arXiv:2301.13695v1 [math.CO] 31 Jan 2023

关于闵可夫斯基平面的色数的注记：正多边形情形

Panna Gehér *

摘要

著名的 Hadwiger-Nelson 问题要求确定这样着色欧几里得平面上各点所需的最少颜色数：任意相距单位距离的两点不得被赋予相同的颜色。在本文中，我们考虑闵可夫斯基度量平面中的这一问题变体，其中单位圆是一个具有偶数个顶点且顶点数不超过 22 的正多边形。我们提出一种简单的格–子格着色方案，仅使用 6 种颜色，从而证明上述闵可夫斯基平面的色数至多为 6。对于顶点数超过 8 的正多边形而言，这一结果是新的。

1 引言

1950年，Nelson 提出了如下问题：将欧几里得平面着成多少种颜色最少，才能使任意两个同色点之间的距离都不为单位距离？我们将这种具有k 个颜色类的着色称为一个合法的 k-着色。因此，Nelson 的问题要求确定最小的 k 值，使得该平面可以被合法地 k-着色。这个值称为欧几里得平面的色数，记为$\chi(\mathbb{R}^2)$。问题提出后不久，人们便得到了以下容易获得的界：

$$4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7.$$

下界归功于 Moser [17]，他构造了一个色数为 4 的单位距离图（即其边连接相距一个单位距离的顶点）。上界归功于 Isbell [10]，他考虑了用直径略小于 1 的正六边形的平移像铺满平面，并定义了一种如图1所示的周期性正常 7-着色。

尽管人们曾多次尝试改进这些界，但在 60 多年的时间里进展甚微——有关该问题的历史综述，见 [20]。然而，2018年，生物学家 de Grey [9] 构造出了一个 5-色单位距离图，证明平面的色数至少为 5，这使数学家们大为震动。不久之后，Exoo 和 Ismailescu [7] 分别独立发表了另一份证明。

自这一突破以来，这个问题重新受到广泛关注，随后启动了 Polymath 项目，其主要目标是为这一新结果构造一个可由人类验证的证明。虽然这些证明仍依赖计算机，但研究已取得相当大的进展：de Grey 发布的距离图共有 1581 个顶点，而目前已知的最小示例仅包含 509 [18]。

*E¨otv¨os Lor´and University，布达佩斯； geherpanni@student.elte.hu。

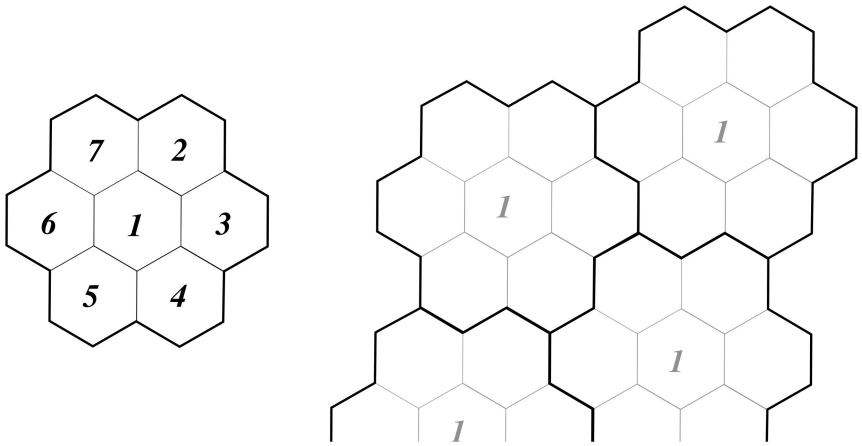


图1： Isbell 给出的欧几里得平面的一个恰当的 7-着色

这一突破使该问题的许多变体在过去几年里受到更多关注。一个有趣的研究方向是将问题推广到闵可夫斯基平面：设 C 为以原点为中心的二维中心对称有界凸域，并令 $(\mathbb{R}^2,\ C)$ 表示由 C 确定单位圆的闵可夫斯基平面；C 范数下一个 $x \in \mathbb{R}^2$ 点的值为：

$$\|x\|_C := \min\left\{\lambda \in \mathbb{R}^+ | x \in \lambda C\right\}.$$

两点 x 和 y 之间的 C-距离定义为 $\|x-y\|_C$。自然地，闵可夫斯基平面的色数——记为 $\chi(\mathbb{R}^2,\ C)$——是为 $\mathbb{R}^2$ 中的点着色所需的最少颜色数，使得不存在确定单位 C-距离的同色点对。关于闵可夫斯基平面的色数，主要结果归功于 Chilakamarri [2]：通过拓展 Moser 的论证和 Isbell 的构造，他证明了界限

$$4 \leq \chi(\mathbb{R}^2, C) \leq 7$$

对所有中心对称的有界凸域 C都成立。

上述问题的一个有趣特例是单位圆为顶点数为偶数的正多边形。或者更一般地，由于问题本身具有仿射不变性，我们可以考虑正多边形的任意仿射像。对此类赋范平面的色数研究同样由 Chilakamarri 开创，他考察了顶点数较少的正多边形情形。他针对平行四边形和对称六边形的情形给出了基于铺砖的恰当 4-着色，证明这些情形的答案恰好为 4。他还证明，在 C 为中心对称八边形的情形下，可以进行恰当的 6-着色：他考察了 $C/2$的堆积，即半径为一半的圆的堆积。他证明， $C/2$ 的平移像可以使用 4 种颜色着色，另外两种颜色则可以处理剩余的正方形（详见图2）。值得注意的是，我们必须谨慎选择八边形边界点的颜色，因为任何对径点对都不能具有相同的颜色。

Chilakamarri 曾提出疑问：对于赋予由正八边形或任意中心对称八边形定义的范数的平面，其色数是否恰好为 4。直到最近，这个问题一直没有进展；Exoo、Fisher 和 Ismailescu [6] 对他的疑问给出了否定回答：他们构造了五色单位距离图

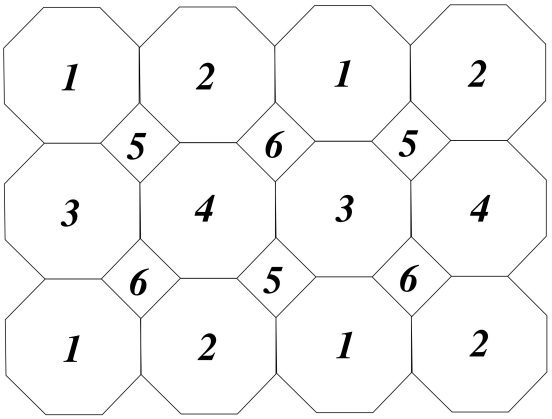


图2： Chilakamarri 对配备正八边形度量的闵可夫斯基平面进行的适当 6-着色

适用于具有 8、10 和 12 个顶点的正多边形情形。加上欧氏情形，这些是目前已知的仅有的色数至少为 5 的赋范平面实例。表1总结了上述结果：

单位圆 C	$\chi(\mathbb{R}^2, C)$
平行四边形、中心对称六边形（见 [2]）	4
正八边形（见 [6], 和 [2]）	5 或 6
正十边形、正十二边形（参见 [6] 和 [2]）	5、6 或 7
欧氏圆（参见 [9], [7] 和 [10]）	5、6 或 7
任意对称凸域（参见 [2]）	4、5、6 或 7

表1：闵可夫斯基平面的色数可能值

在本文中，我们通过给出一种仅使用 6 种颜色的简单格–子格着色方案，将 Chilakamarri 关于正八边形的结果推广到了顶点数不超过 22 的正多边形。该结果还略微加强了 Chilakamarri 的结论，因为我们的着色是正则的：如果存在向量 $v_1 \ldots$、 v_k，使得 $C_i = C_1 + v_i$ 对于 $i = 1 \ldots k$，即各颜色类互为平移像，则我们称带有颜色类 C_1、C_2 ..... C_k正则的 $\mathbb{R}^n$ 的一个适当 k-着色为正则着色。现在陈述我们的主要定理：

定理1。设 C 为一个顶点数为偶数的正多边形。当 C 的顶点数至多为 22 时，存在闵可夫斯基平面关于 C-度量的一个正则适当6着色，使得没有相距单位C距离的点具有相同颜色。因此，

$$\chi(\mathbb{R}^2, C) \leq 6$$

对于任意正则 $2k$ 边形 C，其中 $k \leq 11$，均成立。

由此可见，在正十边形和正十二边形的情形中——与正八边形的情形类似——色数不是 5 就是 6。

在第2节中，我们描述了所有情形中所采用的着色方案，并给出有关证明的若干细节和图示。例如，在第 3 节中，我们给出了正十二边形情形下的所有计算，而关于 22边形的计算则可见附录。最后，在第 4 节中，我们描述了定理1的一个推论，该推论考察了 Szlam [21] 提出的一个密切相关的非对称 Ramsey 型问题。

2 着色方案

首先令 C 为一个正八边形，并按如下方式定义内接于 $C/2$ 的中心对称凸六边形 H：选择 $C/2$ 的两条对边，利用它们的四个端点和 $C/2$ 的另外两个边界点构成一个六边形。附加点的选择方式有多种；这里我们简单地选择将连接所选边的 $C/2$ 边界线平分的点。按照图 3 所示的顺时针顺序，将 H 的顶点记为 $A_i (i = 1 \dots 6)$。

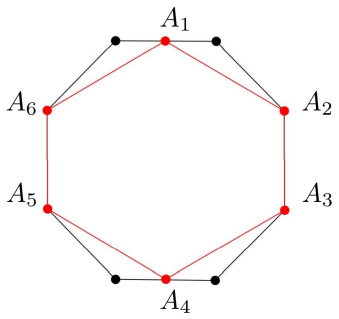


图 3： 正十边形情形下内接于 $C/2$ 的中心对称六边形

为避免在 H 中出现单位 C-距离，移除位于点 A_1 和 A_4 之间的边界点，包括 A_4 但不包括 A_1。这样，任意对径点对都不会是单色的。为简便起见，仍将所得的半开六边形称为 H。现在考虑用 H 的平移像对平面进行镶嵌，并按照图 4 所示周期性地赋予颜色 1 至 6。我们可以假设这些六边形的中心构成一个晶格，将其记为 $\mathcal{L}$。

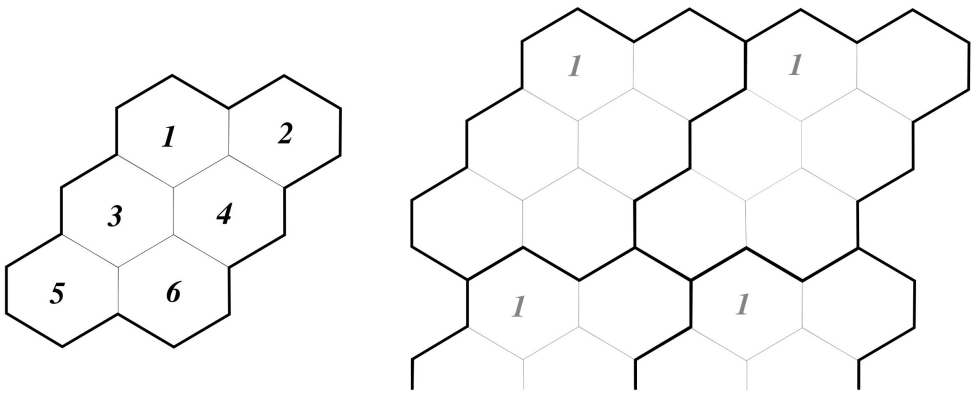


图 4： 用六边形 H 的平移像对平面进行镶嵌，从而定义周期性六着色

请注意，该着色方案与 Chilakamarri 的一般七着色之间的主要区别在于，这里我们可以利用 C 并非严格凸这一点：在与 $C/2$ 共享的边所垂直的方向上，可以放置单色六边形，使它们之间仅隔着一个不同颜色的六边形。

现在我们说明我们的着色是合法的：如前所述，六边形内部不会出现单位 C-距离。剩下要检查的是，同色的两个六边形之间距离足够远，不会形成相距单位 C-距离的点对。由于各颜色类彼此全等，只需验证其中一个特定颜色类即可，例如红色点的颜色类。我们还可以假设其中一个红色六边形的中心位于原点，于是红色六边形中心的集合构成一个子格 $\mathcal{L}'$。由 C 的对称性，只需证明多边形 $\mathcal{L}' + C/2 \oplus H$ 构成一个堆积，其中 $\oplus$ 表示这两个多边形的闵可夫斯基和，即：

$$C/2 \oplus H = \{c + h \mid c \in C/2,\ h \in H\}.$$

通过直接计算即可完成证明。不失一般性，我们可以假设 C 的外接半径为 1。令 v_1 和 v_2 表示晶格 $\mathcal{L}'$ 的基向量，并且可以假设 v_1 垂直于与 $C/2$共用的边。于是，对于任意向量 $\lambda \in \mathcal{L}'$，多边形 $\lambda + C/2 \oplus H$ 和 $\lambda \pm v_1 + C/2 \oplus H$ 显然不相交。根据定义， $H + C/2 \subseteq C$，因此 $H + C/2$ 的外接半径也至多为 1。因而，只需验证除 0 和 $\pm v_1$ 之外，任意晶格向量的欧几里得长度都至少为 2。这一点显然成立（见图 5），因此该着色确实是正规的。 –

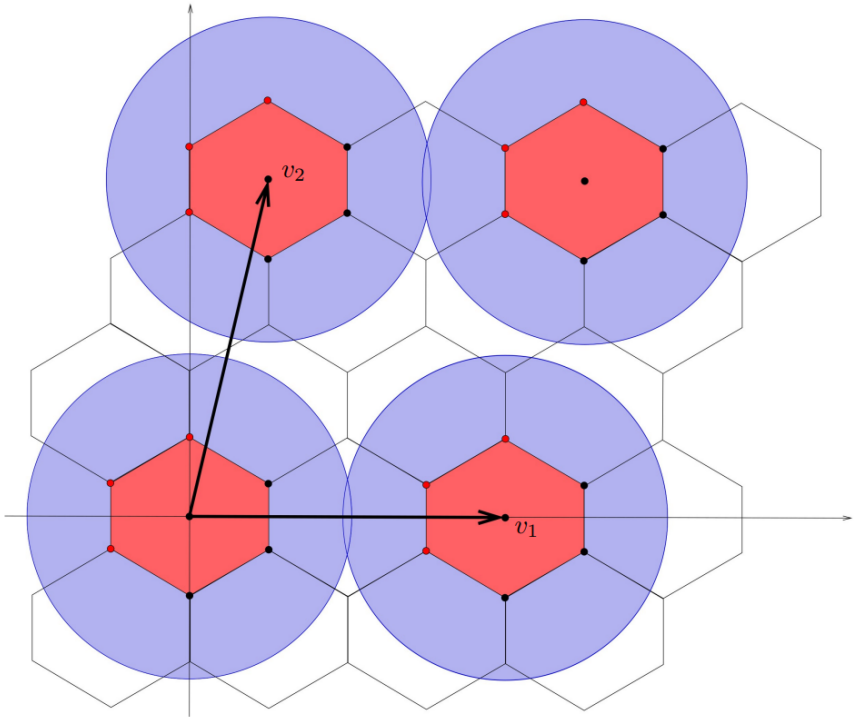


图 5: 对于一个欧几里得单位圆的 y 格向量 $v \in \mathcal{L}' \setminus \{\pm v_1, 0\}$ B_2 与所有平移像 $B_2 + v$不相交

现在考虑顶点数更多的正多边形。我们证明，对于其余所有情形，几乎相同的着色方案都有效： H 的两条边总可以作为 $C/2$的两条对边，我们只需谨慎选择其余两个顶点。对于正 10 边形和正 12 边形的情形，在 $C/2$ 的边界线上选取二等分点仍然有效；我们只需按图 6 所示定义六边形 H 即可。

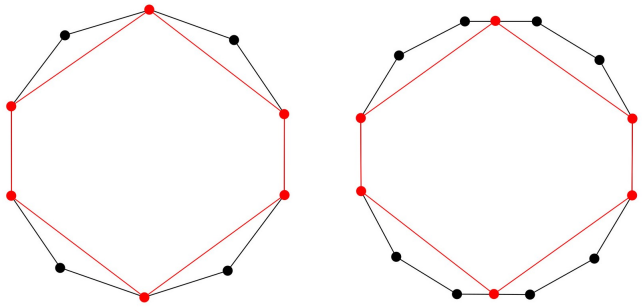


图 6：正则十边形和十二边形情形下，内接于 $C/2$ 的中心对称六边形

然而，在其余情形中，为了得到正常着色，我们不得不将六边形压扁。对于正则十四边形、十六边形和十八边形，选用了 $C/2$ 的其他一些顶点。但在最后两种情形中，似乎只有非顶点的点才可行：对于 $n = 20$ ，选用了其他一些边的平分线；对于 $n = 22$ ，则将其中一条边按 0.68 : 0.32 的比例分割。详情见图 7。

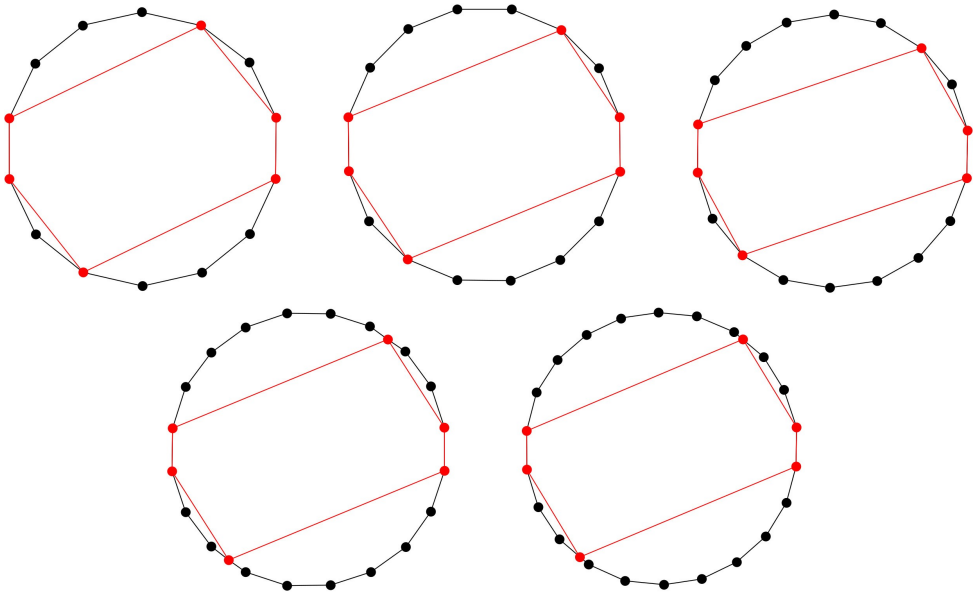


图 7：正则十四边形、十六边形、十八边形、二十边形和22边形情形下，内接于 $C/2$ 的中心对称六边形 H

证明由上述六边形定义的着色是适当的，所需的计算会随着顶点数量的增加而越来越多。由于所有情形都相似，我们将仅在第 3 节中给出正十二边形情形的计算细节，并在附录中给出正二十二边形情形的计算细节。

3 正十二边形的情形

现在我们介绍正十二边形情形下的证明细节。考虑一个以原点为中心、外接半径为 2 的正十二边形，其顶点为：

$$(\pm 1, \pm\sqrt{3}), (\pm\sqrt{3}, \pm 1), (\pm 2, 0), (0, \pm 2).$$

令 H 为如第2节所定义的内接于 $C/2$ 的对称六边形：取 $C/2$ 的两条对边，例如取与向量 $(2-\sqrt{3},\ 1)$ 平行的两边，并选择另外两个点，使其将所选两边之间的 $C/2$ 边界线部分平分。按照图8所示的顺时针顺序，将这六个顶点记为 $A_i\,(i = 1 \ldots 6)$。与之前一样，令 H 为由点 A_i 所定义的半开六边形，该六边形不包含连接点 A_1 和 A_4 的线段以及点 A_1 本身。

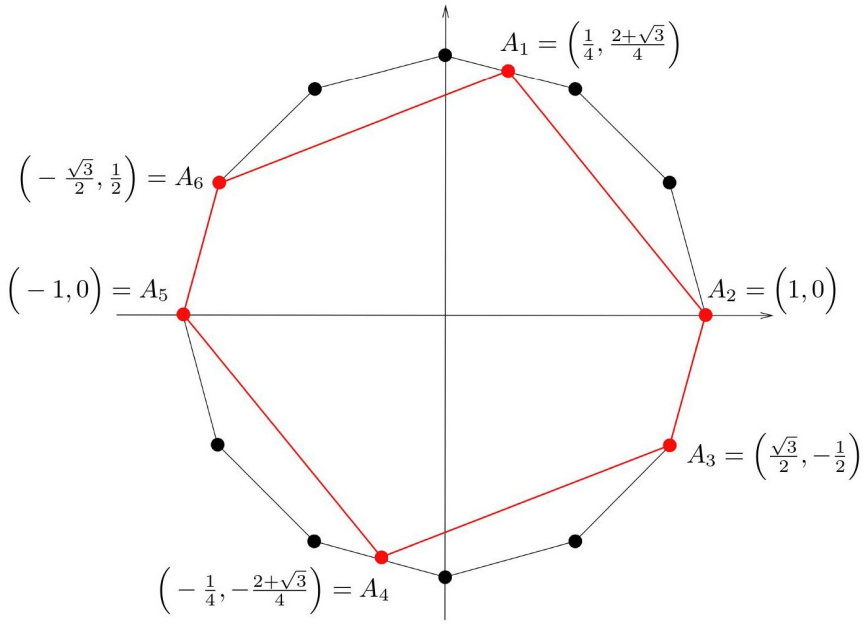


图8： 内接于 $C/2$ 的 H 六边形

因此，采用六边形 H 对平面进行六边形镶嵌，就是由晶格 $\mathcal{L}$ 的 Voronoi区域构成的堆积，其中该晶格由向量 $\left(\frac{1-2\cdot\sqrt{3}}{4}, \frac{4+\sqrt{3}}{4}\right)$ 和 $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 张成。与包含以原点为中心的六边形的单色类相对应的子格 $\mathcal{L}'$ 的基向量为：

- $v_1 = \left(\frac{3-6\cdot\sqrt{3}}{4}, \frac{12+3\cdot\sqrt{3}}{4}\right)$,
- $v_2 = \left(2+\sqrt{3}, -1\right)$.

As 在第2节中提到，我们需要证明多边形 $\mathcal{L}' + C/2 \oplus H$ 构成一个堆积 .

$C/2 \oplus H$ 的顶点为：

$$B_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{6+\sqrt{3}}{4}\right),\ B_2 = \left(\frac{3}{4}, \frac{2+3\cdot\sqrt{3}}{4}\right),\ B_3 = \left(\frac{1+2\cdot\sqrt{3}}{4}, \frac{4+\sqrt{3}}{4}\right),\ B_4 = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$B_5 = \left(2, 0\right),\ B_6 = \left(\sqrt{3}, -1\right),\ B_7 = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right),\ B_8 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{2+3\cdot\sqrt{3}}{4}\right) \text{ etc.}$$

剩余顶点的坐标可通过对称性得到——见图9。

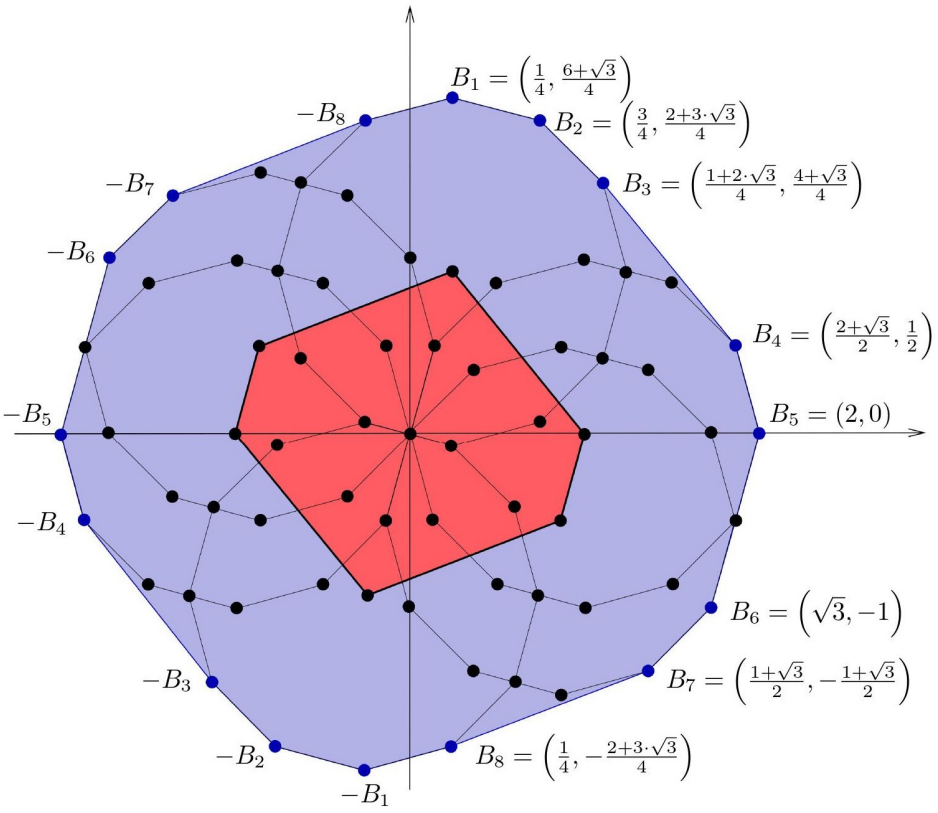


图9：闵可夫斯基和 H 与 $C/2$

由于着色是正则的，只需选取一个以原点为中心的六边形 H，并证明对于 $\mathcal{L}'$ 中的所有 $\lambda' \neq 0$， $H \oplus 1/2C$ 与 $\lambda' + H \oplus 1/2C$ 不相交。

根据定义， $H \oplus C/2$ 的外接半径为2。以原点为中心、半径为4的圆内，除原点外还有 $\mathcal{L}'$ 的4个格点；根据对称性，我们只需检查其中2个点及相应的六边形，即：

- $H_1 := H + v_2$ 和
- $H_2 := H + v_1 + v_2$。

H 和 H_1 之间恰好隔着一个颜色不同的六边形，这已经足够了，因为 v_2 垂直于 H 和 $C/2$的公共边。剩下的工作就是给出一条将 H 与 H_2分隔开的直线。例如，考虑由以下方程定义的直线 l：

$$y = -\frac{2+\sqrt{3}}{3}x + \frac{5+2\cdot\sqrt{3}}{3}.$$

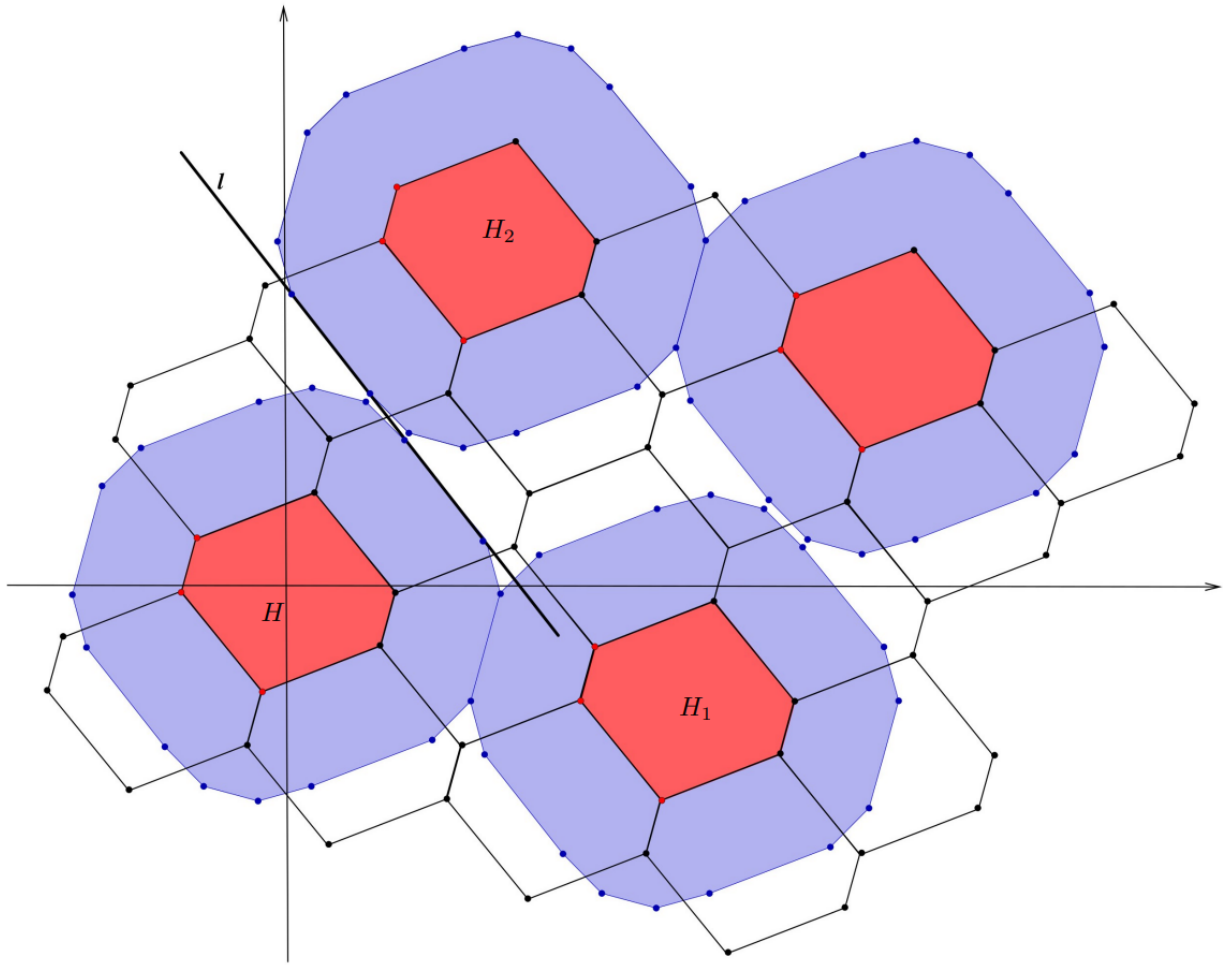


图10： 直线 l 将 $H \oplus C/2$ 和 $H_2 \oplus C/2$分隔开

不难验证， l 经过 $H \oplus C/2$ 和 $H_2 \oplus C/2$ 的两条平行边（它们位于各自中心的对侧），而 $H \oplus C/2$ 其余的顶点均位于直线 l下方，同时 $H_2 \oplus C/2$ 的所有其余顶点均位于该直线上方（见图10）。因此， $H \oplus C/2$ 和 $H_2 \oplus C/2$ 不相交，所以该着色是合理的。

我们注意到，在所给出的示例中，可以用许多不同的方式定义六边形 H ，因为此处的着色方案相当灵活。然而，随着顶点数量增加，可能选择的范围会迅速缩小。例如，在正二十二边形的情况下，我们必须非常谨慎地定义六边形 H：如图 11所示，我们的着色几乎是刚性的。

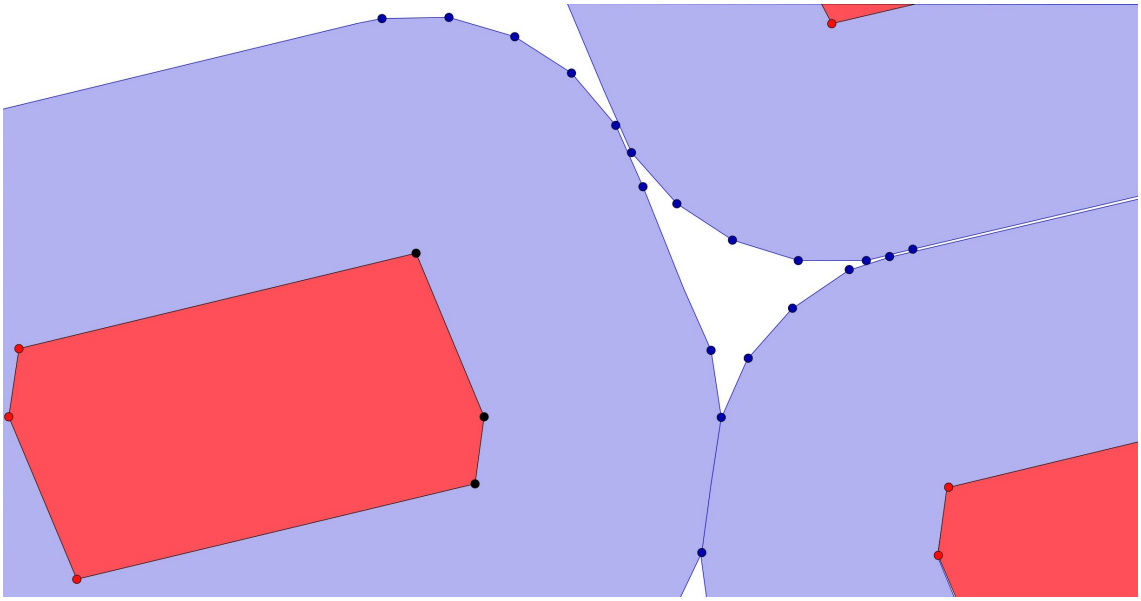


图 11： 在采用正二十二边形度量的闵可夫斯基平面的 6-着色中，单色六边形彼此靠得过近，情况十分危险

4 非对称 Ramsey 型问题

将 Hadwiger-Nelson 问题推广到一般情形的另一种方向，是用另一个有限点配置替换相距单位距离的点对。此外，我们还可以在每个颜色类中寻找不同的构型。Juh´asz 在 [5] [12] 中提出的一个问题表明，在平面的任意红蓝着色中，要么存在两个距离为 1 的红色点，要么存在任意一个至多含 4 个点的配置的蓝色全等副本。反过来，Juh´asz 还证明，如果将 4 替换为 12，该定理便不再成立。Csizmadia 和 T´oth [4] 随后改进了上述结果，证明 4 甚至不能增加到 8。

在本文其余部分，我们关注上述问题的以下变体：对于给定的点配置 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ，在 n 维欧几里得空间的任意红蓝着色中，是否总是存在两个距离为 1 的红色点，或者存在配置 K 的蓝色平移像？令 k_n 表示满足以下条件的最大值：对于所有至多含 k 个点的配置 K ，答案均为“是”，其中 k 。请注意，二维情形与原问题中的情形并不相同，因为“全等副本”已被“平移”替换。

这一问题的变体最早由 [21] Szlam 考虑。他证明了， k_n 会随着维数的增加而呈指数增长。更确切地说，Szlam 定理表明， $\chi(\mathbb{R}^n)$，即 n维欧几里得空间的色数（也就是为 $\mathbb{R}^n$ 着色所需的最少颜色数，使得任意两个

同色点之间的距离都不为单位距离）为 k_n的值提供了一个下界。为完整起见，我们也给出他的简短证明。

引理 1 (Szlam I. [21])。 假设存在一个 k点构型 K 以及对 $\mathbb{R}^n$ 的红蓝着色，使得红色颜色类不包含单位距离，蓝色颜色类不包含 K的任何平移像。那么 $\mathbb{R}^n$ 可以被适当地进行 k着色，即 k 颜色类中没有一个包含单位距离。因此 $k_n + 1 \geq \chi(\mathbb{R}^n)$。

证明。 假设我们给定了一个构型 $K = \{a_1, \dots a_k\}$ 以及对 $\mathbb{R}^n$ 的红蓝着色，并且它具有所需的性质。那么，对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$，至少存在一个指标 i，使得 $x + a_i$ 为红色。现在，我们将点x 着为编号为 i的颜色：由于不存在相距单位距离的红色点，这确实定义了一个适当的 k着色。 □

Frankl and Wilson 的著名定理 [8] 给出了欧几里得空间色数的指数下界：该定理表明，当 n 趋于无穷大时

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.2 + o(1))^n.$$

因此，根据引理 1，当 n 趋于无穷时， $\mathbb{R}^n$ 的每一种红蓝着色在$1.2 + o(1)^n$时都包含所有 k 点配置的一个蓝色平移副本。

Szlam 还给出了引理 1 的一个部分逆命题，仅考虑正则着色：

引理 2 （Szlam II。 [21]）。 假设 $\mathbb{R}^n$ 可以通过正则着色进行适当的 k-着色，其中颜色类为$C_i = C_1 + v_i$（对于 $i = 1 \dots k$）。那么存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个红蓝着色，以及一个 k点配置，即$K = \{v_1, v_2, \dots v_k\}$，使得红色类不包含单位距离，蓝色类则不包含 K的任何平移像。

自 Szlam 的原始论文发表以来，人们研究了其工作的许多应用和推广（例如参见 [1, 11, 13, 16]）。这里我们需要考虑闵可夫斯基空间的类似结果：令 $k_n(C)$ 表示最大的 k 值，使得对于由 C 确定的闵可夫斯基空间的任意红蓝着色，要么存在相距单位距离的两个红色点，要么存在任意至多含 k 个点的配置的一个蓝色平移副本。一个简单的观察是，引理 1 和引理 2 都可以推广到闵可夫斯基空间（例如 [1]中已有说明）。由于定理1中描述的 6-着色是正则的，我们立即得到以下推论：

推论 1。 设$(\mathbb{R}^2, C)$ 是一个闵可夫斯基平面，其单位圆是一个顶点数为偶数的正多边形。当 C 至多有22 个顶点时，平面存在一种红蓝着色以及一个包含 $K6$ 个点的构型，使得不存在相距 C单位距离的红色点对，并且蓝色颜色类不包含 K的任何平移像。

我们以对 Szlam 结果的一点简短评论作为本文的结尾：我们注意到，尽管引理 2 的证明简短且直接，但它可能会有些误导性。要了解其不便之处，只需注意引理 1 中定义的正常着色并不是正则着色：颜色类是通过用单位距离避红集合的平移像覆盖平面而生成的。将具有这种结构的着色称为次正则着色。更准确地说，如果存在向量 $v_1 \dots v_k$ 使得 C_i 是 $C_1 + v_i$的子集，我们就称具有颜色类 $C_1 \dots C_k$ 次正则 的正常 k-着色为次正则着色。我们将以一种非常自然的方式证明，引理 2 可以推广到次正则着色：

定理 2。 设$(\mathbb{R}^n, C)$ 是一个 n 维闵可夫斯基空间。假设 $\mathbb{R}^n$ 可以通过由 C 单位距离避集 C_1 以及向量 v_1、$v_2 \dots v_k$定义的子正规着色进行适当的 k 着色。则存在一种对 $\mathbb{R}^n$ 的红蓝着色以及一个 k点构型，即 $K = \{-v_1, -v_2, \cdots - v_k\}$，使得红颜色类避开单位 C距离，而蓝颜色类避开 K的所有平移像。

证明。 将 C_1 中的点着为红色，并将所有其余点着为蓝色。按照承诺，考虑构型 $K = \{-v_1, -v_2, \ldots, -v_k\}$。我们希望证明，对于任意向量 m，颜色类 C_1 至少包含 $K + m$中的一个点。不失一般性，我们可以假设 $v_1 \equiv 0$。因此，如果 $m \in C_1$，则无需证明。假设 $m \notin C_1$。在这种情况下，存在一个指标 i，使得 $m \in C_1 + v_i$，这将导致$-v_i + m \in C_1$。□

由此可知，对于所有 n 和 C， $k_n(C)$ 的值恰好是满足以下条件的最小数 k ：存在一个 $(\mathbb{R}^n, C)$ 的子正则 k-着色。正如我们所见，已知的闵可夫斯基平面的正常着色通常都是正则的。在三维欧氏空间中， [19] 定义了一种正常的 15-着色， [3] 也独立地定义了另一种，这两种着色给出了 $\mathbb{R}^3$ 的色数的最佳上界。尽管这些着色并不严格意义上是正则的，但可以通过一种简单的方法将其转化为正则着色。然而，在更高维度中，正常着色通常仅是子正则的。欧几里得空间的色数已知最佳上界由 Larman 和 Rogers [15] 建立，他们确定了 $\mathbb{R}^n$ 的一种子正则正常着色，该着色具有 $(3 + o(1))^n$ 个颜色类，即 $k_n < (3 + o(1))^n$。根据引理 2，该结果在常数因子意义下是紧的。对于闵可夫斯基空间，Kupavskii [14], 证明了具有 $(4 + o(1))^n$ 个颜色类的相应定理，即 $k_n(C) < (4 + o(1))^n$。

致谢

我谨向 G´eza T´oth 表示感谢，感谢他给予的大力帮助以及提出的许多宝贵意见。我也感谢 Dan Ismailescu 告知我们该问题的最新进展。

参考文献

[1] J. Burkert, P. Johnson *Szlam's lemma: mutant offspring of a Euclidean Ramsey problem from 1973, with numerousapplications*, Ramsey 理论（第 $97 - 113$ 页），Birkh¨auser，波士顿，马萨诸塞州，2011 年。[2] K. B. Chilakamarri *Unit-distance graphs in Minkowski metric spaces*, Geometriae Dedicata（1991），37.3： $345 - 356$。[3] D. Coulson *A 15-colouring of 3-space omitting distance one*, 离散数学（2001），256， $83 - 90$。[4] Gy. Csizmadia, G. T´oth *Note on a Ramsey-type problem in geometry*, 组合理论杂志，A 辑（1994），65(2)， $302 - 306$。[5] P. Erd˝os, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, E.G. Straus *Euclidean Ramsey Theorems II.*, Bolyai 数学学会论文集第 10 卷，《无限集与有限集》： $529 - 557$，North-Holland，阿姆斯特丹，1975 年。[6] G. Exoo, D. Fisher, D. Ismailescu *The chromatic number of the Minkowski plane – the regular polygon case*, Geombinatorics（2021），31, 49–67。[7] G. Exoo, D. Ismailescu *The chromatic number of the plane is at least 5: A new proof*, 离散与计算几何（2020）， $1 - 11$。[8] P. Frankl, R. M. Wilson *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica（1981），1(4)， $357 - 368$。[9] A. de Grey *The Chromatic Number of the Plane Is at least 5*, Geombinatorics（2018），28, $5 - 18$。[10] H. Hadwiger, H. DeBrunner, V. Klee *Combinatorial Geometry in the Plane*, Holt, Rinehart 6 Winston, 纽约，1964 年。

[11] P. Johnson A. D. Szlam *A new connection between two kinds of Euclidean coloring problems* Geombinatorics（2001），10(4)，$172-178$。[12] R. Juh´asz *Ramsey type theorems in the plane*, 组合理论杂志，A 辑（1979），27(2)，$152-160$。[13] C. Krizan *Euclidean Szlam Numbers* 博士学位论文，奥本大学，2016 年。[14] A. Kupavskii *On the chromatic number of* $\mathbb{R}^n$ *with an arbitrary norm*, Discrete Math.（2011），311(6)：$437-440$。[15] D. G. Larman, C. A. Rogers *The realization of distances within sets in Euclidean space*, Mathematika（1972），19(1)，$1-24$。[16] A. Li, M. Plummer, A. Shapiro, K. Weatherspoon *An Assortment of Euclidean Coloring Problems*，2021 年。[17] L. Moser, W. Moser *Solution to problem* 10, Can. Math. Bull.（1961），4，$187-189$。[18] J. Parts *Graph minimization, focusing on the example of 5-chromatic unitdistance graphs in the plane*, Geombinatorics（2020），29，第 3 期，137-166。[19] R. Radoi˘ci´c, G. T´oth *Note on the chromatic number of the space*, 离散与计算几何（2003），Springer，柏林，海德堡，$695-698$。[20] A. Soifer *The mathematical coloring book: Mathematics of coloring and the colorful life of its creators*, Springer Science & Business Media，2008 年。[21] A. D. Szlam *Monochromatic translates of configurations in the plane*, 组合理论杂志，A 辑（2001），93(1)，$173-176$。

附录

为完整起见，我们给出正二十二边形情形的计算：考虑一个以原点为中心、外接半径为 2 的正二十二边形，使得 $C/2$ 的顶点坐标为：

$$\left(\pm\cos\left(\frac{2t\pi}{11}\right),\pm\sin\left(\frac{2t\pi}{11}\right)\right)$$

其中 $t=0$，1，2，3，4，5。

令 H 为内接于 $C/2$ 的对称六边形，如第2节所定义：取 $C/2$ 的边平行于向量 $\left(1+\cos\left(\frac{20\pi}{22}\right),\ \sin\left(\frac{20\pi}{22}\right)\right)$，并选择另外两个点，使它们将平行于向量 $\left(\cos\left(\frac{6\pi}{22}\right)-\cos\left(\frac{4\pi}{22}\right),\ \sin\left(\frac{6\pi}{22}\right)-\sin\left(\frac{4\pi}{22}\right)\right)$ 的边按 0。68 : 0。32 的比例分割。

H 的顶点坐标为：

- $A_1=-A_4=\left(0.32\cos\left(\frac{4\pi}{22}\right)+0.68\cos\left(\frac{6\pi}{22}\right),0.32\sin\left(\frac{4\pi}{22}\right)+0.68\sin\left(\frac{6\pi}{22}\right)\right)$,
- $A_2=-A_5=(1,\ 0)$,
- $A_3=-A_6=\left(\text{余弦}\left(\frac{2\pi}{22}\right),\text{正弦}\left(\frac{-2\pi}{22}\right)\right)$。

和之前一样，令 H 为由点 A_i 定义的半开六边形，该六边形不包含连接点 A_1 和 A_4 的线段以及点 A_1 本身。对于 $i=1\dots6$，令 a^i 表示点A_i的位置向量。于是，用六边形 H 对平面进行的六边形铺砌，是由晶格 $\mathcal{L}$的Voronoi区域构成的堆积；该晶格由向量 $\left(a^1+a^6\right)$ 和 $\left(a^2+a^3\right)$张成。与包含以原点为中心的六边形的单色类相对应的子格 $\mathcal{L}'$ 的基向量为：

- $v_1=\left(3(a^1+a^6)\right)$,
- $v_2=\left(2(a^2+a^3)\right)$.

再次，我们需要证明多边形 $\mathcal{L}'+C/2\oplus H$ 构成一个堆积。 $C/2\oplus H$ 的顶点为：

- $\pm\left(\cos\left(\frac{12\pi}{22}\right)+a_x^1,\ \sin\left(\frac{12\pi}{22}\right)+a_y^1\right)$
- $\pm\left(\cos\left(\frac{10\pi}{22}\right)+a_x^1,\ \sin\left(\frac{10\pi}{22}\right)+a_y^1\right)$
- $\pm\left(\cos\left(\frac{8\pi}{22}\right)+a_x^1,\ \sin\left(\frac{8\pi}{22}\right)+a_y^1\right)$
- $\pm\left(\cos\left(\frac{6\pi}{22}\right)+a_x^1,\ \sin\left(\frac{6\pi}{22}\right)+a_y^1\right)$
- $\pm\left(\cos\left(\frac{4\pi}{22}\right)+a_x^1,\ \sin\left(\frac{4\pi}{22}\right)+a_y^1\right)$
- $\pm\left(\cos\left(\frac{2\pi}{22}\right)+a_x^1,\ \sin\left(\frac{2\pi}{22}\right)+a_y^1\right)$
- $\pm\left(\cos\left(\frac{2\pi}{22}\right)+a_x^2,\ \sin\left(\frac{2\pi}{22}\right)+a_y^2\right)$
- $\pm\left(1+a_x^2,\ \ a_y^2\right)=(2,\ 0)$
- $\pm\left(\text{余弦}\left(\frac{2\pi}{22}\right)+a_x^3,\ \text{正弦}\left(\frac{-2\pi}{22}\right)+a_y^3\right)$
- $\pm\left(\text{余弦}\left(\frac{4\pi}{22}\right)+a_x^3,\ \text{正弦}\left(\frac{-4\pi}{22}\right)+a_y^3\right)$
- $\pm\left(\text{余弦}\left(\frac{6\pi}{22}\right)+a_x^3,\ \text{正弦}\left(\frac{-6\pi}{22}\right)+a_y^3\right)$
- $\pm\left(\text{余弦}\left(\frac{8\pi}{22}\right)+a_x^3,\ \text{正弦}\left(\frac{-8\pi}{22}\right)+a_y^3\right)$
- $\pm\left(\text{余弦}\left(\frac{10\pi}{22}\right)+a_x^3,\text{正弦}\left(\frac{-10\pi}{22}\right)+a_y^3\right)$

由于 $H\oplus C/2$ 的外接半径为 2，因此只需考虑 $\mathcal{L}'$ 中长度不超过 4 的格点。除原点外，共有 6 个这样的格点；根据对称性，我们只需检查其中 3 个格点及其对应的六边形，即：

$H_1:=H+v_2$、 $H_2:=H+v_1$ 和 $H_3:=H+v_1+v_2$。

H 和 H_1 之间恰好隔着一个颜色不同的六边形，这已经足够了，因为 v_2 垂直于 H 和 $C/2$的公共边。剩下的只是给出一条将 H 与 H_2 分隔开的直线 l_1，以及一条将H 与 H_3分隔开的直线 l_2。例如，考虑由以下方程定义的直线 l_1 和 l_2：

$$y-\sin\left(\frac{12\pi}{22}\right)-a_x^6-\frac{1}{300}=\frac{a_y^6-a_y^1}{a_x^6-a_x^1}\left(x-\cos\left(\frac{12\pi}{22}\right)-a_x^6\right)$$
$$y-\sin\left(\frac{4\pi}{22}\right)-a_y^1-\frac{1}{50}=\frac{\sin\left(\frac{4\pi}{22}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{22}\right)}{\cos\left(\frac{4\pi}{22}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{22}\right)}\left(x-\cos\left(\frac{4\pi}{22}\right)-a_x^1\right)$$

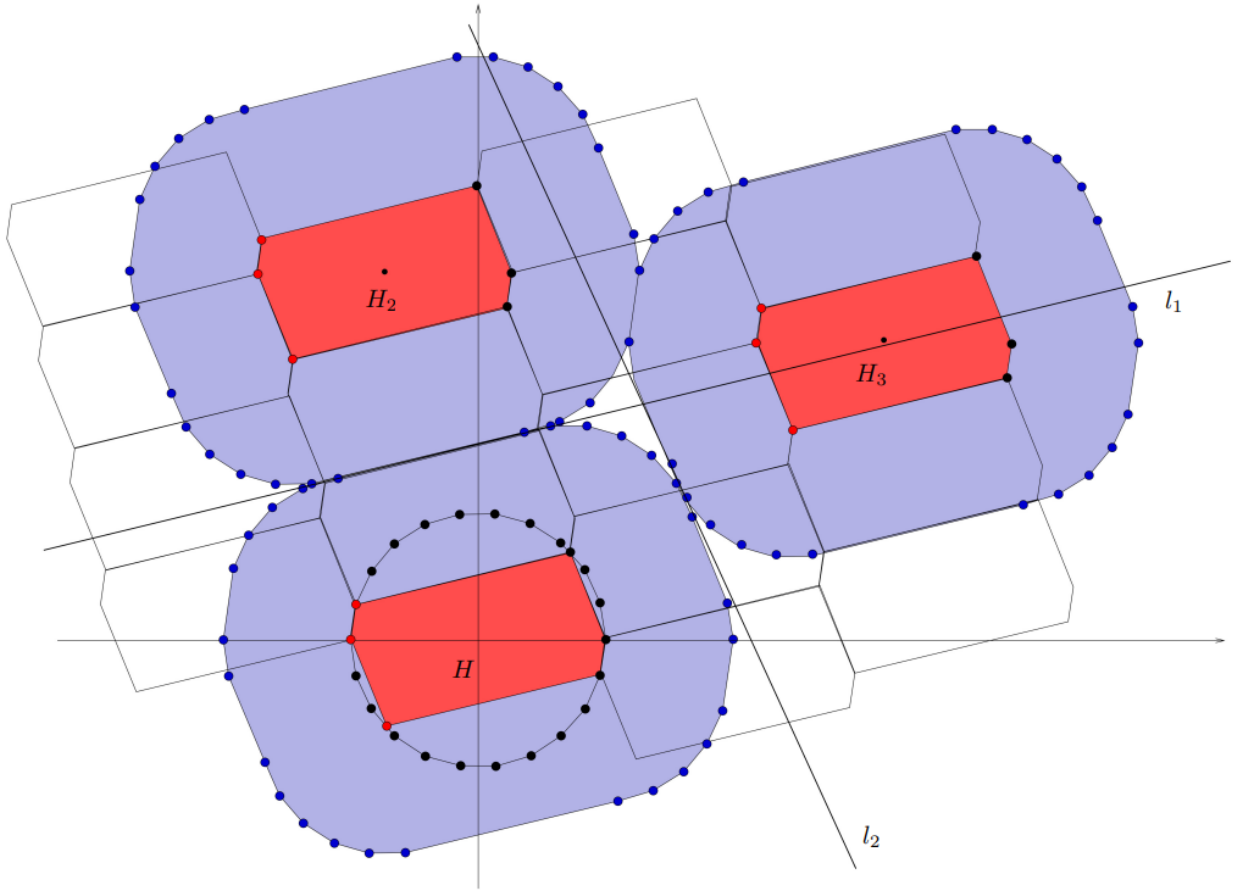


图12：直线 l_1 和 l_2 将 H 与 $H_2\oplus C/2$ 分隔开，并将其与 $H_3\oplus C/2$分隔开

不难验证，$H\oplus C/2$ 的所有顶点都位于直线 l_1 和直线 l_2下方，而 $H_2\oplus C/2$ 的所有顶点都位于 l_1上方，$H_3\oplus C/2$ 的所有顶点都位于 l_2 上方（见图12）。因此，这种着色确实是适当的。