arXiv:2301.13675v1 [math.AC] 31 Jan 2023

赋值整环上模的紧子模

PETER DANCHEV 和 L´ASZL´O FUCHS

Abstract. 本文提出了一种研究一类模的不同寻常的方法，因为它考察的是赋值整环上的模范畴的一个子类。该类远非一个满子范畴，甚至不是一个范畴。我们关注的是由投射维数不超过一的模组成的子类，并且只考虑其核和余核也属于该子类的态射。这个类仍然是可处理的，其中若干特征通常比模范畴中的情形更简单，但许多熟悉的性质也不复存在。关于该类中模的一些结果类似于秩一离散赋值整环上的模的相应结果（其整体维数为 1）。借助文献中已有的赋值整环上模的一般理论，研究工作可得到显著简化，例如参见 [14]-[15]。我们的主要目标是确立其基本特征，并深入考察内射性、纯内射性和余挠性，但不打算对这些性质展开深入研究。

1. Introduction

所有熟悉整环上模论的人都很清楚，如果环是戴德金整环，那么该理论会大大简化；也就是说，这些模的投射维数（p.d.）至多为一。E. Matlis 认识到“p.d.1”这一条件具有如此强大的作用，并在分式域作为模具有 p.d.1 这一假设下，发展出了许多有趣的性质；参见 [17]（在 [15] 中，这些环被命名为 Matlis 整环，以纪念他）。为了更好地理解 p.d.1 并进一步了解它，自然可以尝试考察：对于一个一般整环，如果只研究其投射维数不超过 1 的模，而忽略投射维数更高的模，那么理论将呈现何种形式。这意味着研究这样一个范畴，其中对象是投射维数为 ≤ 1 的模，并且要求态射的核和余核均具有投射维数 ≤ 1。本文将在任意赋值整环上开展这项工作（即理想关于包含关系构成链的整环）。赋值整环是进行此类研究的首选，也是显而易见的选择，因为它们具有足够的普遍性，同时仍然易于处理；幸运的是，关于它们已有大量文献，这些文献揭示了许多可以加以利用的信息。

模范畴中选定的子类并不是一个范畴；其主要原因在于，映射的通常复合规则只有在附加条件下才成立。在处理此类的模时，很快就会意识到，必须重新审视熟悉的事实和显而易见的概念，使其适应新的情形。两个态射的通常和很少仍是此类中的另一个态射，属于此

Date: 2023年2月1日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类13C05, 13F99。次要分类13G05。

子类只有在特殊情况下才构成一个格，两个对象的张量积可能不属于此类，等等。但另一方面，离散秩一赋值整环的一些良好性质仍然保留下来，例如内射性与可除性的等价性，或循环表示的挠模的纯内射性。我们还将关注纯内射性和余挠性质（第7节和第8节）。虽然这些概念的定义旨在使其与熟悉的模概念相近，但始终应牢记，它们并不完全相同。对循环表示模直和中的子模（第5节）的讨论，已经展示了这与传统模处理方式之间的巨大差异。

在全文中，符号 V表示一个（交换）赋值整环， Q表示其商域。我们将使用记号 $K = Q/V$。符号 $V^\times$ 表示 V的非零元素所成的乘法幺半群。挠模与无挠模具有通常的含义。缩写 p.d. 表示投射维数。赋值整环的全弱维数为 1。同样， $|X|$ 表示集合 X的基数，而 ω 是最小的无限序数。我们还将 gen M 简写为表示 M 的生成集的最小基数。我们用“可数生成”表示 gen $M = \aleph_0$ （但不是有限的）。在赋值整环上，无挠性与平坦性等价；因此，相对可除性与纯性具有相同的含义。关于构造具有预定值群的赋值整环，参见例如 [15, 第 II 章第 3]节。

对于赋值整环 V，我们将范畴 $\mathcal{C}_V$视为范畴 V-模，即由 V-模及其通常的态射组成的范畴。我们的主要目标是研究子类 $\mathcal{C}_V^*$，其对象是投射维数为 ≤ 1 的 V-模，并且要求其态射的核与余核也具有投射维数 ≤ 1。其子对象是紧子模（见第 2 节）。尽管我们的结果局限于这一子类，但在证明中我们经常会使用覆盖范畴 $\mathcal{C}_V$中的论证和概念。

投射维数为一的模曾在较早的一篇论文 [9] 中作过简要讨论，重点关注了Prüfer整环；我们目前的一些结果也曾以不同的背景出现在该文中。

研究这一子类 $\mathcal{C}_V^*$ 的想法源于最近的一篇论文 [12] ，其中紧子模发挥了主导作用。对于映射的核和余核均受到限制的模类进行研究，看起来颇为奇特，但同时也很有趣且富有挑战性。我们承认，起初我们对涉足这一尚未开拓、眼下看不到直接应用前景的领域有所犹豫；尽管如此，我们还是决定开始研究这一类，因为我们相信，这些结果将有助于更好地理解投射维数为一所产生的影响，以及紧性在子模中的作用。此外，它们还可能在一些不寻常的情形下提供反例。在本文中，我们首先探索这一想法；相应地，我们不仅试图弄清楚哪些结论仍可验证，也试图 выяс清楚，与传统模论相比，哪些结论已不再成立。

2. Tight Submodules

我们贯穿全文所使用的基本概念，是 p.d.≤ 1 的模中子模的紧性。下面的定义适用于所有环。设 $B < A$ 为满足 p.d.$A \leq 1$ 的模。若 p.d.$A/B \leq 1$，则称 B 在 A 中是紧的。于是也有 p.d.$B \leq 1$。显然，直和项是紧子模，但紧

子模不一定是直和项。对于 p.d.1 的紧性，在 [8] 中引入并在 [1]，中立即推广到更高的 p.d. 时，其定义略有不同：要求 p.d.$A/B \leq$ p.d.A。这两个变体之间的唯一区别是，在一个自由 V-模中，循环表示的自由子模按照 [8]，的含义并不紧，但在本文的含义下是紧的。（当前版本曾在 [9] 中被称为 t-子模。）

以下容易验证的基本规则将会经常使用，通常不作明确说明：

引理 2.1. 设 $C < B < A$ 是 V-模，且投射维数为 $A \leq 1$。

(a) 若 C 在 B 中是紧的，且 B 在 A 中是紧的，则 C 在 A 中是紧的。(b) 若 C 和 B 在 A 中是紧的，则 C 在 B 中是紧的。(c) 若 C 和 B 在 A 中是紧的，则 B/C 在 A/C 中是紧的。(d) 若 C 在 A 中是紧的，且 B/C 在 A/C 中是紧的，则 B 在 A 中是紧的。 □

如前所述，符号 $\mathcal{C}_V$ 表示具有通常态射的 V-模范畴，而 $\mathcal{C}_V^*$ 是其对象为投射维数为 ≤ 1 的 V-模的子类。例如，在 $V^\times$ 的可数乘法子幺半群 S 处进行的常用局部化 V_S，都是我们类 $\mathcal{C}_V^*$ 的对象。对象 $M \in \mathcal{C}_V^*$ 的子对象是 M 的紧子模。$\mathcal{C}_V^*$ 中的态射是这样的模同态 ϕ：$M \to N (M, N \in \mathcal{C}_V^*)$，其像 Im ϕ 在 N 中是紧的。这也意味着 Ker ϕ 应当是 M 的紧子模。因此，$\mathcal{C}_V^*$ 中的态射具有紧核和紧像。显然，M 的子模 A 是紧的，当且仅当包含态射 $A \to M$ 属于 $\mathcal{C}_V^*$。为了检验 $\mathcal{C}_V^*$ 是否为一个范畴，需要考察范畴论的公理；特别是其中关键的一条：如果 α：$A \to B$ 和 β：$B \to C$ 是态射，那么复合映射 $\beta\alpha$：$A \to C$ 也应当是态射。遗憾的是，这一性质在 $\mathcal{C}_V^*$ 中很少成立。我们马上将看到，这一性质与如下性质有关：两个紧子模的和仍然是紧的——而这一性质极少成立。在下一个引理中，将把这一性质与类似的性质进行比较，尤其是与两个紧子模的交的紧性进行比较。

引理 2.2. 设 M 是一个 p.d. 为 ≤ 1 的 V-模，且 A、B 是 M 的两个紧子模。考虑以下条件：

(i) $A \cap B$ 在 A 中是紧的；(ii) $A \cap B$ 在 B 中是紧的；(iii) A 在 $A + B$ 中是紧的；(iv) B 在 $A + B$ 中是紧的；(v) $A \cap B$ 在 M 中是紧的；(vi) $A \cap B$ 在 $A + B$ 中是紧的；(vii) $A + B$ 在 M 中是紧的。

则条件 (i)-(v) 等价，(vi) 由其中任一条件推出，而 (vii) 蕴含其中每一个条件。

证明. (i) $\Leftrightarrow$ (iv) 以及 (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) 均由诺特同构定理推出。(i) $\Leftrightarrow$ (v)。正合序列中的第三个非零模

$$0 \to A/(A \cap B) \to M/(A \cap B) \to M/A \to 0$$

具有投射维数≤ 1. 。由此我们根据著名的 Kaplansky 关于短正合序列中投射维数的引理（例如参见 [15, 引理 2.4，第 202]页）可推得，最后一个正合序列中的前两个非零模同时具有投射维数 ≤ 1。

（vii） ⇒ （ii）。由正合序列

$$0 \to (A+B)/A \to M/A \to M/(A+B) \to 0$$

其中 M/A 和 $M/(A+B)$ 的投射维数为≤ 1，根据同一个 Kaplansky引理，我们可得 $A+B$ 的投射维数为$/A = 1$。因此，$B/(A \cap B)$ 的投射维数为 $= 1$，且 $A \cap B$ 在 B 中是紧的。

(ii) ⇒ (v)。根据假设，$A \cap B$ 在 B 中是紧的，且 B 在 M 中是紧的。因此，根据引理 2.1(a)，$A \cap B$ 在 M 中是紧的。类似的论证可得 (i) ⇒ (v)。

(vii) ⇒ (iii)。由引理2.1(b)可知，A 和 $A+B$ 在 M 中是紧的意味着 A 在 $A+B$ 中是紧的。

(i)+(ii) ⇒ (vi)。如果 $A/(A \cap B)$ 和 $(A+B)/A \cong B/(A \cap B)$ 的投射维数为≤ 1，那么正合序列中的中间项

$$0 \to A/(A \cap B) \to (A+B)/(A \cap B) \to (A+B)/A \to 0$$

同样具有投射维数≤ 1。 □

我们感谢 L. Salce 为我们提供了一个例子，说明一个投射维数为 1 的模的两个紧子模之和未必是紧的，即使它们的交是紧的（蕴含关系 (vii) ⇒ (v) 在引理 2.2 中排除了逆命题）。由于证明需要赋值整环理论中的若干结果，而本文并不需要这些结果，我们略去细节。

模与其紧子模之间的关系是一个基本问题。下面这个简单事实或许能提供有用的信息。

引理 2.3. 设 M 是一个投射维数为≤ 1的 V-模。M 的一个紧子模 C 满足 $\operatorname{gen} C \leq \operatorname{gen} M$.

证明。如果 $\operatorname{gen} M = n$ 是一个整数，那么根据 Warfield, [21] M 是 n 个循环子模的直和，因此其 Goldie维数为 n （模 M 的 Goldie维数——缩写为 Gd——是直和 $\oplus_{i \in I} M_i$ 中所包含的非零直和项集合的基数的上确界 M）。子模C 不可能具有更大的 Goldie维数，因此 $\operatorname{gen} C \leq n$。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & H & = & H & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & N & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \\
0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\phi} & M/C & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

若 $\operatorname{gen} M = \kappa$ 是一个无限基数，则考虑一个自由分解 $0 \to H \to F \to M/C \to 0$，其中 $\operatorname{gen} F = \kappa$。$\phi: M \to M/C$ 和$\psi: F \to M/C$ 的拉回 N 适合于垂直正合序列 $0 \to H \to N \to M \to 0$。（参见行和列均为正合序列的交换图。）显然，自由 F的自由子模H满足 $\operatorname{gen} H \leq \operatorname{gen} F = \kappa$，因此 $\operatorname{gen} N \leq \operatorname{gen} H + \operatorname{gen} M = \kappa$

并且可得 gen $N \geq$ gen $M = \kappa$。因此 gen $N = \kappa$，又由于 $N \cong F \oplus C$，不等式 gen $C \leq$ gen $N = \kappa$ 显然成立。□

接下来我们验证链中模的紧性的一项结果。请注意，紧并不是一种归纳性质。（下一引理中的连续性意味着： $M_\rho = \cup_{\sigma<\rho} M_\sigma$ 每当 ρ 是一个极限序数时。）

引理 2.4. 假设

$$0 = M_0 < M_1 < \cdots < M_\sigma < \cdots < M_\tau = M \tag{1}$$

是模 M 的子模的一个连续良序上升链，其并为 M，且模 M_σ （$\sigma < \tau$）的投射维数为 1。如果每个模在其紧接的后继中都是紧的，那么链中的每个模在所有后继模中也都是紧的，并且在 M中也是如此。此外，投射维数 $M = 1$。

证明。将 Auslander 关于链的并的投射维数的熟知判据（例如参见 [15, 第 VI 章，引理 2.6]）应用于从 M_σ开始的子链，可以得到：对所有序数 $\rho \geq 0$，投射维数 $M_{\sigma+\rho+1}/M_{\sigma+\rho} \leq 1$ 意味着 M_σ 在链中的每个后继模中都是紧的。投射维数 $M = 1$ 由同一个引理得到。□

约定：当我们说“对象”时，指的是 $\mathcal{C}_V$ 的子类$\mathcal{C}_V^*$ 中的对象（请记住：所有对象的投射维数均为≤ 1，且所有子对象都是紧的！）。显然， $\mathcal{C}_V^*$ 对直和项和直和封闭；到直和项上的投影以及直和项的嵌入都是$\mathcal{C}_V^*$中的态射。反过来，我们注意到，两个子对象的和或交未必是子对象，而一个对象的升链之并也未必是对象。类 $\mathcal{C}_V^*$ 通常并非加性的；当然，当 V 是离散赋值域（ DVD ）时，它是加性的。

3. 基本对象

由于本类中态射的复合规则有所限制，我们必须从头学习一些熟悉的基本概念是否需要修改，以及该如何修改，才能使其适用于这里。在某些情况下，不得不接受一些令人难以置信的情形，这一点也不足为奇。

循环表示对象。我们这一类中最简单的对象 $\mathcal{C}_V^*$ 是循环表示模： Vr/Vs (r, $s \in V$)，其中 $Vs \leq Vr$ 是主理想。 Vr/Vs 的所有循环子模都是子对象。稍后我们将看到，这些正是 $Vr/Vs \cong V(rs^{-1}) \leq V$的唯一子对象。因此，在对象 V中，只有主理想是子对象。

环元素的乘法诱导出 Vr/Vs 的自同态，其核和像都是子对象。循环表示模之间的态射在 $\mathcal{C}_V^*$中与在 $\mathcal{C}_V$中相同，因此，循环表示对象的 V-自同态环以及 $\mathcal{C}_V^*$-自同态环都是局部环。

有限生成对象。在 $\mathcal{C}_V^*$ 中，有限生成对象的性质非常好。一个初等结果表明，赋值整环上的有限生成模的投射维数为 ≤ 1，当且仅当它是有限表示的（见 [14, 命题 4.1，第 83] 页）；此时，它是有限个循环表示模的直和（见 Warfield [21], 或 [15, 第 159] 页）。因此，在我们的类 $\mathcal{C}_V^*$ 中，有限生成对象就是有限表示的 V-模。注意，这类模中元素的湮灭子都是主理想（包括理想 0），因而是子对象。

示例 3.1。设 $\{x, y, z, w\}$ 是模 M 的一个生成集，其定义关系为 $rx = 0$、 $sy = 0$、 $ax + by + cz = 0$、$ex + dw = 0$，其中 r、s、a、b、c、d、e 是 $V^\times$ 中的非单位元。M 的结构在很大程度上取决于这些环元素之间的整除关系。例如，假设以下真整除关系成立： $c \mid d \mid b \mid e \mid a \mid s \mid r$。我们可以选取另一个生成集：$\{x, y, z', w'\}$，其中 $z' = z + ac^{-1}x + bc^{-1}y$、 $w' = w + ed^{-1}x$；那么新的关系将是 $rx = 0$、 $sy = 0$、 $cz' = 0$、 $dw' = 0$。这表明，有限表示模 M 是由 x、y、z'、w' 生成的四个循环表示子模的直和，它们的湮灭子依次为 Vr、Vs、Vc、Vd。□

如果 B 是有限表示模 A的有限生成子模，那么 A/B是有限表示的，因此它具有投射维数 ≤ 1。于是 B 是 A中的一个子对象。如果 C 是有限表示模 A中的紧子模，那么投射维数 $A/C \leq 1$ 意味着 A/C 是有限表示的。因此， C 是有限生成的。由此，有限生成对象中的子对象恰好就是有限生成子模。这一事实的一个直接推论如下。它表明，有限表示对象这一子类在 $\mathcal{C}_V^*$ 中的行为方式与在 $\mathcal{C}_V$中相同。

推论 3.2。1) 设 $\alpha\colon A \to B$ 和 $\beta\colon B \to C$ 是 $\mathcal{C}_V^*$中有限表示对象之间的态射。那么复合映射 $\beta\alpha$ 也是 $\mathcal{C}_V^*$中的一个态射。2) $\mathcal{C}_V^*$ 中有限表示对象的自同态构成一个环。

证明。只需证明两个有限生成子对象的交仍是有限生成的（两个有限生成子模的和显然仍是有限生成的）。引理 2.2 中的蕴含关系 (vii)⇒(vi) 保证这样的交在这些对象的和中也是紧的。有限生成对象中的紧子对象是有限生成的。□

以下命题记录了关于对象中有限生成子模的重要观察。

命题 3.3。(i) 任意对象中的有限生成子模都是（有限表示的）子对象。在有限生成对象中，它们是唯一的子对象。

(ii) 对象 M 中属于类 $\mathcal{C}_V^*$ 的有限表示子对象构成 M的子模格中的一个子格。

(iii) 有限表示子对象与任意子对象的和与交也都是子对象。

证明。(i) 这是 [15, 引理 6.4，第 217], 页的直接推论；该引理确保，投射维数为 ≤ 1 的模的有限生成子模是紧的。断言 (i) 的第二部分已在上文陈述。

(ii) 这由推论 3.2 得出。

(iii) 设 A 为有限表示的且 B 为 M的任意子对象。模 $(A + B)/B$ 是 M/B的有限生成子模，因此它在 M/B中是紧的。因此， $A + B$ 在 M中是紧的。其余部分由引理 2.2 得出。□

单列对象。最重要的对象是单列模（文献中也称为串模）：它们被定义为其子模关于包含关系构成一条链的模。在 $\mathcal{C}_V$ 中，显然的例子是所谓的标准单列模：分式域 Q，以及它的子模和其满同态像的子模，即形如 J/I 的模，其中 $0 \leq I < J \leq Q$ 是子模。根据 Osofsky（见 [18]，或见 [15，第

VI 章第 3] 节），赋值整环上的 Q 的子模 J 的投射维数 p.d. 是整数 $n \geq 0$，当且仅当 gen $J = \aleph_{n-1}$ （$\aleph_{-1}$ 表示“有限”）。因此，$\mathcal{C}_V^*$ 中的单列对象至多是可数生成的。然而，正如前面所指出的，一个可数生成理想 J 并不是 $\mathcal{C}_V^*$ 中 V 的子对象；事实上，由于 p.d.$V = 0$ 和 p.d.$J = 1$，可推出 p.d.$V/J = 2$。一个挠单列对象若要属于 $\mathcal{C}_V^*$，其投射维数应为 p.d.≤ 1；因此，只有满足 J 至多是可数生成且 I 是循环的那些标准单列对象 J/I 才是对象，因为 p.d.$J/I \leq 1$ 蕴含 J/I 是相干的；例如见 [14, 第 IV 章定理 4.3]。因此，单列对象中元素的所有湮灭子理想都是主理想。由此可知，单列对象的唯一真子对象都是循环表示的。非标准单列对象（它们在赋值整环理论中发挥着重要作用，参见 [2] 或 [15]）现在将被忽略，因为它们的投射维数总是超过 1。

处理单列对象的一种便捷方法，是将其表示为J （无挠情形）或 J/V （挠情形）的形式，其中 J 或者是 Q （只要它是可数生成的），或者是 Q的至多可数生成的真子模，且包含 V。于是，回答单列模的同构问题就很简单了：$J \cong J'$ 当且仅当 $J = rJ'$，或者对于某个 $r \in V^\times$ 有 $J' = rJ$ （即对于某个 $0 \neq q \in Q$有 $J' = qJ$）；而$J/V \cong J'/V$当且仅当 $J = J'$。此外，即使在 $\mathcal{C}_V^*$中的挠单列对象集合上，讨论全序也颇有意义：其序关系由分子的自然包含关系 J诱导而来。

设 U是一个单列对象，且 $r \in V^\times$。 rU的含义是显然的。但写作 $r^{-1}U$. 也同样有意义。事实上，这表示满足 $rU' = U$的单列对象 U'；它在同构意义下是唯一的。

由对可数生成单列对象的真子对象的描述 $U \in \mathcal{C}_V^*$ 可知，它们的自同态只有自同构和到零子模的映射，即 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_V^*}(U) = \mathrm{Aut}_V(U) \cup \{0\}$。众所周知，$\mathcal{C}_V$ 中单列模的自同态环是一个局部环（见 Shores–Lewis [19]），而具有局部自同态环的模具有交换性质。

交换性质是关于直和项行为最常被研究的性质之一。回顾一下，若一个模 A 具有（有限）交换性质，则任意模 M 的直和分解 $M = A \oplus B = C \oplus D$ 都意味着存在形如 $M = A \oplus C_1 \oplus D_1$ 的另一分解，使得$C_1 \leq C$、$D_1 \leq D$。此外，若 A 对于任意模 B、C 满足消去性质，则 $A \oplus B \cong A \oplus C$意味着 $B \cong C$。最后，若 A 满足 $M = A_1 \oplus B = A_2 \oplus C$ 且 $A_1 \cong A_2 \cong A$，则其具有替换性质，这意味着存在一个子模 $A' \leq M$，使得 $A' \cong A$ 和 $M = A' \oplus B = A' \oplus C$。（见 [6]。）我们注意到，如果一个对象 $A \in \mathcal{C}_V^*$作为 $\mathcal{C}_V$中的模具有交换性质、消去性质或替换性质中的任一性质，那么它在类$\mathcal{C}_V^*$中也具有相同的性质，因为该类对于直和项和直和是闭合的。

鉴于前面的评论，由 [15, 推论2.3，第 342] 页以及 [15, 第181]页，我们得到以下定理。

定理 3.4。类 $\mathcal{C}_V^*$ 中单串对象的有限直和具有所有消去、交换和替代性质。□

极大单串子模。在 M 中，极大单串子模是指不真包含于 M 中另一个单列子模内的单列子模。

定理 3.5。设 M 是一个投射维数为 ≤ 1 的 V-模，且 U 是 M 中的单列子模。

(i) 如果 U 是 M 中的极大单列模，则它至多是可数生成的，并且其投射维数为 ≤ 1。(ii) 如果 U 在 M 中是可数生成且紧的，则它是 M 中的一个极大不可分解子模。(iii) 如果 U 是 M 的一个紧子模中的可数生成极大不可分解子模，则它在 M 中也是极大的。

证明。(i) 参见 [15, 第六章，引理 6.7]。

(ii) 反设 U 在 M 中不是极大的，即存在一个不可分解 $U' \leq M$ 真包含 U。不妨设 U' 是循环的，设 $U' = Va$ 对于 $a \in M$。于是， Va/U 是模 M/U 中的一个非零循环子模，而根据假设该模的投射维数为 1。因此可知 Va/U 在 M/U 中是紧的，所以 U 必须是循环的。此矛盾证明了 (ii)。

(iii) 证明与 (ii) 类似。若 U 是紧子模 N 中的一个极大单列模，并且包含于一个更大的循环单列模 $U' \leq M$ 中，那么 $U'/U \cong (U'+N)/N$ 是 M/N 中的一个循环子模，因此是循环表示的。同样，我们可以得出结论： U 必须是循环的。□

该定理的一个直接推论是，在循环表示对象的直和中，所有单列子对象也都是循环表示的。

作为对象的混合模。在 $\mathcal{C}_V^*$ 中，一个通常意义下的混合对象（即既非挠也非无挠）不一定具有一维挠部分。事实上，只要这个数 ≥ 1 存在，投射维数为 1 的混合模的挠子模的投射维数可以是任意值，但不超过无挠 V-模的最大投射维数减 1。具体而言，选取一个投射维数为 $n \geq 2$ 的无挠 V-模 N，并令 $N = F/G$，其中 F 是一个自由 V-模。设 H 是 G 的一个本质自由子模，并定义 $M = F/H$。那么， M 是一个对象，其挠子模 G/H 的投射维数为 $n-1$。

即使混合对象的挠子模是一个对象，它也未必是一个子对象。因此，如果一个对象的挠子模是非零真子对象，那么将其视为$\mathcal{C}_V^*$ 中的混合对象似乎是合理的。关于 $\mathcal{C}_V^*$中的内射对象，它在 $\mathcal{C}_V$中是混合模、但在 $\mathcal{C}_V^*$中不是，参见下文例 6.9。

可数生成对象。设 M 是可数上升链 M_n ($n < \omega$)中有限表示模的并。那么，每个 M_n 在其紧邻后继中都是紧的，因而在 M 中也同样是紧的；后者将具有投射维数 1（参见引理 2.4）。此外，由于 M 的每个有限生成子模都包含于某个M_n中， M 的所有有限生成子模在 M 中都是紧的并且是有限表示的，因而是子对象。循环子对象是循环表示的，因此 M 中元素的湮没子是主理想（即也是对象）。可数生成的子模在可数生成对象中可能是、也可能不是子对象。例如， V的可数生成理想是对象，但不是 V的子对象。

下一定理中的断言 (i) 表明，前一段中的 M 模是一个典型的可数生成对象。

定理 3.6。（i）一个可数生成的 V-模的投射维数为 ≤ 1，当且仅当它是一个有限表示（紧）子模的可数递增链的并。

（ii）设 A、B 是 V-模 M 中的紧子模，且其投射维数为 ≤ 1，使得 B 是一个t大多数是可数生成的。然后

（a） $C = A \cap B$ 也至多是可数生成的，并且在 B 中是紧的，在 A 中也是紧的，在 M 中同样是紧的；

(b) $A + B$ 的投射维数为≤ 1，且 A 在其中是紧的。

证明。 (i) 该断言的一种证明方式来自命题 3.3，而其逆命题则由本定理之前倒数第二段处理。

(ii) (a) B 是可数链 $\{B_n \mid n < \omega\}$ 的并，其中由有限表示子模组成。因此， $B/C = B/(A \cap B) \cong (A + B)/A = \cup_n (A + B_n)/A$，其中最后的商模是有限生成的（即 M/A中 B_n 的满同态像），因而在 M/A中是紧的。它们的并（$A + B$）的投射维数/A 等于 1，这意味着投射维数 $B/C = 1$。因此， C 在 B中是紧的，从而在 M中也是紧的，进而在 A中同样如此。

(b) 和 $A + B$ 是扩张链 $A + B_n$ 的并，这些扩张由有限表示模扩张 A 而得，因此其投射维数为 ≤ 1。□

下面我们给出更多可数生成对象的例子。通过选取合适的值群，可以很容易地构造出具有所需性质的赋值整环。

例 3.7。考虑一个由 $\{u_i\ (i < \omega)\}$生成的单列对象 U。对每个 $u_i \in U$ 附加一个循环表示模，设该模由 b_i 生成，使得 $r_i b_i = u_i$，其中要求非单位元 $r_i \in V^\times$ 满足以下条件： V/Vr_i 可适当地嵌入 U/Vu_i。于是， U 是 $B = \langle U$的纯子对象， $b_i\ (i < \omega)\rangle$，其中 B/U 是循环表示模 $\cong Vb_i/Vu_i$的直和。由于由循环表示模作出的纯扩张显然是分裂的，我们得到： $B \cong U \oplus (\oplus_{i<\omega} Vb_i/Vu_i)$。□

例 3.8。设 J、L 表示 Q 的子模，它们包含 V 且至多可数生成，并设 $r \in V^\times$ 为一个非单位元。于是 J/Vr 和 L/Vr中的一个（不妨设为前者）可以同构嵌入后者 ϕ 中： $J/Vr \to L/Vr$，且该嵌入在 V/Vr上为恒等映射。定义 N 为嵌入 ϕ： $V/Vr \to J/Vr$和 ψ: $V/Vr \to L/Vr$的推出。于是， N是其纯子模 L/Vr 关于 J/V的扩张。直接计算可得， $N = L/Vr \oplus J'/V$，其中 $J'/V = \{(x,\ \phi(x)) \mid x \in J/V\} \leq J/V \oplus L/V$。□

子对象的丰富性。一个显著的事实是，即使 V 不是离散秩一赋值整环， $\mathcal{C}_V^*$ 中的对象也包含大量各种可能大小的紧子模。根据我们上文的讨论，对于有限生成和可数生成对象，这一点显而易见；而对于不可数生成对象，这则是紧系统存在的结果。每个投射维数为 ≤ 1 的模 M （在任意整环上）都存在一个紧系统 $\mathcal{T}$。紧系统定义为由紧子模构成的 G（$\aleph_0$）族；参见 [15, 第 VI 章第 5] 节。回顾一下，对于无限基数 κ，模 M 的子模的 G（κ）族 $\mathcal{G}$ 是指满足以下条件的子模集合： 1) $0, M \in \mathcal{G}$； 2) $\mathcal{G}$ 在并集运算下封闭； 3) 如果 X 是 M 中基数为 $\leq \kappa$ 的子集，且 $A \in \mathcal{G}$，那么存在一个 $B \in \mathcal{G}$，使得 $X \cup A \subseteq B$ 且 gen$(B/A) \leq \kappa$。因此，若 $\mathcal{T}$是 M的紧系统，则 $A < C$（$A, C \in \mathcal{T}$）意味着 A在 C中是紧的。此外，在典范映射下， C/A中紧子模的完全原像是 C的子对象；它们也是 M中的子对象。

紧系统存在的一个直接推论是以下结果。

推论 3.9. 设 M 为一个对象， N 为 M 的一个子模。则 N 包含于 M 的某个紧子模 N^* 中，使得 gen $N^* \leq \max\{\text{gen } N, \aleph_0\}$。

证明。 N 的每个生成元都包含于某个可数生成的紧子模中，该子模属于 M 的一个固定紧系统 $\mathcal{T}$。$\mathcal{T}$ 中所有这些成员的并是 $\mathcal{T}$ 的一个成员 N^*，且包含 N。根据构造， N^* 可以由 $\operatorname{gen} N \cdot \aleph_0$ 个元素生成。□

对象 $\mathcal{T}$ 的紧系统使我们能够构造一个连续良序上升链 (1) of tight submodules $M_\sigma \in \mathcal{T}$，其中某个序数 τ满足：对于所有 $\sigma < \tau$，gen($M_{\sigma+1}/M_\sigma$) $\leq \aleph_0$ 。此外，由于可数生成对象是有限表示子对象链的并（定理 3.6），因此可以对链 (1) 进行细化，使所有商模 $M_{\sigma+1}/M_\sigma$ 都具有有限表示，甚至是循环表示的。

紧系统存在的另一个重要推论，我们已经在命题 3.3 中表述过：任意大小的、投射维数为 1 的模 M 的每个有限生成子模都是有限表示的，并且在 M 中是紧的。

投射对象。赋值整环上的有限生成无挠模是自由的。一个有用的事实是：自由 V模中的有限秩纯子模是一个直和项；参见例如 [14, 第 XIV 章，定理 6.1]。根据 Kaplansky [16], ，投射V模是自由的。显然，它们在我们的类 $\mathcal{C}_V^*$ 中也是投射对象。维数计算表明，自由模的紧子模必具有零投射维数。因此，我们可以表述为：

定理 3.10. 自由 V-模的子对象都是自由子模。 □

因此我们得出结论： $\mathcal{C}_V^*$ 中的每个对象 M 都存在一个自由分解，其形式为短正合序列： $0 \to H \to F \to M \to 0$ 其中 H、F 是自由V-模，即自由对象。

4. More Fundamental Concepts

继续回顾基础知识，我们希望建立更多关于 $\mathcal{C}_V^*$类中对象的结果。为了更有效地处理这些对象，我们需要一些可在 [14] 和 [15]中使用的工具。本节将回顾一些我们需要的概念和事实。

元素的湮没子。由于对象中元素的湮灭子理想不仅是对象，而且还是主理想，因此对 $\mathcal{C}_V^*$ 中对象的研究大为简化。我们此前已经指出这一点，下面给出这一性质的正式证明。

引理 4.1. 设 M 是 $\mathcal{C}_V^*$ 中的一个对象。那么对于任意元素 $a \in M$，消去子 $\operatorname{ann}_M(a)$ $= \{r \in V \mid ra = 0\}$ 是 V 的主理想。

证明。 M 具有一个紧系统，因此 $a \in M$ 被包含在 M 的一个可数生成的紧子模 N 中，从而也被包含在一个有限表示子模中（见上面的定理 3.6）。对于有限表示对象，该结论此前已经得到证明。□

元素的高度。描述一个元素在模中所处位置的主要信息，储存在它的高度中。元素的高度通过使用单列模来定义，见 [14]。赋值整环中可能作为高度出现的单列模，已在 [1] 和 [2]中进行研究。幸运的是，在投射维数为≤ 1 的模中，只会出现最易处理的高度。

设 M 是一个对象，且 $0 \neq a \in M$。考虑映射 ϕ_J： Q 的子模 J 中包含 V 且满足 $\phi_J(1) = a$的那些子模。对于固定的 a，在Q 中，所有存在这样的 ϕ_J 的 J 的并集，是 Q的一个子模 H_M（a），称为 $a \in M$的高度理想。该模

$$h_M(a) = H_M(a)/V$$

定义为 $a \in M$ 的高度。根据 $H_M(a)$ 是否为 J 中的某一个，我们分别称 $h_M(a)$ 为非极限高度或极限高度。在极限情形下，我们记 $h_M(a) = U^-$。注意， $h_M(a)$ 总是一个单列挠模；它具有 $U = J/V$ 的形式，其中 $J \subseteq Q$ （仅当 $Q \in \mathcal{C}_V^*$ 时取等号）。在非极限情形下，元素 a 包含于单列模 W 中；该单列模是 M 中的极大单列模，并且满足 $h_M(a) = W/Va$。非标准单列模中元素的高度是不可数极限高度——在 $\mathcal{C}_V^*$ 中不予考虑。一旦规定非极限高度 J/V 大于相应的极限高度（J/V）$^-$，则 $\mathcal{C}_V^*$ 中出现的高度集合便以显然的方式全序排列。最小高度为 0（这是循环模中生成元的高度），并且我们令 $h(0) = \infty$ 为最大高度。

例 4.2。为了举出一个具有极限高度的例子，考虑一个包含 V 的 Q 的可数生成子模 J，并选取一条真包含递增的分式理想链 $\{Vt_i^{-1} \mid i < \omega\}$，其并为 J（其中 $t_i \in V^\times$）。定义一个可数生成对象 X 如下：生成元为 x_i （$i < \omega$），其定义关系如下：

$$rt_0x_0 = 0, \quad t_0x_0 = t_ix_i \qquad (i < \omega) \tag{2}$$

其中 $r \in V^\times$ 任意。元素 t_0x_0 具有极限高度，即 $(J/r^{-1}V)^-$。为了了解 X 是什么类型的模，注意，由元素 $x_i - (t_i^{-1}t_{i+1})\, x_{i+1}$ 生成的循环子模，对于所有 $i < \omega$，都是 X 的直和项（补子模由给定的所有生成元中去掉 x_i 后生成）。实际上，这些循环模在 X 中生成它们的直和 X'。这个 X' 在 X 中是紧且纯的，而商模 X/X' 是一个包含陪集 $x_0 + X'$ 的可数生成单列模。□

下面证明如下结论：

定理 4.3。类 $\mathcal{C}_V^*$ 中对象的非零元素具有以下高度之一：

（i）循环高度；（ii）可数生成的非极限高度；（iii）标准型的任意极限高度。有限生成模中的元素不可能具有极限高度。

证明。首先注意，对于 (i)–(iii) 中的每一种情形，我们在前文已经给出了例子，因此现在只需证明 (i)–(iii) 构成完整列表。 $\mathcal{C}_V$ 中的其他高度只有不可数生成的非极限高度。为导出矛盾，假设对于某个 $a \in M \in \mathcal{C}_V^*$，我们有 $h_M(a) = J/V$，其中 J 是 Q的一个不可数生成子模。存在一个同态 ϕ_J： $J \to M$，使得 $\phi_J(1) = a$。由于 J作为高度所具有的极大性质， $\phi_J(J)$ 必须是 M中的一个极大单列模。因此，根据定理 3.5，它至多是可数生成的——矛盾。至此，第一个断言得证。

在有限生成模中不可能出现 (iii)，这直接 հետևից于一个简单事实：极限高度要求无限 Goldie维数，这一点从例 4.2 中可以清楚看出。□

高度间隙。设 U 是一个单列对象，且 $Vr \neq 0$ 是$a \in U$的湮没子。则 $h_U(a) = rU$且 $h_U(sa) = s^{-1}rU$，条件是 $sa \neq 0$对于 $s \in V$成立。如果 U 包含于一个 V-模 M中，那么这些元素在 M中的高度可能更大。一般而言，在每个模 M中，对于元素 $a \in M$及其倍数ra ($r \in V^{\times}$)，不等式

$$h_M(a) \leq r^{-1}h_M(ra)$$

成立。我们称 M在 $0 \neq a \in M$处具有高度间隙，如果对于某个 $x \in M$ 及一个非单位元 $s \in V$，只要 $sx = a$，就总有 $h_M(a) > sh_M(x)$成立。

例4.4。为说明高度间隙，设 U 是一个单列模，x_1、x_2、x_3是符号。假设非单位元 s_i、$t_i \in V^{\times}$ 满足以下真整除关系：$s_1 \mid s_2 \mid s_3$ 和 $t_1 \mid t_2 \mid t_3$。取某个满足 $s_3u \neq 0$的 $u \in U$，并定义模 N：它由 U 及给定符号生成，并满足关系 $s_iu = s_it_ix_i$ ($i = 1$、2、3)。子模 U 中的高度间隙位于s_1u、s_2u、s_3u以及0处。□

纯性。我们反复强调的这一广泛使用概念的要点是，在赋值整环中，它等价于较简单的相对可除性（见 [20]）。因此，子模 N 在 V-模 M 中是纯的，当且仅当对每个 $r \in V^{\times}$，$rN = N \cap rM$ 成立。等价地，对所有 $r \in V$，由包含 $N \to M$ 诱导的映射$V/Vr \otimes_V N \to V/Vr \otimes_V M$是单射。这等价于对所有 $r \in V^{\times}$，由自然同态 $M \to M/N$ 诱导的映射 $\mathrm{Hom}_V(V/Vr, M) \to \mathrm{Hom}_V(V/Vr, M/N)$ 的内射性。纯正合序列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是一个正合序列，其中映射 $A \to B$ 的像在 B 中是纯的。

引理4.5。（i）设 U 是对象 M 的一个不可分解子模，且 $a \in U$。如果 $h_M(a) = U/Va$，那么 U 是 M 中的极大不可分解子模，并且在 U 中 a 及其以上不存在高度间隙。

（ii）如果 U 是 M 中的极大不可分解子模，并且是挠的，除 0 处的高度间隙外没有其他高度间隙，那么 U 是 M 中的纯子模。

证明。（i）这是显然的。

（ii） U 不是 M 中的纯子模，意味着存在 $u \in U$，使得 $h_U(u) < h_M(u)$。因此，U 中 u 处或其以上必定存在高度间隙，因为根据极大性，U 的某些生成元在 U 中的高度与在 M 中的高度相同。□

我们回顾 $\mathrm{Pext}^1_V(X, M)$ 的定义：它是 $\mathrm{Ext}^1_V(X, M)$ 的一个子双函子，由 M 对 X 的那些非等价扩张组成，其中 M 是一个纯子模（参见例如 [15, 第 45] 页）。在交换情形下，Pext 是一个 V-模。

5. 关于挠与无挠对象的定理

本节将简要讨论一些关于挠与无挠对象的基本结果。更深入的研究以及更有趣的应用还需要进一步探索，计划在未来开展。

我们从以下简单观察开始。

定理 5.1。对象中的纯紧有限生成子模是一个直和项。

证明。设有限生成模 N 在投射维数为 ≤ 1 的模 M 中是纯且紧的。由 N 的紧性，M/N 的投射维数为 ≤ 1；由推论 7.7 N 是纯内射的。综合以上可知，N 是 M 的直和项。□

我们继续讨论循环表示模的直和的典型例子：纯射影对象。这些对象定义为满足 $\mathrm{Pext}^1_V(P, M) = 0$ 的对象 P，其中 $M \in \mathcal{C}^*_V$ 可以是任意对象。

定理 5.2。一个 V-模是纯射影的，当且仅当它是循环表示模的直和。

证明。这是一个著名定理的特例。例如，它可由 [15, 第六章，定理 12.2] 推出。□

关于单列模的直和，以下定理是一个非常重要的结果（这与紧性无关）。

定理 5.3。(i) 直和的单列模的直和项在同构意义下唯一。

(ii) 单列模的直和的直和项本身也是单列模的直和。

证明。这些结论是单列模的自同态环为局部环这一事实的众所周知的直接推论（定理 3.4）。□

$r \in V^\times$ 是一个非单位元。所谓 V/Vr-齐次模，是指这样的 V-模H：其中每个元素都包含在一个 H 子模中，且该子模是 $\cong V/Vr$。于是H 满足 $rH = 0$，并且 H 的任何$\cong V/Vr$ 循环子模都必须是 H中的纯子模。此外，由定理 5.1 可知，该子模是一个直和项。

命题5.4。设 M 是一个投射维数为1的 V-模。

(i) 如果 $rM = 0$，则一个 V/Vr-齐次紧子模是 M 的一个直和项。(ii) 如果 M 是 V/Vr-齐次的，则它是循环表示子模的直和，且这些子模都同构于 V/Vr。(iii) 如果 D 是一个可除对象，则对于每个 $r \in V^\times$，$D[r]$ 都是 V/Vr-齐次的，因而是同构于 V/Vr 的循环表示子模的直和。

证明。关于 (i)–(ii)，参见 [15, 第 XII 章定理 2.2 和 2.3], ；关于 (iii)，参见 [15, 第 XIV 章推论 2.4]。□

我们注意到，只要 $D[r] \neq 0$，(iii) 中直和项的数目 $\cong V/Vr$ 对每个 r 都相同：它就是 D 的 Goldie维数。

阿贝尔群论中的一个重要定理由 L. Ya. Kulikov 提出，该定理表明，循环群直和的一个子群同样是循环群的直和（参见例如 [11]）。在 $\mathcal{C}^*_V$ 中，相应的类比命题是：循环表示模直和的紧子模也是这样的直和。这对于无挠模确实成立：$\mathcal{C}^*_V$ 中的自由模的紧子模仍然是自由模。人们曾猜想，在 $\mathcal{C}^*_V$ 的挠情形中这一结论也成立。（关于挠阿贝尔群，参见例如 [11, 第 3 章，定理 5.7]。）然而，我们声称，例 4.2 中的模 X 否证了这一猜想。为证明这一点，考虑下面例子中的模 Y。

例 5.5。可数生成挠对象 Y 的定义与例 4.2 中的模 X 完全相同：它由同一个集合 $\{x_i \mid i < \omega\}$ 生成，并满足相同的定义关系，但有一处修改：我们将 $t_0 \in V^\times$ 替换为$s \in V^\times$，并选取它使得 $J < Vs^{-1}$。在此情形下， Vx_0 是 Y中的一个纯且紧子模（一个直和项），并且对于所有 $i > 0$，元素 $x_i - (t_i^{-1}s)\, x_0$ 生成 Y的循环直和项，使得 Y是 Vx_0 与这些循环子模的直和。（要得到 Y的结构，还有一种不那么直接的方法如下。注意到循环子模 Vx_0 在 Y中是纯的之后，只需指出，它还是 Y的一个直和项，因为 Y/Vx_0 作为循环表示模 $\cong Vt_i$ 的直和是纯射影的（$i > 0$）。）□

要论证例 4.2 中的对象 X 不可能是循环表示对象的直和，可借助定理 4.3。元素 $t_0x_0 \in X$ 的高度是可数极限，因此它不可能属于上述类型的直和：它必然已经包含在一个具有相同极限高度的有限生成直和项中。然而，正如所引定理所证明的，这不可能成立。因此，对象 X 虽然同构于循环表示模的直和 Y 中的一个紧子模（注意， $Y/X \cong Vs/Vt_0$ 是循环表示的），却不能表示为此类模的直和。

因此，显然，若无额外假设，Kulikov 的这一猜想定理不可能在 $\mathcal{C}_V^*$ 中有对应的类似结论。为了寻找能使我们得到循环表示对象的直和中子对象的 Kulikov 型定理的简单条件，我们在显而易见的条件 (a) 之外，选取了看来自然的条件 (b):

(a)非零元素具有循环高度。(b)不可分解子模至多具有有限个高度间隙。

在(a)–(b)的假设下，我们将为可数生成的挠对象证明一个所需的类似结果（见下文定理 5.8）。但首先我们处理一些预备引理。

我们需要一个定义。类似于 [13], ，如果一个 V-模 M 的每个有限元素集都可以嵌入 M的某个有限生成直和项中，我们就称其为循环可分离的；也就是说，嵌入一个由有限个循环表示的模作直和得到的直和项中。注意，为了验证一个挠对象的循环可分离性，只需对单元素子集检验定义性质即可，因为每个有限生成对象都是循环表示对象的有限直和。因此，显然模的直和项继承循环可分离性。现在我们证明一个关键引理。

引理 5.6. 设 M 表示 $\mathcal{C}_V^*$中的一个挠对象。如果 M 满足条件 (a)- (b)，那么它是一个循环可分离的 V-模。

证明。假设 M 具有性质 (a)-(b)，并令 $0 \neq a \in M$。根据 (a)， a 包含于一个循环表示子模 $C = Vc$ 中，该子模在 M中是极大单列模。如果 C在 a 与 0 之间不包含严格的高度间隙，则 C 在 M中是纯的，因此是 M 的直和项（定理 5.1）。于是，在这种情况下， a 嵌入 M 的一个循环表示直和项中，结论得证。如果 C 在 a 与 0 之间存在高度间隙，那么根据 (b)，存在一个高度间隙，记为 rc ($r \in V$)，使得 rc 与 0 之间不存在严格的高度间隙。于是，根据前面的论证，存在 $B = Vb$ 的一个循环表示直和项 M，其包含 rc, $M = Vb \oplus M'$。如果 $b' \in Vb$ 满足 $Vrb'/Vc \cong Vr$，则 $V(c) + V(b) = V(c - b') \oplus V(b)$。在这种情况下，

$V(c-b')$ 在 M' 中的投影包含 a 的坐标，而其下方的高度间隙数量更少。对 a 的各个坐标重复这一过程有限次，我们得到 M 的一个有限生成直和项，其中包含所选元素 a。□

引理 5.7. 设 M 是满足条件 (a)-(b) 的挠对象。若 M 是可数生成的，则它是循环表示对象的直和。

证明。根据引理 5.6，M 是循环可分的。证明一个可数生成的循环可分模是循环模的直和是一个简单练习。□

下面的 Kulikov 定理的类似结论可以很容易地得到。

定理 5.8. 假设 M 是循环表示挠对象的直和，且 N 是满足上述条件 (b) 的可数生成子对象。那么 N 同样是循环表示子对象的直和。

证明。由于定理 2.3 和引理 5.6，只需证明 N 满足条件 (a)。但根据定理 3.5 (iii)，这显然成立。□

我们提出一个显然的问题：前面的引理和定理是否对更大的基数也成立？答案是：对于引理 5.7，反例是具有可数无界基本子群的挠完备阿贝尔 p-群；参见 [11,第 10 章，第 3] 节。对于定理 5.8，我们不知道答案。

我们记录下面两个平行的问题。

问题 5.9。挠单列对象（分别为可数生成对象）的直和中的纯子对象，是否也是同类对象的直和? □

接下来我们想了解 $\mathcal{C}_V^*$ 中的无挠模。令人欣喜的是，$\mathcal{C}_V$ 中所有可数生成的无挠模都是 $\mathcal{C}_V^*$ 中的对象。这一点可由下面的定理直接看出。

定理 5.10。(i) 无挠 V-模 A 具有投射维数 ≤ 1，当且仅当每个秩一纯子模至多是可数生成的。

(ii) 一个无挠 V-模 A 的投射维数为 ≤ 1，当且仅当它具有一个紧纯子模的良序递增链 A_α，使得对于每个 α，$A_{\alpha+1}/A_\alpha$ 的秩为 1 且投射维数为 1（因而是循环的或可数生成的无挠模）。

证明。只需分别参阅 [7, 推论 4.5] 和 [15, 第 VI 章引理 6.6],即可。□

下面继续给出一个类似于庞特里亚金关于可数自由阿贝尔群的定理的定理。同时也给出投射维数为 1 情形的类似结果。

定理 5.11. $\mathcal{C}_V^*$ 中的可数秩无挠模是自由的（是 $\mathcal{C}_V^*$中的一个对象），当且仅当其有限秩纯子模是自由的（具有投射维数≤ 1）。

证明。参见 [15, 第 VI 章推论 3.12]。□

6. Divisible and Injective Objects

可除性理论和内射性清楚地展示了 $\mathcal{C}_V^*$ 与 $\mathcal{C}_V$这两个类之间的一个根本区别。

可除对象。模的可除性按通常方式定义： $D \in \mathcal{C}_V^*$ 当且仅当对所有 $r \in V^\times$ 都有 $rD = D$。等价地，对所有 $r \in V^\times$，等式 $\mathrm{Ext}_V^1(V/Vr, D) = 0$成立。可除模的原型——$V$ 的商域 Q 作为 V-模——一般并不是一个对象。只有当 Q 是一个可数生成的 V-模时，它才是对象（此时 p.d.$Q = 1$，即 V 是一个 Matlis 整环）。但是，模 ∂_V（见 [8]）是 V-Mod 中可除模子范畴的生成元，其投射维数为 1，因此它是 $\mathcal{C}_V^*$中的一个对象。回忆一下， ∂_V 由所有 $k \geq 0$ 的非单位元素 $r_i \in V^\times$所构成的 k-元组（r_1，...，r_k）生成，并满足以下定义关系

$$r_k(r_1, \ldots, r_{k-1}, r_k) = (r_1, \ldots, r_{k-1}) \qquad (k > 0) \tag{3}$$

对于 r_i 的所有选择。生成元 $w = (\emptyset)$生成了 ∂_V 的一个子模，该子模与 V 同构，并且 $\partial_{V_0} = \partial_V/Vw$ 是投射维数为1的可除挠模（它是 $\mathcal{C}_V$ 中可除挠模子范畴的一个生成元）。更多详情见[8] 或 [15] 。

关于可除对象的结构，以下信息至关重要。（请注意，在 Matlis 整环上的情形大为简化。）

定理6.1。（i） $\mathcal{C}_V^*$ 中的一个对象是可除对象，当且仅当它是由模 ∂_V 的若干个副本构成的直和的一个直和项。

（ii）若 V 是 Matlis 整环，则一个对象是可除对象，当且仅当它是 Q 和/或 K 的若干个副本的直和。

证明。（i）在 [8, 的定理 18] 中证明了：在 Pr¨ufer 整环上（因而在赋值整环上），一个可除模的投射维数为1，当且仅当它是由 ∂ 的若干个副本构成的直和的一个直和项。（顺便一提，这对所有整环都成立。）

(ii) 参见 [15, 第 VII 章，定理 35]。 □

为了获得可除对象 D 的完备不变量集，我们引入两个衡量其挠部分和无挠部分大小的基数不变量。一个是 $\kappa = \mathrm{rk}\, D$，即 D 的无挠秩，也就是包含于 D 中的最大秩自由子模的生成元个数。另一个不变量是对于任意非单位元 $r \in V^\times$ 的 $\lambda = \mathrm{gen}\, D[r]$ 。因此， λ 是在将 $D[r]$ 分解为不可分解直和项的直和分解中，直和项 $\cong V/Vr$ 的集合的基数。这两个基数组成了刻画 $\mathcal{C}_V^*$ 中可除对象的完备不变量集。事实上，

定理 6.2。设 D 和 D' 是 $\mathcal{C}_V^*$ 中的可除对象。那么，当且仅当 $D \cong D'$

(i) 它们的秩相等：$\mathrm{rk}\, D = \mathrm{rk}\ D'$；以及 (iI) 对某个（因而对每个）$r \in V^\times$，$\mathrm{gen}\, D[r] = \mathrm{gen}\ D'[r]$。

证明。参见 [10, 定理 C] 或 [15, 第 VII 章，定理 34]。 □

我们还陈述与该结构定理相伴的存在定理。

定理 6.3。给定基数 κ、λ，存在类$\mathcal{C}_V^*$中的可除对象 D ，使得 $\mathrm{rk}\ D = \kappa$ 且 $\mathrm{gen}\ D[r] = \lambda$，当且仅当

(i) 当投射维数为 $Q = 1$ 时： κ 和 λ 均为任意；(ii) 当投射维数为 $Q > 1$ 时： κ 为任意，且 $\lambda \geq \max\{\kappa, \mathrm{gen}\, Q\}$.

证明。参见 [10, 定理 3] 或参见 [15, 第七章，定理 3.8]。 □

由上述结果可得出结论：当投射维数为 $Q > 1$ 时， $\mathcal{C}_V^*$ 中的每个可除 $D \neq 0$ 都满足 $\mathrm{Gd}(D) \geq \mathrm{gen}\, Q$。此外， $\mathcal{C}_V^*$ 中不存在不可分解的可除对象。

我们还得到预期的嵌入结果：

定理 6.4。 $\mathcal{C}_V^*$ 中的每个对象都是某个可除对象的子对象。

证明。将 $M \in \mathcal{C}_V^*$ 写成 $M = F/H$，其中 V 和 F 是自由 H-模。如果 $F = \oplus_{i\in I} Vx_i$ 且 $Vx_i \cong V$，则定义 $G = \oplus_{i\in I}\partial_i$ 且 $\partial_i \cong \partial_V$，并通过对所有 i 将生成元 x_i 与生成元 $w_i \in \partial_i$ 对应起来，把 F 嵌入 G 中。于是 F 成为 G 的子对象，而 G/H 将成为一个投射维数为 1 的可除模，其中包含 M 的一个副本作为子对象。□

h-可除性对于一个 V-模 H 的定义，是要求同态 $V \to H$ 能够延拓到 $Q \to H$（见 [17] 或 [15, 第 38] 页）。除了下一个命题之外，我们将不讨论这一概念，因为 h-可除模在 $\mathcal{C}_V^*$ 中很少存在；即使投射维数为 $Q > 1$，内射对象也不一定是 h-可除的。

命题 6.5. (i) h-可除对象在 $\mathcal{C}_V^*$ 中存在，当且仅当 V 是 Matlis 整环；在这种情况下，所有可除模都是 h-可除的。

(ii) 若 V 是 Matlis 整环，则一个 p.d. 为 1 的 h-可除对象是 Q 和 K 的若干副本的直和。

证明。(i) 众所周知，在整环上，可除性与 h-可除性等价，当且仅当 $\mathrm{p.d.} Q \leq 1$（例如参见 [15, 第 VII 章，定理 2.8]）。

(ii) 参见 [15, 第 VII 章，第 2] 节。 □

内射对象。内射模所发挥的作用，是由满足以下条件的对象 $E \in \mathcal{C}_V^*$ 来承担的：对于所有 $A \in \mathcal{C}_V^*$，$\mathrm{Ext}_V^1(A, E) = 0$；也就是说，每当 E 是一个子对象时，它必定是一个直和项。幸运的是，该性质等价于更为熟悉的态射延拓性质：从子对象到 E 的态射可以延拓到对象。不过，这种等价性有一个注意事项：延拓后的映射不一定是一个 $\mathcal{C}_V^*$-态射，因为其像可能并不紧。或许出人意料的是，内射性与可除性最终证明是等价的。

定理 6.6。对于对象 $E \in \mathcal{C}_V^*$，以下条件等价。

(i) 对所有 $C \in \mathcal{C}_V^*$，$\mathrm{Ext}_V^1(C, E) = 0$；(ii) 每个态射 $\phi\colon A \to E$ 在 $\mathcal{C}_V^*$ 中都可以延拓为同态 $\psi\colon B \to E$，其中 A、B 属于 $\mathcal{C}_V^*$，且 A 在 B 中是紧的；(iii) E 是可除对象。

证明。在范畴 $\mathcal{C}_V$ 中，我们有一个正合序列

$$\mathrm{Hom}_V(B, E) \to \mathrm{Hom}_V(A, E) \to \mathrm{Ext}_V^1(B/A, E) \to \dots \tag{4}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii)。假设意味着（4）中的 Ext 消失，因此两个 Hom 之间的映射是满射的。

(ii) $\Rightarrow$ (iii)。条件 (ii) 确保对于每个 $r \in V^\times$，每个映射 $\phi\colon Vr \to E$ 都可以延拓为 $V \to E$（注意 $\phi \in \mathcal{C}_V^*$）。这等价于 E 对 r 的可除性。

(iii) $\Rightarrow$ (i)。根据 Bazzoni–Herbera [3], 在整环 R上的结果，若且唯若对于所有 p.d. 为 ≤ 1 的 R-模 C，$\mathrm{Ext}^1_R(C,E) = 0$ 成立，则模 E是可除的。（这一蕴含关系已在 [9, 中关于 Pr¨ufer 整环的定理 6] 中得到证明。）□

作为前述定理的一个直接推论，我们得到：

推论 6.7。内射对象的直和同样是内射的。特别地，内射对象是 Σ-内射的，即内射对象的任意多个副本的直和都是内射的。□

判定一个模是否为内射模的一个众所周知的检验是：它由循环表示的 c 模所作的扩张是分裂的。在 $\mathcal{C}_V^*$中，这一判据简化为循环表示模：

定理 6.8。对象 $E \in \mathcal{C}_V^*$是内射的，当且仅当对所有循环表示对象 C，均有 $\mathrm{Ext}^1_V(C,E) = 0$ 成立。□

在交换模理论中，众所周知，每个模都包含唯一的极大可除子模。一般而言，在 $\mathcal{C}_V^*$中这并不成立，因为两个可除对象之和仍为可除对象这一相关性质并不总是成立；事实上，在取和时，投射维数至多为 1 这一性质往往会丧失。

例 6.9。我们展示一个内射对象，它是一个混合的 V-模，但作为 $\mathcal{C}_V^*$中的对象，既不是挠的，也不是无挠的，更不是混合的。设 V是一个满足 p.d.$Q = 3$的赋值整环，并考虑上面定义的可除 V-模 ∂_V。由于 p.d.$\partial_V = 1$，我们有 $\partial_V \in \mathcal{C}_V^*$。 ∂_V的挠子模 T的投射维数为 2，因为$\partial_V/T \cong Q$。因此，作为 $\mathcal{C}_V^*$中的对象， ∂_V既不是挠的，也不是无挠的，更不是混合的。□

鉴于我们对可除对象的讨论，下面的推论是显然的。（关于下面的 (i)，参见定理 6.4。）

推论 6.10。（i）每个对象都能作为子对象嵌入某个内射对象中。

（ii）作为内射对象的满同态像（模去子对象）的对象本身是内射的。

（iii）每个对象 M 都存在内射分解，即存在一个由 p.d.≤ 1 的模组成的正合序列 $0 \to M \to A \to B \to 0$，其中 A、B 是内射对象。

（iv） $\mathcal{C}_V^*$ 中的任意对象的内射维数均为 0 或 1。 □

让我们暂且停下来，回答一个关于类 $\mathcal{C}_V^*$中内射包存在性的问题。所谓对象 M 的内射包，是指一个包含 M 作为子对象的内射对象 E（M），并且对于每个包含 M 作为子对象的内射对象 E， M 的恒等映射都可扩张为一个紧嵌入 E（M） $\to E$。当然，如果内射包存在，那么它在同构意义下是唯一的。

定理 6.11。类 $\mathcal{C}_V^*$ 中的所有模都存在内射（可除）包，当且仅当 V 是秩一离散赋值整环。

证明。若 V 是 DVD，则 $\mathcal{C}_V$ 与$\mathcal{C}_V^*$ 相同， $\mathcal{C}_V$ 中的断言是众所周知的。若 V 是 Matlis 整环，则所有可除模都是 h-可除的，并且它们是 Q 和/或 K的副本的直和。若 V不是 DVD，则它包含一个可数生成理想，而这样的理想不可能在 Q的直和中是紧的。最后，若 p.d.$Q > 1$，则 V 的 $\mathcal{C}_V^*$-内射包应当是 ∂_V的一个不可分解直和项；但是——正如上文所观察到的——这样的直和项并不存在。□

7. Pure-Injectivity

在 $\mathcal{C}_V^*$ 中的纯内射性可以像在传统模理论中那样发展（例如参见[14, 第 XI 章第 2]节，以及 [15, 第 XIII 章第 2—3]节）。正如预期的那样，其中有若干变化，因此我们给出完整证明，但略去常规论证。

在模 M 上，含未知数 x_j ($j \in J$) 的方程组是指线性方程组

$$\sum_{j\in J_i} r_{ij}x_j = a_i \in M \qquad (r_{ij} \in V,\ i \in I) \tag{5}$$

对于 $i \in I$, $j \in J$，其中 I, J 是任意指标集，并且对于每个 $i \in I$， J_i 都是 J 的有限子集。令 F 表示由未知数 x_j ($j \in J$) 生成的自由模，令 H 表示由所有 $i \in I$ 的方程左端生成的子模。我们只考虑相容方程组，即不包含隐含矛盾的方程组。这意味着，通过按照方程所示将 H 的生成元映射到 M 中的元素，即 ϕ: $\sum_{j\in J_i} r_{ij}x_j \mapsto a_i$，可以得到一个真正的同态 ϕ: $H \to M$。容易验证，该方程组在 M 中有解，当且仅当 ϕ 可以扩展为同态 ϕ^*: $F \to M$；在这种情况下，$x_i = \phi^*(x_i) \in M$ 就是这些解。显然，一个相容方程组通过将未知数 x_i 作为生成元添加到 M 中，并施加定义关系 (5)，定义了 M 通过 F/H 的一个扩张M^*。此外，直接验证可知，当且仅当 (5) 在 M 中有限可解时， M 在 M^* 中是纯的；也就是说，(5) 的有限子方程组在 M 中有解。

我们将 p.d.(F/H) 定义为方程组 (5) 的投射维数。称 (5) 为适当方程组是方便的，条件是：1）它是一致的；2）其 p.d. 为 ≤ 1；以及 3）它是有限可解的。

如果一个对象 $M \in \mathcal{C}_V^*$具有下述定理中列出的任一等价性质，就称其为纯内射的。

定理 7.1. 对于对象 M，(α)-(γ) 是等价性质：

(α) 对所有对象 C，$\mathrm{Pext}_V^1(C, M) = 0$。($\beta$) 如果 A 是对象 B的纯子对象，那么每个 $\mathcal{C}_V^*$-映射 $A \to M$ 都可延拓为同态 $B \to M$ （不必是 $\mathcal{C}_V^*$-映射）。(γ) 在 M 上的每个适当方程组在 M中都有一个整体解。

证明。此证明中的所有模都是 $\mathcal{C}_V^*$ 中的对象。

(α) $\Rightarrow$ (β) 假设 (α)，考虑下面的推出图，其中顶行是纯正合的，且 ζ 是一个 $\mathcal{C}_V^*$-态射。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \zeta} & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

那么底行也是纯正合的，因此根据假设它是分裂的。于是存在一个同态 $B \to M$ 使上三角 ABM 交换。这是 ζ的一个扩张，从而证明了 (β)。

(β) $\Rightarrow$ (γ) 给定在 M 上的一个适当方程组 (5)，考虑相应的自由模 F及其子模 H。如果将 (5) 视为在 M^* 上的方程组，那么根据构造，存在一个扩张 ψ: $F \to M^*$，它是 ϕ: $H \to M \leq M^*$ 的扩张。这意味着 (5) 在 M^* 中可解。假设 (β) 意味着 M 是一个直和项

M^*的直和项。因此， ψ再经过投影 $M^* \to M$，得到所需的 $F \to M$ 对 ϕ的扩张。

(γ) $\Rightarrow$(α) 在下图中，设底行表示 M by C 的纯扩张，顶行表示 C 的自由分解。映射 ϕ^* 存在，是因为 F 是自由的（从而使右方格交换）。显然，其限制 ϕ to$H$ 使左方格交换。由于 H 在 F 中是紧的， $\{H, F\}$ along withϕ 定义了方程组 (5)，该方程组在 M 中有限可解，这是由于底部序列的纯性。因此，(5) 是一个适当方程组，于是条件 (γ) 蕴含存在一个映射 $F \to M$，使上三角中的映射 HFM 交换。于是底部序列分裂，从而证明了 (α)。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & F & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \phi\downarrow & & \downarrow\phi^* & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

□

显然，可除对象（即内射对象）是纯内射的。此外，它们包含大量纯内射子对象——如下述定理所示。

定理 7.2。设 D 是 $\mathcal{C}_V^*$ 中的一个可除对象。对于每个 $r \in V^\times$，子模 $D[r] = \{d \in D \mid rd = 0\}$ 是一个纯内射对象。

证明。由同构 $D/D[r] \cong D$ 以及由投射维数 $D = 1$，可推知 $D[r]$在 D中是紧的。设 A 是对象 B的一个纯子对象，且 $\xi\colon A \to D[r]$ 是一个 $\mathcal{C}_V^*$-映射。ξ 诱导出映射 $\xi'\colon A/rA \to D[r]$，它可由纯性扩张为 $\xi''\colon B/rB \to D$。显然，$\operatorname{Im}\xi'' \le D[r]$ 也如此，因此典范映射 $B \to B/rB$ 后接 ξ''，便得到 ξ的所需扩张 $B \to D[r]$。□

仿照 Eklof–Mekler [5, 第 V 章推论 1 的证明，3], 我们验证：

定理 7.3。$\mathcal{C}_V^*$ 中的每个对象都是某个纯内射对象中的纯子对象。

证明。选取任意基数 $\kappa > \max\{|V|, \aleph_0\}$。给定一个模 $M \in \mathcal{C}_V^*$，我们按如下方式定义一个长度为 κ 的连续良序上升链 $\{M_\sigma \mid \sigma < \kappa\}$。从 $M_0 = M$开始。若对某个 σ，所有 $\rho \le \sigma$的投射维数 ≤ 1 的模 M_ρ 均已构造出来，则通过将每个定义关系由这些系统给出的适当方程组中的未知数（作为额外生成元）添入 M_σ，来定义 $M_{\sigma+1}$。容易验证，此时投射维数 $M_{\sigma+1} \le 1$ 也成立，并且 M_σ 将在 $M_{\sigma+1}$ 中成为紧且纯的子模，使得关于 M_σ的所有适当方程组都在 $M_{\sigma+1}$中可解。在极限序数处，我们取并；所得对象仍具有投射维数 ≤ 1，并且包含所有先前构造的 M_ρ，且它们都是紧纯子模。容易验证，所构造链的并满足条件 (γ)，因此是一个包含 M 作为纯子对象的纯内射对象。（当方程组有 λ 个未知数时，过程即可停止，其中 λ 是任意不可数基数 $> |V|$。）□

下一个命题表明，当纯内射对象的投射维数为 ≤ 1时，其第一Ulm子模是内射对象。

命题7.4. 纯内射对象 M的第一Ulm子模$M^1 = \cap_{r \in V^\times} rM$满足：对于所有对象 C，$\operatorname{Ext}_V^1(C, M^1) = 0$。

证明。设 $\{r_i \mid i \in I\}$ 是 $V^{\times}$的非单位元素列表。我们要证明，对于任意给定的 $a \in M^1$，对每个 r_j，方程 $r_j x = a$对 $x \in M^1$可解。对于每个 $j \in I$，考虑以下线性方程组

$$r_j x = a, \quad r_i x_i = x \quad (i \in I).$$

简单计算可知，该系统的投射维数为 1。此外，由于所选元素 a 可被所有指标下的 $r_j r_i$ 整除，每个系统在 $M.$ 中都是有限可解的。根据假设，它在 M中有一个解。显然，每个解 x都属于 M^1，因此 M^1 是一个可除子模。□

对于每个整体维数为 ≥ 2的赋值整环 V，我们在 $\mathcal{C}_V^*$ 中构造一个纯内射对象的例子；其内射子模是一个对象，但既不是 $\mathcal{C}_V^*$中的子对象，也不是直和项。

例7.5。令 V如前所述。我们构造如下图表，其中各行均为纯正合行，且各方块均为交换方块。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & D & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & D & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

对于顶行，选取一个挠 V-模的纯正合序列，使得 A、B的投射维数为 1，且投射维数为 $C = 2$。我们可以作出选择，使得 C 的第一个 Ulm 子模为 0。将 A 嵌入可除对象 D 中，使其成为一个紧子模，并通过推出得到中间行的纯正合序列。下一步是将定理 7.3 中的嵌入过程应用于 C （即使 C 不是一个对象，该过程仍然有效），从而得到一个由投射维数为 1 的模 H 扩张的纯扩张 C'，并且 C'具有如下性质：它由投射维数为 ≤ 1 的 V-模作纯扩张时均分裂。由于投射维数为 $H = 1$，存在一个模 B''，使得底部序列成为纯正合序列，并使图表交换（尽管该模并不唯一）。中间的竖直箭头是单射，且 B、B'/B、B''/B'的投射维数均为 1。因此，$B'' = 1$ 的投射维数也为 1。此外，作为由 C'扩张 D 得到的纯扩张，模 B'' 具有如下性质：它由投射维数为 ≤ 1 的 V-模作纯扩张时均分裂。这意味着 B'' 是 $\mathcal{C}_V^*$中的纯内射对象。其内射子模 D 的投射维数为 1；但由于 $C' = 2$的投射维数为 1，它在 B''中并不紧，因此不是 $\mathcal{C}_V^*$中的直和项。□

我们以一个例子及其推论结束本节。

例7.6。纯内射对象的一个具体例子是直和$C = \oplus_{i \in I} V/Vr$，其中 $r \in V^{\times}$为任意非单位元，I为任意指标集。这由命题5.4 (iii) 得出。□

因此，我们可以陈述以下推论（有限表示对象的情形已在定理 5.1 中陈述）：

推论 7.7. 每个 V/Vr-齐次（$r \in V^{\times}$）挠模都是 Σ-纯内射的。

证明。如果 D 是 ∂_V 的任意多个副本的直和，那么子模 $D[r]$ 是 V/Vr-齐次的，因此也是 V/Vr 的多个副本的直和。此外，根据例 7.6，它是纯内射的。$D[r]$ 的直和项以及纯内射模的有限直和也都是纯内射的。□

8. Cotorsion Modules

如果对所有一维的（即秩为一的）无挠对象 U，均有 $\mathrm{Ext}^1_R(U,C) = 0$ 成立，我们就称对象 C 余挠。显然，只要求这一性质对可数生成的一维对象成立即可。熟悉余挠理论的读者会立即认识到，这一余挠概念对应于 Warfield-余挠（其中要求由所有无挠模作扩张时扩张分裂）。下面的一般性陈述将使这一结论更加清楚。

引理 8.1. 对象 $C \in \mathcal{C}_V^*$ 是余挠的，当且仅当它对所有无挠对象 A满足方程 $\mathrm{Ext}^1_V(A,C) = 0$。

证明。定义立即说明了其中一个方向。对于“仅当”部分，假设 C 是余挠的，并且 A 是投射维数为 ≤ 1的无挠模。由定理 5.10 可知，此时 A 是一个连续良序上升链的并，该链由无挠子模 A_α ($\alpha < \kappa$)组成；这些子模在 A 中既是纯的又是紧的，并且所有商模 $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ 都是秩为 1 的无挠模。现在我们引用 Eklof 定理（见 [4]）关于由链的并作扩张的结论，由于链中的所有上述商模都满足所引用的方程，故可得 A 满足该方程。□

为了根据方程组的可解性刻画余挠对象，考虑一个无挠单列对象 U。如果它不是循环的，那么它由一个可数集 $\{u_n \mid n < \omega\}$ 生成，使得 $r_n u_{n+1} = u_n$ 对某个 $r_n \in V^\times$ 以及所有 $n < \omega$ 都成立。因此，模 C 由 U 扩张得到的一个扩张 B 形如 $B = \langle C, b_n \ (n < \omega) \rangle$，其定义关系由方程 $r_n b_{n+1} - b_n = c_n$ 给出，其中 $c_n \in C$ 为某些元素。显然，对于所有允许的 U 和 c_n 的选择，C 是余挠的，当且仅当 C 是 B 的一个直和项；这又当且仅当每个形如以下形式的相容的可数方程组

$$r_n x_{n+1} - x_n = c_n \quad \text{with } c_n \in C \ (n < \omega) \tag{6}$$

在 C 中可解。在后一种情况下，一个解 x_n 产生了 C 在 B 中的一个补子模：由元素 $a_n = x_n - b_n$ （$n < \omega$）生成的子模。这引出了下面的定理。

定理 8.2. 对象 C 是余挠对象，当且仅当，所有由无挠单列对象 U 构造的形如 (6) 的一致线性方程组都能在 C 中可解。□

下一个结果将提供有关余挠对象的更多有用信息。

定理 8.3. (i) $\mathcal{C}_V^*$ 中的所有纯内射对象 也都是余挠对象。

(ii) 每个对象都是某个具有无挠余核的余挠对象的子对象。

证明。(i) 是定义的直接推论，因为由无挠 V-模进行的所有扩张都是纯扩张。

(ii) 这一点很容易验证：照搬定理 7.3 的证明，用 (6) 代替投射维数为 ≤ 1 的线性方程组，并作相应调整即可。（顺便说一句，单是嵌入性质已可由 (i) 和定理 7.3 推出。）□

下一个引理有力地表明，在某些方面，余挠对象的表现类似于普通的余挠模，尽管它们缺少若干相关特征。

引理 8.4。(i) 余挠对象的余挠扩张仍是余挠的。(ii) 投射维数为 1 且为余挠对象的满同态像（模去紧子模）的模，同样是余挠对象。

证明。(i) 显然。

(ii) 考虑到若 $C \to C'$ 是一个满射，则对于每个投射维数为 $A \leq 1$ 的模，诱导映射 $\mathrm{Ext}^1_V(A,C) \to \mathrm{Ext}^1_V(A,C')$ 也是满射，这一点是显然的。□

为了证明并非所有余挠对象都是纯内射的，可以取一个挠对象 T，其第一 Ulm子模 T^1 是一个子对象，但不可除。于是，定理 8.3(ii) 的证明中提到的嵌入过程产生一个余挠对象 $\overline{T}$，它包含 T 作为紧子模，并且 $\overline{T}/T$ 是无挠的。这个 $\overline{T}$ 不可能是纯内射的，因为其 Ulm子模包含其挠子模 T^1；后者是一个子对象，但不是内射的（参见定理 7.4）。（也可以通过给出一个纯内射对象的纯内射扩张来作另一种证明；这种扩张必然是余挠的，但并非纯内射。）

我们在 $\mathcal{C}^*_V$中提出以下关于余挠模的问题。

问题 8.5。余挠模的Ulm子模是否为余挠模，且Ulm 因子在 $\mathcal{C}^*_V$ 中是否为纯内射，如同 DVD 的情形？□

致谢。我们感谢 Luigi Salce 提供的大量宝贵意见。

更正。（L. Fuchs）在研究赋值整环上的模时，非标准单列模频繁出现，因此我们的研究也无法避免提及它们。我想更正文献中关于它们的错误表述。在关于非标准单列对象的几篇非常有趣的论文中（《美国数学会通报》25（1991）和《当代数学》124（1992））， B. Osofsky 声称，之所以研究非标准单列对象，是因为它们与 Kaplansky 问题有关，即是否存在不是赋值整环的同态像的赋值环。R. G¨obel 在《数学评论》对 Osofsky 第一篇文章的评论中，重述了这一错误说法（以及另一项错误陈述）。事实是，1980 年，L. Salce 在我们共同研究赋值整环上的模期间提出了非标准单列对象存在性的问题，而且正是他将其命名为“非标准”。S. Shelah 直到 1984 年 4 月的乌迪内会议上才得知非标准单列对象，而就在那次会议前夕，他于当夜成功证明了它们的存在性。当时，无论 Shelah 还是参加这次盛会的其他任何人，都不能声称 Kaplansky 问题已经得到解决，因为在那一刻，没有人想到它与非标准单列对象有关。三个月后，当我们解决 Kaplansky 问题时，这一联系才为人所知，而该解依赖于非标准单列对象（见发表于 [14]中的原始解答）。

References

[1] S. Bazzoni 与 L. Fuchs, *On modules of finite projective dimension over valuation domains*, 《阿贝尔群与模》, CISM课程与讲义 287（1984）, 361–371。[2] S. Bazzoni、L. Fuchs 与 J. Salce, *The hierarchy of uniserial modules over a valuation domain* **7** 1995 247 277 ,

Forum Math.（）, –。[3] S. Bazzoni 与 D. Herbera, *Cotorsion pairs generated by modules of bounded projective dimension* **174** 2009 119 160 ,

Israel J. Math.（）, –。[4] P.C. Eklof, *Homological algebra and set theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 227（1977）, 207–225。[5] P.C. Eklof 与 A. Mekler, *Almost Free Modules. Set-theoretic Methods*（North Holland, 1990）。[6] L. Fuchs, *On a substitution property of modules*, Monatsh. Math. 75（1971）, 198–204。[7] L. Fuchs, *On projective dimensions of modules over valuation domains*, 载于: 《阿贝尔群论》, 数学讲义, 1006（Springer, 1983）, 589–598。[8] L. Fuchs, *On divisible modules over domains*, 《阿贝尔群与模》, CISM课程与讲义 287（1984）, 341–356。[9] L. Fuchs, *Note on modules of projective dimension one*, 载于: 《阿贝尔群论》, Gordon and Breach Sci. Publ.,（纽约, 1987）, 425–432。[10] L. Fuchs, *On divisible modules over valuation domains*, J. Algebra 110（1987）, 498–506。[11] L. Fuchs, *Abelian Groups*, Springer（瑞士沙姆, 2015）。[12] L. Fuchs, *Torsion-free extensions of projective modules by torsion modules*, J. Co mmut. Algebra, 即将出版（2023）。[13] L. Fuchs 与 L. Salce, *Separable torsion modules over valuation domains*, Archiv Math. 41（1983）, 17–24。[14] L. Fuchs 与 L. Salce, *Modules over Valuation Domains*, 纯粹与应用数学讲义 97, Marcel Dekker Inc.（纽约、巴塞尔, 1985）。[15] L. Fuchs 与 L. Salce, *Modules over non-Noetherian Domains*, 数学调查与专著 84, Amer. Math. Soc.（罗德岛州普罗维登斯, 2001）。[16] I. Kaplansky, *Projective modules*, Ann. Math. 68（1958）, 372–377。[17] E. Matlis, *Divisible modules*, Proc. Amer. Math. Soc. 11（1960）, 385–391。[18] B. Osofsky, *Global dimension of valuation rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 127（1967）, 136–149。[19] T.S. Shores 与 W.J. Lewis, *Serial modules and endomorphism rings*, Duke Math. J. 41（1974）, 889–909。[20] R.B. Warfield, Jr., *Purity and algebraic compactness for modules*, Pac. J. Math. 28（1969）, 263–276。[21] R.B. Warfield, Jr., *Decomposability of finitely presented modules*, Proc. Amer. Math. Soc. 25（1970）, 167–172。

Institute of Mathematics & Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, 1113 Sofia, Bulgaria

Email address: danchev@math.bas.bg; pvdanchev@yahoo.com

Department of Mathematics, Tulane University, New Orleans, Louisiana 70118, USA *and* 1724 Pinetree Cir NE, Atlanta, Georgia 30329, USA

Email address: fuchs@tulane.edu