arXiv:2301.13780v1 [math.CT] 31 Jan 2023

交换凝聚

David JazMyers Mitchell Riley

2023年2月1日

摘要

Shulman 的空间类型论将 Lawvere 公理化凝聚中的模态内化于同伦类型论中，使得 Schreiber 微分上同调模态方法中的许多构造得以通过综合方式实现。在空间类型论中，每个类型的点之间都带有空间凝聚，并且每个函数相对于这种凝聚都是连续的。然而在数学实践中，对象可能同时具有多种空间结构；单纯空间既有拓扑结构，也有单纯结构。此外，Schreiber 的微分上同调以及 Schreiber 和 Sati 对适当等变轨形上同调的论述中的许多构造，都需要多种空间性的相互作用——微分、等变和单纯空间性。

本文提出一种带有“可交换焦点”的类型论，使类型能够承载多种空间结构。这一理论是对空间类型论相对轻量的扩展，使我们能够综合地描述同一类型所承载的单纯、微分、等变及其他凝聚。我们通过证明，任意微分层的同伦类型都可以从任意良覆盖的切赫神经所导出的离散单纯集合中计算出来，来展示这一理论。我们还给出多种凝聚的其他示例，例如微分等变类型和超几何类型，为综合描述 Schreiber 和 Sati 的适当轨形上同调奠定基础。

目录

1 引言 **2**

2 一种带有交换焦点的类型论 **6**

3 特化一个焦点 **11**
3.1 检测连续性.12 3.2 检测连通性.14

4 焦点示例 **14**
4.1 实凝聚.15 4.2 单纯形凝聚.15 ˇ4.2.1 Čech 复形.19 4.3 全局等变凝聚.23 4.4 拓扑托普斯.24

5 多个焦点 **25**
5.1 交换凝聚.26

6 多个焦点的示例 29
6.1 单纯实凝聚.29 6.2 等变微分凝聚.31 6.3 超几何凝聚.32

1 引入

同伦类型论是一种新颖的数学基础，其核心是数学对象的识别概念。在同伦类型论中，每个数学对象都属于某种数学对象类型；而如果x 和y 都是类型X的对象，那么根据类型X 的定义，我们就知道将x 与y 识别为类型X的元素意味着什么。例如，如果x 和y 是实向量空间（因此X 就是实向量空间的类型），那么要将x 与y 识别起来，就需要给出它们之间一个 $\mathbb{R}$-线性同构。如果x和y 是光滑流形，那么要识别它们，就需要给出它们之间的一个微分同胚。如果x 和y 只是数字，那么要识别它们，只需证明它们相等即可。其他任何类型的数学对象也都是如此。

抽象而言，同伦论研究的是数学对象的识别。同伦类型论非常适合合成同伦论（例如 [12, 24, 13, 18] 以及许多其他领域），但若要将这些定理应用于代数拓扑——在代数拓扑中，借助从一个对象到另一个对象的连续变形来识别对象——就需要对该理论作出修改。为强调这一差异，不妨比较高阶归纳圆 S^1, 与拓扑圆 $\mathbb{S}^1$：前者是由一个点及其自识别自由生成的类型，后者则定义为实平面上与原点距离为单位长度的点的集合：

$$\mathbb{S}^1 \equiv \{(x,y) : \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

高阶归纳圆 S^1 的基点有许多非平凡的自识别；而拓扑圆上的两个点只有在相等时才可以（以唯一方式）相互识别。不过，这两种类型密切相关：高阶归纳圆 S^1 是拓扑圆 $\mathbb{S}^1$ 的同伦类型，它是通过连续变形来识别后者上的点而得到的。普通的同伦类型论没有表达这种关系的语言，因此无法将关于高阶归纳圆的合成定理应用于有关拓扑圆的拓扑问题。

所需要的是一种区分以下两类类型的方法：一类携带拓扑结构，另一类则是仅具有同伦结构的离散类型。在其著作康托尔的*“Lauter Einsen”*与凝聚拓扑斯 [27], 中，Lawvere 指出，这种原生凝聚集合与离散集合之间的区分，早已存在于康托尔的著作中，表现为数学实践中的*Menge* 与抽象的*Kardinalzahlen* 之间的区分；后者是通过抽象掉空间各点之间的关系而产生的。在该论文及其后续著作公理化凝聚[28], 中，Lawvere 将凝聚与离散之间的对立形式化为拓扑斯之间的一个伴随三元组：

$$\begin{tikzcd} \text{Mengen} \arrow[d, "points"] \\ \text{Kardinalen} \arrow[u, bend left=60, "discrete"] \arrow[u, bend right=60, "codiscrete"'] \end{tikzcd}$$

这个伴随三元组在空间拓扑斯或*Mengen*上诱导出一个幂等（余）单子的伴随对：左伴随 $\flat$通过赋予空间离散拓扑来重新赋予其拓扑结构，而右伴随 $\sharp$则通过赋予余离散拓扑来重新赋予其拓扑结构。Lawvere 指出，在许多情况下——当所讨论的空间是“局部连通”的时候——左侧还会存在第四个伴随 π_0，它生成一个空间的连通分支所构成的离散集合；这一伴随函子系统刻画了他的公理化凝聚。

但 Lawvere 的公理化凝聚的真正威力，是通过 Schreiber 的这一转变才得以释放：从对象为黏合集合的 1-拓扑斯，转向对象为凝聚同伦类型的 ∞-拓扑斯。在他的《凝聚微分上同调 ∞-托普斯》（DCCT） [44], 中，Schreiber 展示了 Lawvere 的公理体系在 ∞-拓扑斯中的诠释如何导出刻画微分上同调的六边形裂解图——此外，他还对凝聚的定义伴随函子在高阶拓扑和物理学中的核心地位作出了许多论述。原本将空间映射到其连通分支的函子 π_0，在 ∞-范畴的设定中变成了函子

Π_∞ 它将层的形状（Lurie [31, §7.1.6] 中的意义）映射出来。总而言之，一个凝聚的 ∞-逻各斯具有三个伴随自函子

$$\int \dashv \flat \dashv \sharp$$

其中，$\int$ 取更高阶空间作为离散空间时的形状或同伦类型，$\flat$取其底层离散点的同伦类型，而 $\sharp$取点的底层同伦类型，但将其重新赋予余离散拓扑。

在实凝聚同伦类型论中的 *Brouwer* 不动点定理 [47]（以下简称*Real Cohesion*）中，Shulman 通过其空间类型论，将凝聚*Mengen* 与离散*Karndinalen* 之间的这种区别引入同伦类型论。空间类型论将 Schreiber 的 DCCT 中的 $\flat$和 $\sharp$模态内化；这些模态关联离散（但在同伦意义上颇有意义）的类型（如S^1）与空间类型（如 $\mathbb{S}^1$）。空间类型论还改进了 Schreiber 和 Shulman [45], 此前在 HoTT 中对这些模态所作的公理化，用判断规则取代了公理。凝聚同伦类型论是在空间类型论的基础上增加一条公理；该公理蕴含相关空间类别的局部可缩性。由此公理还可以定义进一步的左伴随$\int$到 $\flat$。

同伦类型论可以解释到任意 ∞-托普斯 [26, 46], 中，使得同伦类型论中的一个类型在外部成为一个同伦类型层。特别地，如果我们将拓扑圆 $\mathbb{S}^1$（定义为 $\mathbb{R}^2$ 的一个子集）解释到连续流形的位点上的层 ∞-托普斯中，它就会成为由外部连续流形 $\mathbb{S}^1$表示的层（集合层）；而高阶归纳圆 S^1 则会被解释为取圆的同伦类型为值的常值层。于是，根据米田引理，任何可在 $\mathbb{S}^1$ 上定义的函数都必然是连续的。由于 HoTT 中的函数 $f\colon X \to Y$只需通过指定上下文中自由变量 $x : X$下的元素 $f(x) : Y$来定义，因此自由变量的变化赋予了一种临界状态般的连续性：这样的表达式可以在空间 ∞-托普斯中解释，在这种情况下，它必然定义一个连续函数。

Shulman 的空间类型论通过引入清晰自由变量 的概念，来绕开这种处于临界状态的连续性。空间类型论中的表达式对其清晰自由变量不连续地依赖。空间类型论的模态$\flat$ 和 $\sharp$ 分别在左侧和右侧普遍地表示清晰变量。这样，$\flat X$就是空间类型X的离散再拓扑化，而 $\sharp X$ 是其余离散再拓扑化——从 $\flat X$出发的映射是从X出发的不连续映射，而映入 $\sharp X$的映射则是映入X的不连续映射。

空间类型论旨在解释到 ∞-托普斯之间的局部 几何态射 $\gamma\colon \mathscr{E} \to \mathscr{S}$ 中；这类态射满足 γ_* 有一个全忠实右伴随 $\gamma^!$，它给出一个几何态射$f\colon \mathscr{S} \to \mathscr{E}$（其中$f_* := \gamma^!$），该态射与 γ 伴随；γ将 $\mathscr{E}$ 视为空间（位于 $\mathscr{S}$之上）的焦点。伴随模态 $\flat$ 和 $\sharp$ 分别解释为伴随幂等（余）单子对 $\gamma^*\gamma_*$ 和 $\gamma^!\gamma_*$。因此，清晰自由变量是在焦点 $\mathscr{S}$的某个对象上变化的变量：自由变量处于焦点时，就是清晰的。

数学对象具有空间性的方式并非只有一种。空间可以与光滑、解析、代数、凝聚以及单纯或立方组合结构相协调——还有更多可能。每一种情形都会作为某个适当局部 ∞-托普斯的内语言，产生一种特定的空间类型论。然而，在实践中有许多情形，我们需要的并非单一的空间性轴，而是同时需要多个轴。例如，一个经典定理指出，流形的同伦类型可以通过实现与该流形的某个良好开覆盖的切赫神经相联系的一个（拓扑上˘离散的）单纯集合来计算。这个定理通过一个中介单纯空间，将单纯集合与连续空间联系起来；该单纯空间同时具有连续性和单纯性˘——它就是该覆盖的切赫神经。但在空间同伦类型论中，只有一种清晰变量的概念，因此也只有一种空间性。

对于单纯类型，离散反射是 0-骨架 sk_0, ，而余离散反射是 0-余骨架。对于单纯空间，我们既有（拓扑）离散的 $\flat$和余离散的 $\sharp$，也有单纯意义上 0-骨架的 sk_0 和 0-余骨架的 csk_0。有趣的是，切赫神经本身也由这些模态产生：稍后我们将在命题 4.2.13 中看到，两个 0-骨架类型（即没有单纯结构的连续层或微分层）之间的映射 $f\colon X \to Y$ 的切赫神经就是它的 csk_0-像。单纯空间既有形状 $\int X$，也有实现（或余极限）$\mathrm{re}\, X$；前者是拓扑离散的单纯类型，后者则是 0-骨架的空间类型。借助所有这些模态，我们可以证明前文所述关于良覆盖的定理，即定理 6.1.5。

空间性的多个轴的另一种应用是 Sati 和 Schreiber 的适当轨形上同调 [43], , 其中轨形被理解为同时具有微分结构（作为微分层叠）和整体等变结构（涉及其奇点）。为了在不依赖基于轨形整体商表示的临时构造的情况下，获得轨形正确的广义上同调，Sati 和 Schreiber 使用整体等变微分栈的 ∞-托普斯；它在整体等变托普斯和微分栈托普斯上都是局部的。这里，微分模态 ∫、♭ 和 ♯ 由等变凝聚的模态 [41]: 、和 加以扩充；这些模态分别取严格商、作为不变类型的底层空间，以及整体等变类型底层空间的 Yoneda嵌入。模态再次在该理论中发挥核心作用：整体商轨形 $X /\!\!/ G$ 的普通博雷尔上同调，是 $\int(X /\!\!/ G)$ 的普通上同调；而 $X /\!\!/ G$ 的适当等变布雷顿上同调，则是 $(X /\!\!/ G)$ 的上同调，并由到 $\mathbf{B}G$ 的映射扭曲；该映射将商映射 $X \to (X /\!\!/ G)$ 分类。

在这些情形中，伴随链中处于相同位置的模态彼此可交换，因此例如，♭与 sk_0 可交换，而 ♯ 与 csk_0可交换。不过，也存在这些模态相互嵌套的情形，其中一种空间性是另一种空间性的细化。例如，Schreiber 在 [44] 中提出的超几何便是如此，其中包含实凝聚的模态。超几何焦点由偶余模态 ⇉ （它取超空间的偶部分）以及流变模态 Rh 给出；后者通过在奇直线 $\mathbb{R}^{0|1}$处局部化而定义。

本文提出对空间类型论作出修改，以支持多个空间性轴。我们的理论通过允许一个由焦点 ♥、♣……组成的交半格来实现，每个焦点都有独立的♥-清晰变量以及一对伴随（余）模态 $\flat_{\heartsuit}$ 和 $\sharp_{\heartsuit}$。与空间类型论一样，我们的定制类型论能让我们高效地直达合成同伦论的核心，同时保持足够简洁，以便以非正式的风格使用。

多种清晰性的存在，使得上下文结构比空间类型论将上下文划分为清晰区和凝聚区的做法更加复杂。与许多其他模态类型论类似 [30, 22,21, 9, 38], , 我们会为每个变量标注模态信息；在这里，标注的是该变量在哪些焦点下是清晰的。每个焦点的模态类型规则基本上彼此独立。例外是 ♭-消去：我们对其进行了扩展，使得在归纳所绑定的变量中，能够保留被消去项的清晰性（即一种“清晰的”归纳原理）。

我们的工作并非唯一一种将多种模态扩展到类型论中的方案，但正如我们稍后将更详细地讨论的那样，现有理论都不具备我们所需的特性组合：依赖类型（排除 [30]），且依赖关系可以涉及模态变量（排除 [9]）；多种彼此交换的余模态（排除 [47, 11, 38]），每种余模态都带有一个右伴随模态（排除 [33]），并且没有更多的左伴随（排除 [22, 21]和 [16,§14]）。

ˇ 除了能够将关于开覆盖的切赫神经的定理形式化为定理 6.1.5 外，我们的类型论还能够处理 Sati 和 Schreiber 在其适当轨形上同调 [43], 中使用的等变微分凝聚，以及 Schreiber 的超几何实体 凝聚中的嵌套焦点 [44]。这拓展了 Cherubini [17] 和第一作者 [34, 35, 36] 的工作，他们为 Schreiber [44] 以及 Sati-Schreiber [43]的构造提供了综合性论述。

提出一个额外的焦点，不会影响使用现有焦点所作的论证，因此我们也期望，在其他推理过程中涉猎单纯形论证时，添加一个单纯形焦点并利用新的模态会对我们的理论有所帮助。如何在普通的 Book HoTT 中定义单纯类型仍是一个开放问题；目前已有多种构造单纯类型的方法，各自都对底层类型论作了某种扩展。本文将公理化 1-单形 $\Delta[1]$，将其视为具有不同顶点和底点的线性序 ˇ，并利用凝聚模态定义映射的切赫神经，以及单纯类型的实现或余极限。我们认为，为了合成式 $(\infty, 1)$-范畴论等目的，我们的方法与其他单纯类型方法相得益彰，例如 [42, 14, 49, 48], , 其中 sk_0 模态将取 Rezk 类型的核心。[1]

[1]尽管我们尚未详细考察这些焦点如何与 Riehl-Shulman 单纯形类型论协同工作，尤其是它们会如何与 Riehl-Shulman 上下文中的立方体/托普区域相互作用。

本文纲要。在 §2 介绍我们的类型论之后，我们将在 §3 探讨如何专门化焦点的空间性。特别是，我们会发现，在许多情况下，存在一小类测试空间G_i，使得余离散性（即成为 ♯-模态）可通过相对于 ♭-余单位 $\flat G_i \to G_i$ 的唯一提升来判定；这样的 G_i 称为检测连续性。从外部来看，G_i 可以是任何在余极限下生成逻各斯的族。实践中，G_i 将是以最小方式具备相应空间性的测试空间：在单纯形情形中，是单形 $\Delta[n]$；在实凝聚情形中，是欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$；对于凝聚集合，则是有限拟群，等等。

在 §3 中，我们还会遇到一族适用于局部可缩空间几何的公理。例如，由欧几里得空间通过余极限构造而成的连续流形是局部可缩的，而由有限拟群通过余极限构造而成的凝聚集合则未必局部可缩。一般而言，当一个空间具有 Lurie [31, §7.1.6] 意义下的常值形状 时，它就是局部可缩的。

我们可以将空间C 定义为可缩的，若任意从$C \to S$ 到离散空间S 的映射都是常值映射。如果反过来也成立——若每个映射$C \to S$ 都是常值映射，则空间S 是离散的（♭-模态）——那么我们就称C 能检测空间的连通性。例如，$\mathbb{R}$ 能检测连续 ∞-群胚的连通性，而 $\Delta[1]$能检测单纯 ∞-群胚的连通性。如果存在能够检测连通性的空间（或空间族），那么与该态射相对应的局部几何态射p 还具有强局部可缩性，因为p^* 有一个左伴随$p_!$，它取空间的形状（常值）。当p 既是局部的又是强局部可缩的时，依照 Lawvere [28], 、Schreiber [44], 和 Shulman [47]，我们称p 是凝聚的。对能够检测连通性的空间族进行零化，得到一个模态 $\int$，它是 ♭的左伴随；可以将其理解为取空间的同伦类型。

在 §4 中，我们将给出用于特化单个焦点的公理示例。我们将回顾 Shulman 关于实凝聚的公理，其中欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 可检测连续性和连通性。随后，我们将较为详细地考察单纯形凝聚，其中单形 $\Delta[n]$ 可检测连续性和连通性。我们通过将 1-单形 $\Delta[1]$ 公理化为具有不同顶元和最小元的全序，为类型赋予单纯结构；这一做法遵循 Joyal 将单纯集合刻画为此类序的分类拓扑斯的观点 [50]。我们使用 csk_0 模态 $\check{}$ 来构造映射的切赫神经。接着，我们将介绍 Rezk[41] 最先观察到、并由 Sati 和 Schreiber 在 [43] 中使用的全局等变凝聚。最后，我们将简要介绍一些拓扑焦点的公理，例如 Johnstone 关于序列空间的拓扑托普斯 [25]，以及 Clausen-Scholze[19] 和 Barwick-Haine [10] 的凝聚/纽结拓扑斯。

在考察了类型可能具有的若干不同种类的空间性之后，我们在第5节将注意力转向多个焦点。在定义 5.1.3 中，我们定义了两个凝聚何时称为正交：当检测其中一个的连通性的族相对于另一个是离散的，反之亦然。随后，我们证明了若干关于正交凝聚的引理，尤其探讨了何时可以让各种模态彼此交换。

最后，我们在第6节给出多个焦点的例子。我们从单纯实凝聚开始，它同时具有单纯形焦点和实凝聚焦点，且二者正交。我们在定理 6.1.5 中证明，任意 0-骨架类型M 的形状，都可以计算为一个拓扑离散单纯类型的实现；该类型由M 的任意良好覆盖U 的切赫神经构造而成——这种覆盖要求U_i 的有限交在 $\int$-连通的意义下是可缩的。

接下来，我们将等变凝聚与微分凝聚结合起来，给出 Sati 和 Schreiber 在适当轨形上同调 [43]中使用的模态序列。值得庆幸的是，无需额外公理即可证明这两种凝聚彼此正交；我们将在引理 6.2.1 中证明这一点。

最后，我们描述 Schreiber 的凝聚托普斯中的微分上同调 ∞-托普斯中的超几何或“固体”凝聚。它通过奇直线 $\mathbb{R}^{0|1}$扩展了实凝聚：超几何焦点的“离散”余模态取超几何空间的偶部分，而“余离散”模态则取该空间的流形反射，使其超结构由其偶结构唯一确定。与我们其他示例中涉及的焦点彼此正交不同，在这里，微分焦点包含在超几何焦点之中：任何离散空间也都是纯偶的，余离散空间亦然。

致谢。我们谨向 Urs Schreiber 致谢，感谢他在

论文撰写过程中仔细审阅稿件并提出大量意见。我们也要感谢 Hisham Sati 提供反馈并给予鼓励。作者感谢 Tamkeen 在纽约大学阿布扎比分校研究院 CG008 项目资助下提供的支持。

2 具有可交换焦点的类型理论

高阶 topos 理论中的基本对偶存在于 ∞-拓扑斯——一种一般意义上的空间——与 ∞-逻各斯之间；后者是此类空间上的同伦类型层的层范畴 [7]。这种对偶是完美的：∞-拓扑斯之间的映射$\mathscr{E} \to \mathscr{F}$，定义为它们对应的 ∞-逻各斯之间方向相反的 lex 可达函子 $\mathrm{Sh}_\infty(\mathscr{F}) \to \mathrm{Sh}_\infty(\mathscr{E})$。

拓扑斯与逻各斯之间的这种对偶，为区分小拓扑斯与大拓扑斯提供了一个很好的视角。前者在实践中用作广义空间，后者——或者更确切地说，它们的对偶逻各斯——则用作空间的范畴，而非其自身意义上的空间。与名称所暗示的恰恰相反，小拓扑斯是“大”空间，而大拓扑斯是“小”空间；真正适合用“小”和“大”这两个形容词描述的，是它们的对偶逻各斯。由于逻各斯是拓扑斯上的层范畴，或者等价地说，是映入该拓扑斯的 ´étale 映射的范畴，因此拓扑斯越“大”，´étale 条件的约束就越强。正因如此，大拓扑斯的层范畴在性质上更“小”。另一方面，´étale 空间越一般，底拓扑斯就必须越“小”。一般而言，“最大”的逻各斯——空间的逻各斯的——必须对应于“最小”的拓扑斯：也就是焦点周围的无穷小邻域。DCCT [44] 第4章着重强调了这一观点。

因此，作为初步处理，我们可以将空间的逻各斯视为与这样的拓扑斯对偶：$\mathscr{E}$它们在一个焦点 $\mathscr{F}$上是局部的。若几何态射 $p : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ 在我们称为 p 的焦点的拓扑斯（∞,2）范畴中承认一个左伴随右逆 $f : \mathscr{F} \to \mathscr{E}$，则称其为局部的。若 $\mathscr{E}$ 是一个拓扑空间（也就是说，若其对应的逻各斯 $\mathrm{Sh}_\infty(\mathscr{E})$ 是凝聚拓扑空间 X上的层范畴 $\mathrm{Sh}_\infty(X)$），那么终几何态射 $\gamma: \mathscr{E} \to \mathscr{S}$是局部的，当且仅当$X$具有一个焦点：点$f \in X$的唯一开邻域是整个 X。特别地，环 A 的素谱是局部的，当且仅当A 是一个局部环；在这种情况下，该焦点就是唯一的极大理想。

在逻各斯方面，这意味着直接像 p_* 承认一个全忠实右伴随 $p^!$（即f_*）。总而言之，这在相应的逻各斯之间给出了一个伴随三元组：

$$\begin{array}{c} \mathrm{Sh}_\infty(\mathscr{E}) \\ p^* \circlearrowleft \quad \downarrow p_* \quad \circlearrowright p^! \\ \mathrm{Sh}_\infty(\mathscr{F}) \end{array}$$

将 $\mathrm{Sh}_\infty(\mathscr{E})$ 的对象视为广义空间，将 $\mathrm{Sh}_\infty(\mathscr{F})$ 的对象视为纯粹的同伦类型（点上的层），那么我们可以把直接像 p_* 看作取出空间中各点的底层同伦类型，而 p^* 和 $p^!$ 则分别是纯粹同伦类型的离散拓扑化和余离散拓扑化。这个伴随三元组导出一个伴随对

$$p^* p_* \dashv p^! p_*$$

逻各斯 $\mathrm{Sh}_\infty(\mathscr{E})$ 上的幂等余单子 $p^* p_*$ 和幂等单子 $p^! p_*$。将它们理解为空间上的运算时，它们分别是空间的离散再拓扑化和余离散再拓扑化。

具有焦点 $\mathscr{F}$、层范畴 $\mathrm{Sh}_\infty(\mathscr{F}) = \infty\mathbf{Grpd}$ 的局部拓扑斯示例包括 ∞-群胚的 ∞-范畴 ETA：单纯类型 $\infty\mathbf{Grpd}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$（其中离散是 0-骨架的，余离散是 0-余骨架的）、连续和可微 ∞-群胚[2] $\mathrm{Sh}_\infty(\{\mathbb{R}^n\})$（其中离散表示所有图都是常值的，余离散表示任何取值于点集的函数都是一张图）、凝聚 ∞-群胚（其中离散表示离散，余离散表示余离散），以及全局等变 ∞-群胚 $\infty\mathbf{Grpd}^{\mathbf{Glo}^{\mathrm{op}}}$（其中离散表示

[2]它们分别是 $\mathscr{C}^0$ 流形和 $\mathscr{C}^\infty$ 流形的大托扑。

是全局轨道范畴上的常值预层，而余离散表示是由普通 ∞-群胚表示的预层）。

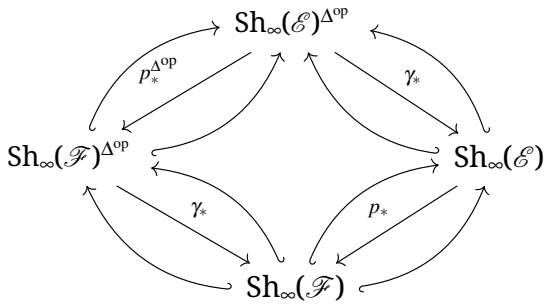
Shulman [46] 已证明，每个 ∞-逻各斯都可以由一个同伦类型论模型来呈现，从而可以将同伦类型论中的推理诠释到任意 ∞-逻各斯中。从这个意义上说，同伦类型论之于 ∞-逻各斯，正如集合论之于 Grothendieck、Lawvere 和 Tierney 的 1-逻各斯。在实凝聚同伦类型论中的 *Brouwer* 不动点定理 [47], 一文中，Shulman 还提出了一种空间类型论，它或许（推测而言）可以诠释到任意局部几何态射中。空间类型论的特点是包含一个伴随对 $\flat \dashv \sharp$，其中一方是左正合余模态 $\flat$，另一方是 lex 模态 $\sharp$。它们分别诠释为$p^* p_*$和$p^! p_*$。

在空间类型论中，任意类型都具有空间结构。这种空间结构的存在，可由两种相反的方式来体现：我们可以使用“离散” $\flat$余模态，去除点与点之间所有的空间关系；也可以使用“余离散” $\sharp$模态，将空间关系平凡化。我们强调，这种空间结构不同于所有类型凭借其元素之间的识别而具有的同伦 结构。例如，拓扑圆

$$\mathbb{S}^1 := \{(x,y) : \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

作为欧几里得平面的子集（例如，作为连续流形的位点上的一个层），它具有空间结构；但它是一个 homotopy0-type（或“集合”），其点之间没有任何非平凡识别；特别是$\Omega\mathbb{S}^1 = *$。然而，圆的同伦类型 S^1 在空间上是离散的，但其点存在许多非平凡识别：特别是 $\Omega S^1 = \mathbb{Z}$。

然而，数学中的空间性并非只有一种方式。例如，单纯拓扑空间同时具有单纯结构和拓扑结构。这一点在托普斯层面也可以体现。若$p\colon \mathscr{E} \to \mathscr{F}$具有一个焦点$f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{E}$，那么$f^{\Delta^{\mathrm{op}}} \colon \mathscr{F}^{\Delta^{\mathrm{op}}} \to \mathscr{E}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$也是$p^{\Delta^{\mathrm{op}}} \colon \mathscr{E}^{\Delta^{\mathrm{op}}} \to \mathscr{F}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$的一个焦点，其中逻各斯 $\mathrm{Sh}_\infty(\mathscr{E}^{\Delta^{\mathrm{op}}}) := (\mathrm{Sh}_\infty(\mathscr{E}))^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ 是逻各斯 $\mathrm{Sh}_\infty(\mathscr{E})$中的单纯对象范畴。但还有另一个局部几何态射 $\gamma\colon \mathscr{E}^{\Delta^{\mathrm{op}}} \to \mathscr{E}$，其中 γ_* 将一个单纯层$X_\bullet$映至X_0，而 $\gamma^!$ 由 0-余骨架 $\mathrm{csk}_0 S_n := S^n$给出。$\mathrm{Sh}_\infty(\mathscr{E})^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ 中对象的这两种不同空间性轴彼此交换，即下面的伴随函子图表交换：



特别地，我们有$p^{*\Delta^{\mathrm{op}}} p_*^{\Delta^{\mathrm{op}}}$和 $\gamma^* \gamma_*$ 作为 $\mathrm{Sh}_\infty(\mathscr{E})^{\Delta^{\mathrm{op}}}$的自函子彼此交换。前者以离散方式重新赋予单纯空间拓扑，而后者将 0-单形的空间包含为一个 0-骨架单纯空间。每个焦点都给出一条轴，top logos $\mathrm{Sh}_\infty(\mathscr{E})^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ 中的对象可以沿该轴承载空间结构。

例如，在单纯微分空间中工作时，我们希望同时获得实凝聚的 $\int \dashv \flat \dashv \sharp$ 以及单纯形凝聚的 re $\dashv \mathrm{sk}_0 \dashv \mathrm{csk}_0$。Shulman 的空间类型论无法做到这一点：$\flat$和 sk_0 余单子对“清晰”变量的概念提出了彼此不兼容的要求。

解决方案是，为我们感兴趣的每个焦点分别引入清晰性的概念。在本节中，我们将介绍带可交换焦点的类型论的规则，将单个非平凡焦点的情形下的普通空间类型论推广到这种情形。随后，我们将介绍一些公理，使这些结构成为可交换的凝聚，其含义与凝聚类型论中的相同。

为此，我们将固定一个交换幂等幺半群 焦点；我们将焦点 ♥ 与焦点 ♣ 的乘积记为 ♥♣。这个乘积通过规定 ♣ $\leq$♥ 当且仅当

♣♥ =♣。关于这个序，乘积就是交；因此，我们也可以将 焦点 视为一个交半格。我们将 焦点 的单位元记为 $\top$，并注意到它是相对于该序的顶焦点。

在本文的大多数讨论中，我们的焦点交换幂等幺半群 Focus 将由有限个基本焦点自由生成。具体来说，我们可以令 $\text{Focus} = \mathcal{P}_f(\text{BasicFocuses})^{\text{op}}$ 为基本焦点集合的有限子集所成的集合，以并集为乘积，因此它与子集按包含关系排序所成偏序的对偶相同。

上下文中的所有变量都将标注其所属的焦点：

$$x :_{\heartsuit} X \vdash t : T$$

通常，我们将上下文条目 $x :_{\top} X$ 简写为 $x : X$。若 $\text{Focus} = \{\heartsuit \leq \top\}$ 由一个基本焦点自由生成，那么我们就得到 Shulman 空间类型论中使用的分裂上下文；在这种情况下，我们的上下文$x :_{\heartsuit} X, y :_{\top} Y\,\text{ctx}$ 对应于 Shulman 的上下文 $x :: X \mid y : Y\,\text{ctx}$。

为了描述类型规则，我们需要对上下文进行几种辅助运算。第一个运算 ♥Γ会在上下文中每个变量的标注上添加一个特定焦点♥ 。因此：

$$\heartsuit(\cdot) :\equiv \cdot$$
$$\heartsuit(\Gamma, x :_{\clubsuit} A) :\equiv (\heartsuit\Gamma), x :_{\heartsuit\clubsuit} A$$

我们还需要一个操作 $\heartsuit \setminus \Gamma$，它会删除 不 包含在给定焦点 ♥中的所有变量；这相当于在普通空间类型论中从 $\Delta \mid \Gamma\,\text{ctx}$ 变为 $\Delta \mid \cdot\,\text{ctx}$。

$$\heartsuit \setminus (\cdot) :\equiv \cdot$$
$$\heartsuit \setminus (\Gamma, x :_{\clubsuit} A) :\equiv \begin{cases} (\heartsuit \setminus \Gamma), x :_{\clubsuit} A & \text{if } \clubsuit \leq \heartsuit \\ \heartsuit \setminus \Gamma & \text{otherwise} \end{cases}$$

如果变量 $x :_{\clubsuit} X$ 满足 ♣ ≤♥，我们就称它为 ♥-清晰变量；因此，能够在 $\heartsuit \setminus \Gamma$操作后保留下来的，恰好就是 $t : T$若它和它的类型 ♥- 清晰。若它本身及其类型 T 只包含 ♥- 清晰变量，也就是说，它在上下文 ♥$\setminus \Gamma$ 中良构。

现在我们可以介绍类型论的规则了。所有常见的类型构造子—— Σs、 Πs 等——都会照常包含在内，只是它们仅涉及顶焦点 $\top$ 的变量。按照约定，$x :_{\top} X$ 写作 $x : X$，这些规则看起来就与通常的规则完全相同。因此，我们将重点放在带交换焦点的类型论的新特性上。

结构规则。

$$\text{CTX-EMPTY}\ \frac{}{\cdot\,\text{ctx}} \qquad \text{CTX-EXT}\ \frac{\heartsuit \setminus \Gamma \vdash A\ \text{type}}{\Gamma, x :_{\heartsuit} A\,\text{ctx}} \qquad \text{VAR}\ \frac{\Gamma, x :_{\heartsuit} A, \Gamma'\,\text{ctx}}{\Gamma, x :_{\heartsuit} A, \Gamma' \vdash x : A}$$

用文字表述，这些规则如下：

- CTX-EMPTY：空上下文是一个上下文。
- CTX-EXT：如果 A 是在上下文 Γ 中的 ♥-清晰类型，那么 $\Gamma, x :_{\heartsuit} A\,\text{ctx}$ 是一个上下文。
- VAR：如果 $x :_{\heartsuit} A$ 出现在某个上下文中，那么变量 x 在该上下文中的类型为 A 。

注记 2.0.1。 给定上下文 Γ，$x :_{\heartsuit} A\,\text{ctx}$，必须满足：$A$ 只依赖于 Γ 中本身是 ♥清晰的变量。这一谨慎的上下文形成规则取代了 Shulman 的空间类型论中将上下文划分为两个区域的做法。在变量规则的结论中，类型 A 在上下文$\Gamma, x :_{\heartsuit} A\ \Gamma'\,\text{ctx}$ 中是良定义的，这由下方给出的可容许 DIVIDE-WK 规则以及随后使用 Γ' 进行的进一步弱化得到。

注记 2.0.2。 与其标注变量，不如考虑为每个焦点设置一个浮动上下文分隔符 $|_{\heartsuit}$，使得 $|_{\heartsuit}$ 左侧的变量恰好是 $\heartsuit$-清晰的变量。这样的上下文不够一般；具体而言， $\flat$-消去规则将使我们能够生成一个包含 $x :_{\heartsuit} A$， $y :_{\clubsuit} B$ 的上下文，而显然无法以这种方式进行分隔。

以下规则和等式将被认定为可容许，其证明概要见附录 A。

$$\text{WK}\ \frac{\Gamma,\Gamma' \vdash \mathscr{J}}{\Gamma, x :_{\heartsuit} A, \Gamma' \vdash \mathscr{J}} \qquad \text{SUBST}\ \frac{\heartsuit \setminus \Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma, x :_{\heartsuit} A, \Gamma' \vdash \mathscr{J}}{\Gamma, \Gamma'[a/x] \vdash \mathscr{J}[a/x]}$$

$$\text{PROMOTE-CTX}\ \frac{\Gamma\ \mathsf{ctx}}{\heartsuit\Gamma\ \mathsf{ctx}} \qquad \text{PROMOTE}\ \frac{\Gamma \vdash \mathscr{J}}{\heartsuit\Gamma \vdash \mathscr{J}}$$

$$\text{DIVIDE-CTX}\ \frac{\Gamma\ \mathsf{ctx}}{\heartsuit \setminus \Gamma\ \mathsf{ctx}} \qquad \text{DIVIDE-WK}\ \frac{\heartsuit \setminus \Gamma \vdash \mathscr{J}}{\Gamma \vdash \mathscr{J}}$$

$$\heartsuit(\clubsuit\Gamma) \equiv (\heartsuit\clubsuit)\Gamma \qquad \heartsuit \setminus (\clubsuit \setminus \Gamma) \equiv (\clubsuit\heartsuit) \setminus \Gamma$$

- 首先，我们有按变量进行的普通弱化，以及一种类似于空间类型论中所用的“清晰”替换，其中清晰变量只能替换为同样清晰的项。当用于 $\heartsuit \equiv \top$ 时，它们分别特化为普通的弱化规则和替换规则。

- PROMOTE-CTX 对应于将自函子 $\heartsuit$ 应用于上下文 Γ，而 PROMOTE 则对应于与余单位态射 $\heartsuit\Gamma \to \Gamma$进行前复合。

- DIVIDE-CTX 给出最大的“子上下文” $\heartsuit \setminus \Gamma$，它是 Γ，且存在一个替换 $\Gamma \to \heartsuit(\heartsuit \setminus \Gamma)$。因此，上下文运算 $\heartsuit \setminus -$ 的作用类似于 $\heartsuit -$的左伴随，尽管在语义上左伴随可能并不存在。

关于 $\flat$的规则。 现在我们来讨论 $\flat$余模态的规则。

$$\flat\text{-FORM}\ \frac{\heartsuit \setminus \Gamma \vdash A\ \mathsf{type}}{\Gamma \vdash \flat_{\heartsuit} A\ \mathsf{type}}$$

$$\flat\text{-INTRO}\ \frac{\heartsuit \setminus \Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash M^{\flat_{\heartsuit}} : \flat_{\heartsuit} A} \qquad \flat\text{-ELIM}\ \frac{\clubsuit\heartsuit \setminus \Gamma \vdash A\ \mathsf{type} \qquad \Gamma, x :_{\clubsuit} \flat_{\heartsuit} A \vdash C\ \mathsf{type} \qquad \clubsuit \setminus \Gamma \vdash M : \flat_{\heartsuit} A \qquad \Gamma, u :_{\clubsuit\heartsuit} A \vdash N : C[u^{\flat_{\heartsuit}}/x]}{\Gamma \vdash (\mathsf{let}\ u^{\flat_{\heartsuit}} := M\ \mathsf{in}\ N) : C[M/x]}$$

$$\flat\text{-BETA}\ \frac{\clubsuit\heartsuit \setminus \Gamma \vdash A\ \mathsf{type} \qquad \Gamma, x :_{\clubsuit} \flat_{\heartsuit} A \vdash C\ \mathsf{type} \qquad \clubsuit\heartsuit \setminus \Gamma \vdash K : A \qquad \Gamma, u :_{\clubsuit\heartsuit} A \vdash N : C[u^{\flat_{\heartsuit}}/x]}{\Gamma \vdash (\mathsf{let}\ u^{\flat_{\heartsuit}} := K^{\flat_{\heartsuit}}\ \mathsf{in}\ N) \equiv N[K/u]\ :\ C[K^{\flat_{\heartsuit}}/x]}$$

用文字表述，这些规则如下：

- $\flat$-FORM：如果A 是$\heartsuit$-清晰类型，那么我们可以构造 $\flat_{\heartsuit} A$类型。

- $\flat$-INTRO：如果M 是类型为A的$\heartsuit$-清晰项，那么我们可以构造$M^{\flat_{\heartsuit}}$，其类型为 $\flat_{\heartsuit} A$。

- $\flat$-ELIM：若C 是依赖于$\clubsuit$-清晰变量$x :_{\clubsuit} \flat_{\heartsuit} A$的类型，且$M : \flat_{\heartsuit} A$ 是一个$\clubsuit$-清晰元素，类型为 $\flat_{\heartsuit} A$，那么在定义一个

C[M/x]的元素时，我们可以假设M 具有u♥ 的形式，其中♣♥清晰变量u:♣♥ A 。我们将此元素记作(let u$^{\flat}_{\heartsuit}$: = M in N) : C[M/x]，其中N : C[u$^{\flat}_{\heartsuit}$/x] 是我们在假设M具有u$^{\flat}_{\heartsuit}$形式的情况下定义的元素。这里需要等式♥ \ (♣ \ Γ) ≡(♣♥)\Γ，以便确认类型 $\flat_{\heartsuit}$A在上下文♣ \ Γ中是良构的。

- $\flat$-BETA：如果M 实际上具有以下形式$K^{\flat}_{\heartsuit}$ 对于足够清晰的K，那么我们只需将K 代入u。项K 必须是♣♥-清晰的，这样 $\flat$-INTRO 和 $\flat$-ELIM 才能被应用，因此用它替换♣♥-清晰变量u 是良构的。

注 2.0.3. 这些规则比 Shulman 在空间类型论中使用的规则更强，即使在单个焦点的情况下也是如此。我们内置了一个♣-清晰归纳原理，适用于 $\flat_{\heartsuit}$，对于任意两个焦点♥和♣：如果我们要对其进行归纳的项已经是♣-清晰的，那么我们可以在新的假设u中保持这种清晰性。

如果我们只有一个非平凡焦点♥，就像 Shulman 的类型论中那样，那么在上述表达式中取♣ =♥，即可得到“清晰 $\flat$归纳”原理 [47, 引理 5.1]。该归纳原理的证明需要绕道经过 $\sharp$，但这里我们选择将它直接内置于规则中。

事实上，我们的消去规则也可以由一个不那么一般的规则导出，该规则要求新绑定的变量只能是♥-清晰的，但为方便起见，我们选择了更一般的规则。

关于 $\sharp$ 的规则。 $\sharp$的规则稍微简单一些；在单个焦点的情况下，它们恰好特化为空间类型论的规则。

$$\sharp\text{-FORM}\ \frac{\heartsuit\Gamma \vdash A\ \mathsf{type}}{\Gamma \vdash \sharp_{\heartsuit} A\ \mathsf{type}} \qquad \sharp\text{-INTRO}\ \frac{\heartsuit\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash M^{\sharp_{\heartsuit}} : \sharp_{\heartsuit} A} \qquad \sharp\text{-ELIM}\ \frac{\heartsuit \setminus \Gamma \vdash N : \sharp_{\heartsuit} A}{\Gamma \vdash N_{\sharp_{\heartsuit}} : A}$$

$$\sharp\text{-BETA}\ \frac{\heartsuit \setminus \Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash (M^{\sharp_{\heartsuit}})_{\sharp_{\heartsuit}} \equiv M : A} \qquad \sharp\text{-ETA}\ \frac{\Gamma \vdash N : \sharp_{\heartsuit} A}{\Gamma \vdash N \equiv (N_{\sharp_{\heartsuit}})^{\sharp_{\heartsuit}} : \sharp_{\heartsuit} A}$$

用文字表述，这些规则如下：

- $\sharp$-FORM：构造类型 $\sharp_{\heartsuit} A$ 时，所有变量在A 中都可以视作♥-清晰的。
- $\sharp$-INTRO：构造项 $M^{\sharp_{\heartsuit}}$: $\sharp_{\heartsuit} A$ 时，所有变量在 M 中都可以视作♥-清晰的。
- $\sharp$-ELIM：若N 是 $\sharp_{\heartsuit} A$ 的 ♥-清晰元素，我们便可以提取一个元素$N^{\sharp_{\heartsuit}}$:A。
- $\sharp$-BETA：如果M 是♥-清晰的A元素，那么$M^{\sharp_{\heartsuit}\sharp_{\heartsuit}} \equiv M$。
- $\sharp$-ETA：任意项 N : $\sharp_{\heartsuit} A$ 在定义上都等于 $N^{\sharp_{\heartsuit}\sharp_{\heartsuit}}$。与普通空间类型论一样，项 $N^{\sharp_{\heartsuit}}$本身可能无法良构，因为它可能用到上下文 Γ中的非清晰变量。不过，在外层的 $(-)^{\sharp_{\heartsuit}}$之下，它是良构的，因为引入规则允许我们将任意变量当作 ♥-清晰的来使用。

注 2.0.4。 或许令人惊讶的是， $\sharp$-FORM 和 $\sharp$-INTRO 规则的形状将左正合性 $\flat$融入了理论之中。即使在普通空间类型论中也是如此，这并非仅在这种多焦点情形中才出现的特性。关键在于，提升运算♥Γ 会分配到 Γ 中的上下文扩展上，而不是作为一个“卡住的”上下文构造子作用于整体 Γ 。具体来说，使用 $\sharp$推导清晰的 Id-归纳时，要将 $\sharp$应用于一个类型

$$x :: A, y :: A, p :: (x = y) \mid \cdot \vdash C\ \mathsf{type},$$

从而得到一种类型

$$\cdot \mid x : A, y : A, p : (x = y) \vdash \sharp C\ \mathsf{type}.$$

将前一个上下文内部化后，它表示类型 $(x : \flat A) \times (y : \flat A) \times \flat(x_{\flat} = y_{\flat})$，但在应用伴随性时， $\sharp$-FORM 将其视为与 $\flat((x : A) \times (y : A) \times (x = y))$ 等同。

注 2.0.5. 在大多数值得关注的情形中，我们的焦点交换幂等幺半群由有限个基本焦点自由生成。在这种情况下，只需为基本焦点给出 $\flat$和 $\sharp$，其余部分均可推导得出。顶焦点 $\top$(从语义上说，它对应于我们所处的整个托普斯)同时具有 $\flat_\top A$ 和 $\sharp_\top A$，且它们与 A规范等价。给定焦点 $\heartsuit$ 和 $\clubsuit$，很容易证明 $\flat_{\heartsuit\clubsuit}$ 等价于 $\flat_\heartsuit\flat_\clubsuit$，对于 $\sharp$s 也同理。

相关类型论。 除了最初的空间类型论之外，还有其他几种依赖模态类型论与我们的需求较为接近。

“伴随类型论”视角 [40, 29, 30] 是促成 [47]最初空间类型论的指导原则。实际上，在采用适当的模式理论实例化后， [30] 的框架会重现本文所介绍理论的一个简单类型版本。所使用的具体模式理论应是一个带有一组可交换保积内自同态的笛卡尔幺半群。伴随类型论的依赖类型变体尚未问世，但我们预计，我们的依赖类型论将是其一个实例。

关于模态类型论的另一条研究路线是多模态类型论 [22, 23]。在多模态类型论中，每个模态态射 μ 都会在类型论中被具体化为一个正 类型构造子，并且每个模态 mod_μ 都必须具有一个类似左伴随的上下文算子，记作 $🔒_\mu$。如果我们不假设 $\int$的存在，那么我们只能以这种方式描述$\sharp$。

后续工作 [21] 描述了一种多模态类型论，其中每个模态态射都会成为一个（更方便的）负类型构造子。其语义要求甚至更为严格：与模态对应的函子必须是一个依赖右伴随 [11], ，且其左伴随本身也是参数化右伴随。即使不增加额外假设，这一要求也过于严格，无法涵盖 $\sharp$。

在 [16, §14], 中，提出了另一种“凝聚类型论”，采用了上述两种模态算子风格的组合。凝聚框架并非处理所关注的托普斯上的自函子，而是保留为一个伴随四元组 $\Pi_0 \dashv \mathrm{Disc} \dashv \Gamma \dashv \mathrm{CoDisc}$。由于需要一个或两个左伴随，Disc 使用正类型构造子，而 Γ 和 CoDisc 使用负类型构造子。这种做法可能可以扩展到交换凝聚，但左伴随所涉及的各种上下文 $🔒_-$ 操作之间的相互作用可能难以描述。

在上下文结构方面与我们的理论最为相似的类型论是 ParamDTT [38, 37], ，其中，上下文中带有模态标注的变量表示该变量直接处于该模态之下，而非处于其左伴随之下。我们借鉴了这项工作中的左除记号 $-\backslash\Gamma$，用来表示对上下文执行清除操作；这种记号本身也以其他形式出现过，例如 [39, 2, 3]。ParamDTT 使用一个固定的“模式理论”，其中包含三种模态{¶、id $\sharp$}，并配有特定的复合律；但显然，上下文规则和基本类型构造子的规则同样适用于其他模态集合。将第二个分量固定为单位类型，便可从“模态Σ-类型”导出凝聚 $\flat$ 的一个版本。似乎无法在 ParamDTT 中导出 $\sharp$ 的普通（负向）规则。

3 特化一个焦点

一个焦点给出了一个特定的轴，类型可以沿该轴具有空间性。在单纯形凝聚中，我们有一个单纯形焦点 $\mathrm{sk}_0 \dashv \mathrm{csk}_0$，而在微分凝聚中，我们有一个微分焦点 $\flat \dashv \sharp$。但是什么使单纯形焦点成为单纯形 焦点，又是什么使微分焦点成为微分焦点？ 在本节中，我们将探讨两种公理模式，它们可以确定给定焦点的特性。在下一节中，我们将看到这些公理的应用。

首先，我们注意到，只有一个焦点时，带可交换焦点的类型论与 Shulman 的空间类型论在 [47] 中是同一个理论。

定理 3.0.1。 在 *Real Cohesion* 的第 *3*、*4*、*5* 和 *6* 节中证明的任何引理和定理 *[47]* 关于 $\flat$和 $\sharp$且未使用任何公理的 $\flat_\heartsuit$ 和 $\sharp_\heartsuit$ 对于任意固定焦点 $\heartsuit$也都成立。涉及使用公理的定理同样有效，只要将这些公理中使用的清晰性解释为$\heartsuit$-清晰性。

证明。 $\flat_\heartsuit$ 和 $\sharp_\heartsuit$ 的规则特化为 Shulman 的规则，因此他的证明可以直接沿用。 □

具体而言，$\flat_\heartsuit$ 是一个余反射子，而 $\sharp_\heartsuit$ 是一个单子模态，两者都是左正则的，并且 $\flat_\heartsuit$ 是♥-清晰）左伴随于$\sharp_\heartsuit$。

由于添加一个焦点只会扩展类型论的规则，而不会限制其他任何焦点的任何规则的应用，因此，本节中针对单个焦点证明的任何定理，在处理多个焦点时同样适用。

在本节余下部分中，我们将在单个焦点♥下进行讨论，因此会在表达式中省略 ♥ 标注。例如，我们将 $\flat_\heartsuit$ 简写为 $\flat$，并将$x :_\heartsuit X$ 写作$x :: X$，遵循 Shulman 的做法。

3.1 检测连续性

本节将考察一条公理，它将类型论中清晰变量所蕴含的临界意义上的“连续性”，与特定类型G的具体连续性联系起来。

我们的公理将采用提升性质的形式，用以刻画那些 $\sharp$-模态的清晰映射。正如我们将在接下来的定理 3.1.2 中证明的，清晰映射是 $\sharp$-模态的，当且仅当它能针对所有的 $\flat$-余单位清晰提升（其含义将在定义 3.1.1 中作出精确定义）。

定义 3.1.1. 设 $c :: A \to B$ 和 $f :: X \to Y$ 为清晰映射。若对于下方左侧所示的任意清晰交换方块，都存在唯一的清晰填充，则称 c 相对于 f 清晰提升 。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\forall} & X \\ {\scriptstyle c}\downarrow & \overset{\exists!}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \xrightarrow[\forall]{} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \flat(X^B) & \xrightarrow{\flat(c\circ)} & \flat(X^A) \\ {\scriptstyle \flat(\circ f)}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \flat(\circ f)} \\ \flat(Y^B) & \xrightarrow[\flat(c\circ)]{} & \flat(Y^A) \end{array}$$

更形式地说，若右侧的方块是一个拉回，我们就将此命题记作 $c \perp_\flat f$。

定理 3. **1.2.** 清晰映射 $f :: X \to Y$ 是 $\sharp$-模态的，当且仅当对于所有清晰的 A，$(\varepsilon : \flat A \to A) \perp_\flat f$.

证明。 若 f 是 $\sharp$-模态的，则由于 $\sharp$是 lex，它相对于所有 $\sharp$-等价映射都能在右侧提升。对于任意清晰的 A，$\flat$-余单位$\varepsilon : \flat A \to A$ 根据 [47, 定理 6.22]是一个 $\sharp$-等价映射。因此，该方块

$$\begin{array}{ccc} X^A & \xrightarrow{\circ\varepsilon} & X^{\flat A} \\ {\scriptstyle f\circ}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle f\circ} \\ Y^A & \xrightarrow[\circ\varepsilon]{} & Y^{\flat A} \end{array}$$

是一个拉回，并且由于 $\flat$ 保持清晰拉回（[47, 定理 6.10]），我们得出 $\varepsilon \perp_\flat f$。

另一方面，假设 f 对所有 $\flat$-余单位都能在右侧清晰提升。要证明 f 是 $\sharp$-模态映射，只需证明其 $\sharp$-自然性方块是一个拉回。令 $X \to \sharp X \times_{\sharp Y} Y$ 为 f 的 $\sharp$-自然性方块的间隙映射，并试图证明该映射是一个等价。根据拉回的泛性质，只需在自然性方块上分解间隙映射。因此，考虑清晰交换方块

$$\begin{array}{ccc} \flat(\sharp X \times_{\sharp Y} Y) & \xrightarrow{F} & X \\ {\scriptstyle \varepsilon}\downarrow & \overset{k}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \sharp X \times_{\sharp Y} Y & \xrightarrow[\mathsf{snd}]{} & Y \end{array}$$

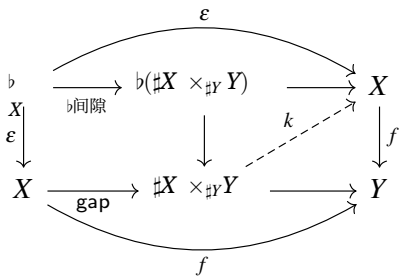
其中 F(t) :≡ (let t := $\mathrm{p}^\flat$ in (fst p)$^\sharp$) 是第一投影的一种形式。要验证该方形交换，根据 $\flat$-归纳，只需对清晰元素 u :: $\sharp$X、y :: Y 以及 p :: ($\sharp$f (u) =y$^\flat$)，给出一个类型为 f (u$^\sharp$) =y 的项。但我们清晰地有 $\sharp$f (u) ≡ $\sharp$f (u$_\sharp{}^\flat$) =(f (u$^\sharp$))$^\sharp$，这是由 $\sharp$f 的定义得出的；将这条路径与 p 复合，我们知道

$p' :: (f(u^\sharp))^\sharp = y^\sharp$。根据 $\sharp$ 的 lex 性质，我们因此也有 $p'' :: \sharp(f(u^\sharp) = y)$，所以该方形由$p''_\sharp$交换。

根据假设，存在唯一的清晰映射$k : \sharp X \times_{\sharp Y} Y \to X$，可填入这个方块。下方三角形恰好表明$k$ 是第二投影之上的映射。我们将把上方三角形转化为证明k 是第一投影之上的映射。

设 $(u, y, p) : \sharp X \times_{\sharp Y} Y$，目标是证明 $k(u, y, p)^\sharp = u$。后一个路径类型是余离散的（因为$\sharp X$ 是余离散的），因此映射到其中时，我们可以假设 u 的形式为 $x^\sharp$，从而将目标简化为 $k(x^\sharp, y, p)^\sharp = x^\sharp$。根据 $\sharp$ 的 lex 性质，只需给出 $\sharp(k(x^\sharp, y, p) = x)$ 的一个元素；为此，只需在 x、y 和 p 均为清晰的假设下，给出 $k(x^\sharp, y, p) = x$ 的一个元素。在这种情况下，$(x^\sharp, y, p)^\flat : \flat(\sharp X \times_{\sharp Y} Y)$，因此根据上三角形，我们有 $k(x^\sharp, y, p) = F((x^\sharp, y, p)^\flat)$。但根据定义，$F((x^\sharp, y, p)^\flat) \equiv x^\sharp_\sharp \equiv x$，因此我们已经给出了所需的识别。

我们已经证明 k 位于自然性方块之上；现在需要证明它分裂间隙映射 $X \to \sharp X \times_{\sharp Y} Y$。为此，考虑以下图表：



容易通过 $\flat$-归纳证明该图表按图示交换。于是，我们有两个外方形的清晰填充物：首先有 $\mathrm{id}_X : X \to X$，以及 $k \circ \mathrm{gap} : X \to X$。根据清晰填充物的唯一性，我们得出它们必定相同。

□

知道清晰的 $\sharp$-模态映射或许可以通过对 $\flat$-余单位进行清晰提升来刻画，这提示我们可以通过限制需要对其进行提升的 $\flat$-余单位类，来公理化 $\sharp$ 的特定性质。为此，我们给出以下定义。

定义 3.1.3. 设 $G :: I \to$ **类型** 是一个由 $\flat$-模态且有 inhabitant 类型 I 索引的清晰类型族。若对于每个清晰映射 $f :: X \to Y$,

$$\{f \text{ is } \sharp\text{-modal}\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (\varepsilon : \flat G_i \to G_i) \perp_\flat f \\ \text{for all } i :: I \end{array} \right\}$$

注记 3.1.4. 从外部视角来看，不难看出，在余极限下生成所讨论的局部拓扑斯$\mathscr{E}$ 的任何族 G_i，对于由拓扑斯终端映射给出的焦点，都会检测连续性。这是因为 $\flat$ 作为左伴随，与所有余极限交换；因此，对任意对象 $\mathscr{E}$ 的 $\flat$-余单位进行提升的问题，可以归约为对生成元 G_i 的 $\flat$-余单位进行提升的问题。

引理 3.1.5. 清晰类型 X 是 $\sharp$-模态的，当且仅当对于所有清晰类型A，$\flat(A \to X) \to \flat(\flat A \to X)$ 是等价；并且若 G 检测连续性，则只需对每个G_i进行检验。

证明. 当$f : X \to 1$时，定义清晰提升的方块是拉回，当且仅当顶端映射是等价。 □

如果一个族检测 连续性，那么它就是清晰映射的分离族，具体来说 .

定理 3.1.6. 设 $G :: I \to$ **类型** 检测连续性。设 $f :: X \to Y$ 是一个清晰映射，且 $\flat f : \flat X \to \flat Y$ 是一个等价；并且对于所有 $i :: I$，由后合成 f 所给出的诱导映射 $\flat(G_i \to X) \to \flat(G_i \to Y)$ 都是等价。那么 f 是一个等价。

证明。 首先，注意到 f 是一个 $\sharp$-等价，因为根据假设，它是一个 $\flat$-等价。因此，只需证明 f 是 $\sharp$-模态的；根据假设 G 检测连续性，这意味着要证明 f 能清晰地提升以对抗所有$\flat$-余单位 $\flat G_i \to G${v21>，其中 $i :: I$。考虑以下图表：

$$\begin{array}{ccccc} \flat(X^{G_i}) & \longrightarrow & \flat(X^{\flat G_i}) & \xrightarrow{\sim} & \flat(\sharp X^{G_i}) \\ {\scriptstyle \flat(f\circ)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \flat(f\circ)} & & \downarrow{\scriptstyle \flat(\sharp f\circ)} \\ \flat(Y^{G_i}) & \longrightarrow & \flat(Y^{\flat G_i}) & \xrightarrow{\sim} & \flat(\sharp Y^{G_i}) \end{array}$$

左侧的方块就是我们需要证明为拉回的方块。为此，只需证明中间的映射 $\flat(f\circ) : \flat(X^{\flat G_i}) \to \flat(Y^{\flat G_i})$ 是等价，因为根据假设，最左侧的垂直映射是等价；而任意两条边为等价的方块都是拉回。

为此，根据伴随关系 $\flat \dashv \sharp$，中间的垂直映射等价于最右侧的垂直映射（[47,推论 6.26]）。但最右侧的垂直映射是等价，因为它是与等价映射$\sharp f$进行后合成。

□

3.2 检测连通性

如果一个焦点 $\flat$有一个进一步的左伴随 $\int$，且该左伴随本身是一个模态，则称它为凝聚：

$$\flat(\textstyle\int A \to X) \simeq \flat(A \to \flat X).$$

这个伴随关系只确定了清晰类型上的 $\int$。更好的做法是通过将一族对象零化来定义 $\int$；这样一来，$\int$ 就能在所有类型（无论大小）上得到确定。为此，我们给出以下定义。

定义 3.2.1。 设 $G :: I \to$ **类型** 是由一个 $\flat$-模态类型索引的清晰类型族。我们称 G 检测连通性，当且仅当对于任意清晰类型 X,

$$\{X \text{ is } \flat\text{-modal}\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X \text{ is } G_i\text{-null} \\ \text{for all } i :: I \end{array} \right\}$$

如果 G 检测连通性，则将 $\int$ 定义为在族G_i处的零化。

注记 3.2.2。 在 *Real Cohesion* [47], 中，断言给定的族 G 检测连通性，被称为公理 C0。在 [44, 定义 5.2.48], 中，具有这一性质的单个对象被称为“体现凝聚”。

如果存在一个检测连通性的族 G，那么我们称焦点是凝聚的。以下定理为此提供了依据；我们可以直接从*Real Cohesion* [47]中引入该定理。

定理 3.2.3。 假设 G 检测连通性。那么，一个清晰类型是 $\int$-模态的，当且仅当它是 $\flat$-模态的；此外，$\int$ 是 $\flat$的清晰左伴随：

$$\flat(\textstyle\int A \to X) \to \flat(A \to \flat X)$$

证明。 这是 [47, 定理 9.15]。 □

4 种焦点示例

为了在视觉上区分各种算子，我们会为每个感兴趣的焦点使用完全不同的符号。类型构造子的规则保持不变。

- $\int \dashv \flat \dashv \sharp$ 表示实数凝聚，其中实数集（可能是戴德金实数，或通过公理断言的“光滑实数”集）能够检测连通性。

• re ⊣sk$_0$ ⊣ csk0 表示单纯形凝聚，其中（通过公理断言的）1-单形 $\Delta[1]$ 能够检测连通性。

• ⊣ ⊣表示全局等变凝聚，其中连通性由有限群$\mathbf{B}G$ 的作用检测G。这一记号约定沿用Sati和Schreiber [43]。

• 各种拓扑托普斯 都体现了空间类型论，其中 ♭ ⊣ ♯ 分别用离散拓扑和余离散拓扑重新拓扑化类型。特别是，Johnstone的拓扑拓扑斯具有一个焦点，其连续性由游走收敛序列 $\mathbb{N}_\infty$检测；该序列可构造为单调函数 $\mathbb{N} \to \{0,1\}$的集合。

4.1 实凝聚

在*Real Cohesion* [47], 中，Shulman给出了公理 $\mathbb{R}\flat$，该公理指出，清晰类型是 ♭-模态的，当且仅当它是$\mathbb{R}_D$-零的，其中 $\mathbb{R}_D$ 是戴德金分割的集合。用定义 3.2.1中的术语来说，这意味着 $\mathbb{R}_D$ 检测连续实数连通性。

公理 1 (连续实数凝聚)。 我们假设 $\mathbb{R}_D$ 检测连续实数连通性，并且还假设 Shulman 的公理 T：对于每个 $x : \mathbb{R}_D$，命题 $(x > 0)$ 都是 ♯-模态的。

注 4.1.1。 虽然 Shulman 没有考虑这一公理，但我们也可以加入一个假设：族$\mathbb{R}_D^n$ 检测连续实数连续性。利用这一假设，我们可以将 [47] 中例 8.33 的论证内化，从而证明神秘的公理 T 可由以下命题推出：若 $f :: \mathbb{R}_D^n \to \mathbb{R}_D$ 是清晰的，并且$f(x) > 0$对任意清晰的 $x :: \mathbb{R}_D^n$成立，那么实际上$f(x) > 0$对所有（不一定清晰的）$x : \mathbb{R}_D^n$都成立。由于根据 [47] 的推论 8.28（假设尖锐排中律或可数选择公理），任意清晰戴德金实数都是柯西实数，所以我们等价地是在问：如果函数 $f : \mathbb{R}_D \to \mathbb{R}_D$ 在所有柯西实数上都为正，它是否总是为正？这看起来显而易见，但正如 Shulman 在例 8.34 中指出的，这个显而易见的陈述并非总是成立；不过，假设可数选择后，它很可能可以证明。

存在连续但不可微的函数 $f : \mathbb{R}_D \to \mathbb{R}_D$。如果我们希望在一个托普斯中工作，其中的类型具有光滑结构，而不只是连续结构，那么就必须使用一种光滑实数类型$\mathbb{R}_S$。公理化光滑实数类型最常见的方法，是使用 Kock-Lawvere 公理以及合成微分几何的其他公理。例如， [36] 的第 4.1 节列出了这些公理。无论如何，如果$\mathbb{R}_S$ 是光滑实数类型，那么我们就将微分凝聚定义为 $\mathbb{R}_S$ 检测连通性。

公理 2 （微分实凝聚）。 如果 $\mathbb{R}_S$ 是光滑实数类型（例如，来自合成微分几何），那么我们假设 $\mathbb{R}_S$ 检测微分连通性。

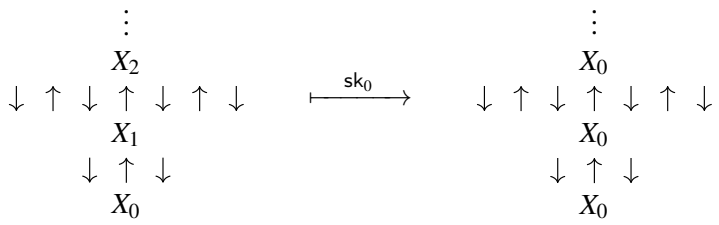
4.2 单纯形凝聚

在普通同伦类型论中描述单纯类型存在一个众所周知的难点——鉴于类型论所提供的工具，无限量的相干数据难以形式化描述。这一难点促使人们扩展类型论，例如双层类型论 [5, 8, 4] ， 它通过引入严格等式来扩展 HoTT，从而能够定义满足单纯恒等式的单纯同伦类型，并使其严格成立，避开棘手的相干塔。

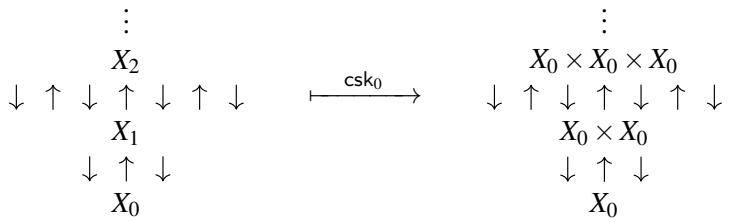
避免单纯困难的另一种方法，是将类型论解释到一个由单纯同伦类型构成的托普斯中，而非仅仅是同伦类型。Riehl 和 Shulman 在 [42], 中采用了这种方法，他们提出了一种类型论，其中每个类型都是单纯类型，并以单形 $\Delta[n]$, 作为原始对象，因此类型 A 中的一个单形是一个函数 $\sigma : \Delta[n] \to A$。

在本节中，我们也将研究单纯同伦类型，但采用不同于 Riehl 和 Shulman 类型论的方法。相反，我们将描述单纯形凝聚，其伴随模态为 ⊣sk$_0$ ⊣csk$_0$。这些模态在语义上定义如下：

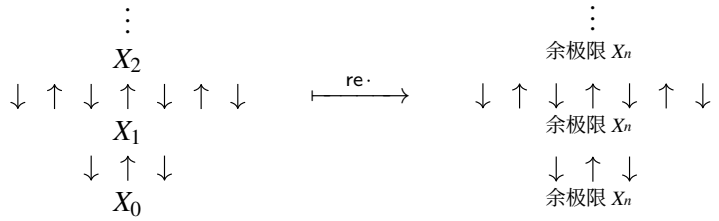
- （“单纯平坦”）0-骨架共模态$X \mapsto \mathrm{sk}0X$将单纯类型映射到其 0-骨架：



- （“单纯　　尖”）0-余骨架模态$X \mapsto \mathrm{csk}_0X$将单纯类型映射到其 0-余骨架　　：



- （“单纯形状”）几何实现模态$X \mapsto \mathrm{re}X$将单纯类型映射到其实现（或同伦余极限），并将其视为 0-骨架的单纯类型：



由于单纯集合是严格区间（具有不同最大元和最小元的全序集）的分类（0-）托普斯，[50], 并且由于单纯同伦类型的 ∞-托普斯是单纯集合的包络 ∞-托普斯[3]，[6], 我们可以假设存在一个区间 $\Delta[1]$，以确保我们的类型论是在一个配备了到 $\mathscr{S}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ 的几何态射的 ∞-托普斯中解释的。于是，我们可以将n-单纯形 $\Delta[n]$ 定义为 $\Delta[1]$ 中长度为n的递增序列，并将类型X 中的n-单纯形定义为一个映射 $\Delta[n] \to X$。

公理 3（单纯公理）。我们假定 $\Delta[1]$ 是一个具有不同最大元和最小元的全序，分别记为 1 和 0。具体来说，这意味着我们有元素 0，1 : $\Delta[1]$，以及命题$x \leq y$: **命题**，其中x，y : $\Delta[1]$。这个序必须满足以下公理：

1. 对所有 x，x $\leq$x。2. 对所有 x、y 和 z，若 x $\leq$y 且 y $\leq$z，则 x $\leq$z。3. 对所有 x 和 y，若 x $\leq$y 且 y $\leq$x，则 x $=$y。4. 对所有 x 和 y，x $\leq$ y 或 y $\leq$x。5. 对所有 x，$0 \leq$x 且 x ≤ 1。6. $0 \neq 1$。

[3]托普斯的包络 ∞-托普斯是其自由（同伦）余完备化，并保持已有的同伦余极限。

根据这些公理，我们可以将其他单形 $\Delta[n]$定义为 $\Delta[1]$ 中长度为n 的链：

$$\Delta[n] :\equiv \{\vec{x} : \Delta[1]^n \mid x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n\}.$$

我们还假设如下：

• (公理 Δsk0) $\Delta[1]$ 能检测单纯连通性：单纯形清晰类型 X 是 0-骨架的，当且仅当每个映射 $\Delta[1] \to X$ 都是常值映射。

• 族 $\Delta[-]\colon \mathbb{N} \to$ **类型** 能检测单纯连续性。

•(公理 $\partial\Delta$) 对于 $i\colon \Delta[1]$，我们有 $\mathsf{csk0}((i = 0) \vee (i = 1))$。

• 每个 $\Delta[n]$ 都是尖锐投射的。也就是说，对于单纯形清晰的 $E\colon \Delta[n] \to$ **类型**，我们有一个映射

$$\mathsf{sk}_0((i : \Delta[n]) \to \exists E_i) \to \exists \mathsf{sk}_0((i : \Delta[n]) \to E_i).$$

由于存在一个显然的反向映射，因此这个映射是一个等价。

我们先来证明，n-单形的几何实现是平凡的，并且n-单纯形 $\Delta[n]$ 的 0-骨架是序数 $[n] \equiv \{0, \ldots, n\}$。

引理 4.2.1. 序 $\Delta[1]$有有限交和并，且它们彼此分配。此外，包含 $\{0,1\} \hookrightarrow \Delta[1]$ 是格的包含。

证明。 设$x,y\colon \Delta[1]$。那么$x \leq y$或$y \leq x$。在前一种情况下，定义$x \wedge y :\equiv x$且$x \vee y :\equiv y$；在后一种情况下，定义$x \wedge y :\equiv y$且$x \vee y :\equiv x$。若两者都成立，则$x = y$，且两种定义一致。

若$x,y,z\colon \Delta[1]$，则这三个元素可能处于 6 种次序中的任意一种。于是可以验证，在这些情形中，交对并分配，反之亦然。例如，假设$x \leq y \leq z$，则$x \wedge (y \vee z) = x \wedge z = x$，而$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \vee x = x$。 □

引理 4.2.2。 $\Delta[n$维单纯形 $\Delta[n]$ 是 $\Delta[1]^n n$维立方体的收缩。此外，包含 $[n] \hookrightarrow \Delta[n]$ 由下式给出

$$i \mapsto 0 \leq \cdots \leq 0 \leq \overbrace{1 \leq \cdots \leq 1}^{i \text{ times}}$$

是包含 $\{0,1\}^n \to \Delta[1]^n$的收缩。

证明。 给定 $x1, \ldots, x_n\colon \Delta[1]$，定义 $m_1 :\equiv \bigwedge_{i:\mathrm{n}} x_i$，并令 $i_1\colon \mathrm{n}$ 为其指标，则 $m_2 :\equiv \bigwedge_{\mathrm{n}\setminus\{m_1\}} x_i$，依此类推。注意到 $m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_n$，因此 $m\colon \Delta[n]$。最后，如果 x_i 已经处于递增次序，那么 $m_i = x_i$，这表明它是一个收缩。

我们注意到，如果将 $\{0,1\}^n \to [n]$, 与由递增序列组成的子集$\{\vec{}x\colon \{0,1\}^n \mid x_1 \leq \cdots \leq x_n\}$等同起来，该收缩论证同样适用于 $[n]$ 。由于它只利用了 $\{0,1\}^n$和$\Delta[1]^n$的格结构，而包含是格同态，我们得出必要的方块交换。 □

定理 4.2.3. n-单形的实现是平凡的：$\mathsf{re}\Delta[n] = *$。

证明。 实现 $\mathsf{re}\,\Delta[n]$是实现 re $\Delta[1]^n$的一个收缩，而它是可缩的，因为 $\Delta[1]$ 检测单纯连通性。

□

定理 4.2.4. 包含 $[n] \hookrightarrow \Delta[n]$ 由下式给出

$$i \mapsto 0 \leq \cdots \leq 0 \leq \overbrace{1 \leq \cdots \leq 1}^{i \text{ times}}$$

是一个sk_0-等价，表明$\mathsf{sk}_0\,\Delta[n] \simeq [n]$。

证明。 我们将证明 $[1] \hookrightarrow \Delta[1]$ 是一个 sk_0-等价。这将意味着 $[1]^n \hookrightarrow \Delta[1]^n$ 是一个 sk_0-等价；由于 $[n] \hookrightarrow \Delta[n]$ 是它的一个收缩，因此我们可以得出结论，它同样是一个 sk_0-等价。

由于此包含 $\{0,1\} \hookrightarrow \Delta[1]$ 是单纯形清晰的，要证明它是 sk_0-余单位，只需证明它是 csk_0-等价。因此，我们需要一个逆 $\mathsf{csk}_0\Delta[1] \to \mathsf{csk}_0\{0,1\}$。由于陪域是 0-余骨架的，只需在 $\Delta[1]$上定义这个映射。于是，令 $i\colon \Delta[1]$，并寻求 $\mathsf{csk}_0\{0,1\}$。根据公理 $\partial\Delta$，我们有 $\mathsf{csk}_0((i=0)\vee(i=1))$；又由于我们的目标是 0-余骨架的，我们可以假设 $i=0$ 或 $i=1$。若 $i=0$，则将其映至 0^{csk_0}；若 $i=1$，则将其映至 1^{csk_0}。

要证明此映射是 $\mathsf{csk}_0\{0,1\} \to \mathsf{csk}_0\Delta[1]$的逆，我们可以利用模态类型中的恒等式是模态的这一事实，因此可以去掉 csk_0 在 $\mathsf{csk}_0((i=0)\vee(i=1))$周围的部分，并检查这些映射在这些元素上是否互为逆；显然它们确实如此。

□

我们还可以定义单纯形清晰类型中n-单形的类型，并证明关于类型的n-单形的一些初等引理。

定义 4　　.2.5. 设X 为一个单纯形清晰类型。定义X_n 中n-单形的类型为

$$X_n :\equiv \mathsf{sk}_0(\Delta[n] \to X).$$

如果$f\colon X \to Y$是一个单纯尖锐映射，则它通过后合成诱导出一个映射$f_n\colon X_n \to Y_n$　　.

引理 4.2.6. 设$f\colon X \to Y$是一个单纯尖锐映射。若对所有n，$f_n\colon X_n \to Y_n$都是等价，则f是等价。

证明。 注意到 $X_0 \simeq \mathsf{sk}_0 X$，这正是定理 3.1.6 的一个特例。 □

引理　4.2.7. 设$f\colon X \to Y$是一个单纯尖锐映射。那么对于清晰的 $y\colon \Delta[n] \to Y$，我们有　e

$$\mathsf{fib}_{f_n}(y^{\mathsf{sk}_0}) \simeq \mathsf{sk}_0((i:\Delta[n]) \to \mathsf{fib}_f(y(i))).$$

证明。 我们计算:

$$\begin{aligned}
\mathsf{fib}_{f_n}(y^{\mathsf{sk}_0}) &\equiv (x:X_n) \times (f_n x = y^{\mathsf{sk}_0}) \\
&\equiv (x:\mathsf{sk}_0(\Delta[n] \to X)) \times \mathsf{let}\ \tau^{\mathsf{sk}_0} := x\,\mathsf{in}\,(f\circ\tau)^{\mathsf{sk}_0} = y^{\mathsf{sk}_0} \\
&\simeq (x:\mathsf{sk}_0(\Delta[n] \to X)) \times \mathsf{let}\ \tau^{\mathsf{sk}_0} := x\,\mathsf{in}\,\mathsf{sk}_0(f\circ\tau = y) \\
&\simeq \mathsf{sk}_0((x:\Delta[n] \to X) \times (f\circ x = y)) \\
&\simeq \mathsf{sk}_0((x:\Delta[n] \to X) \times ((i:\Delta[n]) \to (f(x(i)) = y(i)))) \\
&\simeq \mathsf{sk}_0((i:\Delta[n]) \to \mathsf{fib}_f(y(i))).
\end{aligned}$$

□

引理 4.2.8。 设$f\colon X \to Y$是一个单纯尖锐映射。那么 $(\mathsf{im}\, f)_n \simeq \mathsf{im}\, f_n$。

证明。 我们利用单形的射影性。[4]

$$\begin{aligned}
(\mathsf{im} f)_n &\equiv \mathsf{sk}_0(\Delta[n] \to (y:Y) \times \exists \mathsf{fib}_f(y)) \\
&\simeq (y:Y_n) \times \mathsf{let}\ \sigma^{\mathsf{sk}_0} := y\,\mathsf{in}\,\mathsf{sk}_0((i:\Delta[n]) \to \exists \mathsf{fib}_f(\sigma i)) \\
&\simeq (y:Y_n) \times \mathsf{let}\ \sigma^{\mathsf{sk}_0} := y\,\mathsf{in}\,\exists\mathsf{sk}_0((i:\Delta[n]) \to \mathsf{fib}_f(\sigma i)) \\
&\simeq (y:Y_n) \times \exists \mathsf{fib}_{f_n}(y) \\
&\equiv \mathsf{im} f_n.
\end{aligned}$$

□

[4]事实上，这个引理等价于假设单形具有射影性。

我们上面给出的n-单形的定义很简单，但要看出它关于序数 $[n]$ 是函子性的，却并不那么直接。我们可以给出n-单形的另一种定义，使函子性显而易见。

定义 4.2.9. 令区间范畴 Interval 表示区间范畴：其对象是具有不同最大元和最小元的全序集。Interval 中的映射是保持最大元和最小元的单调函数。

令 FinOrd_+ 表示有限非空序数及其间保序映射构成的范畴，即通常所说的"单形范畴"。我们将 $[n]$ 表示为序数 $\{0,\dots,n\}$。

我们需要用区间来重新表述有限序数范畴的一种标准方式（参见例如 [32,§VIII.7]）

引理 4.2.10. 存在一个反变的全忠实函子 $\iota\colon \mathrm{FinOrd}_+^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Interval}$，将 $[n]$ 映到具有最大元 $n+1$ 和最小元 0 的 $[n+1]$。对于映射 $f\colon [n]\to[m],$，我们定义 $\iota f\colon [m+1]\to[n+1]$ 如下：

$$\iota f(i) :\equiv \begin{cases} \min\{j \mid i \le f(j)\} & \\ n+1 & \text{if no such minimum exists.} \end{cases}$$

反过来，对于保持最大元和最小元的单调映射 $g\colon [m+1]\to[n+1]$，我们用对偶公式定义 $\iota^{-1}g\colon [n]\to[m]$。

$$(\iota^{-1}g)(j) :\equiv \max\{i \mid g(j)\le i\}.$$

现在我们可以定义n-单形，使其在有限非空序数范畴中的函子性一目了然。

定义 4.2.11. 我们将n-单纯形 $\Delta[n]$定义为

$$\Delta[n] :\equiv \mathsf{Interval}(\iota[n],\Delta[1]).$$

因此，$\Delta\colon \mathrm{FinOrd}_+ \to$ **集合范畴** 给出一个从有限非空序数范畴到集合范畴的函子，其中 $\Delta(f)\colon \Delta[n]\to\Delta[m]$ 由与 $\iota f\colon [m+1]\to[n+1]$进行前合成给出。

注意到，根据 ι 的完全忠实性，$[n]\cong \mathsf{Interval}(\iota[n],[1])$，包含最大元和最小元 $[1]\hookrightarrow\Delta[1]$ 通过后合成诱导出一个自然包含 $[n]\hookrightarrow\Delta[n]$。正如我们在定理 4.2.4 中所见，这些包含是 sk_0-余单位。

ˇ4.2.1 Čech 复形

0-余骨架模态 csk_0 对于处理单纯形凝聚很有用，因为它使我们能够轻松地构造映射 $f\colon X\to Y$ 的 Čech 复形，其中两者都是 0-骨架类型。从外部来看，这种映射的 Čech 复形是通过反复将 f 沿自身拉回而形成的单纯类型：

$$\check{\mathsf{C}}(f) :\equiv \quad \begin{array}{c} \vdots \\ X\times_Y X\times_Y X \\ \downarrow\ \uparrow\ \downarrow\ \uparrow\ \downarrow\ \uparrow\ \downarrow \\ X\times_Y X \\ \downarrow\ \uparrow\ \downarrow \\ X \end{array}$$

定义 4.2.12. 设 $f\colon X\to Y$ 是一个映射。f 的*Čech* 复形 $\check{\mathsf{C}}(f)$ 定义为其 csk_0-像：

$$\check{\mathsf{C}}(f) :\equiv (y:Y)\times \mathrm{csk}_0((x:X)\times(fx=y)).$$

我们将通过计算当X和Y都是 0-骨架的时，$\check{\mathsf{C}}(f)$ 的n-单形的类型，来证明这个定义的合理性。

命题 4.2.13。 设 $f\colon X \to Y$ 是 0-骨架类型之间的单纯尖锐映射。那么

$$\check{\mathsf{C}}(f)_n \simeq X \times_Y \cdots \times_Y X \simeq (y:Y) \times ((x:X) \times (fx = y))^{n+1}$$

是 $n+1$ 重的 f 沿自身的拉回。

证明。 我们计算：

$$\begin{aligned}
\check{\mathsf{C}}(f)_n &:\equiv \mathsf{sk}_0(\Delta[n] \to \check{\mathsf{C}}(f)) \\
&\equiv \mathsf{sk}_0(\Delta[n] \to (y:Y) \times \mathsf{csk}_0((x:X) \times (fx = y))) \\
&\simeq \mathsf{sk}_0((\sigma : \Delta[n] \to Y) \times ((i:\Delta[n]) \to \mathsf{csk}_0((x:X) \times (fx = \sigma i))))
\end{aligned}$$

由于 Y 是 0-骨架的，任意映射 $\Delta[n] \to Y$ 都是常值的，因此我们可以继续：

$$\simeq \mathsf{sk}_0((y:Y) \times (\Delta[n] \to \mathsf{csk}_0((x:X) \times (fx = y))))$$

由于根据定理 4.2.4，$\mathrm{sk}_0\Delta[n] = [n],$，我们可以利用 sk_0 和 csk_0 的伴随性继续：

$$\simeq \mathsf{sk}_0((y:Y) \times \mathsf{csk}_0([n] \to (x:X) \times (fx = y)))$$

现在，我们可以利用 [47] 的引理 6.8 将 sk_0 移入对类型，然后利用 $\mathrm{sk}_0\mathrm{csk}_0 = \mathrm{sk}_0$，继续：

$$\simeq ((u : \mathsf{sk}_0 Y) \times \mathsf{let}\ u := y^{\mathsf{sk}_0}\ \mathsf{in}\ \mathsf{sk}_0([n] \to (x:X) \times (fx = y)))$$

然而，涉及的所有类型本来就是 0-骨架的，因此我们可以删去 sk_0s：

$$\begin{aligned}
&\simeq ((y:Y) \times ([n] \to (x:X) \times (fx = y))) \\
&\simeq (y:Y) \times ((x:X) \times (fx = y))^{n+1}
\end{aligned}$$

最后这个类型是 f 沿自身的 $(n+1)$ 重拉回，并通过它到 Y 的对角映射来表示。 □

˘ 我们可以在模态意义下证明，映射 $f\colon X \to Y$ 的切赫神经的实现就是 f 的像 $\mathrm{im}\, f$。这可由*Real Cohesion* [47]中的定理 10.2 推出。

定理 4.2.14. 若 A 是0-余骨架的，则re$A$ 是一个命题。作为推论，$\mathrm{re}(\mathrm{csk}_0 X) \simeq \|X\|$。

证明。 在 [47], 这条定理中，证明被认为依赖尖锐排中律。然而，只要看一眼证明就会发现，这个假设仅用于假定 $\mathrm{sk}_0\Delta[1]$具有可判定相等性。由于我们知道 $\mathrm{sk}_0\Delta[1] \simeq \{0,1\}$ 具有可判定相等性，因此无需假设尖锐排中律，证明依然成立。 □

定理 4.2.15。 对于映射 $f\colon X \to Y$，*˘Cech* 神经的实现 $\mathrm{re}\check{\mathsf{C}}(f)$ 是 f 的像的实现 $\mathrm{reim} f$。若进一步 Y 是 0-骨架的，则 $\mathrm{re}\check{\mathsf{C}}(f) \simeq \mathrm{im} f$。

证明。 我们计算：

$$\begin{aligned}
\mathrm{re}\check{\mathsf{C}}(f) &\equiv \mathrm{re}((y:Y) \times \mathsf{csk}_0\, \mathsf{fib}_f(y)) \\
&\simeq \mathrm{re}((y:Y) \times \mathrm{re}\,\mathsf{csk}_0\, \mathsf{fib}_f(y)) \\
&\simeq \mathrm{re}((y:Y) \times \left\|\mathsf{fib}_f(y)\right\|) \\
&\equiv \mathrm{re}\,\mathrm{im} f.
\end{aligned}$$

现在，如果Y是 0-骨架的，那么根据 [47], im$f$ 的引理 8.17，im$f$ 也是 0-骨架的，因为它是一个 0-骨架类型的子类型。因此，$\mathrm{re}\,\mathrm{im} f \simeq \mathrm{im} f$，所以总而言之，$\mathrm{re}\,\check{\mathsf{C}}(f) \simeq \mathrm{im} f$。 □

作为切赫神经的一个应用，我们可以看到如何从高阶群的去环化中提取相干数据。若我们取包含 $\mathsf{pt}_{\mathbf{B}G} : * \to \mathbf{B}G$ 的切赫神经，其中该包含是G 解环的基点，我们就能得到一个单纯类型，其单纯恒等式为G 的乘法提供相干性。

命题4.2.16。 设 G 是一个清晰的 0-骨架高阶群——一个与带基点的 0-连通类型$\mathbf{B}G$的环路相识别的 0-骨架类型。于是

$$\check{\mathsf{C}}(\mathsf{pt}_{\mathbf{B}G})_n \simeq G^n.$$

此外，$d_1 : \check{\mathsf{C}}(\mathsf{pt}_{\mathbf{B}G})_2 \to \check{\mathsf{C}}(\mathsf{pt}_{\mathbf{B}G})_1$ 是投影d_0 和$d_2 : G^2 \to G$的乘积。

证明。 根据命题 4.2.13，我们知道

$$\begin{aligned}
\check{\mathsf{C}}(\mathsf{pt}_{\mathbf{B}G})_n &\simeq (e : \mathbf{B}G) \times ((x : *) \times (\mathsf{pt}_{\mathbf{B}G} * = e))^{n+1} \\
&\simeq (e : \mathbf{B}G) \times (\mathsf{pt}_{\mathbf{B}G} = e)^{n+1} \\
&\simeq (e : \mathbf{B}G) \times (\mathsf{pt}_{\mathbf{B}G} = e) \times (\mathsf{pt}_{\mathbf{B}G} = e)^{n} \\
&\simeq (\mathsf{pt}_{\mathbf{B}G} = \mathsf{pt}_{\mathbf{B}G})^{n} \\
&= G^n.
\end{aligned}$$

在倒数第二步中，我们收缩 $(e : \mathbf{B}G) \times (\mathsf{pt}_{\mathbf{B}G} = e)$。

现在表 $(e, (a, b, c)) \in \check{\mathsf{C}}(\mathsf{pt}_{\mathbf{B}G})_2$ 的分量是通过遗忘给出的 $(e)^{n+1}$。[h]因此，

$$\begin{aligned}
d_0(e, (a, b, c)) &= (e, (b, c)) \\
d_1(e, (a, b, c)) &= (e, (a, c)) \\
d_2(e, (a, b, c)) &= (e, (a, b))
\end{aligned}$$

消去e 和有序对的第一个元素后，我们得到三个方程

$$\begin{aligned}
d_0(ba^{-1}, ca^{-1}) &= cb^{-1} \\
d_1(ba^{-1}, ca^{-1}) &= ca^{-1} \\
d_2(ba^{-1}, ca^{-1}) &= ba^{-1}
\end{aligned}$$

并且确实有 $d_1(ba^{-1},\ ca^{-1}) = d_0(ba^{-1},\ ca^{-1})d_2(ba^{-1},\ ca^{-1})$。 这与标准表示等价，但并不完全相同。它相当于

$$\begin{aligned}
d_0(g, h) &= hg^{-1} \\
d_1(g, h) &= h \\
d_2(g, h) &= g.
\end{aligned}$$

□

˘利用切赫神经，我们可以提取支配高阶群同态的所有相干条件。首先注意，群的切赫神经的实现是它的解环。

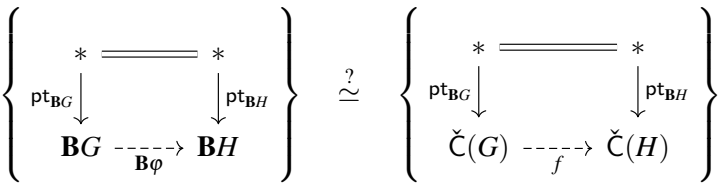
命题 4.2.17. 设G 是一个 0-骨架高阶群，其单纯清晰解环为$\mathbf{B}G$，并设˘$\mathsf{C}(G)$为基点嵌入 $\mathsf{pt}_{\mathbf{B}G} : * \to \mathbf{B}G$的˘切赫神经。那么，投影 $\mathsf{fst} : \check{\mathsf{C}}(G) \to \mathbf{B}G$ 是一个 re-单位。

证明。 根据 [34], $\mathbf{B}G$ 的定理 5.9，$\mathbf{B}G$ 是 0-骨架的。由公理 $\Delta\mathsf{sk}_0$, ，它因此是再模态的。因此，要证明 $\mathsf{fst} : \check{\mathsf{C}}(G) \to \mathbf{B}G$ 是 re- 单位，只需证明它是再连通的。由于 $\mathbf{B}G$ 是 0- 连通的，只需证明基点上的纤维是再连通的，而这个纤维等价于 $\mathsf{csk}_0 G$。这由定理 4.2.14 得出；$\mathsf{re}\ \mathsf{csk}_0 G$ 是可缩的。

□

命题 4.2.18。 设 G 和 H 是 0-骨架高阶群。那么，同态 $G \to H$ 的类型等价于基点映射 $\check{\mathsf{C}}(G) \cdot\!\to \check{\mathsf{C}}(H)$ 的类型。

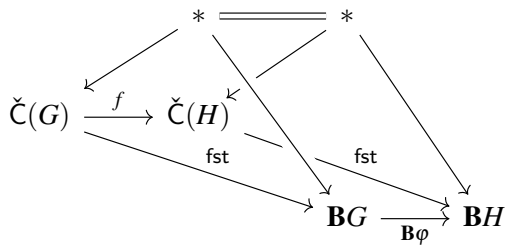
证明。 回想一下，高阶群的同态按定义是其解环之间的基点映射。也就是说，同态 $\varphi : G \to H$ 等价于左侧所示的图表，而切赫神经之间的基点映射则是右侧所示的图表：



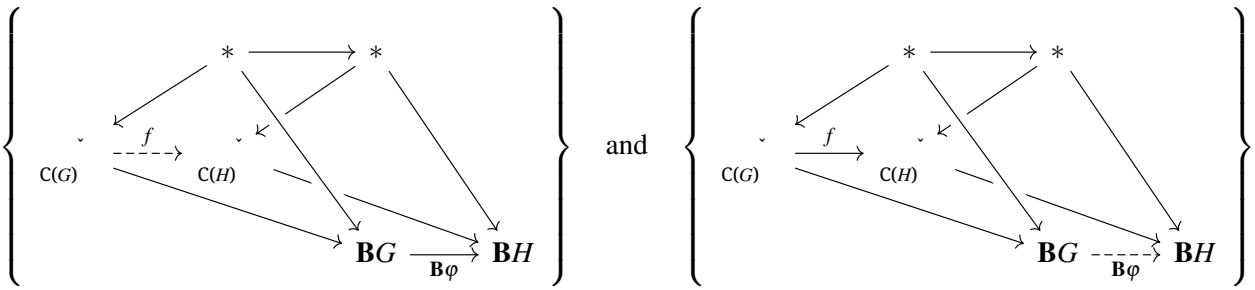
我们的目标是建立这两种类型之间的等价关系，并可将其表述为一一对应。因此，对于 $\mathbf{B}\varphi : \mathbf{B}G \to \mathbf{B}H$ 和 $\mathsf{pt}_{\mathbf{B}G} : \mathsf{pt}_{\mathbf{B}H} = \mathbf{B}\varphi(\mathsf{pt}_{\mathbf{B}G})$，以及 $f : \check{\mathsf{C}}(G) \to \check{\mathsf{C}}(H)$ 和 $\mathsf{pt}_f : \mathsf{pt}^{\check{\mathsf{C}}(H)} = f(\mathsf{pt}^{\check{\mathsf{C}}(G)})$，关联到以下类型

$$(\square : (x : \check{\mathsf{C}}(G)) \to (\mathbf{B}\varphi(\mathsf{fst}\, x) = \mathsf{fst}(fx))) \times (\mathsf{pt}_{\mathbf{B}\varphi} \cdot \square(\mathsf{pt}_{\check{\mathsf{C}}(G)}) = \mathsf{fst}_* \, \mathsf{pt}_f)$$

从图表角度来说，这就是见证以下图表交换的类型：

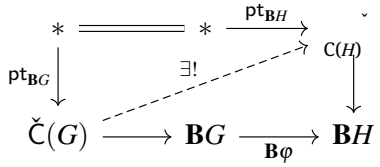


为了说明这一点给出了一一对应，我们需要证明图表类型



对于任意同态 φ，左侧和对于任意基点映射 f，右侧都可缩。

设 φ 是一个同态。根据定义，$\check{\mathsf{C}}(G)$ 和 $\check{\mathsf{C}}(H)$ 是基点嵌入的 csk_0-分解，因此这个方块存在唯一的填充：



但这恰好是左侧图表的重新排列。

同样，如果 f 是一个基点映射，那么 $\mathsf{re}f : \mathbf{B}G \to \mathbf{B}H$ 使右侧的图表交换；根据 re-单位的泛性质，这是唯一满足条件的映射。 □

4.3 全局等变凝聚

在《全局同伦论与凝聚》[41], 中，Rezk 证明了，全局等变同伦类型的 ∞-托普斯在同伦类型的 ∞-托普斯之上是凝聚的。Rezk 的位点由所有紧李群构成，而我们将效仿 Sati 和 Schreiber [43]，将关注范围限定在有限群上。全局轨道范畴 Glo 定义为由有限群 G 的解环$\mathbf{B}G$ 所张成的同伦类型全子范畴。这是一个 (2,1)-范畴，全局等变拓扑斯则定义为其上取值于同伦类型的预层的 ∞-范畴。

存在一个伴随　四元组，连接全局等变托普斯与同伦类型的托普斯　　：

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathscr{S}^{\mathsf{Glo}^{\mathrm{op}}} & & \\ & & \Delta \uparrow & \Gamma \downarrow & \nabla \uparrow \\ \mathsf{colim} \downarrow & & & & \\ & & \mathscr{S} & & \end{array}$$

• $\mathrm{colim}X$ 是函子$X : \mathrm{Gloop} \to \mathscr{S}$的余极限，该函子取全局等变同伦类型$X$的严格商 。

• ΔS 是常值函子的包含：　$\Delta X(\mathbf{B}G) :\equiv S$。我们将这类等变类型称为不变类型。

• $\Gamma X :\equiv X(*)$是在该点的求值。这称为全局等变同伦类型X的同伦商 。

• ∇S 是 Yoneda嵌入：　$\nabla S(\mathbf{B}G) :\equiv \mathscr{S}(\mathbf{B}G, S)$。

这个伴随四元组产生了等变凝聚的凝聚模态：$\dashv$　$\dashv$

• （“等变形状”）严格商模态$X \mapsto X$ 将整体等变类型映射到其严格商，并将其视为不变类型。

•（“等变平坦”）同伦商模态$X \mapsto X$ 将整体等变类型映射到其同伦商，并将其视为不变类型。内部而言，我们说，当一个等变锐类型是 -模态时，它是不变的。

•（“等变尖锐”）轨道奇异模态$X \mapsto X$ 将整体等变类型映射到其同伦商，但保留其自然等变性；这种等变性通过来自有限群解环的映射给出。

我们的全局等变凝聚公理相当直接：

公理 4（全局等变公理）。 将有限群 G 映射到 $\mathbf{B}G$ 的类型族 $\mathbf{B} :$ 有限群范畴 $\to$**类型** 可检测等变连续性和连通性。

有限群 G 对应的类型 $\mathbf{B}G$ 就是轨形奇点。根据上述定义，我们可以将$X(\mathbf{B}G)$（视为带有其自然等变性）恢复为（$\mathbf{B}G \to X$）。

注 4.3.1. 有限群 G 对应的族 $\mathbf{B}G$ 是一个大族，但注意到有限群的类型本质上是小的，我们可以将它缩减为一个小族。这一观察很有用，因为它使我们能够得出结论：将所有$\mathbf{B}G$零化所定义的模态是一个可及模态。

注 4.3.2. 全局等变凝聚与 Shulman 的连续实数凝聚有一个共同特点：二者都是可定义的，也就是说，在类型论中，无须公理，就能定义用于检测连续性和连通性的类型。单纯形凝聚则并非如此，它似乎需要假定存在 1-单形。我们尚不清楚可定义凝聚之间是否存在任何普遍的共同特点。

在适当轨形上同调 [43], 中，Sati 和 Schreiber 使用等变微分凝聚，对轨形的微分上同调作出抽象描述。我们可以在全局等变凝聚中轻易证明他们的一些引理；我们将在即将讨论的第6节.2 中证明有关等变凝聚与微分凝聚的引理。

以下引理作为 [43] 中的命题 3.62 出现。

引理 4.3.3。对于一般的轨形奇点 $\mathbf{B}G$，有以下等价关系：

$$\mathbf{B}G \simeq * \qquad \mathbf{B}G \simeq \mathbf{B}G \qquad \mathbf{B}G \simeq \quad \mathbf{B}G.$$

证明。第一个等价关系由假设 $\mathbf{B}G$ 能检测等变连通性得出。第二个等价关系结合 [47] 中的定理 6.22 即可得到$\mathbf{B}G \simeq \mathbf{B}G$，再结合 [34] 中的定理 5.9 可知，由于$G$ 是清晰的 -模态（作为一个有限集），$\mathbf{B}G$ 也如此。第三个等价关系不过是 的幂等性。 □

以下引理略微加强了 [43] 中的引理 3.65。

引理 4.3.4。设X 是一个等变清晰集合范畴。那么X 既是不变的（-模态），也是轨形奇异的（-模态）。

证明。在这两种情况下，我们都会用到$\mathbf{B}G$ 能检测等变连续性这一点。要证明X 是不变的，我们必须证明 -余单位是一个等价。根据定理 3.1.6，只需证明映射

$$(\quad \mathbf{B}G \to \quad X) \to \quad (\quad \mathbf{B}G \to X)$$

是一个等价。但 是一个 lex 模态，且 $\mathbf{B}G$ 是 0-连通的；因此，$\mathbf{B}G$ 是 0-连通的。此外，根据 [47] 的推论 6.7，X 是一个集合范畴，因为 X 是。因此，上述映射等价于 $\varepsilon : X \to X$，而这也是一个等价。

同样，要证明X 是 orbi-singular，只需证明该映射

$$(\quad \mathbf{B}G \to X) \to \quad (\mathbf{B}G \to X)$$

由与$\mathbf{B}G$ 的 -余单位进行预合成给出，是一个等价。但同样，由于$\mathbf{B}G$ 和$\mathbf{B}G$的连通性，该映射等价于恒等映射 $X \to X$，而这也是一个等价。 □

注 4.3.5. Miller 定理（原称 Sullivan 猜想）指出，当G是有限群且X 是有限 CW 复形时，映射空间$\mathbf{B}G \to X$ 等价于X。用等变模态术语来说，这意味着有限 CW 复形（类 $\{/0, *\}$ 在推出下的闭包）是 -模态的。这个定理不太可能仅凭模态方面的论证证明出来。不过，如果 Miller 定理能在普通 HoTT 中得到证明，那么就可以用与引理 4.3.4 类似的方法证明这个模态陈述，只需将对X截断性的诉诸改为诉诸 Miller 定理的证明（因为任何清晰的有限 CW 复形都是类型的清晰推出，因而是 -模态的）。

4.4 拓扑托普斯

Johnstone 定义了自己的拓扑托普斯，旨在 [25]提供一个空间托pos，使单纯集合的几何实现成为几何态射。使用实凝聚托pos 来实现这一目的（正如 Lawvere 先前所建议的）存在一个问题：解析较弱有限全知原理不成立。该原理指出 $\mathbb{R}_D = (-\infty, \ 0] \cup [0, \infty)$（参见 [47] 的定理 11.7 以及同上第 8.3 节中的讨论）。这一原理不成立意味着，沿着单形的（闭）面粘合单形，会在所得空间上产生错误的拓扑。

Johnstone 通过将测试空间从实数改为游走收敛序列$\mathbb{N}_\infty$来解决这一问题。游走收敛序列可在内部定义为单调函数的集合 $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$（例如参见 [20]）。因此，为 Johnstone 的托普斯给出内部公理化相当直接。

公理 5 （拓扑焦点）。 拓扑焦点由断言 $\mathbb{N}_\infty$ 能检测拓扑连续性来确定。

我们或许也能像 [19] 那样确定凝聚同伦类型——或者说，确定 [10] 中类似但更偏向托普斯论的 pyknotic 同伦类型——只需使用一个类似的公理。将有限拟群定义为以带可判定序的离散（$\flat$-模态）偏序集为指标的清晰有限集图表的极限。于是，我们可以断言，有限拟群族能够检测凝聚连续性。

然而，我们不知道这些公理是否足以用于证明这些拓扑托普斯中的定理。

5 多个焦点

现在，我们来探讨不同焦点之间可能存在的关系的一般情形。本节中，固定两个焦点$\heartsuit$ 和 $\clubsuit$。首先，我们应证明这两个焦点确实可交换：

命题 5.0.1。 对于任意类型 B，映射 $\sharp_\heartsuit\sharp_\clubsuit B \to \sharp_\clubsuit\sharp_\heartsuit B$ 定义如下：

$$x \mapsto x_{\sharp_\heartsuit\sharp_\clubsuit}{}^{\sharp_\heartsuit\sharp_\clubsuit}$$

is a等价。此外，映射 $\sharp_\heartsuit\sharp_\clubsuit B \to \sharp_{\heartsuit\clubsuit} B$ 和 $\sharp_\clubsuit\sharp_\heartsuit B \to \sharp_{\heartsuit\clubsuit} B$ 定义如下

$$x \mapsto x_{\sharp_\heartsuit\sharp_\clubsuit}{}^{\sharp_{\heartsuit\clubsuit}}$$
$$x \mapsto x_{\sharp_\clubsuit\sharp_\heartsuit}{}^{\sharp_{\heartsuit\clubsuit}}$$

也都是等价映射。

证明。第一个映射是良定义的，因为使用 $\sharp_\heartsuit$-和 $\sharp_\clubsuit$-引入意味着假设x对和$\clubsuit$都变得清晰，因此我们可以对它应用 $\sharp_\heartsuit$-，然后再应用 $\sharp_\clubsuit$-消去。类似地，我们可以将逆映射定义为

$$x \mapsto x_{\sharp_\clubsuit\sharp_\heartsuit}{}^{\sharp_\clubsuit\sharp_\heartsuit}.$$

根据 $\sharp$s 的计算规则，这些映射互为定义性逆映射。

其他映射也同样是良定义的，因为对$\heartsuit$ 和$\clubsuit$ 都清晰，意味着对焦点$\heartsuit\clubsuit$清晰。逆映射可以直接定义。 □

我们还注意到，焦点的排序反映在其 $\sharp$-模态（因而也包括 $\flat$-模态）类型的包含关系中。

推论 5.0.2. 假设 $\clubsuit \leq \heartsuit$。那么，任何 $\sharp_\clubsuit$-模态类型都是 $\sharp_\heartsuit$-模态的。

证明。 由于 $\clubsuit \leq \heartsuit$ 定义为 $\heartsuit\clubsuit \equiv \clubsuit$，我们知道 $\sharp_{\heartsuit\clubsuit} A \equiv \sharp_\clubsuit A$。根据假设 $\sharp_\clubsuit A \simeq A$，再将其与命题 5.0.1 的交换等价连接起来

$$\sharp_\heartsuit A \simeq \sharp_\heartsuit\sharp_\clubsuit A \simeq \sharp_{\heartsuit\clubsuit} A \equiv \sharp_\clubsuit A \simeq A.$$

Tra将这些简单的等价关系依次代入，确实得到了一个逆，作为 $\sharp_\heartsuit$-单位 . □

我们也可以类似地证明 $\flat$彼此交换。借助清晰归纳，这会更简单 .

命题 5.0.3. 设 A 是一个 $\heartsuit\clubsuit$-清晰类型。那么 $\flat_\heartsuit\flat_\clubsuit A \to \flat_\clubsuit\flat_\heartsuit A$ 定义为

$$u \mapsto \mathsf{let}\ v^{\flat_\heartsuit} := u\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ w^{\flat_\clubsuit} := v\ \mathsf{in}\ (w^{\flat_\heartsuit})^{\flat_\clubsuit})$$

是一个等价，并且关于A自然。

证明。换言之，该映射定义如下。对 $\mathrm{u} : \flat_\heartsuit \flat_\clubsuit \mathrm{A}$ 做 $\flat_\heartsuit$-归纳，可得假设 $\mathrm{v} : \flat_\heartsuit \flat_\clubsuit \mathrm{A}$。然后对项 $\mathrm{v} : \flat_\clubsuit \mathrm{A}$ 再做一次归纳，可得假设 $\mathrm{w} : \heartsuit_\clubsuit \mathrm{A}$。第二次归纳是“$\heartsuit$-清晰 $\flat_\clubsuit$-归纳”：所得假设 w 继承了项 v 的 $\heartsuit$-清晰性，并因移除 $\flat_\clubsuit$ 而获得 $\clubsuit$-清晰性。最后，我们通过两次应用 $\flat$-引入构造出 $(\mathrm{w}^{\flat_\heartsuit})^{\flat_\clubsuit}$。反方向的映射也以相同方式构造，而证明这两个映射互为逆，只需分别再做两组归纳即可。

□

我们还注意到，$\flat$-归纳彼此交换。

引理 5.0.4. $\flat_\heartsuit$-归纳和 $\flat_\clubsuit$-归纳彼此交换：

$$\mathsf{let}\ u^{\flat_\clubsuit} := (\mathsf{let}\ v^{\flat_\heartsuit} := M\ \mathsf{in}\ N)\ \mathsf{in}\ C = \mathsf{let}\ v^{\flat_\heartsuit} := M\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ u^{\flat_\clubsuit} := N\ \mathsf{in}\ C)$$

（当此式类型正确时，即v 不出现在C中。）

证明。 首先利用 $\flat_\clubsuit$的唯一性，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathsf{let}\ u^{\flat_\clubsuit} := (\mathsf{let}\ v^{\flat_\heartsuit} := M\ \mathsf{in}\ N)\ \mathsf{in}\ C \\
&= \mathsf{let}\ w^{\flat_\heartsuit} := M\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ u^{\flat_\clubsuit} := (\mathsf{let}\ v^{\flat_\heartsuit} := w^{\flat_\heartsuit}\ \mathsf{in}\ N)\ \mathsf{in}\ C) \\
&\equiv \mathsf{let}\ w^{\flat_\heartsuit} := M\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ u^{\flat_\clubsuit} := N[w/v]\ \mathsf{in}\ C) \\
&\equiv \mathsf{let}\ v^{\flat_\heartsuit} := M\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ u^{\flat_\clubsuit} := N\ \mathsf{in}\ C)
\end{aligned}$$

□

5.1 交换的凝聚

现在让我们来关注两个彼此交换的凝聚之间的关系。

引理 5.1.1. 假设 $\heartsuit$ 和 $\clubsuit$ 均为凝聚的。若一个 $\heartsuit\clubsuit$-清晰类型 A 是 $\flat_\heartsuit$-模态的，那么 $\int_\clubsuit A$ 仍然是$\flat_\heartsuit$-模态的。

证明。 我们需要为余单位构造一个逆 $\varepsilon_\heartsuit : \flat_\heartsuit \int_\clubsuit A \to \int_\clubsuit A$。首先构造复合映射

$$A \xrightarrow{s} \flat_\heartsuit A \xrightarrow{\flat_\heartsuit \eta_\clubsuit} \flat_\heartsuit \int_\clubsuit A$$

其中 $A \xrightarrow{s} \flat_\heartsuit A$ 是所假设的 $\varepsilon_\heartsuit : \flat_\heartsuit A \to A$ 的逆。

类型 $\flat_\heartsuit \int_\clubsuit A$ 显然是 $\flat_\clubsuit$-模态的，因为 $\flat_\heartsuit$ 与 $\flat_\clubsuit$的交换性：

$$\flat_\clubsuit \flat_\heartsuit \int_\clubsuit A \simeq \flat_\heartsuit \flat_\clubsuit \int_\clubsuit A \simeq \flat_\heartsuit \int_\clubsuit A$$

因此，上述映射经由 $i\colon \int_\clubsuit A \to \flat_\heartsuit \int_\clubsuit A$ 分解，这就是我们所设想的逆 .

对于一个方向，考虑余单位的自然性方块 $\varepsilon_\heartsuit$:

$$\begin{array}{ccc}
\flat_\heartsuit \int_\clubsuit A & \xrightarrow{\flat_\heartsuit i} & \flat_\heartsuit \flat_\heartsuit \int_\clubsuit A \\
{\scriptstyle \varepsilon_\heartsuit}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_\heartsuit} \\
\int_\clubsuit A & \xrightarrow[i]{} & \flat_\heartsuit \int_\clubsuit A
\end{array}$$

映射 $\flat_\heartsuit i$ 等于余乘法 $\delta_\heartsuit : \flat_\heartsuit A \to \flat_\heartsuit \flat_\heartsuit A$，它由 $a^{\flat_\heartsuit} \mapsto a^{\flat_\heartsuit \flat_\heartsuit}$定义，因为二者都是映射 $\flat_\heartsuit \varepsilon_\heartsuit : \flat_\heartsuit \flat_\heartsuit A \to \flat_\heartsuit A$的逆。因此，方形图中的底部复合映射等于 $\varepsilon_\heartsuit \circ \delta_\heartsuit$，也就是恒等映射。

I在另一个方向，由于 $\int_\clubsuit A$ 是 $\int_\clubsuit$-模态，因此只需证明复合映射

$$A \to \int_\clubsuit A \to \flat_\heartsuit \int_\clubsuit A \to \int_\clubsuit A$$

等于单位映射 $\eta_\clubsuit : A \to \int_\clubsuit A$。为此，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\sim} & \flat_\heartsuit A & \xrightarrow{\varepsilon_\heartsuit} & A \\ {\scriptstyle \eta_\clubsuit}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \flat_\heartsuit \eta_\clubsuit} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_\clubsuit} \\ \int_\clubsuit A & \xrightarrow[i]{} & \flat_\heartsuit \int_\clubsuit A & \xrightarrow[\varepsilon_\heartsuit]{} & \int_\clubsuit A \end{array}$$

左侧方块根据 i 的定义交换，右侧方块根据 $\varepsilon_\heartsuit$ 的自然性交换，而沿顶部的复合映射是恒等映射。

□

引理 5.1.2。 假设 ♥ 和 ♣ 都凝聚。那么对于任意 $\int_\heartsuit \int_\clubsuit A \to \int_\clubsuit \int_\heartsuit A$，它都是一个等价♥♣-清晰类型 A。

证明。 映射 $\eta_\clubsuit \circ \eta_\heartsuit : A \to \int_\heartsuit A \to \int_\clubsuit \int_\heartsuit A$ 经由 $\int_\heartsuit \int_\clubsuit A$分解，因为 $\int_\clubsuit \int_\heartsuit A$ 是 $\flat_\clubsuit$-模态的，因为它是形如 $\flat_\clubsuit X$的类型；根据前一个引理，它也具有 $\flat_\heartsuit$-模态性。反向映射的定义类似。要证明这两个映射互为逆映射，只需证明它们与单位映射的复合映射进行前复合后互为逆映射，因为$\int_\clubsuit \int_\heartsuit A$和 $\int_\heartsuit \int_\clubsuit A$ 都是♥♣-离散的；根据映射的定义，这一点显然成立。

□

我们或许也会希望，例如， $\flat_\heartsuit$ 和 $\int_\clubsuit$ 一般而言是可交换的，但有一个有用的合理性检查表明这是不可能的。在没有公理的裸类型论中，没有任何东西会阻止我们在一个模型中进行解释，使得 $\flat_\heartsuit \equiv \flat_\clubsuit$ 和 $\int_\heartsuit \equiv \int_\clubsuit$。在普通凝聚类型论中， $\flat$ 和 $\int$ 并不可交换，因此 $\flat_\heartsuit \int_\clubsuit \simeq \int_\clubsuit \flat_\heartsuit$ 若不对♥ 和 ♣作出进一步假设，就无法证明。

足够的 关于我们的焦点、足以使 $\flat_\heartsuit$ 和 $\int_\clubsuit$ 以这种方式可交换的假设如下 g:

定义 5.1.3. 假设$G : _\heartsuit{}_\clubsuit\ I \to$ **类型** 和 $H : _\heartsuit{}_\clubsuit\ J \to$**类型** 分别检测♥ 和 ♣ 连通性。我们称焦点♥ 和 ♣ 为正交，当且仅当G_i 对所有 $\flat_\clubsuit$-模态，且i均成立，并且H_j 对所有 $\flat_\heartsuit$-模态j均成立。

当前目标是证明这确实使得 $\flat_\heartsuit \int_\clubsuit \simeq \int_\clubsuit \flat_\heartsuit$。实际上，我们只会用到 G_i 是$\flat_\clubsuit$-模态的；当然，对偶结果（将♥ 和♣对调）则需要正交性的另一半。

引理 5.1.4. 设 ♥ 和 ♣ 是正交的凝聚焦点。那么对于任意 ♣-清晰的 A，如果A 是 $\int_\heartsuit$-模态的，$\flat_\clubsuit A$仍然是$\int_\heartsuit$-模态的。

证明。 我们的目标是证明 $\flat_\clubsuit A$ 与 $G_i \to \flat_\clubsuit A$ 通过对 $G_i \to 1$进行前复合而等价；对于任意 $i : I$。我们很容易验证类型 $G_i \to \flat_\clubsuit A$ 是 ♣-离散的：对于任意 H_j，

$$\begin{aligned} H_j \to (G_i \to \flat_\clubsuit A) &\simeq H_j \to (G_i \to \flat_\clubsuit A) \\ &\simeq G_i \to (H_j \to \flat_\clubsuit A) \\ &\simeq G_i \to \flat_\clubsuit A \end{aligned}$$

因为 $\flat_\clubsuit A$ 是♣-离散的。于是，由 $\int_\clubsuit$ 与 $\flat_\clubsuit$的伴随性：

$$\begin{aligned} (G_i \to \flat_\clubsuit A) &\simeq \flat_\clubsuit (G_i \to \flat_\clubsuit A) \\ &\simeq \flat_\clubsuit (\int_\clubsuit G_i \to A) \\ &\simeq \flat_\clubsuit (G_i \to A) \\ &\simeq \flat_\clubsuit A \end{aligned}$$

□

命题 5.1.5 (清晰 $\int_{♥}$-归纳)。 假设♥ 与♣ 都是凝聚且正交的。如果B 是♥-离散的，并且是♣-清晰的，那么对于任意♣-清晰的A 该映射

$$\flat_{♣}(\flat_{♣}\int_{♥}A \to B) \to \flat_{♣}(\flat_{♣}A \to B)$$

由前复合 $\flat_{♣}\eta_{♥}$： $\flat_{♣}A \to \flat_{♣}\int_{♥}A$ 是一个等价。

注记 5.1.6。 通常，清晰 ∫-归纳会写成：

$$\frac{♣ \setminus \Gamma, x :_{♣} \int_{♥}A \vdash C \qquad ♣ \setminus \Gamma, x :_{♣} \int_{♥}A \vdash w : \text{is-}\flat_{♥}\text{-modal}(C) \qquad ♣ \setminus \Gamma \vdash M : \int_{♥}A \qquad ♣ \setminus \Gamma, u :_{♣} A \vdash N : C[u^{\int_{♥}}/x]}{\Gamma \vdash (\text{let } u^{\int_{♥}} := M \text{ in } N) : C[M/x]}$$

证明。 我们采用推导清晰归纳原理的常用技巧：使用 $\sharp_{♣}$ 来移开 $\flat_{♣}$。关键在于，前一个命题使我们能够将 $\int_{♥}$ 的泛性质应用于映射到 $\sharp_{♣}B$。

$$\begin{aligned}\flat_{♣}(\flat_{♣}\int_{♥}A \to B) &\simeq \flat_{♣}(\int_{♥}A \to \sharp_{♣}B)\\ &\simeq \flat_{♣}(A \to \sharp_{♣}B)\\ &\simeq \flat_{♣}(\flat_{♣}A \to B)\end{aligned}$$

□

命题 5.1.7。 若♥ a nd ♣ 是正交的凝聚焦点，则 $\int_{♥}$ 和 $\flat_{♣}$ 在 ♣-清晰类型上可交换。

证明。 现在只需分别沿 $\int_{♥}$ 和 $\flat_{♣}$ 进行归纳，双向推导；定义 $\int_{♥}$时使用清晰 $\flat_{♣}\int_{♥}A \to \int_{♥}\flat_{♣}A$ -归纳，并在定义 $\int_{♥}\flat_{♣}A \to \flat_{♣}\int_{♥}A$ 时使用引理 5.1.4，以知 $\flat_{♣}\int_{♥}A$ 是 ♥-离散的。 □

推论 5.1.8。 如果 ♥ 和 ♣ 是正交的凝聚焦点，那么 $\flat_{♥}$ 和 $\sharp_{♣}$ 在 ♥♣-清晰类型上可交换。

证明。 在 ♥♣-清晰类型上， $\flat_{♥}\sharp_{♣}$ 是 $\flat_{♣}\int_{♥}$的右伴随，并且 $\sharp_{♣}\flat_{♥}$ 是 $\int_{♥}\flat_{♣}$的右伴随。因此，如果 $\flat_{♣}\int_{♥}X \simeq \int_{♥}\flat_{♣}$ 对于一个 ♥♣-清晰类型 X成立，那么 $\flat_{♥}\sharp_{♣}X \simeq \sharp_{♣}\flat_{♥}$也成立。 □

接下来我们考察 $\int$ 与 $\sharp$之间的关系。同样，这取决于检测两个焦点的连续性和连通性的那些族之间的关系。

命题 5.1.9. 假设♣ 是凝聚的，并且满足以下条件：

1. $H :_{♥♣} I \to$**类型** 能够检测♣-连通性，并且I 是 $\flat_{♥}$-模态的。
2. H_i 是 $\flat_{♥}$-模态的，对所有i：$_{♥} I$。（特别是，如果♥ 和♣ 正交）

那么，如果X 是 $\int_{♣}$-模态的，则 $\sharp_{♥}X$ 也 $\int_{♣}$-模态。

证明。 由于H 能够检测♣-连通性，只需证明 $\sharp_{♥}\int_{♣}X$ 对于每个H_i-零，且i： I均成立。由于I 是 $\flat_{♥}$-模态的，我们可以假设i：$_{♥} I$ 由♥-清晰归纳 $\flat_{♥}$-成立。于是可以计算：

$$\begin{aligned}(H_i \to \sharp_{♥}X) &\simeq \sharp_{♥}(H_i \to \sharp_{♥}X)\\ &\simeq \sharp_{♥}(\flat_{♥}H_i \to X)\\ &\simeq \sharp_{♥}(H_i \to X) && \text{由于}H_i \text{ 被假设为 } \flat_{♥}\text{-模态的}\\ &\simeq \sharp_{♥}X && \text{因为}X \text{ 是 } \int_{♣}\text{-模态}\end{aligned}$$

沿着这一系列等价关系向上追溯，可以看出该复合映射确实是常值函数的包含。

□

在正交性的另一极端，我们可以看到，如果G_i（用于检测 ♥ 的连通性）是$\int_{\clubsuit}$-连通的，那么任意 $\int_{\clubsuit}$-模态类型都是 $\int_{\heartsuit}$-模态的。

命题 5.1.10。 假设 ♥ 和 ♣ 是凝聚焦点，其中 $G : I \to$ **类型** 检测 ♥的连通性。那么以下条件等价：

1. 每个G_i 都是 $\int_{\clubsuit}$-连通的。
2. 任意$\int_{\clubsuit}$-模态类型都是 $\int_{\heartsuit}$-模态的。

Proof。 假设 G_i 是 $\int_{\clubsuit}$-连通的，对所有i 均成立，并且 X 是 $\int_{\clubsuit}$-模态的。我们可以计算 ：

$$(1 \to X) \simeq (\textstyle\int_{\clubsuit} G_i \to X) \simeq (G_i \to X)$$

第一个等价中，我们利用 G_i 是 $\int_{\clubsuit}$-连通的；第二个等价中，我们利用 X 是 $\int_{\clubsuit}$-模态的。由此可得 X是 $\int_{\heartsuit}$-模态的。

反过来，假设任意 $\int_{\clubsuit}$-模态类型都是 $\int_{\heartsuit}$-模态的。那么特别地 $\int_{\clubsuit} G_i$ 是 $\int_{\heartsuit}$-模态的，因此恒等映射 $\int_{\clubsuit} G_i \to \int_{\clubsuit} G_i$ 可分解为经过 $\int_{\heartsuit}\int_{\clubsuit} G_i$。但根据引理 5.1.2，我们有

$$\textstyle\int_{\heartsuit}\int_{\clubsuit} G_i \simeq \int_{\clubsuit}\int_{\heartsuit} G_i \simeq \int_{\clubsuit} * \simeq *.$$

因此， $\int_{\clubsuit} G_i$ 的恒等映射经由该点分解，这意味着它是可缩的 . □

6 具有多个焦点的示例

在本节中，我们将看到具有多个焦点的示例。具体而言，我们将介绍单纯实凝聚、等变微分凝聚和超几何凝聚。

6.1 单纯实凝聚

我们假设有两个基本焦点：实焦点（连续或微分焦点） $\int \dashv \flat \dashv \sharp$，以及单纯形焦点 $\mathrm{re} \dashv \mathrm{sk}_0 \dashv \mathrm{csk}_0$。对于实凝聚焦点所使用的任何一种实数，我们都将记作 $\mathbb{R}$ 。

我们将同时假设实凝聚公理和单纯形凝聚公理，以及以下联系这两个焦点的公理。

公理 6 （单纯实凝聚）。 我们假设实焦点与单纯形焦点正交——也就是说， $\mathbb{R}$ 是 0-骨架的，而 $\Delta[1]$是离散的。此外，我们假设逐点计算 $\int$ ：对于任意单纯尖锐类型 X， $\int$-单位在 X的 n-单形上的作用 $(\eta_\int)_n \colon X_n \to (\int X)_n$本身就是一个 $\int$-单位。

本节的目标是证明：如果M 是一个 0-骨架类型——可将其视为一个“流形”，它只有实凝聚结构而没有单纯结构——并且U 是M 的一个良覆盖 ，其中只要有限交非空，它们就是 $\int$-连通的，那么M 的同伦类型 $\int M$ 就可以构造为一个离散单纯集合的实现——具体来说，就是该开覆盖的切赫神经，并将每个开集替换为点。

定义 6.1.1。 设M 是一个 0-骨架类型。覆盖 M 由一个离散 0-骨架指标集I以及一个族$U : I \to (M \to$ **命题**$)$组成，其中的元素是M 的子对象，并且对每个$m : M$ ，都仅仅存在一个$i : I$ 使得$m \in U_i$。我们可以将一个覆盖组装成单个满射 $c : \coprod_{i:I} U_i \to M$，其中

$$\coprod_{i:I} U_i :\equiv (i : I) \times (m : M) \times (m \in U_i).$$

覆盖$U : I \to (M \to$ **命题**$)$称为良覆盖 ，如果对任意$n : \mathbb{N}$ 以及任意$k : [n] \to I$，交集的 $\int$-形状

$$\bigcap_{i:[n]} U_{k(i)} :\equiv (m : M) \times ((i : [n]) \to (m \in U_{k(i)})).$$

是一个命题。也就是说，只要交集中存在元素， $\int(U_{k(0)} \cap \cdots \cap U^{k(n)})$ 就是可缩的。

我们先介绍几个基础引理。

引理 6.1.2. 设 $U : I \to (M \to \textbf{命题})$ 是一个单纯形清晰覆盖，且 $c : \bigsqcup_{i:I} U_i \to M$ 是相应的覆盖映射。考虑投影 $\pi : \check{C}(c) \to \mathrm{csk}_0 I$，其定义为 $(m,z) \mapsto (\mathrm{fst}\ z^{\mathrm{csk}_0})^{\mathrm{csk}_0}$。对于一个单纯形清晰的 n-单纯形 $k : \Delta[n] \to \mathrm{csk}_0 I$，我们有

$$\mathrm{fib}_{\pi_n}(k^{\mathrm{sk}_0}) \simeq \bigcap_{i:[n]} U_{k(i_{\mathrm{sk}_0})}.$$

作为推论，我们有

$$\check{C}(c)_n \simeq (k : I^{[n]}) \times \bigcap_{i:[n]} U_{k(i)}.$$

证明。 我们计算：

$$\begin{aligned}
\mathrm{fib}_{\pi_n}(k^{\mathrm{sk}_0}) &\equiv (x : \check{C}(c)_n) \times (\pi_n x = k^{\mathrm{sk}_0}) \\
&\simeq ((m,z) : (m : M) \times ((i : I) \times (m \in U_i))^{[n]}) \times (\pi_n e(m,z) = k^{\mathrm{sk}_0}) \\
&\simeq (m : M) \times (K : [n] \to I) \times (p : (i : [n]) \to (m \in U_{K(i)})) \times (\pi_n e(m, i \mapsto (K(i), p)) = k^{\mathrm{sk}_0})
\end{aligned}$$

这里，$e(m,z)$ 是经由命题 4.2.13 中的等价得到的像。当所有模态尘埃落定后，我们将得到：$\pi_n e(m, i \mapsto (K(i), p)) : \mathrm{sk}_0(\Delta[n] \to \mathrm{csk}_0 I)$ 是伴随 $\mathrm{sk}_0 \dashv \mathrm{csk}_0$ 下对应于 $K : [n] \to I$ 的唯一对象。因此，我们可以在上述类型中利用 k^{sk_0} 将 K 消去，得到：

$$\simeq (m : M) \times ((i : [n]) \to m \in U_{k(i_{\mathrm{sk}_0})}).$$

□

对于接下来的引理，我们需要知道，在适当的清晰类型上，$\int$ 与 csk_0 交换。

定理 6.1.3。 对于任意单纯尖锐类型 X，我们有 $\int \mathrm{csk}_0 X \simeq \mathrm{csk}_0 \int X$。

证明。 由命题 5.1.9，我们知道 $\mathrm{csk}_0 \int X$ 是 $\int$-模态的。因此，我们有一个映射 $\int \mathrm{csk}_0 X \to \mathrm{csk}_0 \int X$，它由 $\mathrm{csk}_0(-)^{\int} : \mathrm{csk}_0 X \to \mathrm{csk}_0 \int X$ 的唯一因子给出。我们将证明这个映射是一个等价。由于它是清晰的，只需证明它在n-单形上是一个等价。为此，我们计算：

$$\begin{aligned}
\mathrm{sk}_0(\Delta[n] \to \int \mathrm{csk}_0 X) &\simeq \int \mathrm{sk}_0(\Delta[n] \to \mathrm{csk}_0 X) \\
&\simeq \int \mathrm{sk}_0([n] \to X) \\
&\simeq \mathrm{sk}_0(\int([n] \to X)) \\
&\simeq \mathrm{sk}_0([n] \to \int X) \\
&\simeq \mathrm{sk}_0(\Delta[n] \to \mathrm{csk}_0 \int X)
\end{aligned}$$

剩下要证明的是，这确实是正确的等价。由于上面序列中的第一个等价由 $(-)^{\int}_n : (\mathrm{csk}_0 X)_n \to (\int \mathrm{csk}_0 X)_n$ 的逆给出，因此只需检查：给定一个清晰的 $z : \Delta[n] \to \mathrm{csk}_0 X$，$(z^{\mathrm{sk}_0})^{\int}$ 在上述等价下对应于 $(\mathrm{csk}_0(-)^{\int} \circ z)^{\mathrm{sk}_0}$。首先，我们将 $(z^{\mathrm{sk}_0})^{\int}$ 发送到 $((z \circ (-)_{\mathrm{sk}_0})^{\mathrm{sk}_0})^{\int}$。然后，将其发送到 $((z \circ (-)_{\mathrm{sk}_0})^{\int})^{\mathrm{sk}_0}$，再发送到 $(i \mapsto (z(i_{\mathrm{sk}_0})^{\int}))^{\mathrm{sk}_0}$。最后，我们将其映射到 $(i \mapsto ((z(i^{\mathrm{sk}_0} \mathrm{sk}_0)^{\int}))^{\mathrm{csk}_0 \mathrm{sk}^0},$，这确实等于 $(\mathrm{csk}_0(-)^{\int} \circ z)(i) \equiv (z(i)^{\int})^{\mathrm{csk}_0}$，其中 $i : \Delta[n]$。

□

引理 6.1.4. 设 $U : I \to (M \to \textbf{Prop})$ 是一个单纯形清晰覆盖，并设 $c : \bigsqcup_{i:I} U_i \to M$ 是覆盖映射本身。考虑由 $(m,z) \mapsto (\mathrm{fst}\ z^{\mathrm{csk}_0})^{\mathrm{csk}_0}$ 定义的“投影” $\pi : \check{C}(c) \to \mathrm{csk}_0 I$。那么，<style id='U'>U 是良覆盖，当且仅当限制映射 $\pi : \check{C}(c) \to \mathrm{im}\pi$ 是一个 $\int$-单位。

证明. 由于 csk_0 和 $\int$ 根据定理 6.1.3 交换，且 I 是离散的，因此 $\mathrm{csk}_0 I$ 也是离散的。作为离散类型的子类型，$\mathrm{im}\pi$ 是离散的。因此，只需证明 $\pi : \check{\mathsf{C}}(c) \to \mathrm{im}\pi$ 当且仅当覆盖 U 是良覆盖时，才诱导等价 $\int \check{\mathsf{C}}(c) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}\pi$。由于 π 清晰，$\int \check{\mathsf{C}}(c) \to \mathrm{im}\pi$ 是等价，当且仅当它在所有 n-单形上都是等价。在 n-单形上，此映射（位于下图顶部）等价于下图底部的映射：

$$
\begin{array}{ccc}
(\int \check{\mathsf{C}}(c))_n & \longrightarrow & (\mathrm{im}\pi)_n \\
\| & & \| \\
\int (\check{\mathsf{C}}(c)_n) & \longrightarrow & \mathrm{im}\pi_n \\
\| & & \| \\
\int \left((k : I^{[n]}) \times \bigcap_{i:[n]} U_{k(i)} \right) & & \| \\
\| & & \| \\
(k : I^{[n]}) \times \int \left(\bigcap_{i:[n]} U_{k(i)} \right) & \longrightarrow & (k : I^{[n]}) \times \exists \bigcap_{i:[n]} U_{k(i)}
\end{array}
$$

当且仅当覆盖是良覆盖时，底部映射才是等价，因此我们得出顶部映射也有同样的结论。

□

最后，我们可以将这些引理结合起来，得到我们的结果。

定理 6.1.5. 设 $U : I \to (M \to \mathbf{Prop})$ 是一个 *0*-骨架类型 M 的单纯清晰良好覆盖。令 $\pi : \check{\mathsf{C}}(U) \to \mathrm{csk}_0 I$ 为投影。那么

$$\mathrm{re}\,\mathrm{im}\pi \simeq \int M.$$

这表明形状 $\int M$ 是一个离散（单纯）集合的实现。

证明。 由于覆盖是良覆盖，我们有 $\mathrm{im}\pi \simeq \int \check{\mathsf{C}}(U)$，因此

$$\mathrm{re}\,\mathrm{im}\pi \simeq \mathrm{re} \int \check{\mathsf{C}}(U) \simeq \int \mathrm{re}\,\check{\mathsf{C}}(U) \simeq \int M.$$

现在，由于 I 是一个集合范畴，且 csk_0 是一个 lex 模态，$\mathrm{csk}_0 I$ 也是一个集合范畴，因此 $\mathrm{im}\pi$ 也是一个集合范畴。此外，由于离散类型的子类型是离散的（见 [47], 的引理 8.17），且 $\mathrm{csk}_0 I$ 是离散的（因为根据定理 6.1.3 $\int$，csk_0 与单纯清晰类型上的操作可交换），$\mathrm{im}\pi$ 是离散的。 □

6.2 等变微分凝聚

在适当轨形上同调中，Sati 和 Schreiber 运用等变微分凝聚来描述轨形的微分上同调。这种凝聚同时涉及等变焦点 $\dashv \quad \dashv$ 和微分（实凝聚）焦点 $\int \dashv \flat \dashv \sharp$。本节中，我们将假定等变凝聚和微分实凝聚的公理均成立。我们用 $\mathbb{R}$表示光滑实数。

与单纯实凝聚情形不同，我们无需添加额外公理来确保等变凝聚与微分凝聚彼此正交。

引理 6.2.1。 等变凝聚与微分凝聚彼此正交。也就是说：

1. 光滑实数 $\mathbb{R}$ 是不变的（ -模态）。
2. 对任意有限群G，$\mathbf{B}G$ 是离散的（$\flat$-模态）。

证明。 由于光滑实数是一个集合范畴，因此根据引理 4.3.4，它们是不变的。同理，由于$\mathbf{B}G$是离散的，因而是 $\int$-模态的（根据 [34]的定理 5.9），所以$\mathbf{B}G$ 仍然是 $\int$-模态的，这是命题 5.1.9 的结论。 □

以下引理作为 [43], 的引理 3.67 出现，并可利用我们关于正交凝聚的一般引理迅速证明。

引理 6.2.2。 假设X 既是微分清晰的，也是等变清晰的。那么

$$\int X \simeq \int \ X \qquad \flat X \simeq \flat \ \ \flat X \qquad \sharp X \simeq \sharp \ \ X.$$

证明。 第一个等价由命题 5.1.7 得出。第二个等价由命题 5.0.3 得出。第三个等价由推论 5.1.8 得出。

□

6.3 超几何凝聚

Schreiber 在其特许任教资格论文《凝聚微分上同调 ∞-托普斯 [44], 》中描述了一个伴随模态的递增塔，该递增塔出现在超几何的框架中。超几何凝聚的框架——在同上 中称为“实凝聚”——是定义在超 $\mathscr{C}^\infty$-代数范畴的对范畴上的层。Schreiber 将这些层称为超形式光滑 ∞-群胚。具体而言，该网站点是超交换实代数范畴的满子范畴的对范畴（即其对范畴），该满子范畴由形如以下形式的对象张成：

$$\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes W \otimes \Lambda\mathbb{R}^q$$

其中W 是一个*Weil* 代数 —— $\mathbb{R}$ 的交换幂零扩张，并且作为 $\mathbb{R}$-模有限生成。因子 $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\otimes W$ 具有偶次分次，而格拉斯曼代数 $\Lambda\mathbb{R}^q$ 具有奇次分次。参见 [44]的定义 6.6.13。

形如 $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes W$ 的代数的包含有一个左伴随和一个右伴随。左伴随通过投影出偶子代数给出，右伴随则通过对由奇次分次元素生成的理想取商给出。这便在由此得到的层拓扑斯之间产生了一个伴随四元组，进而在超形式光滑 ∞-群胚的拓扑斯上产生一个幂等伴随（余）单子的伴随三元组： $\rightrightarrows \dashv \rightsquigarrow \dashv$Rh。

其中， $\rightrightarrows$ 和 Rh 是幂等单子。然而， $\rightrightarrows$ 不保持乘积，因此不能给出内部模态。Rh 的作用很容易定义：

$$\mathrm{Rh}X(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes W \otimes \Lambda\mathbb{R}^q) := X(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes W).$$

也就是说，RhX 是通过在站点中超代数的偶部分上取值来定义的。我们可以通过对奇直线 $\mathbb{R}^{0|1}$进行局部化，从内部刻画它； $\mathbb{R}^{0|1}$是由一个奇生成元上的自由超代数所表示的层。现在我们转向内部叙述。

超形式光滑 ∞-群胚的托普斯也支持微分实凝聚模态 $\int \vdash \flat \vdash \sharp$。这些模态会消除所有几何结构——无论是超几何结构还是其他结构。因此，我们将使用由焦点构成的格$\{\mathrm{diff} < \mathrm{super} < \top\}$。

$\rightsquigarrow$超焦点的模态为 $\rightsquigarrow \vdash$ Rh。我们将X 称为X的偶部分，而 Rh 则称为流变 模态。对于超几何凝聚或实 凝聚，我们假设以下公理。

公理 7 （实凝聚）。 实凝聚使用焦点格 $\{\mathrm{diff} < \mathrm{super} < \top\}$。我们采用 Carchedi 和 Roytenberg 给出的实超代数定义 [15]。

1. 我们假设存在一个交换环 $\mathbb{R}^{1|0}$ ，其满足合成微分几何的公理（例如见 [36] 的第 4.1 节），称为光滑实数或偶直线。2. 我们假设存在一个 $\mathbb{R}^{1|0}$-模 $\mathbb{R}^{0|1}$。此外，还存在一个双线性乘法 $\mathbb{R}^{0|1} \times \mathbb{R}^{0|1} \to \mathbb{R}^{1|0}$，它满足$a^2 = 0$，对所有$a$： $\mathbb{R}^{0|1}$均成立。这些公理共同推出， $\mathbb{R}^{1|1} := \mathbb{R}^{1|0} \times \mathbb{R}^{0|1}$ 是一个 $\mathbb{R}^{1|0}$-超交换超代数。3. 我们假设以下形式的 Kock-Lawvere 公理：对于任意函数f : $\mathbb{R}^{0|1} \to \mathbb{R}^{0|1}$ ，满足$f(0) = 0$，存在唯一的r： $\mathbb{R}^{1|0}$，使得$f(x) = rx$对所有x均成立。4. 我们假设 $\mathbb{R}^{0|1}$ 是 $\rightsquigarrow$-连通的。

5. 我们假设 $\mathbb{R}^{1|0}$ 能检测微分连通性。6. 我们假设一个类型
是 Rh-模态的，当且仅当它是 $\mathbb{R}^{0|1}$-零的。

注 6.3.1。 我们或许会认为，更稳妥的做法是要求微分连通性由同时包含 $\mathbb{R}^{1|0}$ 和 $\mathbb{R}^{0|1}$ 的族来检测，因为我们希望 $\int$ 使所有可表对象 $\mathbb{R}^{n|q}$ 归零；但只需用 $\mathbb{R}^{1|0}$ 进行检验即可，因为 $\mathbb{R}^{0|1}$ 借助其 $\mathbb{R}^{1|0}$-模结构具有显式收缩（参见 [34] 的引理 6.10）。

根据推论 5.0.2，任何 $\sharp$-模态类型都是 Rh-模态的。但每个 $\flat$-模态类型也都是 Rh-模态的。

引理 6.3.2。 如果 X 是 $\int$-模态的（特别地，如果X 是 $\flat$-模态的），那么 X 是 Rh-模态的。

证明。 由于 $\mathbb{R}^{0|1}$ 通过其模结构的缩放所给出的显式收缩而具有 $\int$-连通性，任何 $\int$-模态类型都是 $\mathbb{R}^{0|1}$-零的，因而是 Rh-模态的。 □

参考文献

[1] LICS '18。英国牛津：计算机协会，2018年。ISBN：978-1-4503-5583- 4。[2] Andreas Abel。《带大小化高阶类型的多态 λ 演算》。博士论文。2006年6月。URL：http://www2.tcs.ifi.lmu.de/~abel/diss.pdf。[3] Andreas Abel。"大小化类型的极化子类型关系"。载于：《计算机科学中的数学结构》18.5（2008），第797–822页。DOI：10.1017/S0960129508006853。[4] Benedikt Ahrens 等。《单价性原理》。2021年。arXiv：2102.06275 [math.CT]。[5] Thorsten Altenkirch、Paolo Capriotti 和 Nicolai Kraus。"以严格相等扩展同伦类型论"。载于：《计算机科学逻辑》。第62卷。LIPIcs。莱布尼茨国际信息学会议论文集。达格施图尔城堡：莱布尼茨信息学中心，瓦德恩，2016年，论文编号21，共17页。DOI：10.4230/LIPIcs.CSL.2016.21。[6] Mathieu Anel。"包络 ∞托普斯"。载于：《高阶同伦结构研讨会》。2021年4月。URL：https://www.youtube.com/watch?v=PpfacHtBX8U。[7] Mathieu Anel 和 Andr´e Joyal。"拓扑逻辑"。载于：《数学中的新空间：形式与概念反思》。Mathieu Anel 和 Gabriel Catren 编。第1卷。剑桥大学出版社，2021年。第4章，第155–257页。DOI：10.1017/9781108854429.007。[8] Danil Annenkov 等。《双层类型论及其应用》。2017年。arXiv：1705.03307 [cs.LO]。[9] Robert Atkey。"定量类型论的语法与语义"。载于：《第33届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年会论文集》。LICS '18。英国牛津：计算机协会，2018年，第56–65页。ISBN：978-1-4503-5583-4。DOI：10.1145/3209108.3209189。[10] Clark Barwick 和 Peter Haine。《Pyknotic 对象 I：基本概念》。2019年。arXiv：1904.09966 [math.AG]。[11] Lars Birkedal 等。"模态依赖类型论与依赖右伴随"。载于：《计算机科学中的数学结构》30.2（2020），第118–138页。DOI：10.1017/S0960129519000197。[12] Guillaume Brunerie。"同伦类型论中球面的同伦群"。博士论文。尼斯大学，2016年。arXiv：1606.05916 [math.AT]。[13] Ulrik Buchholtz、Floris van Doorn 和 Egbert Rijke。"同伦类型论中的高阶群"。载于：《第33届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年会论文集》。LICS '18。英国牛津：计算机协会，2018年。ISBN：978-1-4503-5583-4。DOI：10.1145/ 3209108.3209150。[14] Ulrik Buchholtz 和 Jonathan Weinberger。《合成纤维化（∞，1）-范畴论》。2021年。DOI：10.48550/ ARXIV.2105.01724。URL：https://arxiv.org/abs/2105.01724。

[15] David Carchedi 和 Dmitry Roytenberg。“可微函数超代数理论”。载于：范畴理论及其应用 28（2013），第30期，1022–1098。URL：http://www.tac.mta.ca/ tac/volumes/28/30/28-30abs.html。[16] Evan Cavallo。“立方类型论的高阶归纳类型与内部参数化”。博士论文。2021年6月。DOI：10.1184/R1/14555691。[17] Felix Cherubini。“在模态同伦类型论中形式化嘉当几何”。博士论文。卡尔斯鲁厄理工学院，2017年7月。[18] J. Daniel Christensen 等。“同伦类型论中的局部化”。载于：高阶结构 4.1（2020），第1–32页。URL：https : / / higher - structures . math . cas . cz / api / files / issues / Vol4Iss1 / ChrOpiRijSco。[19] Dustin Clausen 和 Peter Scholze。凝聚数学讲义。2019年。URL：https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf。[20] Mart´ın H. Escard´o。“在任意构造性数学分支中满足全知原理的无限集合”。载于：《符号逻辑杂志》78.3（2013），第764–784页。ISSN：0022-4812。DOI：10. 2178/jsl.7803040。[21] Daniel Gratzer 等。“模态与参数化伴随”。载于：*ACM* 计算逻辑汇刊 23.3（2022年4月）。ISSN：1529-3785。DOI：10.1145/3514241。[22] Daniel Gratzer 等。“多模态依赖类型论”。载于：第*35*届 *ACM/IEEE* 计算机科学逻辑年会论文集。LICS ’20。德国萨尔布吕肯：计算机协会，2020年，第492–506页。ISBN：978-1-4503-7104-9。DOI：10.1145/3373718.3394736。[23] Daniel Gratzer 等。类型论 *`ala Mode*。技术报告。2020年4月。URL：https://jozefg.github.io/ papers/type-theory-a-la-mode.pdf。[24] Kuen-Bang Hou 等。“在同伦类型论中机制化 Blakers–Massey 连通性定理”。载于：第*31*届 *ACM/IEEE* 计算机科学逻辑年会论文集。LICS ’16。美国纽约州纽约：计算机协会，2016年，第10页。ISBN：978-1-4503-4391-6。DOI：10.1145/2933575.2934545。[25] P. T. Johnstone。“关于一个拓扑托普斯”。载于：《伦敦数学会会刊》第三辑38.2（1979），第237–271页。ISSN：0024-6115。DOI：10.1112/plms/s3-38.2.237。[26] Krzysztof Kapulkin 和 Peter LeFanu Lumsdaine。“单价基础的单纯形模型（据 Voevodsky）”。载于：《欧洲数学会杂志》23.6（2021），第2071–2126页。ISSN：1435- 9855。DOI：10.4171/JEMS/1050。[27] F. W. Lawvere。“凝聚拓扑斯与康托尔的‘lauter Einsen’”。载于：第2卷。第1期。《数学与语言基础中的范畴》。1994年，第5–15页。DOI：10.1093/philmat/2.1.5。[28] F. William Lawvere。“公理化凝聚”。载于：范畴理论及其应用 19（2007），第3期，第41–49页。URL：http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/19/3/19-03abs.html。[29] Daniel R. Licata 和 Michael Shulman。“具有模态之2-范畴的伴随逻辑”。载于：计算机科学逻辑基础。第9537卷。《计算机科学讲义》。Springer，2016年，第219–235页。DOI：10 . 1007 / 978 - 3 - 319 - 27683 - 0 _ 16。URL：http : / / dlicata . web . wesleyan . edu / pubs / ls15adjoint/ls15adjoint.pdf。[30] Daniel R. Licata、Michael Shulman 和 Mitchell Riley。“用于次结构逻辑与模态逻辑的纤维化框架”。载于：第*2*届形式化计算与演绎结构国际会议。Dale Miller 编。第84卷。FSCD ’17。德国达格施图尔：达格施图尔城堡–莱布尼茨信息学中心，2017年。ISBN：978-3-95977-047-7。DOI：10.4230/LIPIcs.FSCD.2017.25。URL：http://dlicata.web. wesleyan.edu/pubs/lsr17multi/lsr17multi-ex.pdf。

[31] Jacob Lurie。《高阶 topos 理论》。第170卷。《数学年刊研究》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009年，第 xviii+925 页。ISBN：978-0-691-14049-0。DOI：10.1515/9781400830558。[32] Saunders Mac Lane 和 Ieke Moerdijk。《几何与逻辑中的层》。Universitext。施普林格出版社，纽约，1994年，第 xii+629 页。ISBN：0-387-97710-4。[33] Benjamin Moon、Harley Eades III 和 Dominic Orchard。“分级模态依赖类型论”。载于：《编程语言与系统》。Nobuko Yoshida 编。沙姆：施普林格国际出版公司，2021年，第 462–490 页。DOI：10.1007/978-3-030-72019-3_17。[34] David Jaz Myers。“透过模态棱镜看良纤维化”。载于：《高阶结构》6.1（2022年），第 212–255 页。DOI：10.21136/HS.2022.04。[35] David Jaz Myers。《高阶群的模态断裂》。2021年。arXiv：2106.15390 [math.CT]。[36] David Jaz Myers。《合成微分凝聚同伦类型论中的轨形作为微线性类型》。2022年。arXiv：2205.15887 [math.AT]。[37] Andreas Nuyts 和 Dominique Devriese。“相关度等级：依赖类型论中参数性、无关性、特设多态、交集、并集与代数的统一框架”。载于：第33届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年会论文集。LICS ’18。牛津，英国：计算机协会，2018年，第 779–788 页。ISBN：978-1-4503-5583-4。DOI：10.1145/3209108.3209119。[38] Andreas Nuyts、Andrea Vezzosi 和 Dominique Devriese。“依赖类型论的参数量词”。载于：ACM 编程语言 1.ICFP（2017年8月）。DOI：10.1145/3110276。[39] F. Pfenning。“模态类型论中的内涵性、外延性与证明无关性”。载于：第16届 IEEE 计算机科学逻辑年会论文集。2001年，第 221–230 页。DOI：10.1109/LICS. 2001.932499。[40] Jason Reed。“模态逻辑的判断式解构”。2009年。URL：http://www.cs.cmu.edu/~jcreed/papers/jdml.pdf。[41] Charles Rezk。《整体同伦论与凝聚》。2014年。URL：https://faculty.math.illinois. edu/~rezk/global-cohesion.pdf。[42] Emily Riehl 和 Michael S hulman。“合成 ∞-范畴的类型论”。载于：《高阶结构》1.1（2017年），第 147–224 页。DOI：10.1007/s42001-017-0005-6。[43] Hisham Sati 和 Urs Schreiber。《适当轨形上同调》。2022年6月。URL：https://ncatlab.org/ schreiber/files/orbi220627.pdf。[44] Urs Schreiber。《凝聚无穷拓扑斯中的微分上同调》。2017年。URL：https://ncatlab.org/ schreiber/files/dcct170811.pdf。[45] Urs Schreiber 和 Michael Shulman。“凝聚同伦类型论中的量子规范场论”。载于：量子物理与逻辑研讨会。2012年。DOI：10.4204/EPTCS.158.8。[46] Michael Shulman。所有 (∞, 1)-拓扑斯都有严格单值宇宙。2019年。arXiv：1904.07004 [math.AT]。[47] Michael Shulman。“实凝聚同伦类型论中的布劳威尔不动点定理”。载于：《计算机科学中的数学结构》28.6（2018年），第 856–941 页。ISSN：0960-1295。DOI：10 . 1017 / S0960129517000147。[48] Jonathan Weinberger。合成纤维化 (∞,1)-范畴的内部和。2022年。DOI：10.48550/ARXIV. 2205.00386。URL：https://arxiv.org/abs/2205.00386。[49] Jonathan Weinberger。合成 (∞,1)-范畴的双侧笛卡尔纤维化。2022年。DOI：10.48550/ARXIV.2204.00938。URL：https://arxiv.org/abs/2204.00938。[50] Gavin C. Wraith。“使用泛区间”。载于：Cahiers de Topologie et G ´eom ´etrie Diff ´erentielle Cat ´egoriqu

es

34.4 (1993), 第 259–266 页。网址：http://www.numdam.org/item/CTGDC_1993__34_4_259_0/。

可容许规则的证明提纲

我们概述语法上的运算是可容许的证明，并展示其中有趣的情形；这些情形涉及除法（CTX-EXT、 $\flat$-FORM/INTRO/ELIM、 $\sharp$-ELIM）或提升（$\sharp$-FORM/INTRO）。

定义 A.0.1。T　他 $\heartsuit\Gamma$ 和 $\heartsuit\setminus\Gamma$ 上下文运算以显而易见的方式扩展到望远镜 Γ'，因此

$$\heartsuit(\Gamma,\Gamma') \equiv (\heartsuit\Gamma),(\heartsuit\Gamma')$$
$$\heartsuit\setminus(\Gamma,\Gamma') \equiv (\heartsuit\setminus\Gamma),(\heartsuit\setminus\Gamma')$$

引理 A.0.2 (弱化)。 单变量弱化是可容许的。

$$\textsc{wk}\ \frac{\Gamma,\Gamma' \vdash \mathscr{J}}{\Gamma, w :_{\clubsuit} W, \Gamma' \vdash \mathscr{J}}$$

此外，弱化不会改变推导树的大小。

证明。 对 $\mathscr{J}$ 进行归纳。

情形（除法）。

$$\flat\text{-FORM}\ \frac{\heartsuit\setminus(\Gamma, w :_{\clubsuit} W, \Gamma') \vdash A\ \mathsf{type}}{\Gamma, w :_{\clubsuit} W, \Gamma' \vdash \flat_{\heartsuit} A\ \mathsf{type}}$$

有两种子情形：

- 若 $\clubsuit \leq \heartsuit$：那么 $\heartsuit\setminus(\Gamma,\ w:_{\clubsuit} W\ \Gamma') \equiv (\heartsuit\setminus\Gamma),\ w:_{\clubsuit} W,\ (\heartsuit\setminus\Gamma')$，此时我们对类型 A 进行归纳，并重新应用该规则。
- 若 $\clubsuit \not\leq \heartsuit$：那么 $\heartsuit\setminus(\Gamma, w :_{\clubsuit} W\ \Gamma') \equiv (\heartsuit\setminus\Gamma), (\heartsuit\setminus\Gamma') \equiv \heartsuit\setminus(\Gamma,\Gamma')$，因此已经是 $\heartsuit\setminus(\Gamma, w :_{\clubsuit} W\ \Gamma') \vdash A$ 类型，我们可以重新应用该规则。

情形（提升）。

$$\sharp\text{-FORM}\ \frac{\heartsuit(\Gamma, w :_{\clubsuit} W, \Gamma') \vdash A\ \mathsf{type}}{\Gamma, w :_{\clubsuit} W, \Gamma' \vdash \sharp_{\heartsuit} A\ \mathsf{type}}$$

根据定义 $\heartsuit(\Gamma,\ w:_{\clubsuit} W\ \Gamma') \equiv \heartsuit\Gamma,\ w:_{\heartsuit\clubsuit} W,\ \heartsuit\Gamma'$，因此我们对 A (现在通过一个焦点为 $\heartsuit\clubsuit$ 的变量进行弱化）。

□

引理 A.0.3. 对于任意两个焦点 $\heartsuit$ 和 $\clubsuit$，上下文 $\clubsuit\setminus(\heartsuit\Gamma)$ 是 $\heartsuit(\clubsuit\setminus\Gamma)$ 的迭代弱化。

证明。逐变量地检查即可。给定 Γ 中的一个变量 $x :_{\spadesuit} A$，若它以 $x :_{\heartsuit\spadesuit} A$ 的形式保留在 $\heartsuit(\clubsuit\setminus\Gamma)$ 中，那么必有 $\spadesuit \leq \clubsuit$。两边乘以 $\heartsuit$，可得 $\heartsuit\spadesuit \leq \heartsuit\clubsuit \leq \clubsuit$，因此 $x :_{\heartsuit\spadesuit} A$ 也出现在 $\clubsuit\setminus(\heartsuit\Gamma)$ 中。 □

引理 A.0.4. 以下涉及上下文和望远镜的等式成立：

$$(\heartsuit\Gamma')[s/z] \equiv \heartsuit(\Gamma'[s/z])$$
$$(\heartsuit\setminus\Gamma')[s/z] \equiv \heartsuit\setminus(\Gamma'[s/z])$$

引理 A.0.5(替换)。

$$\text{SUBST}\ \frac{\clubsuit \setminus \Gamma \vdash s : S \qquad \Gamma, z :_{\clubsuit} S, \Gamma' \vdash \mathscr{J}}{\Gamma, \Gamma'[s/z] \vdash \mathscr{J}[s/z]}$$

证明。 对 $\mathscr{J}$ 进行归纳。

情形（变量）。
照常分为三种子情形：$x \in \Gamma$、$x \equiv z$ 和 $x \in \Gamma'$。较有意思的是 $x \equiv z$：

$$\text{VAR}\ \frac{}{\Gamma, z :_{\clubsuit} S, \Gamma' \vdash s : S}$$

应用 DI VIDE-WK 到 $\clubsuit \setminus \Gamma \vdash s : S$ 得出 $\Gamma \vdash s : S$，它还可以进一步弱化为 $\Gamma,\ \Gamma' \vdash s :\ S$.

情形（除法）。

$$\flat\text{-FORM}\ \frac{\heartsuit \setminus (\Gamma, z :_{\clubsuit} S, \Gamma') \vdash A\ \text{type}}{\Gamma, s :_{\clubsuit} S, \Gamma' \vdash \flat_{\heartsuit} A\ \text{type}}$$

有两个子情形：

- 若 ♣ $\leq$ ♥：则 ♥ \(Γ, z :♣ S Γ′) ≡(♥ \Γ), z :♣ S, (♥ \Γ′)，此时我们进行归纳，得到 (♥ \Γ), (♥ \Γ′)[s/z] ⊢A[s/z] 类型。此上下文等于 ♥ \(Γ,Γ′[s/z]) ctx，因此我们可以重新应用该规则。
- 若 ♣ $\not\leq$ ♥：则 ♥ \(Γ, z :♣ S Γ′) ≡(♥ \Γ),(♥ \Γ′) ≡♥ \(Γ,Γ′)，因此 z 不出现在 A 中，并且 A ≡A[s/z],，此时我们可以重新应用该规则。

情形（提升）。

$$\sharp\text{-FORM}\ \frac{\heartsuit(\Gamma, z :_{\clubsuit} S, \Gamma') \vdash A\ \text{type}}{\Gamma, z :_{\clubsuit} S, \Gamma' \vdash \sharp_{\heartsuit} A\ \text{type}}$$

根据定义，♥(Γ, s :♣S Γ′) ≡♥Γ, s :♥♣S, ♥Γ′。将 PROMOTE 应用于 ♣ \Γ⊢s : S，得到 ♥(♣ \Γ) ⊢s : S。根据引理 A.0.3，可以将其弱化为 ♣(♥ \Γ) ⊢s : S，其上下文等于 (♥♣)\(♥Γ)，形状适合代入 ♥Γ, z :♥♣ S, ♥Γ′ ⊢类型。替换得到 ♥Γ, (♥Γ′)[s/z] ⊢A[s/z] 类型，而此上下文等于 ♥(Γ,Γ′[s/z]) ctx，因此我们可以重新应用该规则。

□

引理 A.0.6(提升)。

$$\text{PROMOTE-CTX}\ \frac{\Gamma\ \text{ctx}}{\clubsuit\Gamma\ \text{ctx}} \qquad \text{PROMOTE}\ \frac{\Gamma \vdash \mathscr{J}}{\clubsuit\Gamma \vdash \mathscr{J}}$$

证明。首先，按上下文的长度归纳可得上下文提升规则。考虑上下文 Γ,x :♥ A ctx，其中 ♥ \Γ⊢A 类型。对 A 应用 PROMOTE，得到 ♣(♥ \Γ) ⊢A 类型；根据引理 A.0.3，可将其弱化为 (♣♥)\(♣Γ) ⊢A 类型，从而构成上下文 ♣Γ,x :♣♥ A ctx。

情形（变量）。
变量规则是显而易见的，因为修改变量上的注释不会改变它是否可用。

情形（除法）。

$$\flat\text{-FORM}\ \frac{\heartsuit \setminus \Gamma \vdash A\ \mathsf{type}}{\Gamma \vdash \flat_{\heartsuit} A\ \mathsf{type}}$$

归纳地$\clubsuit(\heartsuit \setminus \Gamma) \vdash A$类型，它可以弱化为$\heartsuit \setminus (\clubsuit\Gamma) \vdash A$类型，然后我们重新应用该规则。情形（提升）。

$$\sharp\text{-FORM}\ \frac{\heartsuit\Gamma \vdash A\ \mathsf{type}}{\Gamma \vdash \sharp_{\heartsuit} A\ \mathsf{type}}$$

归纳地$\clubsuit(\heartsuit\Gamma) \vdash A$类型，并且$\clubsuit(\heartsuit\Gamma) \equiv \heartsuit(\clubsuit\Gamma)$，因此我们可以重新应用该规则。

□

引理 A.0.7(除法)。

$$\text{DIVIDE-CTX}\ \frac{\Gamma\ \mathsf{ctx}}{\clubsuit \setminus \Gamma\ \mathsf{ctx}} \qquad \text{DIVIDE-WK}\ \frac{\Gamma\ \mathsf{ctx} \qquad \clubsuit \setminus \Gamma \vdash \mathscr{J}}{\Gamma \vdash \mathscr{J}}$$

证明。首先除法-上下文。考虑一个上下文Γ，$x :_{\heartsuit} A$上下文，使得$\heartsuit \setminus \Gamma \vdash A$类型。有两种情形：

- 如果$\heartsuit \leq \clubsuit$：那么
$$\heartsuit \setminus \Gamma \equiv (\heartsuit\clubsuit) \setminus \Gamma \equiv \heartsuit \setminus (\clubsuit \setminus \Gamma),$$
因此$\heartsuit \setminus (\clubsuit \setminus \Gamma) \vdash A$类型的形状恰好可以构成$\clubsuit \setminus \Gamma$，$x :_{\heartsuit} A$上下文。
- If $\heartsuit \not\leq \clubsuit$: Then $\clubsuit \setminus (\Gamma, x :_{\heartsuit} A) \equiv \clubsuit \setminus \Gamma$ is well-formed by induction.

现在考虑除法弱化规则。针对项：

情形（变量）。
若$x :_{\heartsuit} A$属于上下文$\clubsuit \setminus \Gamma$，那么它也必属于$\Gamma$，因此我们可以重用变量规则。

情形（除法）。

$$\flat\text{-FORM}\ \frac{\heartsuit \setminus (\clubsuit \setminus \Gamma) \vdash A\ \mathsf{type}}{\clubsuit \setminus \Gamma \vdash \flat_{\heartsuit} A\ \mathsf{type}}$$

我们知道$\heartsuit \setminus (\clubsuit \setminus \Gamma) \equiv \clubsuit \setminus (\heartsuit \setminus \Gamma)$，因此通过归纳可得$\heartsuit \setminus \Gamma \vdash A$类型，于是我们可以再次应用该规则。

情形（提升）。

$$\sharp\text{-FORM}\ \frac{\heartsuit(\clubsuit \setminus \Gamma) \vdash A\ \mathsf{type}}{\clubsuit \setminus \Gamma \vdash \sharp_{\heartsuit} A\ \mathsf{type}}$$

$\heartsuit$（$\clubsuit \setminus \Gamma$）$\vdash A$类型可以弱化为$\clubsuit \setminus$（$\heartsuit\Gamma$）$\vdash A$类型（且不会增加推导的大小）。归纳地，$\heartsuit\Gamma \vdash A$类型，我们可以重新应用该规则。

□