导子，其形式为 $F(x) = ax + d(x)$，其中$a \in U$，且 U [31]上的斜导子为 d。

事实1.6. 若 I 是 R的双边理想，则 R、 I 和 U 满足相同的微分恒等式 [23]。

事实 1.7. 若 I 是 R的双边理想，则 R、 I 和 U 满足系数属于 U ([10])的相同广义多项式恒等式。此外， R、 I 和 U 满足在 U [31]中具有自同构的相同广义多项式恒等式。

事实 1.8.（Kharchenko [定理 2,[8]] 设 R 为素环， d 为 R 上的非零导子，且 I 为 R的非零理想。若 I 满足微分恒等式

$$f(r_1, \ldots, r_n, d(r_1), \ldots, d(r_n)) = 0$$

对所有 $r_1, \ldots, r_n \in I$，则以下两种情况之一成立：

(i) I满足广义多项式恒等式 $f(r_1, \ldots, r_n, x_1, \ldots, x_n) = 0$

or

(ii) d是 U-内的，即存在某个 $q \in U$，使得 $d(x) = [q, x]$，且 I满足广义多项式恒等式 $f(r_1, \ldots, r_n, [q, r_1], \ldots, [q, r_n]) = 0$.

事实 1.9。 (定理 4.2.1（Jacobson稠密性定理）[5]) 设 R 是一个本原环，且 V_R 是忠实不可约的 R- 模，并且 $D = End(V_R)$，那么对于任意正

整数 n，若 v_1、v_2、.....、v_n 在 V 中 D-线性无关，且 w_1、w_2、.....、w_n 是 V 中任意元素，则存在 $r \in R$，使得对于 $i = 1$、2、.....、n，有 $v_i r = w_i$。

事实 1.10。设 $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ 是由非交换不定元 x_1、x_2、.....组成的可数集。设 $C\{X\}$ 是以 C 为基、由集合 X 生成的自由代数。记 $T = U *_C C\{X\}$ 为 C 代数 U 与 C{X} 的自由积。T 的元素称为系数取自 U 的广义多项式。设 B 是 U 中一组 C-线性无关向量。那么，任意元素 $f \in T$ 都可表示为 $f = \sum_i a_i n_i$ 的形式，其中 $a_i \in C$ 和 n_i 是形如 $p_0 u_1 p_1 u_2 p_2 \cdot u_n p_n$ 的 B-单项式，且 p_0、p_1、.....、$p_n \in B$ 以及 u_1、u_2、.....、$u_n \in X$。广义多项式 $f = \sum_i a_i n_i$ 是平凡的，即是 T 中的零元素，当且仅当对每个 i 都有 $a_i = 0$。更多细节请参阅 [11]。

我们先给出以下命题：

命题 1.11. 设 R 是特征不为 2 的素环，U 是 R 的 Utumi 商环，C 是 R 的扩张中心，且 $\beta \in Aut(U)$。设 a、$b \in U$ 以及 m、n_1、n_2、.....、$n_k \geq 1$ 是满足下列条件的固定整数

$$[au^m + \beta(u^m)b, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0 \tag{1}$$

对所有 $u \in R$，则 β 或者是 R 上的恒等映射，且 a、$b \in C$；或者存在可逆元 p，使得对所有满足 $p^{-1}b \in C$ 和 $a + b \in C$ 的 $x \in R$，$\beta(x) = pxp^{-1}$。

为证明命题（1.11），我们需要证明以下引理：

引理 1.12. 设 R 是特征不为 2 的素环，U 是 R 的 Utumi 商环，C 是 R 的扩张中心。设 a、$b \in U$ 以及m、n_1、n_2、.....、$n_k \geq 1$ 是满足下列条件的固定整数

$$[au^m + pu^m p^{-1}b, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0 \tag{2}$$

对所有 $u \in R$，于是 $p^{-1}b \in C$，且 $a + b \in C$。

证明。首先假设 R 不满足任何非平凡的广义多项式恒等式。令 $T = U * C\{u\}$ 为 U 与 $C\{u\}$的自由积，即单个不定元 u上的 C-代数。于是，方程 (2) 是 T中的一个广义多项式恒等式。若 $p^{-1}b \notin C$，则 $p^{-1}b$ 与 1 在 C上线性无关。因此，由事实 (1.10)，方程 (2) 推出

$$u^{n_1+n_2+\ldots+n_k} pu^m p^{-1}b = 0$$

在 T中推出 $p^{-1}b = 0$，矛盾。因此我们得出 $p^{-1}b \in C$，从而方程 (2) 化为：

$$[au^m + bu^m, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0 \tag{3}$$

同样由 [9],，方程 (3) 推出 $a + b \in C$。

现在我们考虑方程 (2) 对于R是非平凡多项式恒等式的情形。由于 R 和 U 满足相同的广义多项式恒等式（见事实 1.7），因此 U 满足方程 (2)。当 C 是无限时，广义多项式恒等式 (2) 也由 $U \otimes_C C$满足，其中 C是 C的代数闭包。由于 U和 $U \otimes_C C$都是素且中心封闭的 [15],，我们可以根据 C 是无限还是有限，分别用U 或 $U \otimes_C C$替换 R。因此，不妨设 R在 C 上中心封闭，其中 C 或者是有限域，或者是代数闭域，并且对所有 $u \in R$都有$[au^m + pu^m p^{-1}b, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0$。根据 Martindale 的结果，[14],$R$ 是具有非零根基 H 的本原环，而 eHe 是有限维的单中心代数

在 C上，对于任意幂等元 $e \in R$，其维数有限。因此，存在一个在除环 D 上的向量空间 V，使得 R 同构于 V的 D-线性变换环的一个稠密子环。由于 C 或者是有限的，或者是代数闭的， D 必然与 C一致。

首先假设 $dim_C V \geq 3$。若 $p^{-1}b \notin C$，则存在 $v \in V$，使得 $\{p^{-1}bv, v\}$ 线性 C 无关。由于 $dim_C V \geq 3$，存在 $w \in V$，使得 $\{p^{-1}bv, v, w\}$ 线性 C 无关。根据 Jacobson 定理（见事实 1.9），存在 $x \in R$，使得:

$$xv = 0, xp^{-1}bv = p^{-1}bv$$

于是， $0 = [ax^m + px^m p^{-1}b, x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_k}]v = bv$，矛盾，因为若 $bv = 0$，则 $\{p^{-1}bv, v, w\}$ 将是 C 相关的。因此 $\{p^{-1}bv, v\}$ 线性 C 相关，故 $p^{-1}b \in C$，从而方程 (2) 化为

$$[au^m + bu^m, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0$$

这由 [9] 推出 $a + b \in C$。
现在，若 $dim_C V = 2$，则 $U \cong M_2(C)$。记 $p = \sum_{ij} e_{ij}p_{ij}, q = p^{-1}b = \sum_{ij} e_{ij}q_{ij} \in M_2(C)$，其中 $p_{ij}, q_{ij} \in C$ 和 $1 \leq i, j \leq 2$；这里 e_{ij} 是通常的矩阵单位，在 (i, j) 位置为 1，其余位置为 0。假设 $q \notin C$，则由事实（1.3）可知， q 中所有元素均非零，即对于 $1 \leq i, j \leq 2$，有 $q_{ij} \neq 0$。
在方程 (2) 中取 $u = e_{11}$，并在右侧乘以 e_{22}，得到:

$$p_{11}q_{12} = 0 \tag{4}$$

这意味着 $p_{11} = 0$。设 ϕ 是 U 的一个自同构，则

$$[\phi(a)u^m + \phi(p)u^m\phi(p^{-1}b), u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0 \tag{5}$$

也是 U 的一个恒等式。因此， $\phi(p)$ $\phi(q)$ 和 $\phi(a)$ 必须满足方程 (4)。记 $\phi(p) = \sum_{ij} e_{ij}p'_{ij}, \phi(q) = \sum_{ij} e_{ij}q'_{ij}$，其中 $p'_{ij}, q'_{ij} \in C$ 和 $1 \leq i, j \leq 2$；那么由方程 (4)，可得 $p'_{11}q'_{12} = 0$。特别地，取 $\phi(u) = (1 + e_{21})u(1 - e_{21})$，得到 $p_{12}q_{12} = 0$，这意味着 $p_{12} = 0$。因此， p 的 1^{st} 行全为零，这与 p 可逆矛盾。因此 $q_{12} = 0$，矛盾。故 $q = p^{-1}b \in C$。由于 $q \in C$，方程 (2) 因而化为

$$[au^m + bu^m, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0 \tag{6}$$

记 $c = a + b = \sum_{ij} c_{ij}e_{ij}$，对于 $c_{ij} \in C$和 $1 \leq i, j \leq 2$。假设 $c \notin C$，则由事实（1.3）可知， c 的所有项均非零，即 $c_{ij} \neq 0$。在方程（6）中取 $u = e_{22}$，并右乘 e_{11}，得到:

$$c_{12}e_{12} = 0$$

这意味着 $c_{12} = 0$，矛盾。因此 $c = a + b \in C$。

□

引理 1.13. 设 R 是特征不为 2 的素环， U 是 R的 Utumi 商环， C是 R的扩张中心。设 $a, b \in U$, β是 U上的一个外自同构，并且 $m, n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 1$是固定整数，使得

$$[au^m + \beta(u^m)b, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0 \tag{7}$$

对所有 $u \in R$，则 β 是 R 上的恒等映射，除非 $b = 0$ 和 $a \in C$。

证明。由于 R 和 U 满足相同的带自同构的广义多项式恒等式（见事实 1.7），因此 U 满足

$$[au^m + \beta(u^m)b, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0 \tag{8}$$

我们可以假设 $a \notin C$ 且 $b \neq 0$，于是 U 满足非平凡的广义多项式恒等式。因此，根据（[14],定理 3）， U 是向量空间 V 上、定义在除环 D上的线性变换环的稠密子环。如果 β 不是 Frobenius 环，那么由事实（1.2）可知， U 满足

$$[au^m + z^m b, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0 \tag{9}$$

于是根据 [9], 可得， a， $b \in C$。特别地，由方程（9）， U 满足

$$b[z^m, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0 \tag{10}$$

于是根据波斯纳定理 [21]，存在适当的域 F 和正整数n，使得 U 和 $M_n（F）$ 满足相同的多项式恒等式。对于 $i \neq j$，在方程（10）中取$z = e_{ii} + e_{ij}$ 和 $u = e_{ii}$，可得，

$$0 = [e_{ii} + e_{ij}, e_{ii}]_k = (-1)^k e_{ij}$$

矛盾，其中 e_{ij} 是通常的矩阵单位，其在第（i， j）th 个位置为 1，其余位置均为 0。

现在假设 β 是 Frobenius 且 $dim_D V \geq 2$ （因为如果 $dim_D V = 1$，那么U 将是交换的）。若 $char（R） = 0$，则 $\beta（x） = x$，因为 β 是 Frobenius。这意味着 β 是内的，这与假设矛盾。因此，我们可以假设$char（R） = p \neq 0$ 且 $\beta（\lambda） = \lambda^{p^s}$，对所有 $\lambda \in C$ 以及某个固定整数 $s \geq 0$均成立。现在在方程（8）中用 λu 替换 u，则 U 满足

$$\lambda^{m+n_1+\ldots+n_k}[au^m + \lambda^{m(p^s-1)}\beta(u^m)b, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0. \tag{11}$$

特别地，取 $\lambda^m = \gamma$，则 U 满足

$$[au^m + \gamma^{(p^s-1)}\beta(u^m)b, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0. \tag{12}$$

由方程（8）和（12）可得

$$(\gamma^{(p^s-1)} - 1)[\beta(u^m)b, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0 \tag{13}$$

也就是说， U 满足

$$[\beta(u^m)b, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0. \tag{14}$$

再次由方程（8）和（14）可知，对于所有$u \in U$，都有 $[au^m, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0$，这意味着 $a \in C$ （见 [9]）。因此，我们可以考虑 $b \neq 0$。现在令 $e^2 = e \in soc（R）$，则由方程（14）可得，

$$[\beta(e)b, e]_k = 0. \tag{15}$$

在上述关系右乘 $(1 - e)$，得到

$$e\beta(e)b(1 - e) = 0. \tag{16}$$

特别地，在方程 (16) 中取幂等元 $(1 - e) - (1 - e)xe$ 对所有 $x \in U$，可得 U 满足：

$$\begin{aligned}&(1 - e)\beta(1 - e)b(1 - e)xe + (1 - e)\beta(1 - e)\beta(x)\beta(e)b(e + (1 - e)xe)\\ &-(1 - e)xe\beta(1 - e)b(e + (1 - e)xe) + (1 - e)xe\beta(1 - e)\beta(x)\beta(e)b(e + (1 - e)xe).\end{aligned} \tag{17}$$

由于 β 是外导子，因此根据事实（1.2）， U 满足：

$$(1 - e)\beta(1 - e)b(1 - e)xe + (1 - e)\beta(1 - e)z\beta(e)b(e + (1 - e)xe) \tag{18}$$

$$-(1-e)xe\beta(1-e)b(e+(1-e)xe)+(1-e)xe\beta(1-e)z\beta(e)b(e+(1-e)xe).$$

特别地，对于 $x=0$，我们得到 $(1-e)\beta(1-e)z\beta(e)be=0$，对所有 $z\in U$均成立。因此，由于 U的素性，对于任意$e^2=e\in Soc(U)$，我们有 $(1-e)\beta(1-e)=0$ 或 $\beta(e)be=0$ 。

若考虑情形 $(1-e)\beta(1-e)=0$，则方程 (17) 化简为：

$$-(1-e)xe\beta(1-e)b(e+(1-e)xe)+(1-e)xe\beta(1-e)z\beta(e)b(e+(1-e)xe).$$

特别地， U 满足

$$(1-e)xe\beta(1-e)z\beta(e)b(e+(1-e)xe).$$

现在将上述关系中的 z 替换为 ze ，可得

$$(1-e)xe\beta(1-e)ze\beta(e)be. \tag{19}$$

现在，由于 $e\beta(1-e)\neq 0$，否则由 $(1-e)\beta(1-e)=0$可得 $\beta(1-e)=0$，这与假设矛盾。因此，由方程 (19) 可得 $e\beta(e)be=0$，再由方程 (16) 可得 $e\beta(e)b=0$。因此，无论哪种情况，方程 (15) 都意味着

$$\beta(e)be=0. \tag{20}$$

对任意幂等元 $e\in U$。若对所有 $x\in U$ 取幂等元 $ex(1-e)+e$，则由方程 (20)， U 满足：

$$\big(\beta\big(ex(1-e)+\beta(e)\big)b(ex(1-e)+e).$$

由于 $\beta(e)be=0$, U 满足

$$\beta(e)\beta(x)b(ex(1-e)+e).$$

由于 β 是外部的，因此根据事实（1.2）， U 满足：

$$\beta(e)yb(ex(1-e)+e)$$

对所有 $x,y\in U$均成立。特别地，对 $x=0$, $\beta(e)ybe=0$，即 $be=0$（由 U 的素性可知），对所有 $e^2=e\in U$均成立。令 M表示由 U 的所有幂等元生成的 U 的加法子群，则 $bM=0$。此外，根据 [18]（第18页，推论）， $[U,U]\subseteq M$，即 $b[U,U]=0$，这意味着 $b=0$，矛盾。

□

备注：引理 1.12 和引理 1.13 涵盖了证明命题 1.11 所需的所有情形。

主定理的证明：根据给定的假设，我们有：

$$[F(u^m),u^{n_1},u^{n_2},\dots,u^{n_k}]=0 \tag{21}$$

对所有 $u\in I$均成立。由于 R,I 和 U 满足相同的广义多项式恒等式以及相同的、带有自同构的微分恒等式（见事实1.6、1.7），因此，

$$[F(u^m),u^{n_1},u^{n_2},\dots,u^{n_k}]=0 \tag{22}$$

对所有的 $u\in U$，其中 $F(u)=cu+d(u)$，对于某个 $c\in U$，且 d是 U 的斜导子，其相关自同构为 β （见事实1.5）。我们将证明分为以下几种情况：

情况1：若 d 是内导子，则对于所有的 $u \in U$ 以及某个 $p \in U$，有 $d(u) = pu - \beta(u)p$。于是 U 满足

$$[(c+p)u^m - \beta(u^m)p, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0. \tag{23}$$

由命题 1.11，我们得到所需结果。

情形 2：若 d 是外导子，则 U 满足

$$\Big[cu^m + \sum_{i=0}^{m-1} \beta(u^i)d(u)u^{m-i-1}, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}\Big] = 0. \tag{24}$$

由 [33]，可得：

$$\Big[cu^m + \sum_{i=0}^{m-1} \beta(u^i)yu^{m-i-1}, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}\Big] = 0. \tag{25}$$

特别地，U 满足

$$\Big[\sum_{i=0}^{m-1} \beta(u^i)yu^{m-i-1}, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}\Big] = 0 \tag{26}$$

子情形 1：若 β 是外导子，则由事实（1.2），U 满足：

$$\Big[cu^m + \sum_{i=0}^{m-1} z^i yu^{m-i-1}, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}\Big] = 0 \tag{27}$$

对所有 u、y、$z \in U$均成立。特别地，当 $z = 0$时，我们有

$$[yu^{m-1}, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}] = 0. \tag{28}$$

于是，根据波斯纳定理，存在适当的域 F 和正整数n，使得 U 与 $M_n(F)$ 满足相同的广义多项式恒等式。对于$i \neq j$，在等式（28）中取 $y = e_{ii} + e_{ji}$ 和 $u = e_{ii}$，得到

$$0 = [e_{ii} + e_{ji}, e_{ii}]_k = e_{ji}$$

这就产生了矛盾。

子情形 2：若 β 是内导子，则对所有 $x \in U$ 以及某个 $p \in U$，有 $\beta(x) = pxp^{-1}$。因此，由等式（26），U 满足：

$$\Big[\sum_{i=0}^{m-1} pu^i p^{-1} yu^{m-i-1}, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}\Big] = 0. \tag{29}$$

由于 β 不是恒等元，因此 $p \notin C$，故方程（29）是关于 R的非平凡多项式恒等式。根据 [14]，U同构于某个向量空间 V 上的线性变换所构成的稠密环，其中该向量空间定义在 C上。首先，我们考虑 $dim_C V \geq 3$的情形。由于 $p \notin C$，因此存在某个 $v \in V$，使得 $\{p^{-1}v, v\}$ 线性 C-无关。由于 $dim_C V \geq 3$，必定存在 $w_1 \in V$，使得 $\{p^{-1}v, v, w_1\}$线性 C-无关。由于 U 是稠密的，因此根据Jacobson稠密性定理（见事实 1.9），存在 y_1、$y_2 \in U$，使得

$$y_1 w_1 = 0, y_2 w_1 = v, y_1 p^{-1} v = p^{-1} v, y_1 v = v.$$

因此，由方程（29）可得

$$0 = \Big[\sum_{i=0}^{m-1} py_1^i p^{-1} y_2 y_1^{m-i-1}, y_1^{n_1}, y_1^{n_2}, \ldots, y_1^{n_k}\Big] w_1 = (-1)^k v \neq 0$$

这就矛盾了。现在，若 $dim_C V = 2$，即 $U \cong M_2(C)$，则为域 C 上的二阶矩阵环。

$$p = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, p^{-1} = \frac{1}{det(p)} \begin{bmatrix} p_{22} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{11} \end{bmatrix}$$

在方程（29）中取 $u = e_{22}, y = e_{21}$，得到

$$p_{11}p_{22} = 0 \tag{30}$$

同样，在方程（29）中取 $u = e_{11}, y = e_{22}$，得到

$$p_{11}p_{12} = 0 \tag{31}$$

由于 p 可逆，因此 p_{22} 和 p_{12} 不能同时为零，故由方程（30）和（31）可得 $p_{11} = 0$。这意味着 $p_{12} \neq 0$，否则 p 将是奇异矩阵。

取 $\phi(u) = (1 - e_{12})u(1 + e_{12}) \in Aut(U)$，则

$$\phi\left(\Big[\sum_{i=0}^{m-1} pu^i p^{-1} y u^{m-i-1}, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}\Big]\right) = 0$$

即 U 满足：

$$\Big[\sum_{i=0}^{m-1} \phi(p)u^i \phi(p^{-1}) y u^{m-i-1}, u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_k}\Big] = 0. \tag{32}$$

记 $\phi(p)_{11}$ 为 $\phi(p)$ 的 $(1,1)^{th}$ 元，则由与上文相同的论证可得 $0 = \phi(p)_{11} = p_{21}$，这与假设矛盾（因为 p 可逆）。
对于 $dim_C V = 1$ 的情形， R 将是交换的，因此无需证明 i n 此情形。

以下是主定理的一个非常自然的推论：

推论 1.14. 设 R 是一个素环，其 Utumi 商环为 U， F 是 R 的一个非零广义导子，且 I 是 R 的一个非零理想。假设对所有 $x \in I$，都有 $[F(x^m)\ x^n]_k = 0$，其中 n、$k \geq 1$ 是固定整数。那么存在 $\beta \in C$，使得对所有 $x \in R$， $F(x) = \beta x$。

证明。取主定理中的 $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n$，即可得到所需结果。□

未来的研究：最近，C.K. Liu 在 [24] 中研究了 F 和 G 的结构，前提是对于所有 $x \in I$，它们满足恒等式 $[F(x^n)x^m + x^m G(x^n)\ x^r]_k = 0$，其中 F、 G 是素环 R 上的非零广义导子， I 是 R 的非零理想，而 m、n、$k \geq 1$ 是固定整数。鉴于本文中的 [24]，我们可以尝试找出 F 和 G 的结构，前提是对于所有 $x \in I$，它们满足恒等式 $[F(x^n)x^m + x^m G(x^n)\ x^{n_1}$、$x^{n_2}$、.....、$x^{n_k}] = 0$，其中 m、n、n_1、n_2、.....、$n_k \geq 1$ 是固定整数。

Acknowledgement

作者谨向审稿人提出的宝贵建议和意见表示衷心感谢。本研究未获资助。

References

[1] Dhara, Basudeb and De Filippis, Vincenzo，素环左理想与李理想上广义导子的恩格尔条件，《代数通信》，48 (1)，154–167，2020年。[2] Dhara, Basudeb，导子幂值的湮灭子条件，《印度纯粹与应用数学杂志》，42 (4)，357–369，2011年。[3] Alba, Emine and Arga, Nurcan and Filippis, Vincenzo De，单侧理想上具有恩格尔条件的广义导子，36 (6)，2063–2071，2008年。[4] De Filippis, Vincenzo and Di Vincenzo, Onofrio Mario，多线性多项式上的消失导子与广义导子的中心化子，《代数通信》，40 (6)，1918–1932，（2012年）。[5] Beidar, Konstant I and Martindale, Wallace S and Mikhalev, Alexander V，《具有广义恒等式的环》，CRC出版社，1995年。[6] Argac, Nurc and Carini, Luisa and De Filippis, V，李理想上广义导子的一个恩格尔条件，《台湾数学学报》，419–433，2008年。[7] Alahmadi, Adel and Ali, Shakir and Khan, Abdul Nadim and Khan, Mohammad Salahuddin，素环上广义导子的刻画，《代数通信》，44 (8) 3201–3210，2016年。[8] Kharchenko, Vladislav Kirillovich，素环的微分恒等式，《代数与逻辑》，17 (2)，155–168，1978年。[9] Dhara, Basudeb and Ali, Asma and Das, Deepankar，素环及巴拿赫代数中李理想与左侧理想上广义导子的恩格尔条件，《Afrika Mathematika》，27 (7)，1391–1401，2016年。[10] Beidar, KI，具有广义恒等式的环。3.，《莫斯科大学学报：数学与力学》，4，66–73，1978年。[11] Chuang, Chen Lian，系数属于Utumi商环的广义多项式恒等式，《美国数学会会刊》，103 (3)，723–728，1988年。[12] Demir, C agri and Arga, Nurcan，单侧理想上具有恩格尔条件的广义导子的一个结果，《韩国数学会杂志》，47 (3)，483–494，2010年。[13] Posner, Edward C，素环中的导子，《美国数学会会刊》，8 (6)，1093–1100，1957年。[14] Martindale 3rd, Wallace S，满足广义多项式恒等式的素环，《代数杂志》，12 (4)，576–584，1969年。[15] Erickson, Theodore and Martindale, Wallace and Osborn, James，素非结合代数，《太平洋数学杂志》，60 (1)，49–63，1975年。[16] Faith, C and Utumi, Y，关于Litoff定理的新证明，《匈牙利科学院数学学报》，14 (3-4)，369–371，1963年。[17] Lee, Tsiu Kwen，左忠实环的广义导子，《代数通信》，27 (8)，4057–4073，1999年。[18] Herstein, Israel Nathan，《环论专题》，芝加哥大学出版社，1969年。[19] Di Vincenzo, OM，李理想的第n中心化子，《意大利数学联盟通报》，7 (3-A)，77–85，1989年。[20] Lanski, Charles and Montgomery, M Susan，特征为2的素环的李结构，《太平洋数学杂志》，42 (1)，117–136，1972年。[21] Posner, Edward C，满足多项式恒等式的素环，《美国数学会会刊》，11 (2)，180–183，1960年。[22] Lee, Tsiu-Kwen and Shiue, Wen-Kwei，素环中具有恩格尔条件的导子的一个结果，《东南亚数学通报》，23 (3)，437–446，1999年。[23] Lee, Tsiu Kwen，具有微分恒等式的半素环，《数学研究所通报》，20 (1)，27–38，1992年。[24] Liu, Cheng-Kai，素环中两个广义导子的一个恩格尔条件，《代数通信》，49 (2)，836–849，2021年。[25] Lanski, Charles，具有导子的一个恩格尔条件，《美国数学会会刊》，118 (3)，1993年。[26] Bre ˇsar, Matej，素环中的中心化映射与导子，《代数杂志》，156 (2)，385–394，1993年。[27] Tiwari, SK，素环中含广义导子的恒等式，《巴勒莫数学学会报告》第二辑，1–17，2021年。[28] Jacobson, Nathan，美国数学会，37，1956年。《环的结构》，

[29] Carini, Luisa 和 De Filippis, Vincenzo 和 Scudo, Giovanni, 《广义斜导子的乘积恒等式》，《代数通信》，44（7），3122–3138，2016年。[30] De Filippis, Vincenzo 和 Di Vincenzo, Onofrio Mario, 《李理想上的广义斜导子与幂零值》，《代数讨论》，26（04），2019年。[31] C. L. Chuang. 关于自同构与反自同构的微分恒等式，II。《代数杂志》，160(1):130–171，1993年。[32] V. Kharchenko.《结合环的自同构与导子》，第69卷。施普林格科学与商业媒体，1991年。[33] C.-L. Chuang 和 T.-K.《单个斜导子的恒等式》，《代数杂志》，288(1):59 – 77，2005年。

A. Pandey、 School of Liberal Studies、 Ambedkar University Delhi、 Delhi-110006、
INDIA.
Email address: ashutoshpandey064@gmail.comB. Prajapati、 School of Liberal Studies、 Ambedkar University Delhi、 Delhi-110006、INDIA.*Email address*: balchand@aud.ac.in