arXiv:2301.13827v1 [econ.TH] 31 Jan 2023

恒定加价定价的最优性*

Dirk Bergemann† Tibor Heumann‡ Stephen Morris§

2023年2月1日

摘要

我们研究具有私人信息的非线性定价环境。我们给出卖方在买方支付意愿的所有可能分布下都能实现的利润保证（以及相应机制）。在成本函数具有恒定弹性的情况下，恒定加价定价能在支付意愿的所有可能分布下提供最优收入保证，而帕累托分布下可达到该下界。我们刻画利润和消费者剩余如何随价值分布变化，并证明帕累托分布是极值情形。我们还针对一般成本函数给出收入保证。对于最优采购政策，我们也得到了相应结果：在卖方成本分布任意的情况下，这些政策能够为买方提供最大剩余保证。

JEL CLASSIFICATION: D44, D47, D83, D84.KEYWORDS: 非线性定价、二级价格歧视、利润保证、竞争比率。

*我们感谢美国国家科学基金会项目 SES-2001208 和 SES-2049744，以及 ANID Fondecyt Iniciacion 11200365 的资助。Yang Cai、Jason Hartline、Yingkai Li 和 Zvika Neeman 提供了宝贵意见，在此一并致谢。感谢 Hongcheng Li 提供出色的研究协助。

†耶鲁大学，dirk.bergemann@yale.edu。

‡智利天主教大学，tibor.heumann@uc.cl。§麻省理工学院，semorris@mit.edu

1 引言

1.1 研究动机

数字商务的兴起使个性化和差异化策略日益普及。产品在质量维度和／或数量维度上存在差异，因此需要采用非线性定价政策或二级价格歧视。Mussa and Rosen（1978）和 Maskin and Riley（1984）分别率先研究了质量差异化产品和数量差异化产品的最优定价策略。研究表明，最优定价策略在很大程度上取决于关于买方类型的私人信息的先验分布，最终也取决于买方的支付意愿。

然而，在许多情况下，卖方对类型分布仅掌握非常有限且不完整的信息。本文旨在制定稳健定价政策，使其：(i) 不依赖于类型的具体分布；(ii) 能够在所有可能的分布下提供收入保障。本文的主要结果构建了此类稳健定价策略，并表明这些策略可以用非常简单、透明的定价政策来表达。我们通过比较稳健定价政策下的利润与给定私人信息分布下可实现的社会福利，建立收入保障。随后，我们试图找出这样一种定价政策：在所有具有有限期望的可行分布中，它能够保证这两项指标之比最高。由于社会福利等同于卖方在完全信息或一级价格歧视下能够获得的利润，因此这一比率有两种可能的解释。从第二种角度看，我们比较卖方在不完全信息下的收入与其在完全信息下（因而能够实行完全价格歧视时）可获得的收入。

我们研究两大类定价问题。首先，考察一类质量差异化定价问题，这类问题最早由 Mussa and Rosen（1978）分析。在此情形下，买方类型是其对质量的支付意愿。生产成本是质量的递增凸函数。我们聚焦于等弹性成本函数，它使卖方的成本环境可以用恒定成本弹性来表示。其次，考察一类数量差异化定价问题，这类问题最早由 Maskin and Riley（1984）分析。在此情形下，卖方以恒定边际成本生产额外单位的商品，而买方对数量具有凹效用。在这一环境中，我们最初假设所有买方类型的需求弹性均为常数。

对于质量差异化产品的环境，我们展示了一种定价机制，它能够实现利润保证，确保在所有可能的私人信息先验分布下，利润至少达到社会剩余的一定比例。以比率表示的利润保证仅取决于质量的成本弹性 η。该比率可表示为一个仅以成本弹性为变量的多项式（定理1）。有趣的是，最优机制可以通过一种定价政策来实施，该政策对每个额外单位均维持恒定加价。加价也用弹性表示，具体为 $(\eta-1)/\eta$（推论2）。对于弹性 η 接近 1 的成本函数，该比率最大，且在极限 $\eta \to 1$ 下为 $1/e$。随着成本函数变得更加凸，该比率会下降。对于二次成本函数，即当 $\eta = 2$ 时，该比率仍为 $1/4$。最终，随着成本的凸性愈发显著，当 $\eta \to \infty$ 时，该比率趋近于 0。我们证明，这些利润保证是紧的，并且可由特定分布实例达到；具体而言，这些实例是帕累托分布，其形状参数 $\eta/(\eta-1)$ 随成本函数弹性系统性变化。

随后，我们扩大分析范围，全面刻画在所有可能的分布和所有可能的成本弹性下，通过最优机制所能实现的生产者剩余与消费者剩余的有效前沿。这里，我们分别表示生产者剩余和消费者剩余相对于社会剩余的比率。事实上，对于每一种弹性，消费者剩余所占的最大份额，都是由这样一种分布实现的：在该分布下，稳健机制正是收益最大化机制。尽管有效前沿本身就具有直接的研究意义，但实际上，我们还得到了所有分布下可实现的剩余对的完整集合。有趣的是，帕累托分布的某个变体出现在构成可实现的剩余对集合的所有边界上。当成本函数完全由恒定弹性 η 刻画时，该分析给出了利润保证的精确上界。然而，产生这一上界的机制，即固定加价定价规则，也为任意凸成本函数下的利润保证给出了下界，只要边际成本同样是凸的（命题1）。

接下来，我们转向数量差异化模型。在这里，卖方提供其产品的额外单位所需的边际成本是恒定的。相比之下，买方对该产品具有凹效用，因此对该产品额外单位的边际效用递减。需求弹性 η 现在概括了这一环境的经济学特征。在成本非线性的情形下建立的论证大体上可以转用，并得到同样精确的结果。对于每一种需求弹性，我们都能得到一个仅取决于需求弹性的多项式利润保证。

令人惊讶的是，稳健机制由线性定价机制给出

1.2 相关文献

我们为大类二级价格歧视问题推导出性能保证，并提出能够确保这些保证的稳健定价政策。我们无需对价值分布施加任何限制，例如正则性或单调性假设，也不要求其满足有限支持条件。我们只要求配置问题的社会剩余具有有限期望。

单个物品的最优垄断定价问题，是我们模型的一个特殊极限情形；在该情形下，增加供给的边际成本趋于无穷大。单单位情形下性能保证的分析，也是 Neeman（2003）一项结果的特例。他研究了有保留价和无保留价的英式拍卖的表现。最优垄断定价的情形，是只有一个竞标者的拍卖环境的特例。他为单个竞标者的情形建立了一个紧确界，该界由“截断帕累托分布”给出（定理5）。他推导出的界是一个参数的函数，该参数等于竞标者的期望价值与其最大价值之比。若不引入这一参数，该界便为零：当这一比率趋近于零时，该界也趋近于零。类似地，Hartline 和 Roughgarden（2014）证明，对于支撑集为 $[1,h]$ 的分布，竞争比为 $1+\ln\ h$。因此，随着 h 增大，近似效果会变得任意差（定理2.1）。相比之下，我们的结果对每个凸成本函数都能给出常数近似。因此，引入凸成本函数（或凹效用函数）会显著提升近似质量，这一点或许令人意外。

Carroll（2017）研究了多物品定价问题的一个稳健版本。买方对有限件物品具有加性价值，并掌握每件物品价值的私人信息。在该问题中，卖方知道每件物品的边际分布，但不确定估值的联合分布。Carroll（2017）考虑了一个极小极大问题，并证明逐项分开定价是稳健意义下的最优定价政策。Deb 和 Roesler（2022）在信息稳健性的背景下研究了一个相关问题。在该问题中，价值的联合分布是共同已知的，但自然或买方可以选择最优信息结构。在相应的机制设计问题解中，他们证明最优机制始终是纯捆绑定价。

本文仅关注二级价格歧视。Bergemann、Brooks 和 Morris（2015年）研究了三级价格歧视的界限。虽然他们的大部分分析

聚焦于单单位需求，但他们也给出了一些关于市场细分如何影响二级价格歧视的部分结果。Haghpanah 和 Siegel（2022）针对给定的价值先验分布，进一步给出了一些关于多产品歧视界限的结果。

2 模型

卖方向买方提供质量各异的商品 $q \in \mathbb{R}_+$。买方对质量有支付意愿（或称价值） $v \in \mathbb{R}_+$。扣除支付 $t \in \mathbb{R}_+$ 后的效用为：

$$u(v, q, t) = vq - t. \tag{1}$$

价值 $v \in \mathbb{R}_+$ 服从 $F \in \Delta([v, \bar{v}])$，其支撑集为 $0 \leq v \leq \bar{v} \leq \infty$。卖方提供质量 q 的成本为

$$c(q) = q^\eta/\eta. \tag{2}$$

请注意，成本的恒定弹性为 $\eta \in (1, \infty)$。

一个重要的基准是有效配置所产生的社会剩余：

$$S_F \triangleq \mathbb{E}[\max_q\{vq - c(q)\}] \tag{3}$$

显然，这是任何机制所产生的利润和消费者剩余的上界。我们假设：

$$\lim_{v\to\infty}(1 - F(v))v^{\frac{\eta}{\eta-1}} = 0.$$

这是保证 $S_F < \infty$ 的充要条件。

卖方选择一个菜单（或直接机制），其质量为 $Q(v)$，价格为 $T(v)$：

$$M \triangleq \{(Q(v), T(v))\}_{v\in\mathbb{R}}. \tag{4}$$

我们用大写字母表示函数，用小写字母表示实数。机制必须满足激励相容和参与约束。因此，对所有 v，$v' \in \mathbb{R}$：

$$vQ(v) - T(v) \geq vQ(v') - T(v'); \tag{5}$$

$$vQ(v) - T(v) \geq 0. \tag{6}$$

分布 F 和机制 M所产生的预期卖方利润和买方剩余分别为:

$$\Pi_{F,M} \triangleq \mathbb{E}[T(v) - c(Q(v))] \quad \text{and} \quad U_{F,M} \triangleq \mathbb{E}[Q(v)v - T(v)].$$

分布 F 的最优机制为:

$$M^F = \arg\max_M \Pi_{F,M}.$$

稍微滥用一下记号，我们用.....表示

$$\Pi_F = \Pi^{F,M^F} \text{ and } U_F = U^{F,M^F}$$

th在卖方最优机制下评估的利润和消费者剩余。

3 利润保障机制

3.1 极小极大问题

首要目标是求出最优利润保证机制 M_G ，其定义如下:

$$M_G = \arg\max_M \inf_F \frac{\Pi_{F,M}}{S_F}. \tag{A}$$

作为直接推论，我们将找出使卖方归一化利润最小化的价值分布:

$$\inf_F \max_M \frac{\Pi_{F,M}}{S_F}. \tag{B}$$

事实上，我们将证明极小极大定理适用于我们的模型，因此 **(A)** 和 **(B)** 将紧密相连。

与最优定价的相关研究一样，帕累托分布及其截断版本将发挥重要作用。为此，我们将截断的帕累托分布定义如下:

$$P_{\alpha,k}(v) \triangleq \begin{cases} 1 - \frac{1}{v^\alpha} & \text{if } v < k; \\ 1 & \text{if } v \geq k. \end{cases} \tag{7}$$

也就是说，$P_{\alpha,\ k}(v)$ 与取值为 $v < k$ 的帕累托分布相同，并且在 k 处有一个质量点。我们用..... 表示

$$\lim_{k\to\infty} P_{\alpha,k} = P_\alpha.$$

换句话说，当我们省略截断帕累托分布中的参数 k 时，意味着我们取 $k \to \infty$ 时的极限。如果 $\alpha > 1$，那么帕累托分布下支付意愿的期望是有限的；如果 $\alpha > \eta/(\eta - 1)$，那么社会剩余仍然有限。

机制 M 在 $v = 0$ 时激励相容并满足个体理性约束，当且仅当质量 $\{Q(v)\}_{v\in\mathbb{R}}$ 单调不减，且相应的转移支付为：

$$T(v) = vQ(v) - \int_0^v Q(s)ds.$$

由于最优机制由质量唯一确定，我们通常将机制称为一组质量 $\{Q(v)\}_{v\in\mathbb{R}}$，并省略价格。机制产生的利润为：

$$\Pi \triangleq \int_0^\infty (vQ(v) - c(Q(v)))f(v)dv - \int_0^\infty Q(v)(1 - F(v))dv. \tag{8}$$

因此，利润可以仅作为质量 $\{Q(v)\}_{v\in\mathbb{R}}$ 的函数来计算。

在帕累托分布下，总虚拟价值为：

$$\phi(v) \triangleq \frac{\alpha - 1}{\alpha} v, \tag{9}$$

因此，卖方在贝叶斯最优机制下提供的质量 $Q(v)$ 为：

$$Q(v) = (\frac{\alpha - 1}{\alpha} v)^{\frac{1}{\eta-1}}. \tag{10}$$

现在我们给出 第一个主要结果，它给出了最优利润保障机制 .

定理1（利润保障机制）

利润保证机制 M^* 如下：

$$Q(v) = \frac{v^{\frac{1}{\eta-1}}}{\eta^{1/(\eta-1)}}, \tag{11}$$

并产生归一化利润

$$\frac{\Pi_{M^*}}{S_F} = \frac{1}{\eta^{\frac{\eta}{\eta-1}}}, \tag{12}$$

对于每个 F。

证明。 我们首先证明 请注意，对于每个分布 F，由质量（11）产生的利润是 e:

$$\Pi_M = \frac{1}{\eta^{\frac{\eta}{\eta-1}}} S_F.$$

请注意，我们写作 Π_M，因为这些是由（11）产生的利润，而（11）通常不同于 F 下的最优机制。将（11）代入（8）中的质量，我们得到：

$$\Pi = \int_0^\infty (z - \frac{z^\eta}{\eta}) v^{\frac{\eta}{\eta-1}} f(v) dv - \int_0^\infty z v^{\frac{1}{\eta-1}} (1 - F(v)) dv,$$

其中 $z = 1/\eta^{1/(\eta-1)}$。对第二项进行分部积分，得到：

$$\Pi = \int_0^\infty (z - \frac{z^\eta}{\eta}) v^{\frac{\eta}{\eta-1}} dv - \frac{\eta-1}{\eta} \int_0^\infty z v^{\frac{\eta}{\eta-1}} f(v) dv.$$

合并各项，得到：

$$\Pi = \int_0^\infty (z - \frac{z^\eta}{\eta} - \frac{\eta-1}{\eta} z) v^{\frac{\eta}{\eta-1}} f(v) dv.$$

代入 $z = 1/\eta^{1/(\eta-1)}$，得到：

$$\Pi|_{z=\frac{1}{\eta^{\frac{1}{\eta-1}}}} = \frac{1}{\eta^{\frac{\eta}{\eta-1}}} \frac{\eta-1}{\eta} \int_0^\infty v^{\frac{\eta}{\eta-1}} f(v) dv.$$

我们还注意到，在分布 F 下，社会剩余 S_F 为：

$$S_F = \frac{\eta-1}{\eta} \int_0^\infty v^{\frac{\eta}{\eta-1}} f(v) dv.$$

因此，我们得到该策略能够保证总剩余的 $1/\eta^{\frac{\eta}{\eta-1}}$。由于式 (11) 达到了社会剩余的 $1/\eta^{\eta/\eta-1}$，下确界不可能小于此值。但帕累托分布的形状参数为 $\alpha = \eta/（\eta - 1）$ 时，恰好能够达到这一社会剩余比例。在此帕累托分布下，上述机制是最优机制。因此，这既给出了最优利润保证机制，也给出了对于任意价值分布，贝叶斯最优机制所能创造的社会剩余最低比例。

■

这一结果确立了一种机制，其利润保证达到式（12）给出的水平。有趣的是，对于每一种价值分布 F，该机制产生的归一化利润都相同！

现在我们证明，式（12）给出的利润保证确实是可实现的最优——也就是最高的——利润保证。为此，我们首先给出当帕累托分布的形状参数为 $\alpha = \eta/(\eta - 1)$ 时贝叶斯最优机制（9）的显式解；此时贝叶斯最优机制等于定理1中确立的利润保证。

定理2（极小极大分布）

针对形状参数为以下数值的帕累托分布，利润保证机制是贝叶斯最优机制：

$$\alpha = \frac{\eta}{\eta - 1},$$

并达到下确界:

$$\inf_F \frac{\Pi_F}{S_F} = \frac{\Pi_{P_\alpha}}{S_{P_\alpha}}\bigg|_{\alpha=\frac{\eta}{\eta-1}} = \frac{1}{\eta^{\frac{\eta}{\eta-1}}}. \tag{13}$$

证明。 由此，我们可以用闭式计算利润和社会剩余，从而得出，当 $\alpha > \eta/\eta - 1$ 时。

$$\frac{\Pi_{P_\alpha}}{S_{P_\alpha}} = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\frac{\eta}{\eta-1}}.$$

该方程仅在 $\alpha < \eta/\eta - 1$ 时成立，因为这些帕累托分布的社会剩余才是有限的。然而，取极限 $\alpha \to \eta/(\eta-1)$，我们得到（13）（并且我们也考虑如（7）所示的截断分布，并取极限 $k \to \infty$）。

定理2由此可根据定理1得出。如果卖方能够保证自己获得社会剩余的 $1/\eta^{\eta^{\eta-1}}$，并且对于某一个价值分布而言，这确实是她所能做到的最好结果，那么该价值分布就使卖方能够创造的利润占社会剩余的比例最小。

■

因此，形状参数为 $\alpha = \eta/(\eta-1)$ 的帕累托分布使卖方能够创造的归一化利润最少。最后，我们可以分析最小归一化利润如何随成本弹性变化。容易验证，归一化利润保证 $1/\eta^{\eta^{\eta-1}}$ 随 η. 增大而减小。我们可以计算不同成本弹性下的最小利润:

$$\lim_{\eta\to1} \frac{1}{\eta^{\frac{\eta}{\eta-1}}} = \frac{1}{e}; \quad \lim_{\eta\to2} \frac{1}{\eta^{\frac{\eta}{\eta-1}}} = \frac{1}{4}; \quad \lim_{\eta\to\infty} \frac{1}{\eta^{\frac{\eta}{\eta-1}}} = 0. \tag{14}$$

请注意，极限 $\eta \to \infty$ 对应于卖方出售不可分商品的情形。极限 $\eta \to 1$ 对应于卖方的边际成本近乎恒定的情形。

我们也可以评估在这些不同成本弹性和帕累托分布下的消费者剩余，并发现:

$$\lim_{\eta\to1} \frac{1}{\eta^{\frac{1}{\eta-1}}} = \frac{1}{e}; \quad \lim_{\eta\to2} \frac{1}{\eta^{\frac{1}{\eta-1}}} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{\eta\to\infty} \frac{1}{\eta^{\frac{1}{\eta-1}}} = 1. \tag{15}$$

利润保障机制的极小极大解与帕累托分布，在卖方和消费者之间形成特定的剩余分配。

推论1（利润保障机制中的消费者剩余）

T利润保证机制 M^* 产生恒定的消费者剩余

$$\frac{U_{M^*}}{S_F} = \frac{1}{\eta^{\frac{1}{\eta-1}}} \tag{16}$$

适用于所有分布 F。

我们或许会根据该机制的极小极大性质，预期其利润保证在所有分布下都相同。事实上，在 Hartline 和 Roughgarden （ 2014 年）中，最优单单位垄断定价策略也具有这一性质，即它在所有分布下都能提供相同的利润保证。相比之下，在单单位垄断定价中，消费者剩余份额并非在所有分布下都相同。对于给定的支付意愿 v，买方的净效用为（$v \ln v$） / （$1 + \ln v$），因此，期望消费者剩余份额取决于 v的分布。更确切地说，在利润保证机制中，每位消费者获得的效率剩余份额相同。相比之下，在单单位垄断定价模型中，消费者剩余份额随支付意愿的增加而增加。

均匀分配消费者剩余份额这一性质本身就很有趣。不过，我们或许会问，消费者剩余保障与所有贝叶斯最优机制所能实现的消费者剩余水平相比如何。更一般地说，在非线性定价环境中，我们可以探讨卖方与买方之间的剩余分配上界前沿。这正是我们将在下一节（第4节）探讨的问题。

3.2 恒定加价机制

将最优利润保障机制表示为间接机制的另一种形式很有用。激励相容机制 $\{Q(v)\ T(v)\}$ 可以通过提供一种间接机制来实现，该机制要求买方为质量 q 报价 $P(q)$。只要间接机制足够可微，就可以用其质量边际价格，即单位质量增量价格来表示：

$$P'(q) \triangleq p(q),$$

定义为：

$$p(q) = Q^{-1}(q).$$

因此，如果买方购买质量 q，总支付为：

$$P(q) = \int_0^q p(s)ds.$$

换句话说，转移支付是每个额外质量增量价格的积分。

推论2（最优利润保障机制）

利润保证机制 M^* 可以通过提供质量增量 $q \in \mathbb{R}$ 来实施，定价为

价格 p（q），并满足：

$$\frac{p(q)-c'(q)}{p(q)}=\frac{\eta-1}{\eta}. \tag{17}$$

根据这一推论，最优利润保障机制对每个额外单位都维持恒定加价，其中（17）称为勒纳指数。这里的恒定加价由成本函数的弹性 η决定。

对给定先验分布 F而言，将利润保障政策与贝叶斯最优政策进行对比颇有启发。在贝叶斯最优机制中，质量通过关于虚拟效用的一阶条件求得。暂且假设 F 是正则的，Mussa and Rosen（1978）求解：

$$q(v)\in\arg\max_{q}\left\{\left(v-\frac{1-F(v)}{f(v)}\right)q-c(q)\right\}.$$

一阶条件为：

$$v-\frac{1-F(v)}{f(v)}-c'(q(v))=0,$$

激励 相容的转移支付在相应的直接机制中给出如下：

$$T(v)=vq(v)-\int_0^v q(s)ds.$$

因此，我们有：

$$T'(v)=q'(v)v.$$

因此，单位质量的边际价格为：

$$p(q(v))=\frac{T'(v)}{q'(v)}=v.$$

因此，所得加价为：

$$\frac{p(q)-c'(q)}{p(q)}=\frac{v-(v-\frac{1-F(v)}{f(v)})}{v}=\frac{1-F(v)}{f(v)v}. \tag{18}$$

等式右边是需求弹性的倒数的相反数：这就是勒纳指数的经典公式。更准确地说，在任意给定的单位质量价格 $p(q(v))$ 下，对质量 q 的需求为：

$$D(p(q(v)))=1-F(v).$$

Thus

$$\frac{1-F(v)}{f(v)v} = -\frac{1}{\frac{dD}{dv}\frac{v}{1-F(v)}}. \tag{19}$$

因此，我们发现，贝叶斯最优机制完全由需求弹性决定，而需求弹性可以用价值 v 与风险率 $f(v)/(1-F(v))$ 的乘积来表示。相比之下，利润保证机制仅由成本函数弹性决定，既不涉及支付意愿 v，也不涉及支付意愿的分布。由于利润保证机制适用于所有可能的价值分布，因此它不依赖于任何特定分布，而是利用成本信息，为所有可能的价值分布提供统一菜单。

3.3 非恒定成本弹性

在定理1和定理2中，我们推导出了适用于恒定弹性成本函数的最优利润保障机制。接下来，我们可以探讨：当成本函数不满足恒定弹性条件时，能否给出类似的界限。为此，我们现在考虑满足曲率条件 $c'''(q) \geq 0$ 的凸成本函数。我们将逐点成本弹性表示为：

$$\eta(q) = \frac{dc(q)}{dq}\frac{q}{c(q)}.$$

我们假设成本弹性有界：

$$\eta(q) \leq \bar{\eta}.$$

我们考虑这样一种机制：所供给的质量 $(q(v))$ 与提供该质量的边际成本呈线性关系：

$$c'(q(v)) = zv, \tag{20}$$

其中，线性参数 z 的选取满足：

$$z = \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}-1}+1}. \tag{21}$$

因此，我们像利润保证机制 M^* 一样维持恒定加价。当成本具有恒定成本弹性时，由 M^* 给出的质量（见式 (11)）具有如下性质：$z = 1/\eta$。

P命题 1（恒定加价机制的利润保证）

T他 con 给定式（*20*）—（*21*）的恒定加价销售策略，所产生的利润至少为 *：*

$$\Pi^z = \frac{1}{\overline{\eta} + 2\sqrt{\overline{\eta} - 1}} S. \tag{22}$$

证明。 我们注意到，当卖方收取恒定加价时，买方价值为 v 时产生的利润为：

$$\pi = \int_0^{q(v)} \frac{1}{z} c'(s) - c'(s) ds = \frac{1-z}{z} c(q(v)).$$

因此，所产生的利润与向该类型买方提供的质量所对应的生产成本成正比。我们可以用成本弹性表示利润如下：

$$\pi = \frac{1-z}{z} \frac{zvq(s)}{\eta(q(v))}.$$

这里我们只需代入成本弹性的定义，并利用 $c'(q(v)) = zv$。

另一方面，有效总剩余为：

$$S = \int_0^{q^*(v)} v - c'(s) ds.$$

我们可以将其写为：

$$\begin{aligned} S =& \int_0^{q(v)} v - c'(s) ds + \int_{q(v)}^{q^*(v)} v - c'(s) ds \\ =& q(v)v - c(q(v)) + \int_{q(v)}^{q^*(v)} v - c'(s) ds. \end{aligned}$$

因此，我们得到：

$$\frac{S}{\pi} = \frac{\eta(v)}{(1-z)} - \frac{z}{1-z} + \frac{z}{1-z} \frac{\int_{q(v)}^{q^*(v)} v - c'(s) ds}{c(q(v)}.$$

现在我们证明：

$$\frac{\int_{q(v)}^{q^*(v)} v - c'(s) ds}{c(q(v))} \leq \frac{(1-z)^2}{z^2}. \tag{23}$$

为此，我们注意到 $c''' \geq 0$ 意味着对所有 q：

$$c'(q) \geq c'(q(v)) + c''(q(v))(q - q(v)).$$

因此我们得到：

$$c(q(v)) \geq \frac{1}{2} \frac{(zv)^2}{c''(q(v))}.$$

类似地， $c''' \geq 0$ 也意味着

$$\int_{q(v)}^{q^*(v)} v - c'(s)ds \leq \frac{1}{2}\frac{((1-z)v)^2}{c''(q(v))}.$$

对两个不等式取比率，得到（23）。因此我们可以得出 :

$$\frac{S}{\pi} = \frac{\eta(v)}{(1-z)} - \frac{z}{1-z} + \frac{(1-z)}{z} = \frac{1+z(\eta\,(v)-2)}{z(1-z)}.$$

现在我们可以取该表达式的倒数:

$$\frac{\pi}{S} = \frac{z(1-z)}{1+z(\eta(v)-2)}.$$

显然，该表达式关于 η 单调递减。因此，

$$\frac{\pi}{S} \leq \frac{z(1-z)}{1+z(\bar{\eta}-2)} \leq \frac{1}{\overline{\eta}+2\sqrt{\overline{\eta}-1}}.$$

第二个等式源于对 z 最大化该表达式，其最大化目标为

$$z = \frac{1}{\sqrt{\overline{\eta}-1}+1},$$

至此证明完成。 ■

因此，对于很大一类凸成本函数，式 (20)-(21) 给出的固定加价机制无需假设恒定弹性，也能提供正的收入保证。我们可以验证，当成本弹性等于相关区间内的上界 η 时，该保证是通过提供比机制 M^* 更高的质量实现的，即 $\eta > 2$ ，其中

$$\frac{1}{\sqrt{\overline{\eta}-1}+1} > \frac{1}{\overline{\eta}}.$$

由于卖方向消费者提供了更多消费者剩余，其收入保证弱于在上界 η 处评估的最优机制 M^* :

$$\frac{1}{\overline{\eta}+2\sqrt{\overline{\eta}-1}} < \frac{1}{\overline{\eta}^{\frac{\overline{\eta}}{\overline{\eta}-1}}}.$$

因此，通过让渡部分剩余给消费者以换取较低的利润份额，便能实现对具有不同弹性的更大类成本函数的稳健性。

4 剩余分配的边界

利润保证机制 M^* 能够为卖方提供利润保证，正如定理1和定理2所确立的那样。令人惊讶的是，这一保证不仅是针对某种价值分布的下界，该机制还能使卖方在所有分布下都统一实现这一保证。推论1随后表明，同一机制也能统一保障消费者剩余份额。但由于利润保证机制旨在实现尽可能高的利润水平，我们可能会担心，该机制是通过压低甚至最小化所有激励相容机制中的消费者剩余，来获取较高利润份额的。

为处理这一问题并回答这一问题，我们现在刻画所有分布下可行的消费者剩余与利润份额的上界前沿：

$$\sup_F \left\{ \frac{U_F}{S_F} : \quad \frac{\Pi_F}{S_F} = \beta \right\}. \tag{24}$$

我们将上界前沿称为剩余前沿。换言之，在利润大于或等于社会剩余的某一比例 $\beta \in [0,1]$ 的条件下，我们寻求确定最大的消费者剩余。当然，当 β 可以实现时，问题（24）是定义良好的。特别地，当 β 是能够实现的最低利润时（即 β 等于（B）），我们将找到所有价值分布下的最大消费者剩余。

4.1 剩余前沿

现在，我们将完整描述剩余前沿。

命题2（剩余前沿）
剩余前沿如下：

$$\sup_F \left\{ \frac{U_F}{S_F} : \quad \frac{\Pi_F}{S_F} = \beta \right\} = \frac{\eta}{\eta - 1} \left(\beta^{\frac{1}{\eta}} - \beta \right). \tag{25}$$

当且仅当 $\beta \in \left[1/\eta^{\frac{\eta}{\eta-1}}, 1 \right]$ 时，该约束可行。 —

证明。 我们首先将 U_F 和 Π_F 明确写出。我们将虚拟价值记为如下形式：

$$\phi(v) \triangleq v - \frac{1 - F(v)}{f(v)}.$$

我们将熨平虚拟价值记为 $\bar{\phi}.$。我们可以找到一组区间 $\{(v_i, \bar{v}_i)\}_{i\in I}$，使得 $\bar{\phi}(v) = \phi(v)$ 在 $[v_i, \bar{v}_i]$ 中成立；而在这些区间之外（即在形如 $(\bar{v}_i, v_{i+1})$ 的各个区间内），我们有 $\phi(v) < \bar{\phi}(v)$，且 $\phi(v)$ 保持不变。这些区间之外的熨平虚拟价值为：

$$\bar{\phi}(v) = \frac{\int_{\bar{v}_i}^{\underline{v}_{i+1}} (v - \frac{1-F(v)}{f(v)}) f(v) dv}{F(\underline{v}_{i+1}) - F(\bar{v}_i)}.$$

最优机制提供的最优质量由下式给出（参见 Toikka（2011））：

$$Q(v) = \max\{\frac{\eta - 1}{\eta} \bar{\phi}(v)^{\frac{\eta}{\eta-1}}, 0\}.$$

与文献中的惯例一致，质量在 $(\bar{v}_i, v_{i+1})$ 中为常数，因此为避免混淆，我们写作：

$$q_i \triangleq Q(\bar{v}_i) = Q(\underline{v}_{i+1}).$$

虚拟价值为负的类型将被排除。因此，我们有：

$$\begin{aligned} U_F &= \int_0^\infty \bar{\phi}(v)^{\frac{1}{\eta-1}} (1 - F(v)) dv; \\ \Pi_F &= \frac{\eta - 1}{\eta} \int_0^\infty \bar{\phi}(v)^{\frac{\eta}{\eta-1}} f(v) dv. \end{aligned} \tag{26}$$

最后，我们注意到，第一优 surplus 由下式给出：

$$S_F = \int_0^\infty \frac{\eta - 1}{\eta} v^{\frac{\eta}{\eta-1}} f(v) dv.$$

这相当于显式求解（3）。

现在注意到，归一化利润可以写成如下形式：

$$\Pi_F = \frac{\eta - 1}{\eta} \int_0^\infty \bar{\phi}(v)^{\frac{1}{\eta-1}} (v - \frac{1 - F(v)}{f(v)}) f(v) dv. \tag{27}$$

为验证这一点，我们注意到，在任意正则区间 $[v_i, \bar{v}_i]$ 中，

$$\phi(v) = \bar{\phi}(v) = (v - \frac{1 - F(v)}{f(v)}).$$

因此，我们有：

$$\bar{\phi}(v)^{\frac{1}{\eta-1}} (v - \frac{1 - F(v)}{f(v)}) = \bar{\phi}(v)^{\frac{\eta}{\eta-1}}.$$

在任意非正则区间 $[\bar{v}_i, v_{i+1}]$ 中，我们有

$$\bar{\phi}(v) = \frac{\int_{\bar{v}_i}^{\underline{v}_{i+1}} (v - \frac{1-F(v)}{f(v)}) f(v) dv}{F(\underline{v}_{i+1}) - F(\bar{v}_i)}.$$

因此，我们有：

$$\int_{\bar{v}_i}^{\underline{v}_{i+1}} \bar{\phi}(v)^{\frac{1}{\eta-1}}(v-\frac{1-F(v)}{f(v)})dv = \int_{\bar{v}_i}^{\underline{v}_{i+1}} \bar{\phi}(v)^{\frac{\eta}{\eta-1}}dv.$$

由此我们证明了（27）成立，并可将归一化利润写为：

$$U_F = \int_0^{\infty} \bar{\phi}(v)^{\frac{1}{\eta-1}} v f(v)dv - \frac{\eta}{\eta-1}\Pi_F \tag{28}$$

利用 H¨older 不等式，我们得到：

$$\int_0^{\infty} \bar{\phi}(v)^{\frac{1}{\eta-1}} v f(v)dv \leq \left(\int_0^{\infty} \bar{\phi}(v)^{\frac{\eta}{\eta-1}} f(v)dv\right)^{\frac{1}{\eta}} \left(\int_0^{\infty} v^{\frac{\eta}{\eta-1}} f(v)dv\right)^{\frac{\eta-1}{\eta}}.$$

因此，我们有：

$$U_F \leq \frac{\eta}{\eta-1}\left((\Pi_F)^{\frac{1}{\eta}}(S_F)^{\frac{\eta-1}{\eta}} - \Pi_F\right).$$

两边除以 S_F，可得到标准化消费者剩余的一个上界：

$$\frac{U_F}{S_F} \leq \frac{\eta}{\eta-1}\left(\left(\frac{\Pi_F}{S_F}\right)^{\frac{1}{\eta}} - \frac{\Pi_F}{S_F}\right). \tag{29}$$

我们注意到，函数 $h(x) = x^{1/\eta} - x$ 对所有 $x \in [1/\eta^{\frac{\eta}{\eta-1}}, 1]$ 都随 x 递减。命题2指出 $\Pi_F/S_F \geq 1/\eta^{\frac{\eta}{\eta-1}}$，因此我们得到（25）右侧是一个上界。现在我们需要证明不等式（29）是紧的。

为证明该不等式是紧的，考虑一个帕累托分布 $F(v) = 1 - v^{-\alpha}$，其中 $\alpha = {}^{1}_{\eta-1}\circ\ {}^{1-\beta\ \eta}$我们得到：

$$\frac{\Pi_F}{S_F} = \beta \quad \text{and} \quad \frac{U_F}{S_F} = \frac{\eta}{\eta-1}(\beta^{\frac{1}{\eta}} - \beta). \tag{30}$$

这证明 (29) 是紧的。注意，在 (25) 中替换 $\Pi_F/S_F = 1/\eta^{\frac{\eta}{\eta-1}}$后，我们得到：

$$\frac{U_F}{S_F} = \frac{1}{\eta^{\frac{1}{\eta-1}}}.$$

■

我们在图1中展示了不同 η 取值下的前沿。作为直接推论，我们得到消费者剩余的以下上界。

推论3（消费者剩余最大值）

消费者剩余的上界如下：

$$\sup_F \frac{U_F}{S_F} = \frac{1}{\eta^{\frac{1}{\eta-1}}} \tag{31}$$

该上界由形状参数为.....的帕累托分布达到

$$\alpha = \frac{\eta}{\eta - 1}.$$

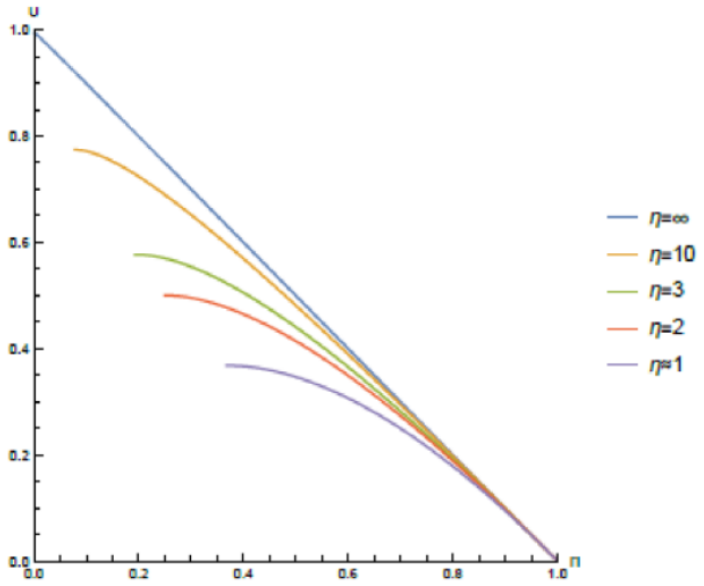


图1：不同等弹性成本函数的上界前沿

因此，我们得出结论：一般而言，成本的弹性越大，买方能够获得的社会剩余份额就越高。

令人惊讶的是，在所有分布环境中为卖方提供最高利润保证的机制 M^*，同时也是在所有分布环境的所有最优机制中，为买方提供最高期望消费者剩余的机制。因此，为卖方提供最高收入保证的机制，是通过让出最多的消费者剩余来实现这一点，并提供一种近乎有效的机制。它为每位参与者提供的均衡分配，都是社会最优分配的一个固定比例。

4.2 社会剩余的下界

现在，我们求出贝叶斯最优机制在所有价值分布下所产生的总剩余的下界。也就是说，我们求出社会剩余的最小值：

$$\inf_F \frac{U_F + \Pi_F}{S_F}. \tag{D}$$

请注意， S_F是有效配置所产生的社会剩余，因此一般来说， $U_F+\Pi_F < S_F$。只有当 $\eta \geq 2$时，我们才能求出这个下界，也就是说，当边际成本为凸时。

现在，我们给出任何机制所产生的扭曲的下界。在给出结果之前，我们注意到:

$$\left.\frac{U_{P_\alpha}}{S_{P_\alpha}}\right|_{\alpha=1} = 0 \quad \text{and} \quad \left.\frac{\Pi_{P_\alpha}}{S_{P_\alpha}}\right|_{\alpha=1} = \frac{1}{\eta}.$$

也就是说，当价值分布为形状参数为 $\alpha = 1$ 的帕累托分布时，消费者剩余为 0（事实上，对于任何截断帕累托分布 $P_{1,\ k}$，消费者剩余都为 0，并非仅在极限情况下如此），且归一化利润为 $1/\eta.$ 。因此，我们有:

$$\left.\frac{U_{P_\alpha}+\Pi_{P_\alpha}}{S_{P_\alpha}}\right|_{\alpha=1} = \frac{1}{\eta}. \tag{32}$$

换言之，所产生的社 会剩余是有效社会剩余的 $1/\eta$ 倍 .

命题3（社会剩余下界）

当 $\eta \geq 2$ 时，社会剩余的下界为:

$$\inf_F \ \frac{U_F+\Pi_F}{S_F} = \left.\frac{U_{P_\alpha}+\Pi_{P_\alpha}}{S_{P_\alpha}}\right|_{\alpha=1} = \frac{1}{\eta}.$$

证明。 根据表达式 (28)，我们得到:

$$\frac{\eta-1}{2\eta-1}U_F + \frac{\eta}{2\eta-1}\Pi_F = \frac{\eta-1}{2\eta-1}\int_0^\infty \bar{\phi}(v)^{\frac{1}{\eta-1}} v f(v)dv.$$

¯我们首先注意到， $\phi(v) \leq v$，因此当 $\eta \geq 2$ 时，我们有:

$$\bar{\phi}(v)^{\frac{1}{\eta-1}} v \geq \bar{\phi}(v) v^{\frac{1}{\eta-1}}.$$

现在我们注意到:

$$\int_0^\infty \bar{\phi}(v) v^{\frac{1}{\eta-1}} f(v)dv \geq \int_0^\infty \phi(v) v^{\frac{1}{\eta-1}} f(v)dv = \frac{1}{\eta}\int v^{\frac{\eta-1}{\eta}} f(v)dv. \tag{33}$$

该不等式源于以下事实：根据熨平虚拟价值的构造，对于任意递增函数 $h(v)$，我们有 $\int_0^\infty \bar{\phi}(v)h(v)f(v)dv \geq \int_0^\infty \phi(v)h(v)f(v)dv$（见 Kleiner、Moldovanu 和 Strack（2021））。等式则由分部积分得到。于是，（33）右侧恰好等于 S_F，因此有:

$$\frac{\eta-1}{2\eta-1}U_F + \frac{\eta}{2\eta-1}\Pi_F \geq \frac{1}{2\eta-1}S_F. \tag{34}$$

现在我们可以证明该不等式是紧的。利用（32），我们得到：

$$\frac{\eta-1}{2\eta-1}U_F+\frac{\eta}{2\eta-1}\Pi_F=\frac{1}{2\eta-1}S_F.$$

这对应于下界（34）。因此，我们有：

$$\inf_F \frac{\frac{\eta-1}{2\eta-1}U_F+\frac{\eta}{2\eta-1}\Pi_F}{S_F}=\frac{\eta}{2\eta-1}\frac{1}{\eta}.$$

由于 $\frac{\eta}{2\eta-1}>1/2$ 且下确界可由一个产生 0 消费者剩余的信息结构达到，我们也必然有：

$$\inf_F \frac{\frac{1}{2}U_F+\frac{1}{2}\Pi_F}{S_F}=\frac{1}{2}\frac{1}{\eta}.$$

两边乘以 2，即得所需结果。 ■

随着成本变得更加缺乏弹性（η 增大），下界会变小。当成本为二次函数时，最优机制总能产生至少一半的社会剩余。请注意，这一结果显然并不适用于每个 $\eta<2$。特别是，在极限情况下 $\eta\to 1$，我们知道最优机制可能会引入不可忽略的扭曲（见命题2）。

4.3 完整剩余边界

最后，我们或许会关注如何完整刻画可行剩余对的集合。对于二次成本函数的情形，我们可以给出这样的描述。之所以$\eta=2$ 特别容易分析，是因为在这种情形下，我们可以用闭式求出所有质量。

除了二次成本的情形，我们还可以给出均衡剩余相对于社会剩余的一般下界。这个一般界只要求边际成本是凸的，因此 $\eta\geq 2$。

可行的归一化利润和消费者剩余为：

$$\mathcal{F}=\{(x,y)\in\mathbb{R}\mid \text{there exists } F \text{ such that } x=\frac{U_F}{S_F} \text{ and } y=\frac{\Pi_F}{S_F}\}.$$

我们考虑刻画 $\mathcal{F}$的问题。只有在 $\eta=2$时，我们才能做到这一点，但先前的结果表明，类似的刻画适用于所有 η.

当 $\eta=2$，对于固定的 k，我们有：

$$\frac{U_{P_{\alpha,k}}}{S_{P_{\alpha,k}}}=\frac{2(\alpha-1)(k^{\alpha-2}-1)}{\alpha(\alpha k^{\alpha-2}-2)} \quad \text{and} \quad \frac{\Pi_{P_{\alpha,k}}}{S_{P_{\alpha,k}}}=\frac{(\alpha-1)^2k^{\alpha-2}-1}{\alpha(\alpha k^{\alpha-2}-2)}.$$

取极限 $k \to \infty$，可得：

$$(\frac{U_{P_\alpha}}{S_{P_\alpha}}, \frac{\Pi_{P_\alpha}}{S_{P_\alpha}}) = \begin{cases} \left(\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2}, \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2}\right), & \text{for } \alpha \in [2, \infty); \\ (\frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{1}{2\alpha}), & \text{for } \alpha \in [1, 2]. \end{cases} \tag{35}$$

$\alpha \geq 2$ 的曲线是命题2中所刻画的曲线； $\alpha \in [1, 2]$ 的曲线在迄今为止我们给出的结果中没有直接对应的曲线（ $\alpha = 1$除外）。

命题4（可行的标准化利润与效用）

$\mathcal{F}$ 的闭包由(35)中的曲线围成的区域给出。$\mathcal{F}$ 内部的每一点都可由某个截断帕累托分布$P_{\alpha,k}$生成。

证明。 上边界已在命题2中刻画。现在我们来刻画 $\mathcal{F}$的下边界。将（34）写成关于 $\eta = 2$的形式，可得：

$$\frac{1}{3}U_F + \frac{2}{3}\Pi_F \geq \frac{1}{3}S_F.$$

然而，参数为 $\alpha \in [1, 2]$ 的帕累托分布的极限（见（30））恰好给出：

$$\frac{\frac{1}{3}U_{P_\alpha} + \frac{2}{3}\Pi_{P_\alpha}}{S_{P_\alpha}} = \frac{1}{3}.$$

因此，这些分布构成了可行消费者剩余与利润集合的下边界。

■

该命题完整刻画了任意价值分布所产生的归一化利润与消费者剩余集合。我们在下方的图2中展示了这一结果。我们证明，卖方与买方之间剩余分配的上边界由参数为 $\alpha \geq 2$ 的帕累托分布族达到。沿着产生正消费者剩余的线段，其下界由参数为 $1 \leq \alpha \leq 2$ 的帕累托分布达到。最后，剩余为零的下方线段由截断帕累托分布达到。在这里，卖方只向价值处于截断分布质量点上的买方提供产品。因此，卖方可以提取全部剩余，并为位于上方质量点的买方实现有效配置。获得服务的买方得到的净剩余为零。

因此，截断帕累托分布族能够生成所有可行剩余对。不过，我们也可能关心其他价值分布如何影响剩余的产生，以及剩余在卖方与买方之间的分配。图3展示了其他分布族所生成的结果范围，包括二元分布、均匀分布和幂分布。

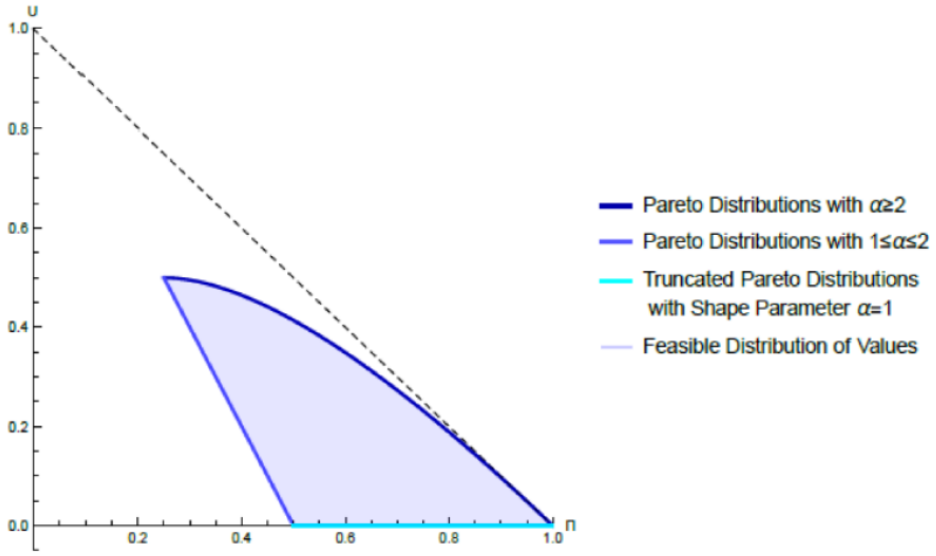


图2：二次成本下可行的标准化消费者剩余和标准化利润

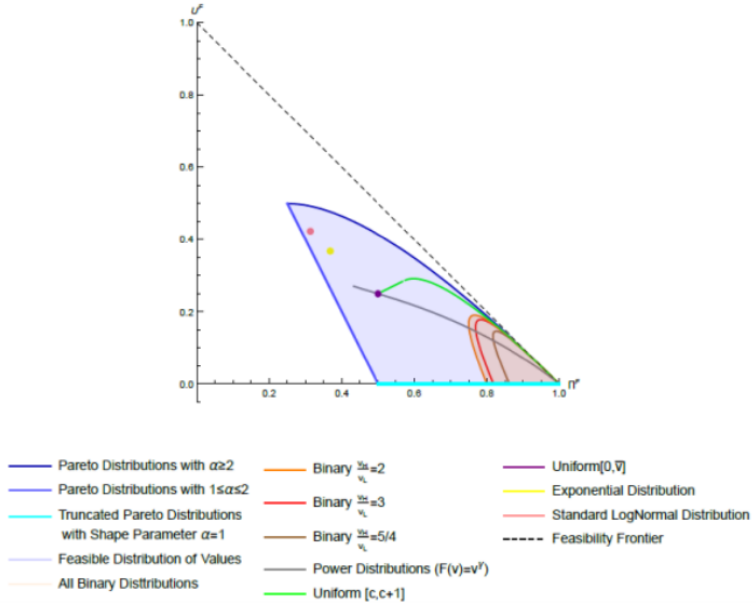


图3：二次成本下不同分布的标准化消费者剩余和标准化利润示意图

5 数量歧视

到目前为止，我们考察了 Mussa and Rosen（1978）提出的质量歧视模型。现在，我们将按照 Maskin and Riley（1984）的思路，研究数量歧视的相应结果。我们首先考察乘法可分模型，然后推导出更一般的结果。在 Mussa and Rosen（1978）的质量歧视模型中，买方对质量的边际支付意愿恒定，而提供质量的成本不断上升且呈凸性。相比之下，在数量歧视模型中，提供某种给定产品的额外单位所需的边际成本恒定。此时，收益递减源于效用函数的凹性。相应地，在前一种模型中，收益环境由成本弹性描述；而在后一种模型中，买方和卖方的选择则由需求弹性决定。

我们首先针对效用函数具有乘法可分性的情形给出利润保证，然后将其推广至不满足可分性条件的非线性环境。

5.1 乘法可分效用

现在假设效用函数为

$$u(v,q)=v\frac{\eta}{\eta+1}q^{\frac{\eta+1}{\eta}},$$

对于某个 $\eta\in(-\infty,-1)$。因此，数量较大时，效用函数递增且为凹函数。生产成本是线性的 $c(q)=cq$，其中我们将 $c=1.$ 归一化

需求由边际效用的逆函数定义：

$$D(v,p)\triangleq u_q^{-1}(v,p),$$

其中，下标 q 表示对 q 的偏导数。采用上述参数化形式，我们得到需求弹性为

$$\frac{\partial D(v,p)}{\partial p}\frac{p}{D(v,p)}\triangleq\eta.$$

我们注意到，从成本弹性转向需求弹性时，仍以 η 作为弹性的参数。不过，现在 η 是一个负数 $\eta\in(-\infty,\ -1)$。

与前面质量歧视的情形一样，形状参数为$\alpha\in(1,\ \infty)$的帕累托分布在极小极大问题中发挥着关键作用。

定理3（数量歧视下的利润保证）

T利润保障机制是一种统一价格机制 $t = p^*q$ ，其

$$p^* = \frac{\eta}{\eta+1}. \tag{36}$$

其产生的利润为:

$$\Pi^* = \left(\frac{\eta}{\eta+1}\right)^{\eta} S, \tag{37}$$

对每个 F 均成立。此外，利润保证机制是针对形状参数为 $\alpha = |\eta|$ 的帕累托分布的贝叶斯最优机制，并达到下确界:

$$\lim_{\alpha \to |\eta|} \frac{\Pi_{P_\alpha}}{S_{P_\alpha}} = \left(\frac{\eta}{\eta+1}\right)^{\eta}. \tag{38}$$

证明。 在第2节的基准模型中，我们有一个效用函数如下的买方:

$$u(v,q,t) = vq - t,$$

以及一个成本函数如下的卖方:

$$c(q) = \frac{q^\eta}{\eta}.$$

现在考虑以下变量变换

$$\hat{q} \triangleq \frac{q^\eta}{\eta}, \quad \hat{\eta} \triangleq -\frac{\eta}{\eta-1}, \quad \hat{v} \triangleq v(\frac{\hat{\eta}}{\hat{\eta}+1})^{\frac{1}{\hat{\eta}}}.$$

于是，效用函数和成本函数如下:

$$u(v,q,t) = \hat{v}(\frac{\hat{\eta}}{\hat{\eta}+1})\hat{q}^{\frac{\hat{\eta}+1}{\hat{\eta}}} - t,$$

and

$$c(q) = \hat{q}.$$

通过这一变量变换，我们便得到本节的模型。定理1和定理2的利润保证结果随即成立。接下来我们证明，对于参数为 α的帕累托分布，统一定价机制是贝叶斯最优的。

社会剩余为:

$$\begin{aligned} S_{P_\alpha} &= \int_1^\infty \max_q \{v\frac{\eta}{\eta+1}q^{\frac{\eta+1}{\eta}} - q\} dF(v) \\ &= \int_1^\infty \frac{-1}{\eta+1} v^{-\eta} dF(v) \\ &= \int_1^\infty \frac{-1}{\eta+1} v^{-\eta} dF(v) \\ &= \frac{-1}{\eta+1}\frac{-1}{-\eta+\alpha}. \end{aligned}$$

另一方面，利润为：

$$\begin{aligned}\Pi_{P_\alpha} &= \int_1^\infty \max_q \{v\frac{\eta}{\eta+1}q^{\frac{\eta+1}{\eta}} - q - \frac{\eta}{\eta+1}q^{\frac{\eta+1}{\eta}}\frac{1-F(v)}{f(v)}\}dF(v) \\ &= \int_1^\infty \max_q \{v\frac{\eta}{\eta+1}\frac{\alpha-1}{\alpha}q^{\frac{\eta+1}{\eta}} - q\}dF(v) \\ &= \int_1^\infty \frac{-1}{\eta+1}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{-\eta} v^{-\eta}dF(v) \\ &= \frac{1}{\eta+1}\frac{1}{\alpha-\eta}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{-\eta}\end{aligned}$$

于是我们得到：

$$\frac{\Pi_{P_\alpha}}{S_{P_\alpha}} = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{-\eta}.$$

取极限 $\alpha \to |\eta|$，即可得到结果。 ■

因此，对于凹效用函数和线性成本函数，我们可以构造一种利润保障机制。该机制保留了我们之前看到的恒定加价性质；但在线性成本的情况下，线性定价机制，即统一单位价格，也能实现利润保障。因此，甚至可以用更简单的机制来实现利润保障。根据定理3证明中提出的变量替换，还可以立即得出，利润保障机制会在所有分布 F 下产生统一的利润和消费者剩余份额。因此，在所有分布下，利润保障机制都能使买方和卖方之间的剩余保持统一分配。

5.2 非线性效用

现在我们考虑一类非线性效用函数，其中支付意愿和数量可以以非线性方式相互作用，且不再满足先前的乘法可分条件。因此，我们假设扣除支付后的效用 $t \in \mathbb{R}_+$ 为：

$$u(v,q,t) = h(v,q) - t,$$

其中，在给定 v的情况下， h 关于 q 是凹函数。支付意愿参数 v 仍服从 F，生产成本仍为线性形式 $c(q) = cq$，并且我们在不失一般性的情况下将 $c = 1$ 归一化。

由于效用函数中现在出现了非线性，我们实际上已经假设卖方完全了解这种非线性的确切形状，同时假设其对

买方支付意愿 v 的信息不完全。因此，我们现在要探讨的是：即使卖方对这种非线性、进而对需求函数的弹性了解不完全，我们是否仍能为卖方找到利润保证。

因此，需求函数定义为边际效用的反函数：

$$D(v,p) \triangleq h_q^{-1}(v,p),$$

其中，下标 q 表示对 q的偏导数。需求弹性因此为：

$$\eta(v,p) \triangleq \frac{\partial D(v,p)}{\partial p}\frac{p}{D(v,p)},$$

其中，假设需求弹性为负 $\eta(v,\ p) < 0$ 对所有 $v,\ p$均成立。我们假设，对于所有 $p \in [1,\infty]$,

$$\eta(v,p) \text{ is non-increasing in } p \text{ and } \eta(v,p) \in [\bar{\eta}-1,\bar{\eta}], \tag{39}$$

对于某个 $\bar{\eta} \in (-\infty,\ -1)$。接下来，我们给出一个稳健利润保证，只要需求弹性 $\eta(v,\ p)$处于范围 $[\bar{\eta}-1,\bar{\eta}]$ 内，其中某个上界为 $\bar{\eta} < -1$。

For 给定需求函数 $D\,(v,\ p)$，最优统一价格为：

$$\hat{p} = \arg\max_p D(v,p)(p-c).$$

一阶条件可写为：

$$\hat{p} = c\frac{\eta(v,\hat{p})}{\eta(v,\hat{p})+1}.$$

因此，我们有：

$$\hat{p} \le c\frac{\bar{\eta}}{\bar{\eta}+1}.$$

由于上界与我们的分析相关，因此用 Π^* 表示价格为 p^* 的统一价格机制所产生的利润是有用的：

$$\Pi^* \triangleq D(v,p^*)(p^*-c).$$

定理4（稳健利润保证机制）

统一价格机制 $t = p^*q$，其中

$$p^* = \frac{\bar{\eta}}{\bar{\eta}+1}$$

保证社会剩余的利润份额：

$$\Pi^* \ge \left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{\eta}+1}\right)^{\bar{\eta}} S. \tag{40}$$

证明。 统一定价机制所产生的利润为:

$$\Pi^* = D(v, p^*)(p^* - c).$$

社会剩余为:

$$S = \int_c^\infty D(v, p)dp.$$

需求满足:

$$\log(\frac{D(v,p)}{D(v,p^*)}) = \int_{p^*}^{p} \frac{\eta(v,s)}{s} ds.$$

由于价格弹性非递增，我们有:

$$\log(\frac{D(v,p)}{D(v,p^*)}) = \int_{p^*}^{p} \frac{\eta(v,s)}{s} ds \leq \eta(v,p^*) \int_{p^*}^{p} \frac{1}{s} ds = \eta(v,p^*) \log\left(\frac{p}{p^*}\right).$$

因此，我们有:

$$D(v,p) \leq D(v,p^*) \left(\frac{p}{p^*}\right)^{\eta(v,p^*)}.$$

于是，我们有:

$$S \leq D(v,p^*) \left(\frac{1}{p^*}\right)^{\eta(v,p^*)} \int_c^\infty p^{\eta(v,p^*)} dp = D(v,p^*) \left(\frac{1}{p^*}\right)^{\eta(v,p^*)} \frac{-1}{\eta(v,p^*)+1} c^{\eta(v,p^*)+1}.$$

于是我们有

$$\frac{\Pi^*}{S} \geq \frac{-(\eta(v,p^*)+1)(p^*)^{\eta(v,p^*)}(p^*-c)}{c^{\eta(v,p^*)+1}}.$$

现在注意到，函数 $g(\eta) \triangleq -(\eta+1)p^\eta$ 关于 η 是拟凹的。我们还假设 $\eta(v, p^*) \in [\underline{\eta}, \bar{\eta}]$，并且:

$$-(\bar{\eta}+1)(p^*)^{\bar{\eta}} = -(\underline{\eta}+1)(p^*)^{\underline{\eta}}.$$

其中 $\underline{\eta} = \bar{\eta} - 1$。因此我们有:

$$\frac{\Pi^*}{S} \geq \frac{-(\bar{\eta}+1)(p^*)^{\bar{\eta}}(p^*-c)}{c^{\eta(v,p^*)+1}} = \left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{\eta}+1}\right)^{\bar{\eta}}.$$

现在，由于该界是针对每个 v 逐点建立的，因此它对所有 v 的整体也成立。 ■

定理4为这样一种环境给出了利润保证：需求弹性在支付意愿和价格范围内的变化幅度有限。因此，与先前的结果不同，它不要求需求弹性恒定。考虑需求弹性而非成本弹性时，利润保证的稳健性或许更为重要。毕竟，当卖方

缺乏关于买方支付意愿的信息时，也可能缺乏关于需求弹性的信息。相应地，我们得到的界限略弱，因为它仅涉及需求弹性的上界。同样，对于满足上述弹性条件（39）的任意非线性需求函数，我们并未证明统一定价机制是贝叶斯最优的。

6 采购

全文始终聚焦于非线性定价这一经典问题：卖方不确定买方的需求，而买方掌握关于不同质量或数量商品支付意愿的私人信息。另一种情形是，我们可能关注稳健采购策略：单个大型买方希望从掌握成本条件私人信息的卖方处采购。此时，我们可以考察以竞争比衡量的稳健采购策略。由于销售问题与采购问题密切相关，我们确实发现，这里也存在与定理1和定理3类似的刻画。和之前一样，区分数量差异化与质量差异化会很有帮助。

6.1 质量差异化

一位买方从成本未知的卖方处采购一件质量可变的商品。买方对质量的估值为 $q \in \mathbb{R}_+$，卖方提供质量为q的商品所需的成本为 $\theta \cdot c(q)$。参数 θ 是卖方的私人信息，其分布由 F描述。成本函数具有恒定弹性

$$c(q) = q^\eta/\eta.$$

有效社会剩余通过根据现行成本函数确定最优质量来产生：

$$S(\theta) = \max_q \{q - \theta c(q)\}.$$

有效质量与成本参数 θ 成反比：

$$q^* = \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\frac{1}{\eta-1}}$$

并产生以下社会剩余：

$$S(\theta) = \frac{\eta-1}{\eta}(\frac{1}{\theta})^{\frac{1}{\eta-1}}.$$

如果买方为质量的每个边际单位提供恒定价格 p，那么卖方将最优地提供如下质量：

$$\theta c'(q) = p \Longleftrightarrow q = (\frac{p}{\theta})^{\frac{1}{\eta-1}}.$$

推论4（剩余保障机制）
最优剩余保障机制为增量质量提供恒定单位价格

$$p = 1/\eta$$

，并保证买方获得一定份额：

$$\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\frac{1}{\eta-1}}$$

有效社会剩余。

因此，稳健最优定价策略是对质量采用统一单位价格，卖方随后可据此提供最优质量。剩余保障随着卖方成本函数弹性的增大而提高。

如果 θ 遵循幂函数 $F(\theta) = \theta^{\alpha}$，则最优机制包括最大化：

$$\max\left\{q - \theta c(q) - c(q)\frac{F(\theta)}{f(\theta)}\right\}.$$

我们得到：

$$1 - \theta(\frac{\alpha+1}{\alpha})c'(q) = 0.$$

因此得到：

$$q = (\frac{\alpha}{\theta(\alpha+1)})^{\frac{1}{\eta-1}}.$$

当 $\alpha = 1/(\eta - 1)$时，我们得到相同的结果。

6.2 数量差异化

我们也可以考虑另一种情况：买方对商品数量的边际效用递减，而卖方生产额外产品的边际成本恒定。因此，买方的效用函数为 $u(q)$，其中 q 是商品的数量，并且

$$u(q) = \eta q^{(\eta+1)/\eta}/(\eta+1) \tag{41}$$

其需求弹性为:

$$\eta \in (-\infty, -1)\,. \tag{42}$$

效用函数在上述范围内递增且凹，且

$$u'(q) = q^{\frac{1}{\eta}} > 0, u''(q) = \frac{q^{\frac{1}{\eta}-1}}{\eta} < 0.$$

（对于 $\eta > -1$，上述参数化形式给出的总效用为负。）卖方的成本为

$$c(q) = \theta \cdot q,$$

其中边际成本 θ 是卖方的私人信息，由一个共同的先验分布给出。第一优 surplus 为:

$$S(\theta) = \max_{q} \{u(q) - \theta q\}\,.$$

有效数量为:

$$q^* = \theta^{\eta}$$

社会剩余为

$$S(\theta) = -\frac{\theta^{\eta+1}}{\eta+1}.$$

推论5（剩余保障机制）
最优剩余保障机制提供恒定加价

$$p(q) = \frac{\eta+1}{\eta} q^{1/\eta}$$

数量，并保证买方获得以下份额:

$$\left(\frac{\eta}{\eta+1}\right)^{\eta+1}$$

最优社会剩余。

如果买方设定恒定加价 $p(q) = zq^{1/\eta}$，卖方将出售

$$\theta = p(q).$$

因此， $q = (\frac{\theta}{z})^{\eta}$。因此，买方剩余为:

$$u(q) - \int_0^q p(y)dy = \frac{\eta}{\eta+1}(\frac{\theta}{z})^{\eta+1} - z\frac{\eta}{\eta+1}(\frac{\theta}{z})^{\eta+1}$$

由此可得，最优值为：

$$z = \frac{\eta + 1}{\eta}.$$

因此，买方提出了一种恒定加价定价策略，使交付数量的单位价格与边际估值成正比。

因此，对于大型买方，最优策略不是恒定单位价格，而是随数量增加而递减的恒定加价价格。（这种策略易于实施，并在承诺与保险之间实现权衡。）

7 结论

我们为存在二级价格歧视的环境建立了稳健定价和菜单策略。我们表明，简单的定价策略——即质量差异化情形下的恒定加价策略，以及数量差异化情形下的线性定价规则——能够为卖方带来最高的利润保证。

我们证明了，在成本函数或需求函数具有恒定弹性的情况下，这些定价策略是最优的。但我们也表明，这些策略的特征使我们能够在恒定弹性条件之外建立界限，只需假设成本函数具有凸性或需求函数具有凹性。

在分析中，我们聚焦于经典的最优销售问题：卖方设计一个选择菜单，以筛选对支付意愿拥有私人信息的买方。然而，我们证明，同样的论证及其相应机制也能帮助我们在采购情境中确立效用保障。在这类情境中，买方试图针对那些对生产一定数量或质量产品的成本或边际成本拥有私人信息的供应商，制定最优采购策略。因此，我们为各种非线性定价问题提供了稳健的利润或效用保障。

我们用相对于社会效率剩余的竞争比来表述利润保证。作为极小极大问题的一部分，帕累托分布成为使卖方收入最小化的关键分布。作为临界值分布，帕累托分布会产生线性虚拟效用。这表明，帕累托分布的某种形式也可能在相关问题中发挥重要作用。例如，Bergemann、Brooks 和 Morris（2015）考察了消费者均有单位需求时三级价格歧视的极限。在非线性定价问题的背景下，市场细分会如何影响剩余分布，仍是一个未解决的问题；

也就是说，当我们同时允许二级和三级价格歧视时，情况便是如此。在相关研究中，Bergemann、Heumann 和 Morris（2023）沿着 Roesler 和 Szentes（2017）以及 Deb 和 Roesler（2022）的思路，研究非线性定价问题中使消费者剩余最大化的分布；后两项研究分别考察单物品和多物品分配问题。

参考文献

Bergemann、 D.、 B. Brooks、 and S. Morris （2015年）：“价格歧视的界限”，《美国经济评论》，105，921–957。Bergemann、 D.、 T. Heumann、 and S. Morris （2023年）：“最优拍卖的信息福利界限”，讨论论文。Carroll、 G.（2017）：“多维筛选中的稳健性与分离”，《计量经济学》，85，453–488。Deb、 R.、 and A. Roesler （2022）：“多维筛选：买方最优学习与信息稳健性”，讨论论文，多伦多大学。Haghpanah、 N.、 and R. Siegel （2022）：“多产品歧视的界限”，《美国经济评论：洞见》，4，443–458。Hartline、 J.、 and T. Roughgarden （2014）：“最优平台设计”，讨论论文，西北大学。Kleiner、 A.、 B. Moldovanu、 and P. Strack （2021）：“极值点与主序：经济学应用”，《计量经济学》，89，1557–1593。Maskin、 E.、 and J. Riley （1984）：“不完全信息下的垄断”，《兰德经济学杂志》，15，171–196。Mussa、 M.、 and S. Rosen （1978）：“垄断与产品质量”，《经济理论杂志》，18，301–317。Neeman、 Z.（2003）：“英式拍卖的有效性”，《博弈与经济行为》，43，214–238。Roesler、 A.、 and B. Szentes （2017）：“买方最优学习与垄断定价”，《美国经济评论》，107，2072–2080。Toikka、 J.（2011）：“无控制的熨平”，《经济理论杂志》，146(6)，2510–2526。