arXiv:2301.13765v1 [math.GT] 31 Jan 2023

关于有限型多值形状

Diego Mondéjar

谨以此文献给*J.M.R. Sanjurjo*教授，祝贺他*70*岁生日

摘要

我们简要回顾Borsuk形状理论和Sanjurjo的多值形状的起源与发展。我们利用超空间在度量紧空间上的一个构造来定义有限型版本。

1 引言

形状理论是同伦理论针对具有不良局部性质的拓扑空间所作的适当延拓，因为在这类空间中，同伦理论无法提供相关信息。典型例子是图1中的华沙圆 W。它可以定义为函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在区间 $(0, \frac{2}{\pi}]$ 上的图像，加上其闭包（即连接 $(0,-1)$ 与 $(0,1)$ 的线段）-，并通过任意一条连接点 $(0,-1)$ 和 $(\frac{\pi}{2},1)$ 的简单弧（不与自身或空间的其余部分相交）闭合该空间。很容易看出，W 的基本群是平凡的，因为除了零同伦映射的类之外，不存在从 S^1 到 W 的连续映射。此外，它的所有同调群和同伦群也都是平凡的。但同样很容易看出，W 不是可缩的；例如，它将平面分解为两个连通分支。因此显然，同伦理论对 W 并不适用。人们希望将这种结构识别为某种意义上类似于 S^1, 的对象，因为二者都将平面分成两部分。问题在于，在同伦理论中，S^1 与 W 之间的态射不足，这是因为 W 在某些点的局部行为很差。形状理论源于 Karol Borsuk 于1968年发表的著名论文 [4]，旨在克服这些局限：它定义了一个新范畴，其中包含关于性质良好的拓扑空间的相同信息，同时也能对具有不良局部性质的空间给出某些有意义的分类。其思想是，无论空间多么糟糕，当它嵌入更大的空间（例如希尔伯特立方体 Q）时，它的邻域都不会太糟糕。在我们的例子中，从图中很容易看出

2010数学学科分类。54B20, 54C56, 54C60, 54D10, 55P55
K关键词和短语。形状理论、超空间、多值映射、有限拓扑空间。

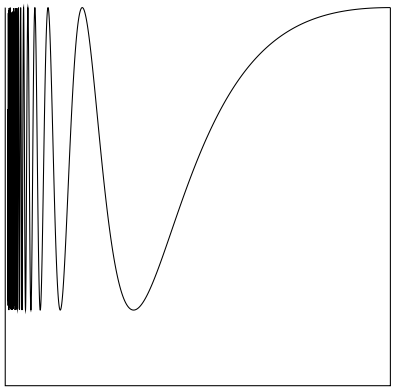

图1：华沙圆。

2 W 的邻域是$\mathcal{W}$ 环带，与$\mathbb{S}^1$中的环带具有相同的同伦型。于是，我们可以通过比较空间的邻域来比较它们；作为极限，这一过程可以针对越来越小的邻域进行。空间 $\mathcal{W}$ 与$\mathbb{S}^1$ 具有一些相同的整体性质，因为它们的邻域也具有这些性质。这样，从 $\mathbb{S}^1$ 到$\mathcal{W}$就不存在非平凡映射，因此我们可以对它们进行比较，并判断它们是否具有共同的拓扑性质。

具体而言，Borsuk 在嵌入希尔伯特立方体中的度量紧空间之间定义了一类新的态射，称为基本序列，即由连续映射组成的序列 $f_n : Q \to Q$，它们在嵌入希尔伯特立方体的空间的邻域上满足某些同伦条件。他引入了基本序列之间的同伦概念，并将度量紧空间的形状范畴定义为关于这一同伦关系的同伦类。事实表明，当所考虑的空间是 ANR 时，这个新范畴与同伦范畴仅在形式上有所不同，因此它只是在同伦范畴的基础上增加了更多态射。详情请参见原始文献 [4],或 Borsuk 所著的书籍 [6, 5]。

在 Borsuk 描述度量紧空间的形状范畴之后，形状理论领域开展了大量工作，包括不同的描述、向更一般空间的延拓（例如，针对度量空间的重要 Fox扩张 [8]）、形状类型或形状不变量的分类。作为一般性参考，我们推荐书籍 [6, 5, 12, 7] 和综述文章 [9, 10]。

正如可以轻易推导出的那样，形状理论是一个非常简单且直观的概念，但却很难形式化。形状理论最有用的描述之一是逆系统方法，该方法由 Mardesic 和 Segal 针对紧豪斯多夫空间在 [11], 中创立，随后又由他们及其他一些作者进一步发展。在这种方法中，形状理论利用多面体的逆序列及其逆极限来定义拓扑空间中的形状；更一般地，则利用范畴中的逆系统来定义。关于这一方法，最好的参考资料是作者们所著的书籍 [12]。

本文研究的是 Sanjurjo 在 [15] 中创立的度量紧空间的多值形状理论。多值形状的关键且精妙之处在于，用

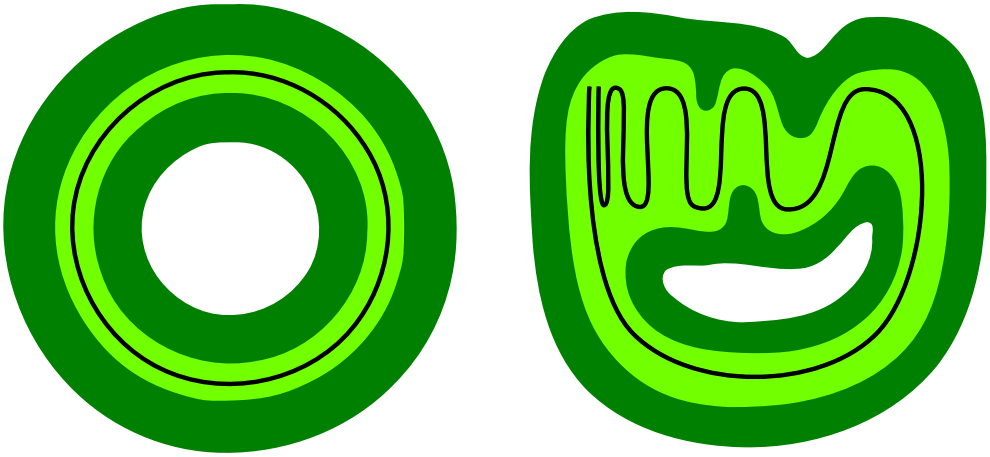

图 2：通过邻域比较圆与华沙圆。第一个邻域由深色和浅色环带共同组成，第二个邻域则仅由浅色环带组成。考虑这些环带的同伦型，以及每个环带嵌入下一个环带的方式，这一点非常重要。

像的直径递减的多值映射序列来替代形状态射；从某种意义上说，这是一种非常自然的定义方式，但也很难形式化。通过为这些映射定义一种非平凡的同伦类，可以建立一个与度量紧空间的形状范畴同构的范畴。这一理论的重要性在于其内部性。也就是说，与其他形状理论一样，我们不借助外部元素（如希尔伯特立方体或多面体）来描述态射，而只使用度量紧空间之间的映射来定义态射。本文将采用多值形状的一种重新表述，但建议阅读原始文献 [15], ，因为其中展现了富有启发性的几何思想。本文作者感谢 J.M.R. Sanjurjo 的睿智思想与精彩论述，这些思想和论述对其研究的起源产生了深远影响。

多值映射与超空间　这种多值形状理论后来由 Alonso-Morón 和 González Gómez 在 [3], 中重新进行了如下诠释。其基础是这样一个观察：多值函数实际上就是映射到带有所谓上半有限拓扑的超空间中的映射。对于紧致度量空间 X，我们将其超空间 称为非空闭子集的集合

$$2^X = \{C \subset X : C \text{ closed}\}$$

并赋予该空间上半有限拓扑2^X_u，其基由以下族构成$B = \{B(U)\}_U$，其中$U \subset X$遍历所有开子集。$B(U)$定义为包含在U中的 2^X 元素所组成的集合。关于这一拓扑的深入研究可见 [2, 3]。尽管该空间2^X_u 具有非常

差的拓扑性质（一般而言甚至不是豪斯多夫的），但它非常容易处理。例如，如果空间 X 是离散的，那么超空间 2^X_u 是一个偏序集，其序关系定义为：C <D 当且仅当 C ⊂D。事实上，超空间上的上半有限拓扑等价于多值映射的上半连续性。这里需要定义两个概念。设 X 和 Y 是两个紧致度量空间。考虑 2^Y_u 赋有上半有限拓扑的 Y 的超空间。从 X 到 Y 的近似映射是由连续映射序列 $\{f_n\}$ 构成的，其中 $f_n : X \to 2^Y_U$，且对于典范副本在 2^Y_u中的每个邻域 U，都存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对每个 $n > n_0$，f_n在 U 中与 f_{n+1} 同伦（记作 $f_n \,'_U g_n$；这表示存在一个同伦 $H : X \times I \to U \subset 2^Y_u$，连接 f_n 与 f_{n+1}）。若对于典范副本在 2^Y_u中的每个开邻域 U，都存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对每个 $n > n_0$，f_n 在 U 中与 g_n 同伦，则称从 X 到 Y 的两个近似映射$\{f_n\}$和$\{g_n\}$同伦。由此可知，对于紧致度量空间，两个空间之间的近似映射的同伦类等价于它们之间的形状态射。

2 主要构造

我们回顾一下在 [1] 中引入、并在 [13]中重新表述的主要构造。其中，构造了一个紧致度量空间 X 的有限逼近序列，并具有一些特殊性质。设 (X,d) 为紧致度量空间。对于每个 $\varepsilon > 0$，我们都可以找到一个有限的 ε-逼近 $A \subset X$。也就是说，对于每个点 $x \in X$，存在一个点 $a \in A$，使得 $d(x, a) < \varepsilon$。一个调整后的近似序列 $\{\varepsilon_n, A_n\}$ 由一个递减且趋于零的正实数序列 $\{\varepsilon_n\}$ 和一个有限空间序列 $\{A_n\}$ 组成，并且对于每个 $n \in \mathbb{N}$，A_n 是 X 的一个 ε_n-逼近，而 ε_{n+1} 已针对其进行调整，这意味着，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\varepsilon_{n+1} < \frac{\varepsilon_n - \gamma_n}{2}$，其中

$$\gamma_n = \sup\{d(x, A_n) : x \in X\} < \varepsilon_n.$$

[1] 中的主要构造和 [13] 中的定理 3 表明，每个紧致度量空间都存在调整后的近似序列。给定一个调整后的近似序列，我们可以将一个邻近逼近序列 $\{q_{A_n}\}$ 定义为连续映射序列$q_{A_n} : X \to 2^{A_n}{}_u$，通过邻近性定义为

$$q_{A_n}(x) = \{a \in A : d(x, A_n) = d(x, a)\},$$

以及一个有限逼近序列（简称 fas）$\{U_{2\varepsilon_n}(A_n), p_{n,n+1}\}$，作为一个项为

$$U_{2\varepsilon_n}(A_n) = \left\{C \in 2^{A_n}_u : \mathrm{diam}(C) < 2\varepsilon_n\right\} \subset 2^{A_n}_u$$

以及连续映射

$$p_{n,n+1} : U_{2\varepsilon_{n+1}}(A_{n+1}) \longrightarrow U_{2\varepsilon_n}(A_n)$$

其中，对于每个闭集$p_{n,\ n+1} = q_{A_n}(C)C\ \in U_{2\varepsilon_{n+1}}(A_{n+1})$。注意，离散空间$U_{2\varepsilon_n}(A_n)$的超空间上的上半有限拓扑是一个有限空间，其关系为 $\subset$ 作为偏序集。我们将使用这些映射所保持的距离的一些性质。

引理 1。 设 X 是一个紧致度量空间，$\{\varepsilon_n, A_n\}$ 是其调整后的近似序列。考虑点 $x \in X$、$a_n \in A_n$ 和 $a_m \in A_m$，其中 $n < m$。

i) 如果 $a_n \in q_{A_n}(x)$ 且 $a_m \in q_{A_m}(x)$，则 $d(a_n, a_m) < \varepsilon_n$。*ii)* 如果 $a_n \in p_{n,\ m}(\{a_m\})$，则 $d(a_n, a_m) < \varepsilon_n$。*iii)* 如果 $a_n \in p_{n,\ m} \cdot q_{A_m}(x)$，则 $d(a_n, x) < \varepsilon_n$。

证明。 对于i），我们有

$$\mathrm{d}(a_n, a_m) \leqslant \mathrm{d}(a_n, x) + \mathrm{d}(x, a_m) < \gamma_n + \gamma_{n+1} < \gamma_n + \frac{\varepsilon_n - \gamma_n}{2} < \varepsilon_n.$$

部分 ii）是 [13]中的命题 2。最后一个断言成立，因为

$$\mathrm{d}(a_n, x) \leqslant \mathrm{d}(a_n, a_m) + \mathrm{d}(a_m, x) < \gamma_n + 2\gamma_{n+1} < \gamma_n + 2\varepsilon_{n+1} < \varepsilon.$$

✓

主要构造在重构原空间方面具有良好的性质。在[13], 中证明了，每个 fas 的逆极限都具有原空间的同伦型，因为它包含原空间的一个同胚副本，而该副本是此逆极限的强形变收缩。在 [14], 中，构造了与 fas 相关联的若干多面体序列，并将其称为多面体近似序列（PAS）；同时证明了这些序列能够恢复该空间的形状型，这一结论在 [1]中被猜想为一般原理。

3 有限型多值形状

本节将在紧致度量空间的多值形状理论框架下，分析主要构造的形状性质。这种关系的目的在于表明，主要构造能够捕捉其所在空间的形状性质，并且只需利用该空间的有限子集即可实现这一点。我们将证明一些关于这种关系的命题，特别是 [1] 中提出的两个结果，以及一个关于形状态射有限性的定理。

我们需要两个关于上半有限拓扑下超空间中的同伦的技术性引理。这里展示了这种拓扑的优势，因为这些同伦的构造方式非常自然。

引理 2. 令 X、Y 为度量紧空间，且 f、$g : X \to 2^Y_u$ 是两个连续映射。由 $(f \cup g)(x) = f(x) \cup g(x)$ 定义的映射 $f \cup g : X \to 2^Y_u$ 是连续的。

证明。对于每个 x ∈X，映射 f ∪g 是良定义的，因为 f (x) 和 g(x) 都是 Y 的闭子集，因此 f (x) ∪g(x) 也是闭子集。取 f (x) ∪g(x) 在 2^Y_u 中的一个邻域 B(V)，其中 B(V) ={C ∈ 2^Y_u: C ⊂ V }，V 是 Y 的一个包含 f (x) ∪g(x) 的开子集。映射 f 和 g 是连续的，因此存在 x 的两个邻域，即 U_1 和 U_2，，使得 f (U_1)，g(U_2) ⊂V。于是 U = $U_1 \cap U_2$ 是 x 的一个邻域，并且 (f ∪g)(U) = f (U) ∪g(U) ⊂f (U_1) ∪g(U_2) ⊂V，因此 f ∪g(U) ⊂B(V)，从而 f ∪g 在 x 处连续。✓

引理 3。 设 X、Y 为度量紧空间，且 f、g、$h : X \to 2^Y_u$ 为连续映射，使得对于每个 $x \in X$，f（x）、g（x）⊂h（x）。那么，f 和 g 是同伦的。

证明。 映射 $H : X \times I \longrightarrow 2^X_u$ 定义为

$$H(x,t) = \begin{cases} f(x) & \text{if } t \in [0, \frac{1}{2}), \\ h(x) & \text{if } t = \frac{1}{2}, \\ g(x) & \text{if } t \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

它是连续的，因而是这两个映射之间的同伦。事实上，对于每个 t ≠ $\frac{1}{2}$ 且每一点 (x, t)，H 都显然连续。对于每个点 (x, 1 2) ∈X × $\frac{1}{2}$，取 h(x) 的一个开邻域 B(V)。由于 h 的连续性，存在 x 的一个开邻域 U，使得 h(U) ⊂ B(V)。但 f (U)、g(U) ⊂h(U)，因此 U ×I 是 (x, 1 2) 的一个开邻域，并且 H(U ×I) ⊂B(V)，从而证明了 H 的连续性。✓

注 1。 由前面的两个引理可知，任意两个映射 $f, g : X \to 2^Y_u$ 都是同伦的。尽管这些平凡同伦似乎并无意义，但这里的关键在于，要在 2^Y_u 的某些子空间中构造它们。

我们可以证明以下结果，该结果发表于 [1]（作为命题 21），将主要构造与多值形状理论联系起来。

命题 1。 设 X 为紧致度量空间。考虑通过对 X 执行主要构造而得到的调整后的近似序列 $\{\varepsilon_n, A_n\}$。映射序列 $\{q^{A_n}\}$ 是一个表示 X 上恒等形态射的近似映射。

证明。 我们首先证明 $\{q^{A_n}\}$ 确实是一个近似映射。众所周知，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，映射 $q^{A_n} : X \to 2^Y_u$ 是连续的。族 $\{U_\varepsilon\}$ 是 X 在 2^X_u 中的典范副本的开邻域基（见 [3]），因此存在一个 $\varepsilon > 0$，使得 $X \subset U_\varepsilon \subset U$。存在一个整数 n_0，使得 $2\varepsilon_{n_0} < \varepsilon$。我们断言，对于每个 $n \geqslant n$<v48>，映射 $H : X \times I \to U \subset 2^X_u$，

定义为

$$H(x,t)=\begin{cases} q_{A_n}(x) & \text{if } t\in[0,\frac{1}{2}),\\ q_{A_n}(x)\cup q_{A_{n+1}}(x) & \text{if } t=\frac{1}{2},\\ q_{A_{n+1}}(x) & \text{if } t\in(\frac{1}{2},1], \end{cases}$$

是 q^{A_n} 与 $q^{A_{n+1}}$ 在 U 中的一个同伦。该映射是连续且良定义的，因为对于每个 $x\in X$,

$$\begin{aligned} q_{A_{n+1}}(x) &\subset \mathrm{B}(x,\varepsilon_{n+1})\subset \mathrm{B}(x,\varepsilon_n),\\ q_{A_n}(x) &\subset \mathrm{B}(x,\varepsilon_n), \end{aligned}$$

然后

$$\operatorname{diam}\left(q_{A_n}(x)\cup q_{A_{n+1}}(x)\right)<2\varepsilon_n<\varepsilon,$$

因此，映射的像包含于 $U_\varepsilon\subset U$ 中，并且根据引理 2 和引理 3，它是一个同伦。

显然，逼近映射恒等映射 $:X\to 2^X_u$，其中恒等映射$(x)=\{x\}$，对应于 X 的恒等形态射。为证明 $\{q^{A_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 与恒等映射同伦，我们只需选取 n_0使得 $2\varepsilon_{n_0}<\varepsilon$，并使用该同伦（引理 2 和引理 3）。$H\colon X\times I\to U\subset 2^X_u$，定义为

$$H(x,t)=\begin{cases} q_{A_n}(x) & \text{if } t\in[0,\frac{1}{2}),\\ q_{A_n}(x)\cup\{x\} & \text{if } t=\frac{1}{2},\\ \{x\} & \text{if } t\in(\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

✓

请注意，在前面的结果中，我们得到了一个具有有限像的等价逼近映射。我们可以将这一结论推广到任意一类逼近映射，从而用更简单的术语描述度量紧空间的形状理论。设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是紧致度量空间X 与 Y 之间的一个逼近映射。若对于每个 $n\in\mathbb{N}$ 以及每个 $x\in X$，像 $f_n(x)$ 都是有限集，则称其为有限型 。对于每个逼近映射的同伦类，我们总能找到一个有限型代表元。

定理 1。 设 X、Y 为紧致度量空间，且 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是从 X 到 Y 的近似映射。存在一个从 X 到 Y 的有限型近似映射 $\{\mathfrak{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ， 它与 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 同伦。

证明。考虑一个趋于零的正实数递减序列 $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 以及 Y 的有限 β_n-近似序列 B_n。对于每个 $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$，定义映射 $\mathfrak{f}_n=\mathrm{r}_{B_n}\cdot \mathrm{f}_n$，其中 $\mathrm{r}_{B_n}:2^Y_u\to 2^Y_u$ 是映射 $\mathrm{q}_{B_n}:\mathrm{Y}\to 2^Y_u$ 的延拓，因此是连续映射（见 [13]推论 1）。显然， $\mathfrak{f}$是连续的。现在，我们需要证明 $\{\mathfrak{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个近似映射，并且它与 $\{\mathrm{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 同伦。我们将证明这两个结论都是以下内容的结果：

以下断言：对于每个包含 Y 的典范副本的开集 U $\subset 2^Y_u$，存在 n_0，使得对于每个 n $\geqslant$, n_0, f_n ’$_U$ f_n。确实，设 U $\subset 2^Y_u$ 是这样的开集，并考虑每个 $n \in \mathbb{N}$ 对应的映射 f_n 的直径 D_n。由于 f_n 是一个近似映射，显然，序列 $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 趋于零。对于每个 $n \in \mathbb{N}$， f_n 的直径取决于 D_n。对于每个 $x \in X$，以及每一对点 $y_1, y_2 \in f_n(x)$，考虑 $z_1 \in B_n(y1, \beta_n)$、$z_2 \in B_n(y2, \beta_n)$。于是我们有

$$d(z_1, z_2) \leqslant d(z_1, y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, z_2) < 2\beta_n + D_n$$

因此，diam $(f_n) < \beta_n + D_n$。现在，设 $\varepsilon > 0$ 为一个实数，使得 $U_\varepsilon \subset U$，并选取 n_0，使得对于每个 $n \geqslant n_0$，都有 $2\beta_n + D_n < \varepsilon$。于是，由下式定义的映射 $H\colon X \times I \to U$

$$H(x,t) = \begin{cases} f_n(x) & \text{if } t \in [0, \frac{1}{2}), \\ f_n(x) \cup f_n(x) & \text{if } t = \frac{1}{2}, \\ f_n(x) & \text{if } t \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

由引理 2 和引理 3 可知是连续的，因此是在 U 中 f_n 与 f_n 之间的同伦。此外，由于 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个近似映射，存在 m_0，使得对于每个 n $\geqslant m_0$,，f_n 在 U 中与 f_{n+1} 同伦。最后，当 n > max n_0,m_0, 时，我们有

$$f_n \simeq_U f_n \simeq_U f_{n+1} \simeq_U f_{n+1},$$

这表明了为完成证明而声称的两个结论。 ✓

我们通过证明这一结果来结束本节，该结果也曾在 [1]（命题 20）中提出。它在主要构造与空间的形状之间建立了更深层次的联系，因为它考虑了有限空间之间的映射 $p_{n,n+1}$。

命题 2。 设 X 为一个紧致度量空间，并考虑通过 X 上的主要构造得到的序列。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，下图在同伦意义下是交换的。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad id \quad} & X \\ {\scriptstyle q^{A_{n+1}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_{A_n}} \\ U_{2\varepsilon_{n+1}}(A_{n+1}) & \xrightarrow[p_{n+1,n}]{} & U_{2\varepsilon_n}(A_n) \end{array} \quad 。$$

证明。 为证明 t 为了实现交换性，我们需要在映射 $p_{n,n+1} \cdot q^{A_{n+1}}$ 与 q^{A_n} 之间构造一个同伦。

这样的同伦由 $H : X \times I \to U_{2\varepsilon_n}(A_n)$ 给出，其中

$$H(x,t) = \begin{cases} q_{A_n}(x) & \text{if } t \in [0, \frac{1}{2}), \\ q_{A_n}(x) \cup p_{n,n+1} \cdot q_{A_{n+1}}(x) & \text{if } t = \frac{1}{2}, \\ p_{n,n+1} \cdot q_{A_{n+1}}(x) & \text{if } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

这是一个同伦，因为根据引理 1，我们有

$$\operatorname{diam}\left(q_{A_n}(x) \cup p_{n,n+1} \cdot q_{A_{n+1}}(x)\right) < 2\varepsilon_n,$$

因此它是良定义的，并且根据引理2 和引理 3 ，我们得出它是连续映射之间的一个同伦，证明完毕。 ✓

致谢 作者感谢他的论文导师 M.A. Morón 在本文主题方面给予的指导。

经费支持 本研究部分由研究项目 PGC2018-098321-B- I00（MICINN）资助。作者还获得了项目 MTM2009-07030（MICINN）的 FPI 奖学金 BES-2010-033740。

参考文献

[1] M. Alonso-Morón、E. Cuchillo-Ibañez 和 A. Luzón， ε超空间中的-连通性、有限逼近、形状理论与粗粒化，《物理学D》，237（2008），第3109–3122页。[2] M. Alonso-Morón 和 A. G. Gómez，上半有限超空间作为正规豪斯多夫拓扑中的统一工具，《应用拓扑学》，154（2007），第2142–2153页。[3] M. Alonso-Morón 和 A. González Gómez，紧致集上半有限超空间的同伦性质，《应用拓扑学》，155（2008），第972–981页。[4] K. Borsuk，关于紧致集的同伦性质，《基础数学》，62（1968年），第223–254页。[5] ，形状理论，《讲义系列》第28卷，Matematisk Institute，Aarhus 大学，Aarhus，1971年。[6] ，形状理论，《Monografie Matematyczne》第59卷，Polish Scientific Publishers，华沙，1975年。

[7] J. Dydak 和 J. Segal，形状理论：导论，《数学讲义》第688卷，施普林格出版社，柏林，1978年。[8] R. H. Fox，论形状，《基础数学》，74（1972），第47–71页。[9] S. Mardešić，形状理论三十年，《数学通讯》，2（1997），第1–12页。[10] ，绝对邻域收缩核与形状理论，载于《拓扑学史》，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1999年，第241–269页。[11] S. Mardešić 和 J. Segal，紧致集的形状与*ANR*系统，《基础数学》，72（1971），第41–59页。[12] ，形状理论：逆系统方法，《北荷兰数学图书馆》第26卷，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹-纽约，1982年。[13] D. Mondéjar Ruiz 和 M. A. Morón，通过有限逼近与逆持久性重构紧致集，《康普顿斯数学评论》，（2020）。[14] D. Mondéjar，与有限逼近相关的紧致集的多面体扩张，《西班牙皇家精确、物理和自然科学研究院A辑：数学》，116（2022）。[15] J. M. R. Sanjurjo，形状的内在描述，《美国数学会会刊》，329（1992），第625–636页。

Diego Mondéjar 定量方法系，CUNEF大学，28040 马德里，西班牙
diego.mondejar@cunef.edu