LMU-ASC 06/23
IFT-UAM/CSIC-23-7

arXiv:2302.00007v1 [hep-th] 31 Jan 2023

IIBordia 编年史：对偶、配边与沼泽地

Arun Debray[1]*、Markus Dierigl[2]†，

Jonathan J. Heckman[3,4]‡，以及 Miguel Montero[5,6]§

[1]普渡大学数学系，美国印第安纳州西拉斐特市大学街北段150号，邮编47907 [2]慕尼黑大学阿诺德·索末菲理论物理中心，德国慕尼黑，邮编80333 [3]宾夕法尼亚大学物理与天文学系，美国宾夕法尼亚州费城，邮编19104 [4]宾夕法尼亚大学数学系，美国宾夕法尼亚州费城，邮编19104 [5]哈佛大学杰斐逊物理实验室，美国马萨诸塞州剑桥市，邮编02138 [6]理论物理研究所（IFT-UAM/CSIC），西班牙马德里，邮编28049，Nicolás Cabrera街13-15号

2023年2月

*电子邮件：adebray@purdue.edu
†电子邮件：m.dierigl@physik.uni-muenchen.de
‡电子邮件：jheckman@sas.upenn.edu§
电子邮件：miguel.montero@uam.es

摘要

本文在具有非平凡对偶丛的 IIB 型弦理论几何背景下研究沼泽地配边猜想。相当令人惊讶的是，我们发现，许多具有取值于 Mp(2，$\mathbb{Z}$)（与费米子相关的 SL(2，$\mathbb{Z}$) 的双覆盖）的对偶丛的非平凡配边类，对应于众所周知的超对称 F 理论背景的渐近边界。这些背景包括 $[p,q]$-7 膜、不可希格斯化簇、S 折叠，以及各种低维推广。这些弦论对象打破了与非平凡配边群相关的整体对称性，为配边猜想提供了有力检验。进一步纳入世界面定向反转后，对偶群扩展为 GL(2，$\mathbb{Z}$) 的 Pin 双覆盖。相应的配边群要求引入一种新的非超对称“反射 7 膜”及其紧化，以确保整体对称性不存在，从而为非超对称 IIB 背景中的配边猜想提供了一个有趣的预言。

本研究的一项重要内容，是明确推导相关的配边群及其生成元；这些生成元对应于具体弦理论背景的渐近边界。本文主要采用 Adams 谱序列，并对其作了详细介绍。我们预计，同样的技术可以应用于多种不同情形。


$\Omega_k^{\text{Spin-GL}^+(2,\mathbb{Z})}(\text{pt})$
$\Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}(\text{pt})$
$\Omega_k^{\text{Spin}}(B\text{SL}(2,\mathbb{Z}))$
Map of the Lands of IIBordia as Explored by the Authors
The Duality Bordism Peaks
Stairway to Higher Anomalies
May–Milgram Lighthouse
Swamp of the Discrete θ Angles
Field of Undefined Differentials
Fortress of the Queen of Reflections
The Adams Spectral Manor
Magical Runestones
The Shearing Meadows
City of Metaplectia
The Prime Fields
The Splitting Anvil
Sea of Further Directions
Plains of Cobordism
$\Omega_k^{\text{QG}} = 0$
Mr Smith's House
Homotopy University
Bordism 101
PATH OF THE PHYSICIST WARRIOR
PATH OF THE MATHEMAGICIAN
Pond of Conclusions
Acknowledgments
PATH OF THE BUSY PROFESSOR
Camp Introduction
Paco Jaudzie

目录

I 引言　　与总结 5

1 引言 5 2 配边：这是什么？ 10 3 我们结果的总结 13 4 结论与未来方向 21 5 最后的鼓励之言 25

II IIB 型背景与缺陷　　26

6 Spin-Mp 缺陷　　27

6.1 余维二缺陷.28 6.2 余维三缺陷.29 6.3 余维四缺陷.30 6.4 余维五缺陷.31 6.5 余维六缺陷.31 6.6 余维七缺陷.34 6.7 余维八缺陷.35 6.8 纤维化生成元.37 6.9 余维九缺陷.38 6.10 余维十缺陷.39

7 Spin-GL^+缺陷　　40

7.1 余维二缺陷.40 7.2 将 K3 曲面上的 F理论形变至虚无.43 7.3 余维三缺陷.44 7.4 余维四缺陷.44 7.5 余维五缺陷.46 7.6 余维六缺陷.46 7.7 余维七缺陷.47 7.8 余维八缺陷.47

7.9 余维九缺陷.48 7.10 余维十缺陷.48**8 Ω_{10} 和离散 θ角 50 9 对偶反常 51**

III IIB 型的配边类 53

10 计算预备知识 54

10.1 分类空间.54 10.2 一次处理一个素数.57 10.3 轻松搞懂谱.57 10.4 剪切.60 10.5 奇素数处的 Spin 配边分解.65 10.6 2-局部的 Spin 配边分解.66

11 关于 Adams 谱序列需要了解的内容 67

11.1 Steenrod 代数.69 11.2 确定 Ext 群.72 11.3 微分.76

11.4 扩张与 E_∞-页.79

12 $\Omega_*^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})\big)$ 84 的计算

12.1 在 $p=2$ 处计算.85 12.2 在奇素数处计算.87 12.3 寻找生成元.89

13 计算 的$\Omega_*^{\mathrm{Spin\text{-}Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (点) 91

13.1 在奇素数处计算.92 13.2 在 $p=2$ 处计算.93 13.3 寻找生成元.101 13.4 乘法结构.102

14 计算$\Omega^{\mathrm{Spin\text{-}GL}^+_{(2,\mathbb{Z})}}{}_*$ (点) 103

14.1 在奇素数处计算.104 14.2 $p=2$ 处的Adams 谱序列.107

14.3 在 $p = 2$处确定生成元.118 14.4 乘法结构.143

A 配边群汇编 144

B 对偶群 147

B.1 费米子宇称与世界面定向反转.150 B.2 二面体群的嵌入.151

C η-不变量 152

C.1 η-透镜空间的不变量.153 C.2 η-透镜空间丛的不变量.156 C.3 计算 η-不变量以解决扩张问题 157

D May-Milgram 定理 160

E 个史密斯 同态 164

E.1 这个迷人的流形：关于史密斯同态的一般性讨论 . . . . 165 E.2 Spin-Mp$(2, \mathbb{Z})$ 配边的史密斯同态.166 E.3 Spin-GL$^+(2, \mathbb{Z})$ 配边的史密斯同态.167

第一部分

引言与概要

1 引言

量子引力研究中的一大挑战是，尽管如今各种长距离／弱耦合极限已得到了充分理解，但紫外完备的微观表述仍遥不可及。在缺乏完整量子引力理论的情况下，自然的做法是运用各种互补的“自下而上”方法来提出约束，其中包括对偶性和对称性的一般原理。

广义而言，沼泽地计划 [1, 2] （综述见 [3–5] ）是一种雄心勃勃的“自下而上”方法，旨在精准地处理这些问题。这催生了相互交织的猜想结果网络，也为许多此前研究过的弦理论背景提供了新的视角。有鉴于此，自然会问，沼泽地方面的考量能否为非微扰对偶的结构带来额外的见解。反过来，我们也可以利用知名的弦理论对偶来检验各种沼泽地猜想。

对称性与量子引力之间的相互作用由来已久，其中包括“民间定理”——不存在整体对称性（另见 [6–8]）。在沼泽地猜想的背景下，McNamara 和 Vafa [9] 将其显著强化为配边猜想（CC），该猜想断言量子引力的配边群是平凡的：

$$\Omega_k^{\mathrm{QG}} = 0\,. \tag{1.1}$$

从物理角度看，配边理论源于我们考虑引力路径积分中的场构型，而这些构型趋于满足渐近边界条件。[1] 配边猜想的表述是，在量子引力中，我们总能将两个渐近场构型连接起来。当然，$\Omega_k^{\mathrm{QG}} = 0$的精确定义在某种意义上要求我们先定义量子引力及其所有长距离极限。尽管如此，Ω_k^{QG} 的元素应被视为量子引力的 k 维紧化的等价类，这些紧化可以通过畴壁彼此连接。上述表述意味着，所有量子引力构成的景观实际上都通过这些畴壁彼此连通。原因在于，如果配边群 Ω_k^{QG} 不消失，那么非平凡的配边群就会表现为守恒整体荷。

现在，给定一个 我们理论中假定的对称性 $\mathcal{G}$ ，可以为我们的时空赋予一个

[1]这里需要强调的一点是，原则上，我们甚至不需要指定光滑的内部几何。所需的只是对渐近定义的场构型有所概念，例如渐近平直时空的 S 矩阵，或 AdS/CFT对应。

$\mathcal{G}$-丛[2]，，而在实际中，$\Omega_k^{\mathcal{G}} \neq 0$的情况往往会发生。换言之，引力路径积分中存在一些场构型，它们无法通过拓扑变形彼此转化。在这种情况下，配边猜想给出了明确的预测：为了使 Ω_k^{QG} 平凡，理论中必须存在新的缺陷（即某种对称性 $\mathcal{G}$的源），以补充对象谱。至此，这一猜想已通过若干非平凡的检验（例如参见 [9–23]），为构造诸如 p-膜和特定引力瞬子之类的缺陷提供了一种“自下而上”的方法（例如参见 [24]）。在所有已知的物理应用中，相关的配边群只是自由部分与挠部分的有限直和：

$$\Omega_k^{\mathcal{G}} \simeq \mathbb{Z}^n \oplus \bigoplus_i (\mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z})^{n_i}, \tag{1.2}$$

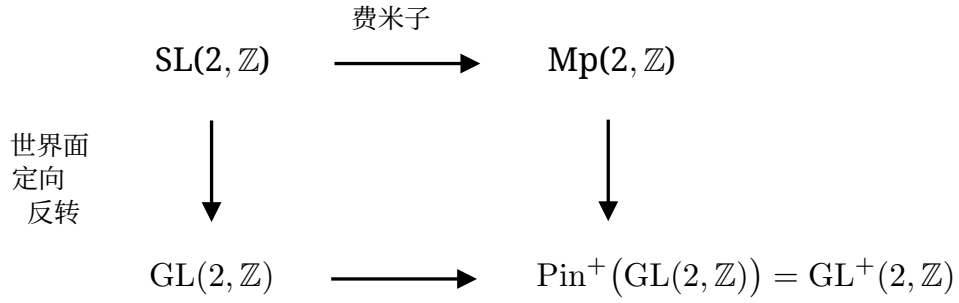
采用显而易见的记号。[3]

现在，配边群定义了一种广义同调理论，因此本质上是阿贝尔对象。自然会问，这些考量是否与非阿贝尔对偶群的存在相容，例如弦理论和各种量子场论中经常出现的那些对偶群。特别是，reference [12]表明，将配边猜想与 IIB 型弦 / F 理论中著名的 SL(2, $\mathbb{Z}$) 对偶群结合起来，可以成功预测 $[p, q]$ 7 膜的存在；它们是非微扰 F 理论真空的核心组成部分之一。更具体地说，这些对象与 Ω_1^{QG} 相关，即渐近一维边界几何。

由此，我们可以问：配边猜想能否正确预测已知的 IIB 型 / F 理论对象谱？反过来，我们能否利用配边猜想预测 无法通过其他方法（通常是超对称方法）研究的新型非微扰对象？本文旨在系统分类与 IIB 型 / F 理论基本对偶相容的可能对象。为此，我们采用的主要工具是计算与涉及对偶丛的扭曲 Spin 结构相关的配边群。

当然，这就引出了一个问题：本文需要考虑的“对偶丛”究竟应如何精确定义。首先，甚至连指定 IIB 的对偶群都出奇地微妙。众所周知，IIB 型超引力作用量在 SL(2, $\mathbb{R}$) 群作用下保持不变；考虑到通量量子化后，该群缩减为 SL(2, $\mathbb{Z}$)，这也是环面的 大微分同胚群，并且是通过 F理论对 IIB 型弦进行几何表述的起点 [25–27]。正如 [28, 29], 所指出的，对偶群还必须扩展为对 IIB 超引力费米子的适当作用，由此得到 Mp(2, $\mathbb{Z}$)，即 SL(2, $\mathbb{Z}$) 的元辛覆盖。[4] 即便如此，这仍不是

[2]此处， $\mathcal{G}$ 通常包含有关内对称性、流形的切向结构，以及它们组合成扭曲切向结构的信息。[3]与许多物理学文献相比，我们选择用 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 表示含有 m 个元素的循环群。这样可以避免与文中使用的其他记号混淆，例如用 $\mathbb{Z}_p$ 表示 p 进整数。[4]这类似于将 SO(d) 扩张为 Spin(d)。



Fi图 1：IIB 型弦理论对偶群的各种扩张。

完整的对偶群，因为还必须纳入 IIB世界面定向反转以及 $(-1)^{F_L}$ 左行时空费米子宇称变换。从几何上看，这些变换在 F 理论环面上表现为反射。事实上，为了使 M理论/F理论对偶成立，必须允许这类反射，因为 M 理论在 Pin^+ 背景上隐含地具有意义。考虑到这一点，可以得出结论（见 [29]）：IIB 对偶群最准确的表述是 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ 的 Pin^+ 覆盖。图 1 展示了示意图。

从物理角度看，对偶群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 描述了 IIB 弦／F 理论的玻色／非手征扇区。考虑费米子后，我们得到 $\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})$。对于由亏格一纤维化卡拉比-丘空间指定的超对称 F 理论背景，费米子的出现总可以视为“隐含的”，因此人们预期，配边猜想针对 $\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})$ 所预言的相关对象通常是超对称的。另一方面，$\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ 包含反射，除了其他作用外，它还能将 D3膜变为反D3膜。因此，包含此类对称性的 IIB 场构型使我们能够接触到非超对称 对象。换句话说，我们可以利用 $\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})$-对偶配边来检验配边猜想，并利用 $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z})$-对偶配边来预测新的、可能是非超对称的对象！

鉴于以上所有内容，显然有三种不同的“对偶丛”配边概念与本文相关。首先，我们可以考虑与 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 对偶相关的配边群，其中插值几何也具有 Spin 结构。形式上，这些由以下配边群刻画：

$$\Omega_k^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)\,, \tag{1.3}$$

（另见 [30]），其中“B”指 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 的分类空间。

考虑到费米子的出现，这自然将对偶变换扩展为 $\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})$。这里有一点值得注意：众所周知，在许多 F理论构造中，时空不必保留 Spin 结构。相反，我们可以采用一种与对偶群变换相关联的扭曲Spin结构，[5]

[5]这并不是一个问题，因为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 变换只对该理论的玻色子扇区敏感 .

也就是说，我们考虑具有 $\big(\text{Spin}(k) \times \text{Mp}(2,\mathbb{Z})\big)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 结构的流形。在这种情况下，相关的配边群为：

$$\Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}(\text{pt})\,, \tag{1.4}$$

另见 [31, 32]。由于 Mp(2，$\mathbb{Z}$) 在某种意义上是容纳超对称性的 SL(2，$\mathbb{Z}$) 的“最小”扩张，因此自然可以预期，对于每个这样的配边生成元，都存在一个相应的超对称 F 理论背景，可视为填充这些配边生成元的体。我们确实发现情况如此：至少对于 k 奇数（从而体空间为偶数维），$\Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (点) 的每个生成元都对应于一个属一纤维化卡拉比-丘三维复流形 $X \to \mathcal{B}$，其中 $\partial\mathcal{B}$ 可视为指定了 $\Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (点) 的一个生成元及其预先给定的对偶丛。

这项分析的结果是，至少对于 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 配边而言，许多 F 理论紧化的主要构件——包括 $[p,q]$ 7-膜、不可希格斯化簇、S 折叠以及低维变体——都能被配边猜想成功预言。这对配边猜想构成了极其非平凡的检验；值得注意的是，如此精简的拓扑输入竟能重构这些复杂结构。

最后转向完整的 IIB 对偶群 GL^+(2，$\mathbb{Z}$)，我们也确定了相应的 Spin-GL^+(2，$\mathbb{Z}$) 配边群：

$$\Omega_k^{\text{Spin-GL}^+(2,\mathbb{Z})}(\text{pt})\,. \tag{1.5}$$

在这种情况下，反射的出现意味着我们不应期待这些生成元保留超对称性；一般而言，我们也不认为存在任何能填充此类边界几何内部的亏格一纤维化卡拉比–丘空间。在这种情况下，配边猜想相当于对一组预测：这些对象未必保留超对称性。相当令人惊讶的是，我们发现，在这种情况下，生成元主要继承自 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$)（也就是说，它们是超对称对象），但另有一个非超对称“反射7膜” [23],，由 $\Omega^{\text{Spin-GL}^+}{}_{(2,\ \mathbb{Z})\ 1}$ (pt) 检测得到。从这些基本成分出发，我们发现，几乎所有其他生成元在某种意义上都继承自这些高维对象的进一步紧化。[6]

在十维时空中，配边猜想告诉我们与 $\Omega_k^{\mathcal{G}}$ for $1 \le k \le 9$ 相关的缺陷谱。$k = 10$ 和 $k = 11$ 的配边群也指定了重要的物理数据。对于 $k = 10$，$\Omega_{10}^{\mathcal{G}}$ 可探测离散 θ 角等参数；而对于$k = 11$，$\Omega_{11}^{\mathcal{G}}$ 则对十维理论反常的候选贡献进行分类。 [33], 对 IIB 型对偶反常进行了详细分析，其中指出，IIB 背景中一种微妙的对偶反常可以通过在标准 IIB 型作用量中加入一个额外的拓扑项来抵消。

[6]在低维情形下，有少数异常案例似乎与其他任何对象都没有明显关联，但这只是例外，而非常态。

我们用来确定这些配边群的主要计算工具是 Adams 谱序列。本工作的另一个目标是介绍这一工具。Adams 谱序列有着（名不副实的）难以驾驭的声誉，但就当前问题而言，一旦实施若干中间简化，它其实相当易于处理。具体来说，支撑我们结果的关键思想之一是：我们感兴趣的非阿贝尔对偶群可以分解为相应的融合积，也就是说，它们可以分解为一些更简单的生成元，每个生成元都有其物理解释。[7] 通过一种称为“剪切”的方法来简化丛结构；具备这些要素后，Adams 谱序列的计算便大为简化。显式求出配边生成元也颇具挑战性，但在许多情况下，我们可以通过确定流形的η-不变量的适当组合（在所关注的情形下，这是一种配边不变量），来验证所求得的是本原生成元。

尽管我们主要强调这些配边群在研究 IIB弦 / F理论和沼泽地计划中的应用，但显然，这些结果在弦理论和量子场论内部，以及纯数学中，都有更广泛的应用。在弦紧化 / 量子引力的语境下，可以将不同的 $\Omega_k^{\mathcal{G}}$'s 重新解释为对一个 $k-1$ 维引力理论的反常进行分类。类似地，在量子场论的语境下，这些 $\Omega_k^{\mathcal{G}}$'s 刻画了混合引力-对偶反常；这一主题最近已有研究，例如见 [30, 31, 34, 35]。在纯数学的语境下，我们所呈现的许多计算都是新的，可以将其视为为所有 k 开发更系统的 $\Omega_k^{\mathcal{G}}$ 处理方法的起点（而不仅仅是“较小的值”）。

本文篇幅很长，因为我们提供了计算背后的全部细节。我们希望其他人能够高效地利用这份参考资料，学习 Adams 谱序列背后的技术，以及一般配边群的计算方法。

为了使本文易于阅读，我们将其分为三个主要部分，并附有若干附录：

- 在本引言部分的其余内容中，我们首先简要介绍边界主义理论，因为它是后续所有内容的核心组成部分。随后，我们简要概述研究结果及其物理解释。接着，我们讨论结论和未来研究方向。此外，我们还提供了本文其余部分内容的路线图。

- 在第二部分中，我们为 $\Omega_k^{\mathcal{G}}$ 的每个生成元给出物理解释；这些群的推导则留待第三部分。配边猜想断言，每个这样的生成元都对应着一个时空缺陷，这引领我们（重新）发现了 IIB 型弦理论中的各种有趣背景。

[7]例如，轴子-膨胀子取固定值的 7 膜。

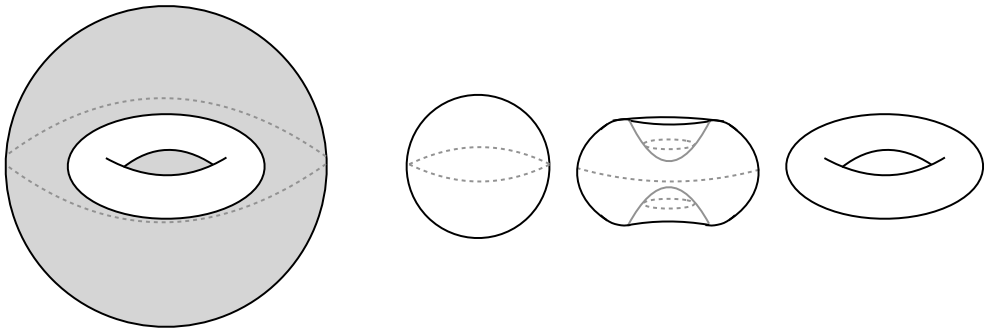


图 2：2-球面与 2-环面之间的定向配边（可理解为挖去内部环面的一个 3-球）。

- 第三部分介绍了计算上述各种配边群所需的数学工具。其中一项主要工具是 Adams 谱序列，我们对此作了非常详尽的介绍。随后，我们运用这些技巧推导出 $k \leq 11$ 的配边群 $\Omega^{\text{Spin}}_k\left(B\text{SL}(2,\mathbb{Z})\right)$、$\Omega^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}_k(\text{pt})$ 和 $\Omega^{\text{Spin-GL}^+(2,\mathbb{Z})}_k(\text{pt})$。此外，我们还描述了每个非平凡群因子的生成流形。凡是可行之处，我们也会为这些数学推导给出物理解释。

- 在附录中，我们将补充一些关于对偶群结构、 η-不变量以及 May-Milgram 定理的技术细节。此外，我们还将讨论史密斯同态的用途。史密斯同态连接了维数不同的对偶丛结构；对此的物理解读可以视为源自高维体的对偶缺陷。

2 配边：何为配边?

现在我们简要介绍配边理论。这构成了下文所用的核心数学结构。配边是定义在一组配备给定切结构的 k 维流形上的等价关系，例如 Spin 结构、定向或类似概念（数学简介见 [36]，物理背景下的说明见 [37,9]）。若两个 k 维流形 X_1 和 X_2 属于同一个等价类，也就是说，它们在 $\Omega^{\mathcal{G}}_k$ 中定义同一个元素，那么当 $X_1 \sqcup (-X_2)$ 是某个 $(k+1)$ 维流形的边界，且该结构可延拓到该流形上时，这两个流形便等价，见图 2。这里的负号表示对 X_2 作定向反转。

流形的不交并（或者等价地，连通和，因为二者共边）自然定义了一种阿贝尔加法运算，使 $\Omega^{\mathcal{G}}_k$ 成为阿贝尔群。平凡类中的元素对应于那些作为高一维流形边界的流形，示例见图 3。如果某个配边类生成

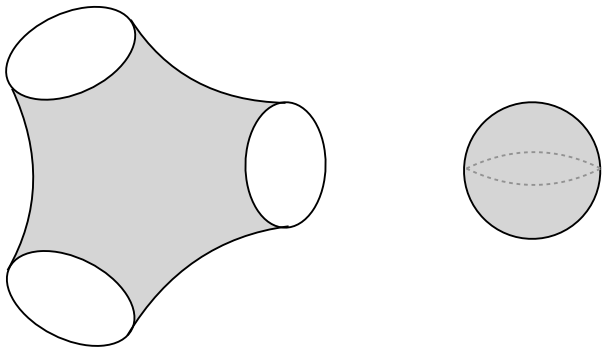


图 3：左：配边群因子 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 的示意图，其中三个生成元副本共同围成一个流形。右：2-球面的零配边，即一个 3-球。

一个有限子群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，这意味着，虽然代表生成配边类的单个流形副本不是边界，但该流形的 n 个副本的不交并是边界，见图 3。

如果 $\mathcal{G}$ 除了切向结构 ξ 之外，还包含理论中的内部对称性 G 的信息，那么相应配边群的定义数据就包含一个从时空流形 X 到对称群 BG 的分类空间的映射，用于指定相应的规范场背景。具有给定结构的时空流形的连续形变，此时还要辅以该分类映射的连续形变，而相应的配边群记作

$$\Omega_k^{\xi}(BG)\,. \tag{2.1}$$

一般而言，切结构（例如 Spin 结构）可以与内部对称群混合，其定义方式为如下形式的商：

$$\frac{\mathrm{Spin}(k)\times G}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \tag{2.2}$$

从而得到扭曲 Spin 结构，我们将其记作

$$\Omega_k^{\text{Spin-}G}(\mathrm{pt})\,, \tag{2.3}$$

这些结构确实会在分析中纳入费米子后出现。

重要的是，配边群可以理解为一种广义同调理论 [38]。在实际中，这意味着配边群可描述为所研究流形 X 与某个谱 E 的楔积（张量积的同伦类比）的同伦群：

$$h_*(X)=\pi_*\big(X\wedge E\big)\,. \tag{2.4}$$

对于 Spin 配边群 Ω_k^{Spin} (pt)，相关的谱是称为 $MTSpin$ 的 Thom 谱；存在内对称性或扭曲切结构时，则需要相应地对其进行推广。因此，要推导各种配边群，就需要深入理解 $MTSpin$ 及其推广形式。为此，通常可以将该谱分解为更简单的部分，每一部分都包含完整信息的一部分。主要的简化方法是使用 p-局部等价，将$MTSpin$ 与其他谱联系起来，从而探查 Spin 配边群的 p-挠元部分。在本文的分析中，我们需要研究以下形式的配边群

$$\Omega_k^{\mathrm{SO}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\,,\quad \Omega_k^{\mathrm{SO}}(BD_6)\,,\quad \Omega^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\,,\quad \Omega_k^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}(\mathrm{pt})\,,\quad \Omega_k^{\text{Spin-}D_{16}}(\mathrm{pt})\,, \tag{2.5}$$

其中 D_{16} 表示含有 16 个元素的二面体群。[8] 在若干情况下，我们可以通过与其他广义（上）同调理论的同构提取所需信息，例如 BP-同调群和 ku-同调群。然而，在许多其他情况下，我们需要借助谱序列技术推导结果，其中最重要的是 Adams 谱序列。对于较大的 k，这一过程会变得愈发复杂，因此我们将在第三部分明确展示这些计算的细节。

推导出配边群后，我们还面临另一项挑战：确定相应的生成元，也就是说，找出一组具有给定结构的 k-流形，作为我们已找到的所有配边类的代表。为了找到这些流形，我们可以借助**配边不变量**：从配边群到 $\mathbb{Z}$或 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$的群同态，它们有助于识别生成元。例如，Ω_4^{Spin} (pt) $=\mathbb{Z}$有一个配边不变量，它由在给定四维流形 M_4上对第一庞特里亚金类积分给出

$$\int_{M_4} p_1\,, \tag{2.6}$$

通常称为第一庞特里亚金数。这意味着，我们可以取任意具有最小庞特里亚金数的 Spin 4 维流形作为 Ω_4^{Spin} (pt) 的生成元。许多配边不变量都与庞特里亚金数类似，是切丛（以及存在时的规范丛）的特征类的积分。然而，并非所有配边不变量都如此；有些不变量由更特殊的量检测，例如狄拉克算子的 η-不变量（例如参见 [39, 37]），而且要确定代表元并不总是容易。因此，检测相关流形以及构造这些流形，与其说是一门科学，不如说是一门艺术，不过我们也会对此作十分详尽的描述。值得注意的是，某些类型的流形会自然地作为 Spin-D_{16} 配边的生成元出现；这类配边可描述为以实射影空间为底空间的实射影空间或透镜空间纤维丛。其中一类流形

[8]这里，我们指的确实是二面体群，而不是二元二面体群。它包含一个与反射 R 相关的 U 二阶元素，以及一个与旋转相关的 n阶元素。它们满足$RUR^{-1}=U^{-1}$。特别是，与二元二面体情形不同，反射并不表现为旋转的某个幂。另请参见附录 B。

早已在 [33] 中出现，并被称为“奥秘十一”；本文中还会出现它们的某些低维变体，我们也将这些变体称为 Arcana。[9]

3 我们结果总结

本节简要总结第三部分关于配边群的计算结果

$$\Omega_k^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)\,,\quad \Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}(\mathrm{pt}),\quad \Omega_k^{\text{Spin-GL}^+(2,\mathbb{Z})}(\mathrm{pt})\,. \tag{3.1}$$

对于 $1 \le k \le 9$，配边猜想预言存在一个相应的缺陷，它可以“填充体”，并与配备适当对偶丛的相应配边流形相关联。对于 $k = 10$，配边群与离散 θ 角相关；对于 $k = 11$，这些群为对偶反常可能的贡献提供了粗略分类。我们主要关注 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 和 Spin-GL$^+$(2，$\mathbb{Z}$) 配边，因为这些情况还考虑了费米自由度的贡献。最后，对于 $1 \le k \le 9$，我们给出一种物理解释，说明哪些缺陷能够使这些非平凡的配边背景成为边界。

配边群列于表1。显然，这些群远非平凡，因此必须存在各种缺陷，以确保 Ω_k^{QG} 消失。要找到这些缺陷，分析生成元的代表元很有帮助。Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 类的代表元列于表 2。生成元为

- 透镜空间：$L_k^{2n-1} = S^{2n-1}/(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ 它们通过纤维化自然地配备了一个 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 丛

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} & \hookrightarrow & S^{2n-1} \\ & & \downarrow \\ & & L_k^{2n-1} \end{array} \tag{3.2}$$

  通过将 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$嵌入对偶群，可以用这个丛来刻画对偶丛。此外，某些透镜空间允许采用多种切结构，例如 L_4^5的 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 结构。不同的选择用波浪号标示。当这些不同的切结构无法彼此连续变形时，我们预计会有多个具有相似几何结构的生成流形。通过计算相关的配边不变量（例如 Dirac 场和 Rarita-Schwinger 场的 η不变量），可以对此进行明确验证。

[9]根据托特之书（参见 https://en.wikipedia.org/wiki/Major_Arcana 中的摘要），与我们相关的奥秘牌将是：Arcanum V（教皇）、奥秘九（隐者）、奥秘十一（欲望）。

k	$\Omega_k^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$	$\Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (点)	$\Omega_k^{\text{Spin-GL}^+(2,\mathbb{Z})}$ (点)
	第 12 节	第 13 节	第 14 节
0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
1	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$
2	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
3	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3}\oplus(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$
4	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
5	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\ \oplus(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/32\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$
6	0	0	0
7	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/32\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\ \oplus(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3}\oplus(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\ \oplus(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$
8	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$
9	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3}\oplus(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\ \oplus(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ $\oplus(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\ \oplus(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})\ \oplus(\mathbb{Z}/128\mathbb{Z})$ $\oplus(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 8}$
10	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 5}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 4}$
11	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}\oplus(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{\oplus 2}\oplus(\mathbb{Z}/128\mathbb{Z})$ $\oplus(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}\oplus(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ $\oplus(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 9}\oplus(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ $\oplus(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\ \oplus(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$

表1：IIB量子引力结构的三种近似的配边群。

- 透镜空间丛： Q_4^{2n-1}记作 Q_4^{2n-1}的空间（不要与四元数透镜空间混淆）是透镜空间丛，因为它们是以下纤维化的全空间

$$\begin{array}{ccc} L_4^{2n-3} & \hookrightarrow & Q_4^{2n-1} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{CP}^1 \end{array} \tag{3.3}$$

通过将 L_4^{2n-3} 的覆盖（$2n-3$）球面嵌入到 $\mathbb{CP}^1$ 上的线丛直和 $\mathcal{L}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{L}_{n-1}$ 的纤维中，可得到非平凡的纤维化结构。就我们的目的而言，只需考虑这些线丛

$$\mathcal{L}_1\oplus\mathcal{L}_2\oplus\cdots\oplus\mathcal{L}_{n-1}=H^{\pm 2}\oplus\underline{\mathbb{C}}\oplus\cdots\oplus\underline{\mathbb{C}}\,, \tag{3.4}$$

其中， $H\cong\mathcal{O}(1)$ 表示 $\mathbb{CP}^1$ 的超平面丛， $\mathbb{C}\cong\mathcal{O}\cong\mathcal{O}(0)$ 表示平凡线丛。同样，这些空间配备了从透镜空间继承而来的 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 结构

k	$\Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (点)	生成元
0	$\mathbb{Z}$	pt_+
1	$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	(L_4^1, L_3^1)
2	0	
3	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	(L_4^3, L_3^3)
4	$\mathbb{Z}$	E
5	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$	$(\widetilde{L}_4^5, L_4^5, L_3^5)$
6	0	
7	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$	(Q_4^7, L_3^7)
8	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$(B, \mathbb{HP}^2)$
9	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/128\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$	$(\tilde{L}_4^9, \mathbb{HP}^2 \times L_4^1, L_4^9, \mathbb{HP}^2 \times L_3^1, L_3^9)$
10	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	X_{10}
11	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2} \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$	$(\mathbb{HP}^2 \times L_4^3, X_{10} \times L_4^1, Q_4^{11}, \mathbb{HP}^2 \times L_3^3, L_3^{11})$

表 2：Spin-Mp(2, $\mathbb{Z}$) 配边群的生成元。生成元按照该群分解的顺序列出。

并且要求具有非平凡的对偶丛。

- 恩里克斯曲面： E它可以通过在 K3 曲面上的无不动点 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用获得。

- Bott 流形： $B\Omega_{\text{Spin }8}$ (点) 中的任意一个类由 Dirac 算子的指标值及其特征确定。我们将任意一个 Dirac 指标等于 1 的 Spin 8-流形称为“Bott 流形”（另见 [40]）。一个例子是具有 Spin(7) 结构的 8-流形。[10]

- 四元数射影空间： $\mathbb{HP}^2$这个 8 维流形类似于更为人熟知的 $\mathbb{CP}^2$，只是在构造过程中用四元数 $\mathbb{H}$ 取代了复数$\mathbb{C}$ 。它的狄拉克指标为 0，特征为 1。

- Milnor 曲面： X_{10}这是任意一个具有非平凡 $w_4 w_6$ 的闭 10 维 Spin 流形，其中 w_i

[10]顺带一提，通常可以通过对合适的 Calabi-Yau 四维簇 [41], 取 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 商来构造 Spin(7) 空间，而 Calabi-Yau 四维簇上的狄拉克指标为 2。

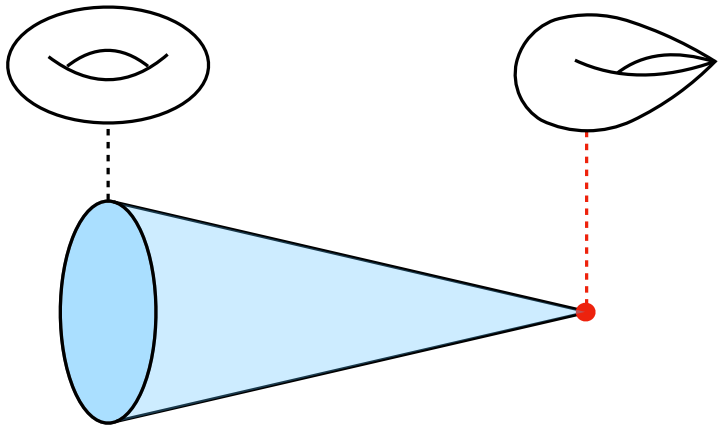


图4：奇数维的 Spin-Mp(2， $\mathbb{Z}$) 流形常作为属一纤维化的非紧致奇异卡拉比-丘流形的底流形的渐近边界。

表示切丛的第 i 个斯蒂费尔-惠特尼类。它也作为 $\Omega_{10}^{\text{Spin}}$ (点) 的一个生成元出现。关于 Milnor 曲面的明确描述，请参见 [42, §3]。

正如我们将在下文看到的，对于构造上述许多背景，利用辅助环面对偶丛进行几何化很有帮助。这直接引出了 F-理论 [25–27] （综述参见 [43–45] ）。特别是，上文所述的奇数维 Spin-Mp(2， $\mathbb{Z}$) 流形，往往可以实现为属一纤维化 $X \to \mathcal{B}$的底流形的边界 $\partial\mathcal{B}$ ，其全空间是一个局部奇异卡拉比-丘流形。因此，自然会生成带有中心奇点的锥几何，这表明存在各种缺陷，参见图4。由此也可以看出，我们为何预期这些背景至少保留部分超对称性。

到目前为止讨论的所有流形，其对偶丛实际上都只取值于 $\text{Mp}(2,\mathbb{Z}) \subset \text{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ 中，也就是说，它们对应的配边类不涉及反射。对偶丛中包含 $\text{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ 的那些类的生成元列于表 3。

除了与 Spin-Mp$(2,\mathbb{Z})$ 配边相关的生成元外，我们还发现：

- 带反射丛的圆： S^1_R这描述了一个圆，其非平凡对偶丛由 $\text{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ 中的反射作为转移函数实现。我们在次数一处发现的两个类表明，IIB 型在带对偶丛的圆上有两种不同的紧化；这两种紧化最近在 [46], 中有所描述，并且通过在 RR 扇区开启一个离散 θ角而彼此关联。

- 具有周期边界条件的圆： S^1_p由一个不带对偶丛、但费米子满足周期边界条件的圆描述。这是 $\Omega_{\text{Spin }1}$ (点) $= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的生成元。

k	$\Omega_k^{\text{Spin-GL}^+(2,\mathbb{Z})}$(点)	生成元
0	$\mathbb{Z}$	pt_+
1	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	$(L_4^1,\ S_R^1)$
2	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$S_p^1 \times S_R^1$
3	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3} \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	$(L_4^3, \mathbb{RP}^3, \widetilde{\mathbb{RP}}^3\ L_3^3)$
4	$\mathbb{Z}$	E
5	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	$(L_4^5,\ X_5)$
6	0	
7	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3} \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$	$(\mathbb{RP}^7, \widetilde{\mathbb{RP}}^7 W_2^7, W_1^7, L_3^7)$
8	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	$(W_{1,\ 8},\ \mathbb{HP}^2,\ W_1^7 \times S_p^1)$
9	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 8}$	$(W_1^7 \times S_p^1 \times S_p^1,\ X_9,\ \widetilde{X}_9,\ L_4^9,\ W_1^9,$ $B \times L_4^1,\ \mathbb{HP}^2 \times L_4^1,\ \mathbb{HP}^2 \times S_R^1)$
10	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 4}$	$(B \times L_4^1 \times S_p^1, W_1^9 \times S_p^1, \mathbb{HP}^2 \times L_4^1 \times S_p^1, X_{10})$
11	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 9} \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$	$(\mathbb{RP}^{11}, \widetilde{\mathbb{RP}}^{11}\ X_{11},\ \widetilde{X}_{11}, \mathbb{HP}^2 \times L_4^3, \mathbb{HP}^2 \times \mathbb{RP}^3,$ $\mathbb{HP}^2 \times \widetilde{\mathbb{RP}}^3\ X_{10} \times L_4^1, X_{10} \times S_R^1, Q_4^{11}, \mathbb{HP}^2 \times L_3^3, L_3^{11})$

表 3：Spin-GL$^+$(2，$\mathbb{Z}$) 配边群的生成元。生成元的排列顺序与群的分解顺序相同，与表 2 一样。

- 实射影空间：$\mathbb{RP}^{2n-1}$ 和 $\widetilde{\mathbb{RP}}^{2n-1}$这些是通常的实射影空间，由 $S^{2n-1}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$导出。它们通过纤维化自然地带有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 丛

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \hookrightarrow & S^{2n-1} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{RP}^{2n-1} \end{array} \tag{3.5}$$

  对于 $\mathbb{RP}^{2n-1}$，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-丛与 GL$^+$(2，$\mathbb{Z}$) 中的反射相关联；而对于$\widetilde{\mathbb{RP}}^{2n-1}$，它则是旋转与反射的组合。这些由 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 到 GL$^+$(2，$\mathbb{Z}$) 的两种不同嵌入描述，如下文第 14.3.2 节和附录 B.2 所述。一种便捷的实现方式是将其识别为由世界面反射 $\hat{\Omega}$ 给出的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$作用（对于 $\mathbb{RP}^{2n-1}$），并将其识别为由世界面反射与 S-对偶变换相结合给出的$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用（对于 $\mathbb{RP}$）$\hat{\sim}^{2n-1} S$。

- Arcana： X_i 和 $\widetilde{X_i}$ $(i \neq 10)$

  Arcana 是可以定义为如下形式的空间

$$X_i = \left(S^{2k-1} \times S^{i+1-2k}\right)/D_4\,. \tag{3.6}$$

  由于 $D_4 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$， S^{i+1-2k} 上的 D_4 作用等价于一对 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用，它们使 X_i 成为以另一个实射影空间为底空间的实射影空间纤维丛：

$$\begin{array}{c} \mathbb{RP}^{2k-1} \hookrightarrow X_i \\ \downarrow \\ \mathbb{RP}^{i+1-2k} \end{array} \tag{3.7}$$

  同样，由 X_i 的自然 D_4 丛描述的非平凡对偶丛，可以通过以下任一方式实现：对 X_i 作用世界面反射 Ω，或对 X_i 作用 Ω；后者由将 D_4 嵌入 D_{16} 的两种不同方式实现。参见第14.3.3节和附录 B.2。对于 $i \in \{5, 9\}$，有 $k = 2$；对于 $i = 11$，有 $k = 3$。

- 实射影空间上的透镜空间丛： W_1^{2n-1}

  这些空间可以由球面上的透镜空间丛（包括 Q_4^{2n-1} 和平凡丛）再经过一次 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 商得到。这样， W_1^7 可以被视为“半个 Q_4^7”。由于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在底空间上起符号反转的作用，所得空间为

$$\begin{array}{c} L_4^k \hookrightarrow W_1^n \\ \downarrow \\ \mathbb{RP}^m \end{array} \tag{3.8}$$

  这些空间对应的对偶丛既包含反射，也包含旋转。我们使用两个例子： W_1^7，其中 $k = 5$ 和 $m = 2$；以及 W_1^9，其中$k = 5$ 和 $m = 4$。

- 棱柱空间丛在 $(T^2 \times S^2)/(\mathbb{Z}/2)$ 上： W_2^7

  在7维中，我们还有一个额外的生成元，它被描述为棱柱流形 S^3/Γ 的一个丛，其中 Γ 是 16 阶二面循环群：

$$\begin{array}{c} S^3/\Gamma \hookrightarrow W_2^7 \\ \downarrow \\ \dfrac{T^2 \times S^2}{\mathbb{Z}/2} \end{array} \tag{3.9}$$

  这里，底空间是 $T^2 \times S^2$ 在对合的复合对合下的商

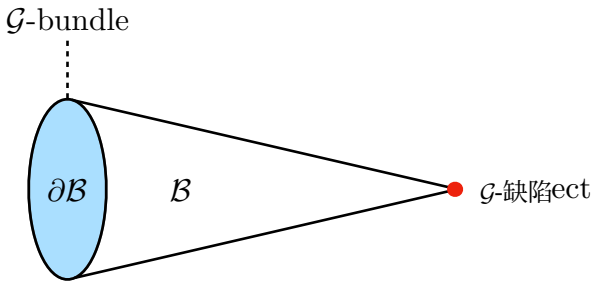


图 5：配边生成元的体 / 边界刻画，以及配边猜想所预言的相应缺陷。将由 $\mathcal{G}$ 定义的结构所赋予的流形的配边生成元视为某个配备了 $\mathcal{G}$-丛的体空间 $\mathcal{B}$ 的边界，配边猜想预言存在一种 $\mathcal{G}$-缺陷，使该类能够在 Ω_k^{QG} 中平凡化。

这会在 T^2 上得到克莱因瓶，在 S^2 上得到对径映射。相应的对偶丛也包含反射，与前一种情况一样。

- 半 Bott 流形：$W_{1,\ 8}$
  半 Bott 流形可以通过对 $\mathbb{CP}^7$中的一个完全交流形取 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 商而得到。我们称之为“半 Bott”流形，因为仅对两个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$之一取商会得到一个 Bott 流形。再进一步取 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 商后便得到半 Bott 流形，这会形成一个非自旋流形，在其上 $\int[\hat{}A]_8$（即在 Spin 流形上度量狄拉克指标的类）等于$1/2$。尽管该流形不是 Spin 流形，但它具有 Spin-D_{16} 结构。

有关生成元及其对偶丛的更多详情，请参见第 13 节和第 14 节中的显式构造。

在确定了所有配边群及其生成元之后，我们可以尝试将这些具体背景与（扩展的）弦理论对象联系起来。配边猜想要求所有这些类实际上都是某些 IIB 背景的边界，而这些背景必然涉及奇异几何和对偶丛。生成元可以被视为相应缺陷周围的渐近几何，示意图见图 5。因此，在十维弦理论中，我们发现非平凡的配边类 $\Omega_k^{\mathcal{G}}$ 与余维为（$k+1$）的缺陷有关。由于 IIB 型弦理论包含许多余维为 2ℓ 且具有$\ell \in \{1, \ldots, 4\}$ 的对象，因此很容易想到，其中一些对象可能与配边猜想所预言的缺陷有关。事实确实如此，我们将在第二部分中仔细分析这一点，但存在一个潜在问题：尽管我们构造的背景在超引力层面无疑是一致的，但 IIB 型弦理论可能无法定义在其中某些背景上。例如，如果探测膜的世界体在这些背景中存在反常，就会出现这种情况，这与 [47] 中的情形类似。用 [9], 的语言来说，我们会称该配边类是“规范化的”，并将其从讨论中移除。我们不知道所构造的类中是否有任何一个以这种方式被“规范化”，因为尚未开展系统分析；这不同于 M 理论中的情形 [40]。在本文中，我们将

假设我们构造的所有类都能提升为 IIB 弦理论背景，并找出在此假设成立时将成为其边界的对象。值得注意的是，在已知例子中，每当一个配边类按照 [9] 的意义被规范化（即消灭该类）时，通常都会存在一个密切相关的“近亲”类：它具有相同的几何结构，但例如通量不同，并且仍然保持有效。一个例子是 M 理论中的 $\mathbb{RP}^4$ 类；该类本身是不一致的，但如果加入半整数 G_4 通量 [47]，这种不一致性就会消除。因此，尽管读者应当注意，我们尚未检查所讨论背景中探测膜的所有反常，但我们相信，这些反常不太可能带来太多影响，至多会迫使我们引入某些通量。

对于 Spin-Mp$(2,\mathbb{Z})$ 类和奇数 $k \leq 9$，我们得到了表 4 中的对应关系。许多 Spin-Mp$(2,\mathbb{Z})$ 构型都可以与包含有趣对象的 F理论超对称背景联系起来，例如不可希格斯化簇 [48](另见 [49]) 和 S 折叠 [50, 51] (另见 [52–54])，以及它们的推广。

k	$\Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (点)	生成元	缺陷
1	$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	(L_4^1, L_3^1)	$[p,q]$-7 膜
3	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	$(L_4^3,\ L_3^3)$	不可希格斯化簇
5	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$	$(\widetilde{L_4^5},\ L_4^5,\ L_3^5)$	S 折叠
7	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	Q_4^7	S-折叠的扭曲紧化
	$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$	L_3^7	S 弦
9	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/128\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$	$(\widetilde{L_4^9}, L_4^9, L_3^9)$	S-瞬子
	$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	$(\mathbb{HP}^2 \times L_4^1,\ \mathbb{HP}^2 \times L_3^1)$	$[p,q]$-7 膜的紧化

表 4：产生渐近 Spin-Mp$(2,\ \mathbb{Z})$ 配边类的缺陷 s.

对于 Spin-GL$^+(2,\ \mathbb{Z})$ 配边类，并非所有缺陷都能与已知弦理论对象的推广相对应。这仅仅是因为任何假定的体几何都必然会破坏超对称性，而弦理论中通常理解的多数对象往往保留某种超对称性。鉴于此，只需加入一个新的物理对象便足以生成其余配边类，这一点着实令人惊叹。这个新对象是一种 7 膜（在十维时空中的余维为二），它在 GL$^+(2,\ \mathbb{Z})$ 对偶群中实现反射，我们称之为反射 7 膜，简称“R7 膜” [23]。R7 膜使带有反射丛的圆的类变得平凡，而涉及缠绕的 R7-膜的紧化足以使所有其他低次数的类变得平凡。完整结果总结于表 5。

偶维生成元在概念上有所不同，因为它们通常直接源自 Spin 流形的生成元，因此除了少数例外，并不

k	$\Omega_k^{\text{Spin-GL}^+_{(2,\mathbb{Z})}}$(点)	生成元	缺陷
1	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	L_4^1	$[p,q]$-7 膜
	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	S_R^1	R7膜
3	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	(L_4^3, L_3^3)	不可希格斯化簇
	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	$(\mathbb{RP}^3, \widetilde{\mathbb{RP}}^3)$	O5平面，紧化的 R7 膜
5	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	L_4^5	S 折叠
	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	X_5	O5 和 R7 的扭曲紧化
7	$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$	L_3^7	S 弦
	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	W_1^7	S 折叠的双重扭曲紧化
	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	$(\mathbb{RP}^7, \widetilde{\mathbb{RP}}^7)$	O1 平面，紧化的 R7 膜
	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	W_2^7	D 型 Du Val 奇点的扭曲紧化
9	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	L_4^9	S-瞬子
	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 4}$	$(W_1^7\times S_p^1\times S_p^1, B\times L_4^1,$ $\mathbb{HP}^2\times L_4^1, \mathbb{HP}^2\times S_R^1)$	7 膜的紧化
	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	$(X_9, \widetilde{X}_9)$	O5 和 R7 的扭曲紧化
	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	W_1^9	S 折叠的双重扭曲紧化

表 5：产生 Spin-GL$^+$(2，$\mathbb{Z}$) 配边类的缺陷。此处的“R7膜”指一种余维二缺陷（即 7 膜），绕其一周的单值化会在相应的 F 理论环面上导致反射。

携带非平凡的对偶丛。虽然仍有待确定以这些偶维流形为边界的具体弦背景，但它们与分析 [9] 时出现的情况密切相关。

4 结论与未来方向

本节将介绍我们的结论和未来方向。希望了解更完整论述的读者可参阅本文后续部分。

本文的大部分内容都围绕着 IIB 型弦／F理论的非阿贝尔对偶对称性与配边猜想之间的相互作用展开。我们已经看到，对于 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 配边，配边猜想经受住了许多非平凡检验。反过来，配边猜想预言了一些全新的非超对称背景，其中一些

将在未来的工作中加以探讨。需要强调的是，我们对配边群的分析从未依赖超对称性。从这个意义上说，它是一种相当稳健的工具，可与许多现有方法互为补充。我们分析的一个核心部分是通过 Adams 谱序列计算所有相关的配边群。我们所得的结果在量子场与弦的研究中具有更广泛的适用性；在本节余下部分，我们将讨论一些值得进一步探索的潜在方向。

我们已经看到，配边猜想预言了 IIB 型弦理论的各种新背景和对象。对于 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 配边而言，这些对象可提升为保留部分超对称性的 F 理论几何。这些奇异构型通常包含局域相互作用自由度。例如，我们发现了能够实现一类简单六维超共形场论（SCFT）的不可希格斯化簇，以及 S 折叠。因此，研究其他背景（例如 S 弦）中的局域自由度及其动力学也会很有意思。对于更具挑战性的 Spin-GL^{+}(2，$\mathbb{Z}$) 设置，情况也是如此；它们没有传统的 F 理论诠释。

反过来说，我们也可以利用 Spin-GL^{+}(2，$\mathbb{Z}$) 配边来推广我们对 F 理论本身的概念。显然，除了纤维上的 SL(2，$\mathbb{Z}$) 作用外，我们还应允许产生全空间几何上 GL(2，$\mathbb{Z}$) 作用的反射对称性。若能找到既保留部分超对称性、又明确包含行列式为 (-1) 的对偶变换函数的构型，将会非常有趣。这些构型很可能不包含 R7膜，因为这类对象似乎是非超对称的 [23]。

从这一视角来看，一个自然的问题是，是否也可以利用反射的出现来构造亚稳非超对称真空——这是一个具有明确唯象学意义的课题。从这一视角来看，一个自然的问题是，R7 膜能否与其他弦论要素协同作用，用于构造此类背景。

当然，IIB 型弦理论并非孤立存在，它可以通过各种对偶与其他弦理论以及 M 理论联系起来。这促使我们进一步研究这些新预测的背景在这些对偶下的命运。按照通常的对应关系，F 理论背景的圆紧化与具有相同环面纤维化几何（但没有额外圆）的 M 理论相关。由此，我们可以将 Spin-GL^{+}(2，$\mathbb{Z}$) 结构追踪为 M 理论时空 [29]的 Pin^{+} 结构。由于 M 理论几何不必保留环面纤维，因此或许可以在不借助奇异对象的情况下平凡化若干类。不过，至少一部分新颖的 IIB 构型必定会保留下来，从而具有直接的 M 理论对应物。

我们的结果有一个特别引人入胜的推论：我们发现了 IIB 弦理论在十维中的四个离散 θ-角。其中一些早在文献中就已有讨论；例如，在 Bott 流形与二维环面的乘积上不为零的 θ-角，在奇异10维球面上也不为零，因此已被隐含地

在 [55] 中讨论过。一个仍待解决的重要问题是，阐明这些以及其他 θ-角（例如 [33] 中提出的那些，另见 [40,56,57] 以及 [46]）究竟属于景观还是沼泽地。

在预先指定对偶丛结构的情况下计算配边群，还有许多其他潜在应用。例如，在一个 $(k-1)$ 维量子引力理论的背景下，配边群 $\Omega_k^{\mathcal{G}}$ 刻画了具有非平凡对偶性的给定理论可能出现的反常。特别是，我们可以将其应用于本文考察的 IIB 对偶性的所有不同精化，即 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$、$\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})$ 和 $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z})$。此外，这也为具有可能很大的对偶对称性的理论提供了非平凡约束。沿着 [33,58] 的思路，研究其他超引力理论及其 U对偶对称性，将是很有意义的。

反过来，考虑实际对偶群是本文所考察群的真子群的情形，也很自然。这种情况出现在各种超引力理论和超对称量子场论中（近期讨论见 [59] ），因此自然会问，在这类情形下，配边猜想所预言的对象谱是什么。

还可以考虑关闭引力效应的极限，即研究具有已知对偶对称性的量子场论。在这一背景下，也可以像 [30,31,34,35] 中那样考虑混合引力-对偶反常。同样，这里给出的配边群计算相当于刻画给定理论中可能出现的反常。

除了这些物理应用之外，单纯从数学角度来看，还有许多有趣的方向值得探索。举例来说，我们在这里重点研究了针对 $k \leq 11$ 的配边群 $\Omega_k^{\mathcal{G}}$。如果能发展出同样适用于 k“较大”取值的方法，将会非常有趣。

我们的计算有一个幸运之处：所有相关数据都集中在低素数处，尤其是素数 $p = 2, 3$。反过来，也可以问，在这一背景下，是否存在某种自然的方式使更高的素数出现。一个颇具潜力的途径可能是，对 $\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$ 的同余子群进行类似计算，例如 $\Gamma(p)$、$\Gamma_0(p)$ 和 $\Gamma_1(p)$，以及它们的 metaplectic 和 Pin^+ 覆盖群。

另一个值得深入探讨的方向，是本文所考察的配边理论与数学中相关构造之间的关系。例如，我们为 Spin-$\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})$ 配边所构造的许多生成元，都可以视为亏格一纤维化卡拉比–丘空间的边界几何。Levine-Morel 在 [60–64]（另见 [65]）中发展了一种纯代数几何的配边方法，因此自然会问，Levine-Morel 的配边理论与 Spin-$\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})$ 配边之间是否存在更直接的联系。另一方面，这些研究也可能与色同伦论有关：我们所考察的对偶丛往往可以通过亏格一曲线／椭圆曲线来“几何化”，这提示了它们与椭圆上同调理论之间可能存在联系（参见，

例如，[66]）；事实上，有人认为 SL(2, $\mathbb{Z}$)-等变椭圆上同调或相关对象 [67] 与弦理论 [68–70] 有关。更直接地说，Tachikawa、Yamashita 和 Yonekura 的工作 [71–73] 将拓扑模形式理论（一种普适的椭圆上同调理论）与杂化弦理论中的反常抵消联系起来；探讨 II B 型弦理论中类似的问题也会很有意思。我们认为，这些问题都亟待进一步探索，并期待在不久的将来研究其中一些问题。

致谢 我们感谢 P. Giudice 慷慨地贡献时间与艺术才能，绘制 IIBordia 的地图。

我们感谢 D.S. Berman、D.S. Freed、I. Garc´ıa Etxebarria、S. Goette、T. Johnson-Freyd、C. Krulewski、Y.L. Liu、D. L¨ust、J. McNamara、L. Stehouwer、E. Torres、A.P. Turner、C. Vafa、I. Valenzuela、E. Witten、M. Yu 和 H.Y. Zhang 提供的宝贵讨论。AD 和 MM 感谢“沼泽地的几何方面”会议的组织者在本项工作期间给予的热情款待。JJH 感谢在阿斯彭物理中心举办的“ $D \leq 6$ 中（超）量子场论的几何化”会议的组织者在本项工作期间给予的热情款待（该会议获得美国国家科学基金会资助，项目编号 PHY-1607611 ）。JJH 还感谢在弗赖堡大学举办的 “ 几何、拓扑与奇异特殊整体空间 ” 研讨会的组织者给予的热情款待。JJH 和 MM 感谢 2021年和2022年西蒙斯数学与物理夏季研讨会在本项工作期间给予的热情款待。MM 和 MD 感谢在乌普萨拉大学举办的“景观中的工程：几何、对称性与反常”研讨会。MD 的工作由德以项目合作（DIP）项目“全息与沼泽地”资助。JJH 的工作由美国能源部高能物理项目资助，奖励编号为 DE-SC0013528。在本项目的大部分研究期间，MM 的工作获得西蒙斯基金会（602883，CV）的资助；在最后阶段，则获得 Mar´ıa Zambrano 奖学金（UAM），编号 CA3/RSUE/2021-00493。MM 感谢西班牙国家研究署通过“IFT 塞维罗·奥乔亚卓越中心 SEV-2016-0597”资助项目提供支持。

5 最后的鼓励话语

我们希望，这篇对研究结果的简要引言与概要，足以满足那些只关心我们工作的最终结果及其物理含义的读者。

对于那些勇于踏上旅程、探究这些结果如何得出的人：前路漫长而艰辛，但收获绝对值得。你将学习配边理论、F理论、Topology、指标理论、IIB弦理论的复杂内容，尤其是谱序列这门黑暗艺术。这种神秘工具将助你解决原本遥不可及的弦理论及其他领域中的问题。论文开篇绘有《IIBordia诸地图》，由 Paco Giudice 施展魔法般的技艺绘制而成，可为你的探索之旅指引方向。从导论营地出发的任何一条路都会通往有趣之处，而且这些路线彼此之间大多可以独立探索。[11] 传说，唯有走遍IIBordia之地每个角落的旅人，才能获得彻悟。希望这张地图能在你迷路时助你一臂之力。祝你一路顺风。

[11]物理学战士与数学魔法师的道路，比乍看之下更为相近；我们并未在 IIBordia 上指定度量（该度量仍然未知）。

第二部分

IIB型背景与缺陷

概述了本文的主要结果后，我们现在来分析配边猜想 [9] 所预言的缺陷。正如引言中所述，配边猜想指出，对于 D 维度中的一致量子引力理论，较低阶配边群必须是平凡的

$$\Omega_k^{\mathrm{QG}} = 0\,, \quad \text{for } 0 < k < D\,, \tag{5.1}$$

为了避免相关的全局对称性。由于我们研究的配边群远非平凡（见表1），因此只剩下两种选择：

- 完整的量子引力理论所包含的要素不止对偶丛和 Spin 结构。通常可以将这些要素识别为相应弦理论中的扩展物体。纳入这些物体后，时空可以形变为一点，因而成为零配边。这个过程可视为由非平凡配边类所诱导的全局对称性的破缺。

- 与非平凡配边类相关的背景在完整的量子引力理论中是不允许的。这类约束可能由微妙的类蝌蚪消除条件施加。对此可以解释为对相关全局对称性进行规范化。

下文将假设上述第一种可能性得以实现，并描述纳入哪些必要物体能够使我们所研究的配边群变为平凡。对于较小的 k，这将促使我们（重新）发现各种 IIB 构型和物体。此外，由于 IIB 理论包含时空费米子，我们将重点讨论 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 和 Spin-GL$^+$(2，$\mathbb{Z}$) 这两种变体。

在开始分析之前，我们指出，所考察的配边群仅取决于时空拓扑和离散对偶丛。特别是，我们的分析不包括 IIB 型的各种高阶形式拉蒙-拉蒙德（RR）通量和内维-施瓦茨（NS）通量。因此，原则上可能存在多个弦背景，它们具有相同的渐近对偶丛结构，但对应于物理上不同的通量背景。在可能的情况下，我们关注由非平凡配边类所诱导、能够破坏全局对称性的对象的超对称变体，并希望这些对象能与已知的弦理论对象相关联。因此，我们允许存在必要的诱导通量。

6 Spin-Mp 缺陷

本节聚焦于 $\Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (pt) 中的非平凡配边类。我们将发现，这些类与某些 F 理论背景密切相关。对于这些背景，轴子-膨胀子的值

$$\tau = C_0 + ie^{-\phi}\,, \tag{6.1}$$

其中 C_0 RR 零形式和膨胀子 ϕ由辅助环面 $T^2 \simeq \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ 编码，该环面由晶格 $\Lambda_\tau = \langle 1, \tau\rangle$ 定义，并纤维化在物理时空之上。因此，F 理论几何由环面纤维化 [25–27] 描述（综述请参见 [43, 45] ）。如果纤维化的全空间是卡拉比-丘流形，则部分超对称性会得以保留，并且可以保证该背景满足爱因斯坦方程。IIB 型背景的 Mp(2, $\mathbb{Z}$) 丛直接编码在与这种纤维化相关的信息中。此外，只要椭圆纤维化的全空间是光滑的，在 Spin-Mp(2, $\mathbb{Z}$) 配边类的情形下，它们就允许存在 Spin 结构，这已经暗示了它们在超对称构型中的重要性。

奇数维 Spin-Mp(2， $\mathbb{Z}$) 配边生成元的具体策略如下。如果生成元由透镜空间给出，则可以将其描述为商 $\mathbb{C}^n/(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$的渐近边界。随后，对偶丛被指定为沿透镜空间的非平凡一维圈遍历所生成的整体单值化，即在由 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 作用识别的两个点之间进行插值。利用F理论所描述的对偶丛几何化，可以通过指定 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 在 T^2 纤维上的作用来实现这一点，从而得到如下形式的空间

$$(\mathbb{C}^n \times T^2)/(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})\,. \tag{6.2}$$

对于在纤维和底空间坐标上的适当 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 作用，全空间被描述为一个非紧致的奇异卡拉比-丘（$n+1$）重流形，这表明部分超对称性得以保留；配边群的生成元作为基流形的渐近边界，见图4。所构造的具有奇异中心纤维的 F 理论几何，随后提供了一类自然的背景，其渐近边界对应于相关配边群中的候选生成元。为了使 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 作用在中心纤维上定义良好，环面的复结构可能被限制为特殊值，从而导致特定的纤维退化；这些退化总结于表 6中，另见附录 B。在这一层次上，我们只指定了对偶丛的玻色版本，即 SL(2， $\mathbb{Z}$) 丛。完整的 Spin-Mp(2， $\mathbb{Z}$) 结构则通过在全空间上选择一个 Spin 结构来指定。

我们在上方的表 4 中总结了奇数 $k \leq 9$ 时与 $\Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (点) 相关的对象，现在将逐一考察各个维数。如前所述，偶数维渐近背景与曾经出现过的背景密切相关

单值化	τ的固定值	Kodaira 类型	规范代数
S	$\tau = i$	III^*	$\mathfrak{e}_7$
S^2	τ 任意	I_0^*	$\mathfrak{so}(8)$
S^3	$\tau = i$	III	$\mathfrak{su}(2)$
U^2	$\tau = e^{2\pi i/3}$	IV^*	$\mathfrak{e}_6$
U^4	$\tau = e^{2\pi i/3}$	IV	$\mathfrak{su}(3)$

表 6：取决于 SL(2，$\mathbb{Z}$) 丛的纤维环面的复结构 τ 固定值，以及中心奇点对应的 Kodaira 类型和规范代数。

于 [9]
中。

6.1 余维二缺陷

我们先从

$$\Omega_1^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}(\text{pt}) = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}\,, \tag{6.3}$$

由具有非平凡 Mp(2，$\mathbb{Z}$) 对偶丛的圆生成。这些由转移函数分类，因此非平凡配边类与对偶群的阿贝尔化一一对应

$$\text{Ab}\big(\text{Mp}(2,\mathbb{Z})\big) = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}\,. \tag{6.4}$$

用附录 B 中给出的对偶群生成元来表示，生成 $\Omega^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$(pt) 的转移函数为 $\hat{}T$，即 SL(2,$\mathbb{Z}$) 中 T生成元的 Spin 提升。因此，要破坏这个配边群，我们需要引入一个实余维二缺陷 $\hat{}$，它会诱导出由 T 给出的非平凡对偶单值化。幸运的是，这种缺陷在 IIB 型弦理论和 F理论中广为人知，即 D7 膜。[12] 由此可见，配边类消失这一要求迫使我们纳入可与已知弦论对象相关联的缺陷，即 $[p,q]$-7 膜（例如，参见综述 [45]）。[13]

相关的 F 理论几何可以按如下方式构造。圆上的非平凡对偶丛对应于 F 理论纤维环面绕该

[12]请注意，也可以选择不同组合的 7-膜来破坏整个配边群。这些组合可解释为更一般的 $[p,q]$-7 膜堆叠，见下文。[13]为了恢复一般 $[p,q]$-7 膜的非阿贝尔编织，[12] 提出了一种涉及亏格一曲线模空间的替代性表述（在超对称情形下）。

时空圆的单值化，从而形成如下类型的几何

$$(S^1 \times T^2)/(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})\,, \tag{6.5}$$

其中，$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 通过旋转 $\frac{2\pi}{k}$ 起作用，并在纤维上产生相应的 Mp(2, $\mathbb{Z}$) 变换。现在，将底空间 S^1 填充以得到一个圆盘时，内部至少会遇到一个奇异纤维，这表明存在 $[p,q]$-7 膜。将 (6.5) 解释为以下对象的边界即可看出这一点：

$$(\mathbb{C} \times T^2)/(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})\,, \tag{6.6}$$

其底空间坐标为 $z \mapsto e^{2\pi i/k} z$，并在 $z = 0$ 处有一个奇异中心纤维。这样，所有相关缺陷都可以描述为椭圆纤维化 K3 流形的局部坐标片，这表明相关缺陷保留了一半的超对称性，而且只需 BPS 对象即可破坏与配边群相关的全局对称性。

将 (6.3) 中的 $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ 分解为 ($\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$) $\oplus$($\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) 两部分，可见，与其使用 D7 膜，不如使用产生单值化 $\hat{}S$ 和 $\hat{}U^2$的膜堆叠（分别参见附录 B）来破坏各个直和项。与单值化 S 相对应的膜堆叠可用一种类型为 III^* 的 F理论纤维表示，它对应于一个 $\mathfrak{e}_7$ 堆叠；类似地，$\hat{}U^2$ 对应于一种类型为 IV^* 的纤维，即一个 $\mathfrak{e}_6$ 堆叠，参见表 6 及例如 [74, 45]。

顺便说一下，我们现在想直观地解释为何 24 个 D7 膜的单值化会导出配边群的平凡类。为此，我们借助 F理论的直觉，并将对偶丛编码在椭圆纤维化的几何中。24 个 7-膜对应于椭圆纤维化的 24 I_1 个纤维。由于我们知道，K3 曲面可以构造成在 $\mathbb{CP}^1$ 上具有 24 I_1 个纤维的椭圆纤维化，因此我们在 F理论框架中找到了配边流形。忽略 Spin 结构后，12 I_1 个纤维就足以得到平凡的 SL(2, $\mathbb{Z}$) 单值化以及 $\Omega_1^{\text{Spin}}\big(B\text{SL}(2,\ \mathbb{Z})\big)$ 的对偶部分的周期性；也就是说，$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 因子可由 dP_9 或半 K3 存在椭圆纤维化来解释，另见 [75]。

6.2 余维三缺陷

我们有 $\Omega_2^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (pt) $= 0$，因此，带有 Spin- Mp(2, $\mathbb{Z}$) 结构的每个二维流形在配边意义下都是平凡的。这与 Ω_2^{Spin} (pt) $\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$形成对比，但它类似于定向配边中的 Ω_2^{SO}(pt) $= 0$ 。理解这一消失现象的一种方法是先看引理 13.4 和 13.10，其中我们将看到，$\Omega_2^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ 的 2-挠子子群同构于 $\Omega_2^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}$ 的 2-挠子子群，而 3-挠子子群同构于 Ω_2^{Spin} ($B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) 的 3-挠子子群。于是，由于$\widetilde{\ }\Omega_2^{\text{Spin}}$ ($B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) $= 0$，$\Omega_2^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (pt) 实质上等价于 $\Omega_2^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}$ (pt)，对应于带有 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 结构的流形，而这个配边群也消失了。我们将在第 7.2 节中将这个看似平凡的结果用于有趣的物理问题。

6.3 余维四缺陷

接下来，我们来讨论与以下对象相关的必要实余维四缺陷

$$\Omega_3^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}(\text{pt}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\,, \tag{6.7}$$

其生成元由两个配备非平凡对偶丛的透镜空间 L_4^3 和 L_3^3 给出。如上所述，这些空间可以方便地提升为 F 理论几何，其被描述为以下对象的边界

$$(\mathbb{C}^2 \times T^2)/(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})\,. \tag{6.8}$$

底空间坐标上的 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 作用为

$$(z_1, z_2) \mapsto (\omega z_1, \omega z_2)\,, \text{ with } \omega = e^{2\pi i/k}\,. \tag{6.9}$$

纤维上的作用是自然的 Mp(2, $\mathbb{Z}$) 作用，其中包含一个 k阶元素。

对于 $k = 4$，Mp(2, $\mathbb{Z}$) 元素由 $\hat{}S^2$ 给出。在 SL(2, $\mathbb{Z}$) 中，这对应于元素

$$S^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,. \tag{6.10}$$

将环面 $T^2 \simeq \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ 上的复坐标记为 λ，则该作用可描述为

$$\lambda \mapsto -\lambda = \omega^2 \lambda\,. \tag{6.11}$$

这个几何

$$(\mathbb{C}^2 \times T^2)/(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}): \quad (z_1, z_2, \lambda) \mapsto (\omega z_1, \omega z_2, \omega^2 \lambda)\,, \tag{6.12}$$

在 F 理论文献中也广为人知，参见例如 [76, 48, 49, 77, 78]。它是曲线自交数为 (-4) 的不可希格斯化簇的超共形极限；该曲线在几何（6.12）中已收缩至零大小。在张量分支上，也就是当 (-4)-曲线具有有限大小时，紧致曲线上有一个由包裹该曲线的 7-膜堆局域化的规范理论，其规范代数为 $\mathfrak{so}(8)$。这个背景在六维中保持 $\mathcal{N} = (1, 0)$ 超对称性。注意，局部的 (3，0)-形式

$$\Omega_{(3,0)} = dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\lambda\,, \tag{6.13}$$

在 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 作用下保持不变，因此该商是一个奇异卡拉比-丘。

对于第二生成元，也可以采用非常类似的方法，其对应的 Mp(2，$\mathbb{Z}$) 元素为

$\hat{}U^4$，其中

$$U^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\,. \tag{6.14}$$

与上述背景不同，晶格上的良定义作用 Λ_τ 将轴子-膨胀子固定为

$$\tau = e^{2\pi i/3}\,, \tag{6.15}$$

对于中心纤维，其几何由下式给出

$$(\mathbb{C}^2 \times T^2)/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}): \quad (z_1, z_2, \lambda) \mapsto (\omega z_1, \omega z_2, \omega\lambda)\,, \text{ with } \omega = e^{2\pi i/3}\,. \tag{6.16}$$

同样，这是一个不可希格斯化簇的奇点极限；这次，塌缩曲线是一条自交数为 (-3) 的曲线。由缠绕该曲线的 7 膜承载的诱导规范代数为与 IV 型奇点相关联的 $\mathfrak{su}(3)$，见表 6。该构型保留的超对称性与上文相同。相应地，方程 (6.13) 的局部 (3,0)-形式在 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 作用下保持不变。

我们看到，尽管无需引入新的弦论对象便可破坏配边群，但余维四缺陷与内容极为丰富且有趣的 F 理论背景相关，这些背景又与六维超共形场论有关，近期综述见 [79, 80] 。

6.4 余维五缺陷

群 $\Omega_4^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (pt) 是自由的，并由单个生成元 E（恩里克斯曲面）生成。这可以理解为将 Ω_4^{Spin} (pt) $= \mathbb{Z}$ （由 K3 曲面生成）精化到具有 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 结构的流形；在 F 理论文献中，相应的类由恩里克斯卡拉比-丘流形生成（例如参见 [81]）。因此，我们需要一种 IIB 型背景，允许 E 坍缩为一个点。这种背景必然是非超对称的。我们还预计它会处于强耦合状态，因为 IIB 在 K3 曲面上以及 E 上的谱都是手征的。对此缺陷的详细研究超出了本文的范围。

6.5 余维六缺陷

余维缺陷　　由于配边群非零，六维项变得不可或缺

$$\Omega_5^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}(\mathrm{pt}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})\,, \tag{6.17}$$

由透镜空间生成。与余维四的情况一样，我们可以通过考虑[14]将这些构型提升到 F 理论背景

$$(\mathbb{C}^3 \times T^2)/(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})\,, \tag{6.18}$$

这描述了所谓的 S 折叠背景 $[50, 51]$, 另见 $[82, 53, 54]$。存在两个不同的、具有 $k = 4$ 的 S 折叠，这一事实可追溯到 L_4^5 上存在两种不同的 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 结构。这会对局域在这些背景奇异点上的四维超共形场论产生有趣的影响，我们将在 $[83]$ 中讨论。这里，我们将聚焦于它们的一般性质。为此，请注意，五维中的 η-不变量是配边不变量，因此可用于分析透镜空间不同 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$作用之间的配边关系。

对于 $k = 3$ ，透镜空间 L_3^5 是 Spin 的，可解释为 $\mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 的渐近边界，其中离散群在 $\mathbb{C}^3$ 的复坐标上的作用形式为

$$z_i \mapsto e^{2\pi i j_i/k} z_i \text{ with } j_i \in \{1, 2\}\,, \tag{6.19}$$

另见附录 C.1。该群作用在 $z_i = 0$ 处引入一个孤立奇点。根据 $[84]$, 中的分析，若该作用在底空间 z_i 上的形式为

$$(z_1, z_2, z_3) \mapsto (\zeta z_1, \zeta^a z_2, \zeta^{-a} z_3) \tag{6.20}$$

其中 ζ 是本原三次单位根，且 a 与 3 互素。[15]

为了得到 IIB 背景，我们为其配备一个对偶丛，使得 F 理论模型中的全空间是一个 Calabi-Yau 四折叠。这隐含着需要选定一种复结构。因此，在原点附近的局部坐标片中，我们得到一个形如 $\mathbb{C}^4/(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ 的奇点，其在局部坐标上的作用为

$$(z_1, z_2, z_3, \lambda) \mapsto (\zeta z_1, \zeta^a z_2, \zeta^{-a} z_3, \zeta^{-1}\lambda), \tag{6.21}$$

根据文献 $[84,85]$ ，可知这是局部四维簇的一个孤立终端奇点。[16]

事实上，这正是 $[50]$ 中著名的 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ S 折叠。计算该背景下荷为 $q = 1$ 的狄拉克费米子的 η-不变量（见附录 C.1），我们发现

$$\eta^{\mathrm{D}}_{\frac{1}{2}}\big(L_3^5(1, -1, 1)\big) = \tfrac{1}{9}\,, \tag{6.22}$$

[14]奇异中心纤维的复结构固定为 $\tau = e^{2\pi i/3}$ （当 $k = 3$ 时），以及 $\tau = i$ （当 $k = 4$ 时）。[15]还要注意，这个内部几何不是卡拉比–丘三维复流形，因为行列式为 ζ，而不是 1。[16]请注意，这个体几何是一个 Calabi-Yau 四维簇，因为行列式为 1。

其中，我们用 $L_3^5(j_1,\ j_2,\ j_3)$ 明确表示几何上的 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 群作用，记号含义显然。因此，该 S 折叠的渐近边界是 $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ 配边群因子的一個生成元。也可以考虑更一般的透镜空间。令群作用在所有 z_i 上均匀，我们观察到

$$\eta_{\frac{1}{2}}^{D}\left(L_3^5(1,1,1)\right) = -\tfrac{1}{9}\,, \tag{6.23}$$

因此与生成元的关系为：

$$8\left[L_3^5(1,-1,1)\right] \sim \left[L_3^5(1,1,1)\right], \tag{6.24}$$

其中 $\sim$ 表示两侧共边。

在相应的 F 理论描述中，渐近透镜空间 $L_3^5(1,\ -1,\ 1)$ 和透镜空间 $L_3^5(1,\ 1,\ 1)$ 都可以保持超对称性，但实现方式各不相同。对于渐近边界为 $L_3^5(1,\ -1,\ 1)$ 的 S 折叠，我们需要非平凡的椭圆纤维化来保持超对称性。另一方面，$L_3^5(1,\ 1,\ 1)$ 是局部卡拉比–丘三维复流形 $\mathcal{O}(-3)$ over $\mathbb{CP}^2$ 的渐近边界，因此与平凡的椭圆纤维化相容。

为了更详细地了解这一点，引入局部 (4，0)-形式：

$$\Omega_{(4,0)} = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \wedge d\lambda\,, \tag{6.25}$$

其中 λ 是 F 理论环面上的复局部坐标。对于 $L_3^5(1,\ -1,\ 1)$，我们看到λ 需要按如下方式变换

$$\lambda \to \zeta^{-1}\lambda\,, \tag{6.26}$$

为了使 $\Omega^{(4,0)}$ 保持不变。这恰好表明存在非平凡的对偶丛，在 F 理论几何中，这对应于非平凡的环面丛。由于超荷也会在对偶变换下发生变换，因此可以发现，这一背景保留了部分超对称性，著名的结果是产生具有 $\mathcal{N}=3$ 超对称性的 D3 膜探针理论。总而言之，对于超对称的 F 理论背景，中心奇点对应于一个 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ S 折叠。

这里需要一般性地指出，上述分析偏向于体几何上的一种特定复结构。请注意，我们也可以进行复共轭，例如将 z_2 变为 $z_{\bar{2}}$。乍看之下，这样做似乎会使透镜空间的角色互换。然而，重要的是要注意，我们也隐式地选定了一种对偶丛。η 不变量检测的是拓扑数据，对这些全纯几何问题并不敏感。

对于 $k=4$，也可以进行非常类似的讨论。在这种情况下，存在两种不等价的 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 结构，我们将在 [83] 中更详细地讨论。就我们的目的而言，

只需考虑透镜空间 L_4^5(1，1，1) 即可。由于有两个类，我们也需要两个配边不变量来建立流形之间的关系。我们可以分别选取狄拉克费米子和 Rarita-Schwinger 场的 η-不变量。用波浪号区分这两种不同的 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$结构，可得（另见 [32]），

$$\begin{array}{c|c|c} & \eta_{1/2}^{\mathrm{D}} & \eta_{1/2}^{\mathrm{RS}} \\ \hline L_4^5(1,1,1) & -\frac{5}{32} & \frac{11}{32} \\ \widetilde{L}_4^5(1,1,1) & -\frac{3}{32} & -\frac{3}{32} \end{array} \tag{6.27}$$

正如 [32], 所指出的，以下两个组合生成了配边群中的各个因子

$$\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}: \ \left[L_4^5(1,1,1)\right], \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}: \ \left[\widetilde{L}_4^5(1,1,1)\right] + 9\left[L_4^5(1,1,1)\right]. \tag{6.28}$$

关于这一复结构的选择，我们观察到，相应的体几何不会在 $\mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 中产生终端奇点，而形如$\sim L_4^5$(1，-1，1) 和 L_4^5(1，-1，1) 的变体则会。[17] 然而，对于 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，这两种变体都能保留某些超对称性，因为覆盖空间上的全纯 (4，0)-形式在两种群作用下均保持不变。我们在 [83]中对这类背景进行了详尽分析。为了确保这会得到已知的 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ S 折叠背景，我们确定了表 (6.27) 中 (j_1，j_2，j_3) =(1，-1，1) 的配边不变量集合

$$\begin{array}{c|c|c} & \eta_{1/2}^{\mathrm{D}} & \eta_{1/2}^{\mathrm{RS}} \\ \hline L_4^5(1,-1,1) & \frac{5}{32} & -\frac{11}{32} \\ \widetilde{L}_4^5(1,-1,1) & \frac{3}{32} & \frac{3}{32} \end{array} \tag{6.29}$$

我们看到，只有 η-不变量的符号发生翻转，因此，在 IIB 型中纳入相关的 S 折叠背景确实涵盖了整个配边群。

6.6 余维七缺陷

接下来考虑余维七缺陷。由表1可见，带有 $k=6$ 结构的配边群在 SL(2, $\mathbb{Z}$)、Spin-Mp(2, $\mathbb{Z}$) 和 Spin-GL$^+$(2, $\mathbb{Z}$) 情形下均为零。因此，在这些情形中，配边猜想并未预言存在奇异的余维七缺陷。为解释这一点，我们可以将其与具有单独 Spin 结构的类似群进行比较，该群同样为零，$\Omega\, k=6$ (pt)。

[17]与 [50] 比较， [51, 32], 采用了不同的复结构来呈现几何，这反过来也会影响环境 $\mathbb{R}^6\times T^2$上循环群作用的表示方式。例如，由 [50]的局部群作用（z_1，z_2，z_3，λ）$\mapsto$（ζz_1，$\zeta^{-1}z_2$，ζz_3，$\zeta^{-1}\lambda$）定义的 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ S 折叠，在 [51, 32]中则表示为局部群作用（z_1，z_2，z_3，λ）$\mapsto$（ζz_1，ζz_2，ζz_3，$\zeta\lambda$）。然而，物理内容由预先指定的对偶丛结构决定，而这正是 η-不变量所检测到的。

例如，对于任意卡拉比-丘流形，若 SYZ猜想成立 [86],，则预期存在一个 T^3 纤维化；又由于 T^3本身就是一个边界，因此可以逐纤维构造整个卡拉比-丘流形的边界。[18] 在所讨论的情形中，这种方法无法直接奏效，因为相应的三维配边群并不为零。不过，更深入的分析或许会表明，非平凡的配边类绝不可能作为纤维出现，从而再次得到配边群为零的结果。无论如何，深入理解那些能够作为任意六维流形的零配边的光滑几何，将会很有意义，但这超出了本文的范围。

6.7 余维八缺陷

余维八缺陷与以下生成元相关：

$$\Omega_7^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}(\text{pt}) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})\,. \tag{6.30}$$

渐近几何由一个七维透镜空间 L_3^7 以及一个记作 Q_4^7 的流形给出，后者可描述为一个以 $\mathbb{CP}^1$ 为底空间、纤维为 L_4^5 的纤维化。

先考虑 L_3^7 。与较低余维的情形一样，它可以提升为一个奇异 F 理论几何的边界，该几何由下式给出：

$$(\mathbb{C}^4 \times T^2)/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\,, \tag{6.31}$$

将中心纤维上环面的复结构固定为 $\tau = e^{2\pi i/3}$。对于由 $L_3^7(1,1,1,1)$ 给出的变体，我们在显式群作用下仍保留一定的超对称性：

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, \lambda) \mapsto (\zeta z_1, \zeta z_2, \zeta z_3, \zeta z_4, \zeta^{-1}\lambda), \tag{6.32}$$

采用显而易见的记号。特别是，超对称背景的存在要求非平凡的椭圆对偶丛结构。相反，对于渐近边界 $L_3^7(1,-1,1,-1)$，F 理论模型的底空间本身已经是一个 Calabi-Yau 四维簇，因此超对称性与平凡的对偶丛结构相容。[19]

现在我们要问，这些背景是否为相应的配边群因子提供生成元。为此，我们分别确定两种情况下的 $\eta_1^{\text{D}}(L_3^7) - \eta_0^{\text{D}}(L_3^7)$。请注意，我们考虑的是两个荷不同的 η 不变量之差，因为单个 η 不变量可能受到八维流形上指标密度的贡献，因此并非配边不变量。

$$\begin{aligned} &\eta_1^{\text{D}}\big(L_3^7(1,1,1,1)\big) - \eta_0^{\text{D}}\big(L_3^7(1,1,1,1)\big) = \tfrac{1}{9}\,, \\ &\eta_1^{\text{D}}\big(L_3^7(1,-1,1,-1)\big) - \eta_0^{\text{D}}\big(L_3^7(1,-1,1,-1)\big) = \tfrac{1}{9}\,. \end{aligned} \tag{6.33}$$

[18]要严谨地实现这一论证，就必须考虑纤维化的退化情形。[19]注意，F 理论模型的底空间是底空间中的一个终端奇点。

事实上，这两个透镜空间是共边的。因此，我们找到了新的 IIB 型背景，它们由上述 S 折叠的低维版本描述，我们称之为 S 弦。聚焦于具有 $(j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4) = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$ 的变体，我们可以明确确定超荷的变换性质，另请参见 [83] 中的分析。这与 S 弦二维世界面理论中的一种奇异的 $\mathcal{N} = (8,\ 2)$ 超对称性[20] 相容，但在实际弦背景中开启额外通量和膜源后，超对称性可能会进一步降低。完整分析以及潜在的物理应用将留待未来研究。

接下来考虑第二生成元 Q_4^7。它可以表示为一个透镜空间丛在 $\mathbb{CP}^1$ 上的全空间

$$\begin{array}{ccc} L_4^5 & \hookrightarrow & Q_4^7 \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{CP}^1 \end{array} \tag{6.34}$$

如第 3 节所述。因此我们看到，这并非一个真正全新的背景，而是将 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ S 折叠紧化在 $\mathbb{CP}^1$ 上。

现在我们论证，存在一个渐近几何为 Q_4^7 的 IIB 背景，它保留某种超对称性。在第 3 节对流形的描述中，我们重点关注了透镜空间嵌入 $H^{\pm 2} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ 并位于 $\mathbb{CP}^1$ 之上的情形。这意味着环境空间中纤维的第一个复坐标 z_1 发生扭曲，即作为 $\mathbb{CP}^1$ 上的非平凡线丛变换。由于球面上的零模只有在场作为底空间 $\mathbb{CP}^1$上旋转的标量变换时才可能存在，保留下来的超荷必须满足这一性质。可以将此视为指定了一种拓扑扭曲 [87], ；对于上述空间，该扭曲是相对于完整 R 对称性中与内部空间旋转相关的 Spin(2) $\simeq$U(1) 子群而言的，它作用于 z_1。根据 z_1 所变换为其截面的丛 H^2 或 H^{-2}，这会导致相应二维子空间中的 Spin 分量之间呈（反）相关关系；该子空间由纤维的非平凡线丛描述，即位于 $\mathbb{CP}^1$ 和 $\mathbb{C}_{z_1}$ 上的 Spin 分量。我们看到，一般而言，这会保留 L_4^5 的超荷分量中的一半。既然我们已经看到这些背景保留超对称性，那么在 Q_4^7 上的扭曲紧化也保留超对称性。

分析这些背景所描述的相关二维超对称量子场论（SQFTs）将会很有趣；它们可能实现了奇异的超对称性，另见 [88]。因此，我们发现了新的 IIB 型构型，并将其称为 S 弦；此外，还发现了保持超对称性的原始四维 S 折叠紧化。

[20]与往常一样，我们用最小自旋量表示中的超对称荷来表示；在二维中，该表示为马约拉纳-外尔表示。

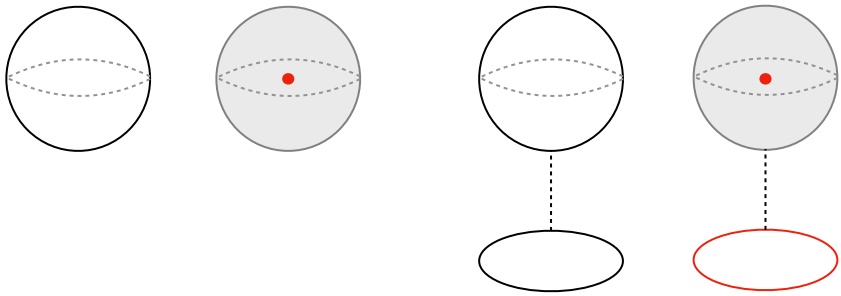


图 6：了解如何对某个配边类作界，就能对一个更高维的变体作界，其中该类作为某个纤维化的纤维出现。

6.8 纤维化生成元

在上一节中，我们观察到，某些渐近几何是通过“紧化”过程得到的，也就是说，它们源自低维渐近几何中的一个配边生成元。

事实上，通过考察表 2 和表 3 中的生成元，可以发现若干高维配边群生成元可理解为纤维化，其纤维与低维生成元相关。一般而言，考虑纤维化

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \hookrightarrow & X \\ & & \downarrow \\ & & \mathcal{B} \end{array} \tag{6.35}$$

其中 X 生成 $\Omega_k^{\mathcal{G}}$(点) 的一部分，而纤维 $\mathcal{F}$ 与 $\Omega_\ell^{\mathcal{G}}$(点) 中的一个元素相关，其中$\ell = k$ –维数($\mathcal{B}$)。我们已经知道如何将纤维描述为某个空间的边界，该空间包含特定缺陷；我们可以通过将相应缺陷缠绕在 $\mathcal{B}$上，将这一描述推广到整个纤维化，见图 6。

在 F理论紧化的背景下，要在低维真空中保留超对称性，实际上必须出现非平凡纤维化。事实上，给定一个以某个底空间 $\mathcal{B}_{n-1}$为底的椭圆纤维化 n-折叠 $X_n \to \mathcal{B}_{n-1}$，我们要求渐近几何 $\partial\mathcal{B}_{n-1}$具有固定的对偶丛结构。若通过将原始背景纤维化到空间 $\mathcal{C}_m$上来进一步紧化，那么，进一步紧化时保留相同丛结构这一条件，与里奇平坦条件共同意味着，所得卡拉比-丘 $(n+m)$-折叠 $X_{n+m} \to \mathcal{B}_{n+m-1}$ 具有一个底空间 $\mathcal{B}_{n+m-1}$，而该底空间本身又纤维化到 $\mathcal{C}_m$上，也就是说，我们有 $\mathcal{B}_{n-1} \to \mathcal{B}_{n+m-1} \to \mathcal{C}_m$。

在许多情况下，这可以用规范理论的术语解释为实施参考文献 [87]（另见 [89]）中所考虑的相应（部分）拓扑扭曲。要理解其中的原因，请回想，在许多 F 理论模型中，体中的奇点可以被解释为

通过将膜包裹在 F 理论模型底空间的圈上而实现几何工程，从而得到一个规范理论。现在，在此类模型中保持超对称性的条件，就是要求膜的世界体理论经过拓扑扭曲 [90]。这种部分扭曲已分别在 [91]，（针对 F 理论在卡拉比–丘三维复流形上的情形，隐含地）、[92, 93]，（针对 Calabi-Yau 四维簇）和 [94, 95]（针对卡拉比–丘五维复流形）中实现。另请参见 [96–98]，其中是在 M 理论背景下对几何工程进行的相关分析。从这一角度看，将我们的一些渐近几何解释为由高维真空进一步紧化而得到，是很自然的。

当然，我们也会关注超对称性可能不被保留的背景，但即便在这种情况下，纤维和底空间中的丛结构之间仍然存在关联，因此我们将继续把这些情况称为“扭曲紧化”。从物理角度来说，这些情况是从一个高维缺陷出发，并将其缠绕在新底空间中的一个圈上得到的。一般而言，对偶丛也会涉及纤维化的底空间。例如，Spin-$\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ 生成元 $W_1^7$and W_1^9 以及 Arcana 都是如此。此外，一般而言，对偶丛还会涉及反射。为了构造纤维丛的缺陷，我们会将纤维中的缺陷沿着底空间缠绕，而那里同样存在一个对偶丛。为了使这些构型定义良好，缠绕在 $\mathcal{B}$ 上的缺陷的世界体自由度必须与这些广义对偶丛相容；也就是说，反射应当是纤维的世界体理论的全局对称性。由于这些缺陷涉及反射 7 膜（R7- 膜），而其世界体理论很难确定（不过参见 [23]），我们假设对偶丛与这些缺陷相容，并将详细分析推迟到未来的工作中。一个令人鼓舞的线索是，R7膜是圆紧化中的一种缺陷，其单值化属于反射对称性，是涡旋的弦论推广；一般而言，保护涡旋的对称性在其核处是不破缺的（例如，可以考虑阿贝尔希格斯模型中的涡旋弦）。

6.9 余维九缺陷

与余维五缺陷的情形一样，这些类对应于由 p_1^2 和 p_2的取值所确定的非平凡Spin八维流形的Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 推广。对于四元数射影空间 $\mathbb{HP}^2$，我们可以将其视为规范化WZW模型的线性膨胀子背景的边界几何。事实上，由于我们有陪集构造$\mathbb{HP}^2 = \mathrm{Sp}(3)/\big(\mathrm{Sp}(2)\times\mathrm{Sp}(1)\big)$，只需从李群Sp($n+1$)的WZW模型开始，并规范化相应的子群即可。要解出弦理论的运动方程，还需要膨胀子梯度。更多讨论请参见例如 [99]。随着膨胀子演化至强耦合，对应的几何将出现奇点；但我们在此采取的观点是，边界的存在（配边猜想所要求的）实际上意味着这一奇点必须是允许存在的。过去，配边猜想曾被用来论证强耦合奇点的一致性，而这些奇点的最终命运

及其一致性若无其他依据则难以判定，参见 [13]。

我们遇到的另一个配边生成元是 Bott 流形 B，我们可以将其视为具有 Spin(7) 度量全纯性的流形。与前一种情况不同，我们无法简单描述该流形在世界面中的边界几何，不过可以推测其中也会出现一个膨胀子奔向强耦合的奇点。阐明相应非超对称缺陷的物理学将非常有趣，但这超出了本文的范围。

6.10 余维十缺陷

余维十缺陷是局域于时空中的对象，并且可以与奇异瞬子背景相关联。然而，对于

$$\Omega_9^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}(\text{pt}) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/128\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})\,, \tag{6.36}$$

只有前三个直和项 $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/128\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$ 与局域缺陷相关联，我们称之为 S-瞬子；而 $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 可以理解为缠绕在 $\mathbb{HP}^2$上的第 6.1 节所述的 7-膜堆。因此，我们聚焦于由 L_k^9 生成的三个因子，它们可以描述为以下形式的 F 理论背景在底空间上的投影

$$(\mathbb{C}^5 \times T^2)/(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})\,. \tag{6.37}$$

对于 $k = 3$，中心奇点在 j_i 所有一致取值下都是典范且终端的。对于 $L_3^9(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$，可以用一个非紧致奇异卡拉比–丘六维流形来描述上述几何，其中椭圆纤维坐标需要在 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$、$\lambda \mapsto e^{2\pi i/3}\lambda$ 作用下变换。我们不禁推测，有效零维系统中保留了哪些超对称性；这个系统“存在”于 S-瞬子缺陷上。

对于 $k = 4$，这两个生成元再次因 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 结构的选择而不同，并且可以通过 η-不变量检测出来

	$\eta_{1/2}^{\text{D}}$	$\eta_{1/2}^{\text{RS}}$
$L_4^9(1,1,1,1,1)$	$\frac{9}{128}$	$-\frac{19}{128}$
$\widetilde{L}_4^9(1,1,1,1,1)$	$\frac{7}{128}$	$\frac{3}{128}$

(6.38)

这表明这两个生成元

$$\mathbb{Z}/128\mathbb{Z}:\ \left[L_4^9(1,1,1,1,1)\right],\quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}:\ 7\left[L_4^9(1,1,1,1,1)\right] - 9\left[\widetilde{L}_4^9(1,1,1,1,1)\right]. \tag{6.39}$$

上述几何可实现为局部且奇异的椭圆纤维化卡拉比–丘六维流形的边界。所有中心奇点在相关 F 理论模型的底空间和全空间中都是典范且终端的。同样，对配边

群的分析也指向了由 S-瞬子描述的 IIB 型弦理论中有趣的新背景。

至此，我们对 Spin-Mp(2， $\mathbb{Z}$) 配边缺陷的讨论告一段落。

7 Spin-GL^{+}缺陷

现在，我们将反射及其 Pin^{+} 提升纳入对偶群，并分析与配边群 $\Omega^{\text{Spin-GL}^{+}}{}_{(2,\ \mathbb{Z})\ k}$ (点)的生成元相关的缺陷。将这些配边群与表1中 Spin-Mp(2， $\mathbb{Z}$) 流形对应的配边群进行比较，可以发现，维数为 $k = (4n + 1)$ 时的群有所缩小，而维数为 $k = (4n + 3)$ 时的群通常有所增大。这是由两种相互竞争的效应导致的。首先，由于每个 Spin-Mp(2， $\mathbb{Z}$) 流形也是 Spin-GL^{+}(2， $\mathbb{Z}$) 流形，因此直观上会预期找到更多生成元。然而，Spin-GL^{+}(2， $\mathbb{Z}$) 流形也允许更广泛的形变，因此往往会将先前彼此不同的生成元视为相同。

这种识别主要发生在维数为 $k = (4n + 1)$ 时，这一事实可以这样理解。在许多情况下，Spin-Mp(2， $\mathbb{Z}$) 生成元与对偶丛的特征类相关。这些特征类恰好在维数为 $k = (4n + 1)$ 时在反射算子作用下变号，因此在 Spin-GL^{+}(2， $\mathbb{Z}$) 流形上，相关联的丛可以彼此形变为对方。然而，在维数为 $k = (4n + 3)$ 时，特征类在反射下保持不变，因而无法彼此形变为对方。下面我们将以 $n = 0$，即 $k = 1$，为例对此作明确说明。

至于 Spin-Mp(2， $\mathbb{Z}$) 配边，我们还会遇到一些有趣的新类，以及 IIB 型弦理论的背景，同时也会遇到一些已知对象。我们在表 5 中总结了这些奇维配边群。

7.1 余维二缺陷

由.....预言的余维二缺陷

$$\Omega_1^{\text{Spin-GL}^{+}(2,\mathbb{Z})}(\mathrm{pt}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\,, \tag{7.1}$$

似乎比第 6.1 节所讨论的 Spin-Mp(2， $\mathbb{Z}$) 情形更加稀疏。正如上文所指出的，原因在于额外的反射允许将若干不同的 Spin-Mp(2， $\mathbb{Z}$) 结构变形为彼此相同，从而通过 Spin-GL^{+}(2， $\mathbb{Z}$) 配边，识别相关的流形。我们针对 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ of $\Omega_1^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (点) 中的子群展示这一点。

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 因子例如由一个带有与 $g = \hat{}U^4$ 相关联的转移函数的圆生成，见附录 B。[21] 这个生成元的三个副本的不交并是零

[21]严格来说，这是上文定义的生成元 L_3^1 的两倍，它也生成完整的 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 直和项，

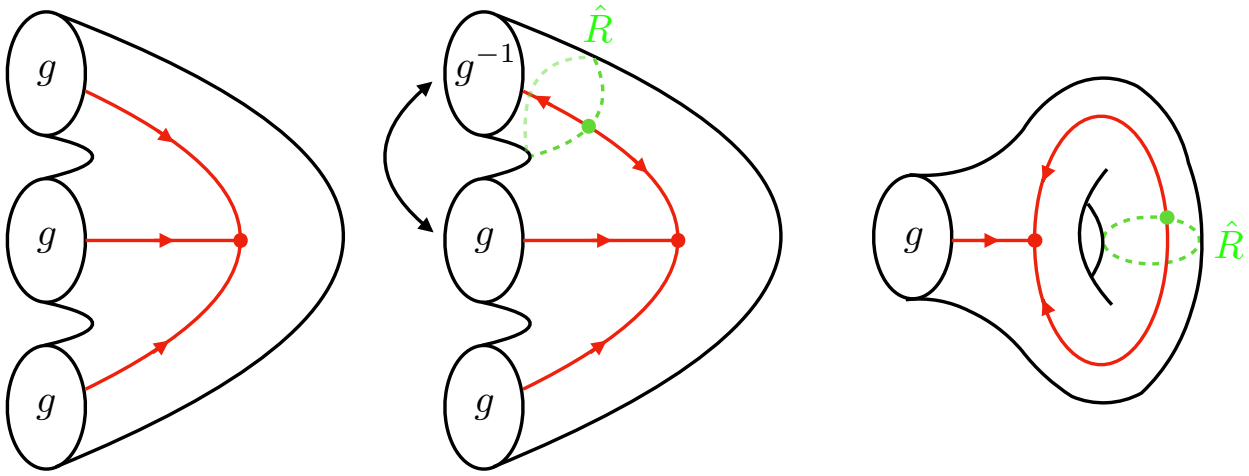


图 7: $2\left[L_3^1\right]$ 在 $\Omega^{\text{Spin-GL}^+}{}_{(2,\mathbb{Z})\ 1}$ (pt) 中的零配边示意图。红线表示$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 转移函数，箭头用于区分 g 和 g^{-1}，其中 g 生成 $\hat{}\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$。绿色虚线表示反射转移函数 R，它实际上会翻转箭头。

共边，见图 7 左侧。然而，由于转移函数不匹配，不能将三个边界中的两个粘合起来。不过，一旦纳入反射，就可以根据群律改变转移函数

$$\hat{R}\hat{U}^4\hat{R}^{-1} = \hat{U}^{-4} = \hat{U}^8\,. \tag{7.2}$$

在二维体中引入这样的反射转移函数，相当于为对称性的反射部分开启一个非平凡背景。这使我们能够将两个边界分量粘合起来。这意味着，$2\left[L_3^1\right]$ 作为 Spin-GL$^+$(2, $\mathbb{Z}$) 流形是一个边界。由于在 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 上，群的两个非平凡元素互为两倍，因此这一因子中的所有配边类都被平凡化了。图 7 以图示方式总结了这一点。

由 L_4^1 生成的 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 因子也会发生同样的情况。反射作用于编码转移函数的群元素，其作用方式如下：

$$\hat{R}\hat{S}\hat{R} = \hat{S}^{-1} = \hat{S}^7\,. \tag{7.3}$$

这表明，$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \subset \Omega_1^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (pt) 中的每个元素在反射下都会映射到其逆元；根据上述同样的论证，与 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 中偶数倍元素对应的每个类在配边中都会变为平凡类。这消去了阶为 2 和 4 的元素，而剩下的非平凡类是一个圆，其整体单值化由 $\hat{}S$ 生成元给出；它的边界由一叠 7-膜构成，这些膜在纤维中诱导出一个 $\mathfrak{e}_7$ 奇点，即纤维类型 III^*。这是其中一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 因子的生成元，另见

但由于合并结构，在这里使用更加方便。

文献 [24] 中的论证。

ˆ (7.1) 中的另一个生成元由一个圆给出，其转移函数为 R，记作 S^1_R。这要求在 II B 型弦理论中加入一种新的 7 膜，它会产生行列式为 (-1) 的单值化，也就是说包含反射；我们称其为反射 7 膜或 R7膜。关于 R7 膜物理学的进一步分析，请参见参考文献 [23] 。这种反射膜的两种变体尤为重要，另请参见附录 B 和图10。其中一种是 Ω膜，它产生由世界面定向反转给出的单值化。另一种是 F_L膜，它会在弦世界面的左移扇区中生成费米子宇称。二者互为 S 对偶，因此可以通过涉及通常的 $[p,q]$-7 膜的膜移动彼此变形，这与 [100–102] 中所述的跃迁类似。

我们想强调的是，我们在此讨论的机制——在 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 中为某些配边类构造几何边界——意味着我们已经将相应的 7-膜几何化。通常，$[p,q]$-7-膜无法用光滑几何来描述，其核处的场会变得奇异。上述几何缺陷使我们能够构造出完全光滑的对象，它们具有与例如某种类型的 IV^* 奇点相同的对偶单值化，却完全光滑——不过是一个以特定单值化方式粘合到平直空间上的环面。类似的情况也出现在杂化弦理论中，例如，NS5膜荷既可以由奇异膜承载，也可以由 K3 几何（或规范丛）承载。正如这一情形所示，我们应当考虑这样一种可能性：光滑与奇异的超对称构型，是由其单值化荷所指定的同一个底层对象的两种不同“相”或构型。我们构造的这个拓扑非平凡、非超对称的光滑 7膜背景，应被视为超对称 7 膜的一种高度激发态；作为 BPS 对象，后者是具有指定单值化的最轻对象。

最后，我们看到，包含反射允许将许多不同的 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 类彼此形变。这之所以可能，是因为它们会反转对偶背景的转移函数，或者等价地说，反转其特征类。因此，我们预计，在典型对偶背景在反射下变换时带负号的维度中，会发生此类配边群的约化。这正是维度 $k = (4n + 1)$ 中的情形（见 [33] 中对对偶丛的刻画），并且恰好对应于表1中的配边群约化。在维度$k = (4n + 3)$中，对偶背景通常在反射下保持不变，因此不会遇到这种约化。相反，人们通常会得到包含反射的转移函数所涉及的新背景。在偶数维度中，对偶结构通常并不是支撑非平凡配边类的因素，因此我们也不预期会发生约化，这验证了表1中的观察结果。

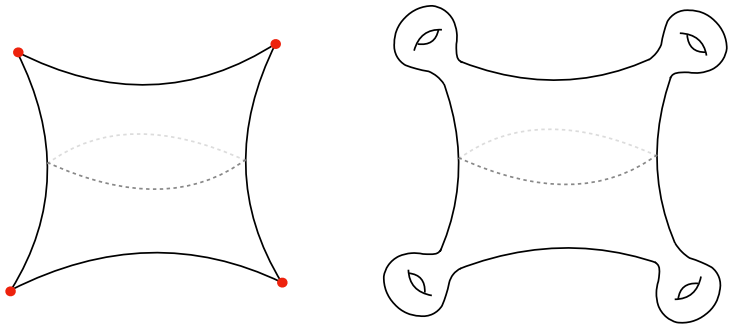


图 8：通过从膜堆过渡到光滑的 Spin-GL$^+$(2, $\mathbb{Z}$) 几何，实现 K3 曲面上的 F理论的零配边。这里，将定向反演平面周围的小圆盘替换为带有非平凡对偶丛（其中包含反射）的 2-环面。

7.2 将 K3 曲面上的 F理论形变为空

到目前为止所描述的配边群和膜有一个有趣的应用，我们认为它值得单独列为一个小节。它与 [9], 中遗留的一个悬而未决的问题有关，即为 K3 上的 F理论构造一个边界。K3 曲面存在一个极限，在该极限下，它可以被描述为在 $\mathbb{CP}^1$ 上的椭圆纤维化，并具有四个 I_0^* 纤维；这与将其描述为 $T^4/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 轨形有关。这在 F 理论文献中被称为 Sen 极限 [9]。Sen 极限下的 K3 上 F理论是一种微扰 IIB 构型，可以描述为十维 IIB 在 $T^2/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上的紧化，其中作用的不动点处存在四个奇点（Kodaira 类型为 I_0^*），如图 8 左图所示。每个奇点都可以描述为一个膜堆，由四个置于 O7$^-$ 定向反演面上的 D7 膜组成。

I_0^* 奇点由一个单值化为 $\hat{}S^2$ 的链接圆来指定；我们在上一小节中论证过，它属于 Spin-GL$^+$(2, $\mathbb{Z}$) 配边中平凡的类。因此，在单值化层面上，描述其边界的膜堆可以替换为完全光滑且不含任何膜的构型，如图 9 所示。正如我们在上一小节末尾强调的，我们无法确定 I_0^* 奇点是否与图 9 右侧所示的光滑构型相同。但它们具有相同的渐近荷，因此我们现在假设这两种构型可以相互形变，并探讨其后果。这意味着，K3 曲面上的 F理论与图 8 右侧面板所示的构型共边，其中每个奇点都已替换为带有相应对偶单值化的粘合环面。现在，我们已将 K3 曲面上的 F理论替换为完全光滑的 IIB 构型，然而该构型是非超对称的。有趣之处在于，由于 $\Omega^{\text{Spin-GL}^+}{}_{(2,\mathbb{Z})\ 2}$ (点) $= 0$，这一构型在带有对偶丛的光滑流形配边中是平凡的。

换句话说，我们已将寻找 K3 曲面上 F理论边界的全局问题，归结为确立 I_0^* 奇点与局部问题之间的等价性：

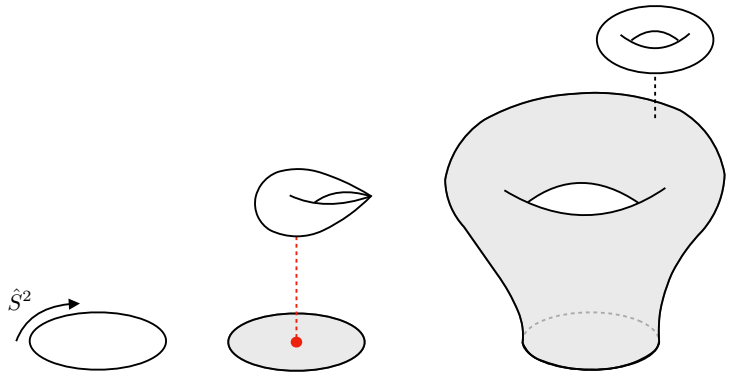


图 9：转移函数为 $\hat{S}^2$ 的圆的配边，可由涉及膜堆的奇异构型或包含反射的非奇异构型实现。

也就是与我们构造的光滑配边之间的等价性。

7.3 余维三缺陷

存在一个生成元

$$\Omega_2^{\text{Spin-GL}^+(2,\mathbb{Z})}(\text{pt}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,, \tag{7.4}$$

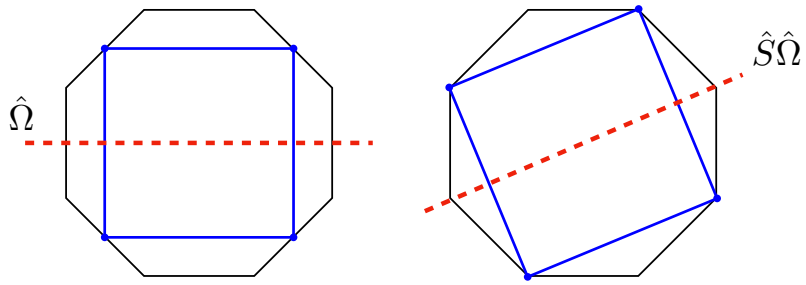
与余维三缺陷相关联。然而，由于它是由费米子上具有周期边界条件且没有对偶丛的圆与 Ω_1^{Spin} (pt) 的生成元，以及涉及反射膜的 $\Omega^{\text{Spin-GL}^+}{}_{(2,\mathbb{Z})\ 1}$ (pt) 的生成元的乘积给出的，因此我们无需引入额外的缺陷。事实上，R7膜的包含映射使我们能够填充其中一个圆。因此，相关的弦理论背景对应于缠绕在一个 S^1 上的 R7膜。

7.4 余维四缺陷

对于余维四对象，我们有

$$\Omega_3^{\text{Spin-GL}^+(2,\mathbb{Z})}(\text{pt}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\,. \tag{7.5}$$

前两个因子与 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 完全相同，具有完全相同的生成元，而且我们需要像第 6.3 节中那样纳入相同的不可希格斯化簇。剩下的两个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$因子都涉及反射作用，并具有渐近的 $\mathbb{RP}^3$ 几何。不难将这些对象识别为 O5平面，或者是它们的 S对偶 [103] （如果我们关注具有 F_L-膜的背景）。我们再次强调，由于我们的分析对边界上的 RR 通量和 NS通量并不敏感，因此无法进一步确定这些对象所允许的离散扭曲，也无法匹配它们的 $[p,q]$-5-膜荷。虽然具有该背景的



ˆˆˆ 图10： D_4 和 D_8 嵌入 D_{16} 的两种方式，其中标示了 Ω 和 $S\Omega$ 的作用。

反射膜可能会彻底破坏超对称性，但定向反转背景可以保留部分超对称性。值得探究的是，第二生成元是否也能由某个超对称背景所界定。

我们还可以为一个相关缺陷提供另一种构造，其背景形式为

$$(\mathbb{C}^2 \times T^2)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\,, \tag{7.6}$$

其中，纤维的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用现在还涉及一个反射 R。这两种不同的变体对应于将 D_4 或 D_8 嵌入 D_{16}的两种可能方式，另见 [33]和附录 B.2，如图10所示。我们看到，对于这两种变体，反射 ˆˆˆˆ 分别可由 Ω 和 $S\Omega$ 描述。请注意，除了 Ω 之外，也可以使用其ˆS对偶，其由 $(-1)^{F_L}$ 给出。因此，基底几何由以下对象的渐近边界给出

$$\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\hat{\Omega}} \quad \text{or} \quad \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\hat{S}\hat{\Omega}}\,, \tag{7.7}$$

其中， $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上的下标表示作用于背景的对称性。将实射影空间想象为底空间 $\mathbb{CP}^1$ 上复直线丛$\mathcal{O}(-2)$的渐近边界，我们可以看到，这一构型可通过缠绕一个 Ω膜，以及缠绕一个 Ω膜与一组在底空间 $\mathbb{CP}^1$ 上生成 ˆS 的 $[p,q]$-7 膜的组合来获得。这与上文构造不可希格斯化簇的方式类似，不同之处在于，自交数为（-2）的曲线现在还额外缠绕了一条 R7膜。因此，消除这一配边类的缺陷可以由普通 O平面实现，也可以由缠绕的 R7膜实现。这表明，R7膜在 $\mathbb{RP}^2$ 上的紧化是一种非超对称对象，其荷与 O5平面相同。

7.5 余维五缺陷

至于 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$)，四维中的配边群也是一个自由的 $\mathbb{Z}$ 因子，由恩里克斯曲面 E生成。和上文一样，我们不知道如何在 IIB 型弦理论中恰当地为这个流形构造边界。不过，由于它与第6.4节中的生成元相同，我们预计不需要引入涉及 R7膜的新要素或背景。

7.6 余维六缺陷

与第 7.1 节所讨论的余维二缺陷类似，在余维六（维数增加四）时，我们从相关的 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 背景中继承配边生成元

$$\Omega_5^{\text{Spin-GL}^+(2,\mathbb{Z})}(\text{pt}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\,. \tag{7.8}$$

唯一存留的构型是 L_4^5 生成 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，它可以通过纳入第6.5节讨论的 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ S 折叠背景来界定，且 Spin 结构任选其一。

另一个生　成元 X_5，Arcanum V，可以描述为 $\mathbb{RP}^2$ 上的 $\mathbb{RP}^3$-纤维化

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{RP}^3 & \hookrightarrow & X_5 \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{RP}^2 \end{array} \tag{7.9}$$

纤维 $\mathbb{RP}^3$ 因而可以识别为 $\mathbb{C}^2/$（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）的渐近边界，并可由第7.4节中的构型——一个 O5 平面 —— 作为边界。与第 6.7 节中涉及 Q_4^7 的扭曲紧化类似，我们可以通过将一个 O5平面绕在底空间 $\mathbb{RP}^2$ 上，来描述 Arcanum V 类的边界。虽然 O5平面没有局域自由度，但原则上可以考虑一个 O5-D5膜堆，它也会构成一个边界。对于这类构型，一个潜在的问题是：将理论紧化在 $\mathbb{RP}^2$ 上是否确实自洽，因为它并非 Spin 流形；这与我们此前讨论的其他类相似。接下来我们将更具体地看到，答案是肯定的。如第14.3.3节所述，Arcanum V 流形是 $S^2 \times S^3$ 对两个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用取商所得，其中一个作用仅仅是 S^3 上的对径映射（带有某个对偶丛）。因此，其边界恰好是一个带有 Ω 作用的 $\mathbb{R}^4/$（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）奇点（即紧化在 $S^2/$（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）$= \mathbb{RP}^2$ 上的 O5平面，其中（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）作用是 S^2 上的对径映射与（-1）^{F_L} 作用以及 O5 法丛三个坐标的反射的复合。这额外的三次反射确保该作用与定义 O5平面的作用对易，并且是世界体理论的对称性。就世界体场而言，这相当于对一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 取商，其中涉及对径映射，以及（-1）^{F_L} 与 SO(4) 法丛方向上的一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的组合；这是 IIB背景的一个对称性。此外，由于其中涉及

仅微扰对称性，因此这一缺陷也应当适合用 IIB 世界面描述，即视为定向反演面的一个特定轨形。

总而言之，再次重申，生成配边群所需的缺陷，都可以通过涉及纤维环境空间中实坐标反射的（非平凡纤维化）紧化得到。

7.7 余维七缺陷

与第 6.6 节一样，带有 $k = 6$ 的配边群消失了，所有类都可以通过几何方式消去。

7.8 余维八缺陷

余维八的缺陷与以下元素相关：

$$\Omega_7^{\text{Spin-GL}^+(2,\mathbb{Z})}(\text{pt}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3} \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})\,. \tag{7.10}$$

正如维数 $(4n+3)$ 中所预测的，我们发现了完整的一组 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 类，它们由 S 弦和第6.7节讨论的 S 折叠的扭曲紧化所界定。我们还发现了两个实射影空间，其配边缺陷分别就是 O1 平面及其 S对偶。这些奇点可描述为 $\mathbb{C}^4/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，其中 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 群作用由适当组合的对偶生成元生成：

$$\mathbb{C}^4/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\hat{\Omega}} \quad \text{and} \quad \mathbb{C}^4/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\hat{S}\hat{\Omega}}\,, \tag{7.11}$$

与图10所示的两个 D_8 嵌入相关。 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$上的下标表示该群的生成元。与第7.4节中的缺陷类似，可以通过在底空间 $\mathbb{CP}^3$ 上缠绕反射膜，或缠绕反射膜与常规 $[p,q]$-7-膜的组合，构造具有相同博尔迪荷的对象。再次强调，加入通量并研究相关的弦荷及超对称性将是很有意思的。

剩余两个生成元对应的缺陷稍微复杂一些。 W_1^7的缺陷可由 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 生成元通过额外的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用得到，该作用涉及反射。至于 Q_4^7，我们可以将其缺陷解释为余维六处 S 折叠的紧化（带有非平凡纤维化）；其微妙区别在于，纤维化不仅涉及由 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 结构编码的离散旋转，还涉及由 W_1^7更一般的 Spin-D_{16}结构所捕捉的反射。因此，我们在表 5 中将这些理论称为双重扭曲紧化，并再次指出第 6.8 节中讨论的假设，即对世界体场的对偶作用是一致的。

最后一个生成元 W_2^7的解释略有不同。它源自具有 Spin-GL⁻(2，$\mathbb{Z}$) 结构的流形，并通过史密斯同态得到。它可以理解为 $S^3/Q_{16} \times T^2 \times S^2$的一个商，其中 Q_{16} 是 16 阶二元二面体群。这个离散商在 $\mathbb{RP}^2$上引入了 S^3/Q_{16} 的非平凡纤维化，而其全空间又纤维化在克莱因瓶上；更多细节见第 14.3.7 节。如第 6.8 节所述，我们可以将相应的缺陷解释为某个对象的扭曲紧化，该对象以 S^3/Q_{16} 为渐近边界，即 IIB 弦理论中的 D 型 Du Val 奇点。因此，这种缺陷无需引入任何其他弦理论对象，却再次指向有趣的时空构型（此处为 ADE 奇点的扭曲紧化）。与上述其他情况一样，若能确定这一背景的局域自由度在纤维化结构引入的扭曲作用下如何变化，将会很有意思。

我们看到，这些背景是第 6.7 节中所发现背景的自然推广，它们会诱导出另一类弦状缺陷和扭曲紧化。

7.9 余维九缺陷

余维九缺陷由以下内容诱导：

$$\Omega_8^{\text{Spin-GL}^+(2,\mathbb{Z})}(\text{pt}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\,. \tag{7.12}$$

我们先聚焦于由 $W_1^7 \times S_p^1$ 给出的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 生成元。我们看到，七维中的配边群出现了一个生成元，可以将其解释为前一小节所讨论的扭曲理论的进一步圆紧化。因此，我们也无需加入更多缺陷来破缺与此类相关的对称性。同样，我们也知道如何将 S_p^1 描述为一个边界，并且可以将第二个因子补全为一个圆盘，其上有若干 7 膜环绕着 W_1^7。

与自由 $\mathbb{Z}$ 子群相关的另外两个生成元，与 Spin 配边的生成元密切相关。我们发现了四元数射影空间 $\mathbb{HP}^2$ ，它也曾出现在 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 群中，参见第 6.9 节。第二个生成元 $W_{1,\,8}$ 是将 Bott 流形 B 推广到 Spin-D_{16} 流形的一种精化；由于它的庞特里亚金数是 Bott 流形的庞特里亚金数的一半，也可以称为半 Bott，这或许也能通过线性膨胀子背景实现。

7.10 余维十缺陷

最后但同样重要的是，我们还分析了与余维十相关的缺陷

$$\Omega_9^{\text{Spin-GL}^+(2,\mathbb{Z})}(\text{pt}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 8}\,. \tag{7.13}$$

同样，由于反射作用于维数为 $k=(4n+1)$ 的各种背景，许多 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 类都是平凡的。

其中四个生成元，即

$$W_1^7\times S_p^1\times S_p^1\,,\quad B\times L_4^1\,,\quad \mathbb{HP}^2\times L_4^1\,,\quad \mathbb{HP}^2\times S_R^1\,, \tag{7.14}$$

与上述类的紧化有关，因此已由高维缺陷处理。另一个生成元 L_4^9 描述了与第 6.10 节讨论的 S-瞬子相关联的、残存的 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$)构型。

这还留下三个真正新颖的背景。其中两个由九-~维版本的 Arcana X_9 和 X_9描述。这些背景具有相同的底层流形，即一个在 $\mathbb{RP}^6$上的 $\mathbb{RP}^3$-丛，并对应于图10中嵌入到 D_{16} 的两种不同方式所关联的两种 Spin-D_8 结构。由于纤维由 $k=3$中的生成元给出，我们可以通过缠绕 R7 膜来生成相应的配边类，而无需任何其他新对象。更具体地说，由于 $\mathbb{RP}^3$ 的缺陷只是 IIB弦理论中的一个 D_4 ALE 奇点，因此可以将所得世界体几何取 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 商，从而得到额外的背景。

这就留下了最后一个生成元 W_1^9，它由 L_4^5 上的一个透镜空间丛描述。由于我们知道边界为 L_4^5 的缺陷，实现这个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 因子的生成元最直接的方式，就是将相应的 S 折叠缺陷包裹在 $\mathbb{RP}^4$ 上，并引入涉及反射的扭曲。再次强调，我们尚未检验这种包裹方式是否一致；尽管反射确实是 S 折叠世界体理论在玻色层面的对称性（因为 τ 固定为 i，而反射会翻转 τ 的实部，但不会翻转虚部），这种紧化在量子层面仍可能是不一致的。若要更系统地研究这一问题，还需要对世界体理论中的反常进行详细分析。我们将此问题留待未来工作探讨。

至此，我们完成了对 Spin-GL$^+$(2，$\mathbb{Z}$) 配边群及其相关缺陷的分析。通过应用配边猜想，我们确实发现了一种此前未曾讨论过的新型弦论缺陷：R7 膜。引入这一余维为二的对象后，还可以通过将 R7 膜缠绕在体中的紧曲线上，使高维背景成为边界。虽然预计 R7 膜的存在会破坏超对称性，但有趣的是，在某些情况下，也存在能够保持超对称性的定向反演平面，它们同样会使相应的配边群平凡化。未来一个值得探索的方向，是将渐近的 Ramond-Ramond 通量纳入讨论，以区分这些背景。

8 Ω_{10} 与离散 θ角

到目前为止，我们讨论了维数为 $k \leq 9$、与缺陷相关的配边群。这些配边群

$$\Omega_{10}^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}(\text{pt}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,, \quad \Omega_{10}^{\text{Spin-GL}^+(2,\mathbb{Z})}(\text{pt}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 4}\,, \tag{8.1}$$

描述可能存在的离散 θ角，即可以加入十维作用量而不改变其低能物理的拓扑耦合。

例如，Spin-Mp$(2,\mathbb{Z})$ 配边中的生成元继承自 $\Omega_{10}^{\text{Spin}}$ (pt) 的一个生成元，并由一个具有非平凡 $w_4 w_6$ 的流形 X_{10} 来描述，其中 $w_4 w_6$ 由斯蒂费尔-惠特尼类复合而成。这带来了加入如下形式项的可能性

$$-\Delta S = i\pi \int w_4 w_6\,, \tag{8.2}$$

加入作用量中。这意味着，所有属于 X_{10} 配边类的时空在路径积分中都带有额外的负号权重，而配边中平凡的流形则带有正号权重。关于场论中离散 θ角的示例，见 [104] ；关于弦理论和 M 理论中的示例，见 [40, 46] 。

一旦能够像式 (8.2) 那样在超引力作用量中写下拓扑项，就会出现两种可能：要么 θ 角的取值被某个一致性条件固定（对于式 (8.2)，只能取 0 或 π），要么它是动力学的。后一种情况下，它会导致 IIB 型弦理论的两个物理上不同的版本，例如九维中的情况 [46], ，或 [33]中提出的另一种反常抵消机制。作为前一种情况的例子，考虑 IIA 型弦论中的方程 (8.2)。由于 IIA 实际上是 M 理论在 S^1上的小半径极限，且 $\Omega_{11}^{\text{Spin}}$ (pt) $= 0$，因此离散 θ角不存在。这个事实很可能可以用来论证，式 (8.2) 也通过 T对偶而不出现在 IIB 超引力作用量中，但这一论证必须谨慎进行。我们将此留待未来工作。

接下来讨论 Spin-GL$^+(2,\mathbb{Z})$ θ角。流形 X_{10} 也生成了十维 Spin-GL$^+(2,\mathbb{Z})$ 配边群中的一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$因子。其余生成元的形式均为 $M \times S^1$，其中 M 是上文讨论的九维配边类之一的生成元；这与 [40]中提出的 M 理论离散 θ角类似。与上文一样，这些离散 θ角由费米子的 η不变量刻画，无法用上同调类写出局部表达式。事实上，背景 $B \times S^1_R \times S^1_p$ 的 F理论描述[22] 为 $B \times KB \times T^2$，而根据 M理论/F理论对偶，它对应于 $B \times KB \times S^1$，这是带有 [40]中提出的 θ角荷的背景。因此，我们看到的是 [40], 中描述的 θ角以及额外贡献。M理论/F理论对偶映射很可能会给出额外的一致性条件，从而固定其中一些

[22]其中 KB 表示克莱因瓶， B 表示 Bott 流形。

θ角：例如，我们的另一个 θ角可以检测到 $M = \mathbb{HP}^2 \times S^1_R$。虽然这是一个非平凡的配边类，但 $\mathbb{HP}^2 \times KB \times S^1$ 在 $\mathfrak{m}^c$ 配边中是平凡的，因此不存在对应的 θ角。这或许意味着存在一种有效的 F理论配边，而我们的分析未能检测到它；这种配边会消除相应的 IIB θ角。进一步深入研究这一问题将很有意义。

9 对偶反常

我们还剩下十一维的配边群。它们刻画了对偶的潜在非微扰异常，以及十维理论中对偶与引力混合所产生的潜在非微扰异常。为了研究这些反常，必须在十一维定义一个可逆拓扑场论 $[105]$, 反常理论 $\mathcal{A}$；当该理论置于带边界流形上时，它能够再现十维理论配分函数的相位。

对于 IIB 型，反常理论 $\mathcal{A}_{\mathrm{IIB}}$ 的贡献来自膨胀子、引力子以及手征4形式（具有自对偶五形式场强），其详细推导见于 $[33]$。颇为出人意料的是，对偶反常并不消失。虽然带反射的 Spin-$\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ 流形从反常的角度来看并无问题，但某些继承自 Spin-$\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})$ 的背景却存在问题。例如，有

$$\exp\bigl(2\pi i \mathcal{A}[L_3^{11}]\bigr) = e^{2\pi i/3}\,, \tag{9.1}$$

这表明该对偶存在模3反常。因此，要恢复对偶，就必须对理论作出修改。

一种可能性是利用拓扑版本的 Green-Schwarz机制来抵消反常， $[106]$。这会引入各种形式次数的新离散场，其高阶规范变换取决于对偶背景。虽然这些场具有离散的拓扑性质，不会引入任何新的局部自由度，但完备性假说 $[107]$ 暗示存在与这些场发生电磁耦合的缺陷。这些缺陷也是离散的：当堆叠足够多个缺陷时，它们能够衰变至真空，因此不会出现在微扰描述中。该机制的实现方式并不唯一，原则上可以设想多个版本。这将导向非局域对象的谱各不相同的理论，并开启十维中存在离散景观的可能性。不过，也可能存在尚未探索的量子引力约束，影响这一反常抵消机制。

或者，还存在另一种可能性（较不激进，因此也更可信）：无需引入新的拓扑扇区，就能抵消对偶反常。要实现这一点，需以某种特定方式将手征4形式场与对偶和引力背景耦合，从而在 IIB 型作用量中产生一个新的拓扑项。再次强调，这一项只

取决于离散/挠性信息，不会影响局域低能动力学。然而，这种耦合会通过描述自对偶四形式所必需的˜二次精化 $\mathcal{Q}$ ，为反常理论带来额外贡献，从而抵消反常相位。我们发现的反常恰好属于可由这种机制抵消的类型，这一点非常引人入胜；另请参见 [108] ，其中展示了这种离散Green–Schwarz机制在六维中的实现。此外，除少数几个前因子外——我们认为，通过分析某些特殊的 IIB 型背景便可确定这些前因子——这种抵消方式是唯一的。

为了说明这种离散反常抵消的“奇迹”，让我们回到 $[L_3^{11}]$上的反常。我们需要

$$\mathcal{A}_{\mathrm{IIB}}[L_3^{11}] - \widetilde{\mathcal{Q}}[\check{c}] = 0 \bmod \mathbb{Z}\,, \tag{9.2}$$

其中 ˇc表示描述对偶背景的微分上同调元素。结果表明，在 L_3^{11}上，唯一的可能性是

$$\widetilde{\mathcal{Q}}[\check{c}] = \tfrac{1}{3}\,, \tag{9.3}$$

这表明，只有当 $\mathcal{A}_{\mathrm{IIB}}[L_3^{11}] = 1/3$ 时，反常才能以这种方式抵消，而这恰好就是我们发现的结果。由于 $[L_3^{11}]$ 描述了配边群的一个 $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ 因子，在均匀先验下，抵消反常的概率为 1/26。对其他反常生成元也有类似的讨论。

我们看到，对离散反常的研究大量依赖于配边群的确定，而抵消这些反常则要求以微妙但有趣的方式修改低能理论。

至此，关于配边猜想所预言的缺陷的物理解读告一段落。现在我们转而计算 IIB 对偶配边群。

第三部分

IIB 型的配边类

本文这一部分将计算 $\Omega_k^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})\big)$、$\Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (点) 和 $\Omega^{\text{Spin-GL}^+{}_{(2,\ \mathbb{Z})\,k}}$ (点)，其中 $k \leq 11$。对于 $k \leq 5$，$\Omega_k^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})\big)$ 和 $\Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (点) 此前已知，但其余计算均为新的。计算结果列于表 1、2 和 3。

我们进行这些计算的主要工具是 Adams 谱序列。尽管我们并非物理学文献中最早使用这一工具的人，但这种方法以难以理解而闻名。因此，我们先在第 10 节介绍一些定义和概念，以帮助读者理解接下来几节中的计算。在第 11 节，我们概述理解 Adams 谱序列论证所需的关键事实：如何计算上同调上的 $\mathcal{A}(1)$-模结构，如何根据这些数据确定 E_2-页，以及解决微分和扩张问题的一些常用技巧。随后，我们逐一进行三项主要计算。

- 在第 12 节，我们确定 $\Omega^{\mathrm{Spin}}{}_k\ \big(B\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})\big)$。我们说明如何通过 $\Omega^{\mathrm{Spin}}{}_k\,(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 和 $\Omega^{\mathrm{Spin}}{}_k\,(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 来确定它；这两者都可以很快化归为数学文献中已有的结果。

- 在第 13 节中，我们计算 $\Omega^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}{}_k$ (点)。结果相同，只是我们得到的不是 $\Omega^{\mathrm{Spin}}{}_k\,(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$，而是 $\Omega^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}_k$ (点)。Campbell [109], Hsieh [110], 和 Davighi-Lohitsiri [111]已经在 5 维及以下研究了这种配边理论；我们将他们的计算扩展到 11 维。

- 在第 14 节中，我们讨论 $\Omega^{\text{Spin-GL}^+(2,\mathbb{Z})}{}_k$ (点)。在这种情况下，$\Omega^{\mathrm{Spin}}{}_k\,(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 被 $\Omega^{\mathrm{Spin}}{}_k\,(BD_6)$ 所替代，我们使用 Atiyah-Hirzebruch 谱序列对其进行计算；而 $\Omega^{\text{Spin-}D_{16}}_k$ (点) 被一种我们称为 $\Omega^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}_k$ (点) 的配边理论所替代，我们使用 Adams 谱序列对其进行计算。

简要概述了接下来的各节之后，我们现在将深入讨论推导过程以及生成流形的构造。由于这一部分包含许多超出其在物理学中的应用范围、也颇具价值的数学结果，因此我们在此也会采用更具数学性的写法。在可能的情况下，我们会附上一段文字，为较为技术性的步骤补充一些物理直觉，并以标题**“物理直觉”**标出。[23]

[23]当然，这既不应劝阻数学家阅读这些段落，也不应阻止物理学家深入探究构造的全部细节。

10 计算预备知识

我们要进行的配边计算需要用到一些代数拓扑中的标准工具和概念，但这些内容在物理学中并不那么广为人知。在本小节中，我们将简要回顾这些思想，并为感兴趣的读者提供更全面的参考资料。

10.1 分类空间

本小节将回顾分类空间、其典范丛，以及 Lashof 关于不同类型配边的处理方法的一些基础知识。这样做既是为了向读者提供背景，也为了统一记号。

设 G 是一个拓扑群。那么存在一个空间 BG，称为G的分类空间，它具有以下性质。

- BG 是一个可缩空间 EG 在自由 G 作用下的商。换句话说，$EG \to BG$ 是一个主 G- 丛，且 EG 可缩。这个主 G- 丛称为万有或典范主 G- 丛。

- 对任意空间 X，主 G-丛 $P \to X$ 的同构类等价于映射 $f\colon X \to BG$ 的同伦类；在一个方向上，这种等价可通过令 $P \coloneqq f^*(EG)$ 来实现。

BG 的上同调类为主 G-丛定义特征类：给定 $c \in H^*(BG)$，若 f是 $P \to X$的分类映射，则设 $c(P)\colon = f^*(c)$。

BG 仅在同伦型意义下定义。一般而言，分类空间都很大：例如，同伦型 $B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 可以由无限维实射影空间实现，但不能由任何有限维CW复形实现。

当 G 是矩阵群时，它在向量空间 V上有一个典范表示，因此我们可以通过以下“混合构造”定义一个典范向量丛 $\mathcal{T}_G \to BG$：

$$\mathcal{T}_G \coloneqq EG \times_G V \coloneqq EG \times G/((x \cdot g, v) \simeq (x, g \cdot v)). \tag{10.1}$$

例如， $\mathcal{T}_{\mathrm{O}(n)} \to B\mathrm{O}(n)$是一个秩为$n$ 的实向量丛； $\mathcal{T}_{\mathrm{U}(1)} \to B\mathrm{U}(1)$是一个复直线丛；依此类推。我们使用记号 $\sigma \to \mathbb{RP}^n$ 表示 $\mathbb{RP}^n$上的典范线丛，它是通过包含映射 $\mathbb{RP}^n \hookrightarrow \mathbb{RP}^\infty = B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$对 $\mathcal{T}_{B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \to B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的拉回。

令 $\mathrm{O} \coloneqq \varinjlim_n \mathrm{O}(n)$ 。具体而言，可以将其看作所有大小的正交群的并，其中通过发送 $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，将 $\mathrm{O}(n)$ 纳入 O_{n+1} 。这是一个拓扑群，其分类空间 $B\mathrm{O}$ 对秩零虚向量丛进行分类，也就是说，对满足 $\mathrm{rank}(V) = \mathrm{rank}(W)$ 的成对向量丛 V和 W进行分类。我们将这些数据视为“$V - W$”，这与整数被定义为以下对象的等价类的方式颇为相似：

自然数对 $(p,\ q)$，并将其视为 $p-q$。也就是说，一个映射 $X \to B\mathrm{O}$ 等价于一个秩零虚向量丛 $V-W \to X$。与之前一样，这种对应关系源自典范丛 $\mathcal{T}_{B\mathrm{O}} \to B\mathrm{O}$ 的拉回。类似的论述也适用于其他李群族，从而定义空间 $B\mathrm{SO}$、$B\mathrm{Spin}$ 等。

任何秩为 n 的实际向量丛 $V \to X$ 都定义了一个秩零虚向量丛 $V-\mathbb{R}^n$，因此给出一个到 $B\mathrm{O}$ 的映射。这一构造在稳定 意义下成立，即 V 和 $V \oplus \mathbb{R}$ 定义的虚向量丛同构。 _

定义 10.2。 切结构 是一个映射 $\xi\colon B \to B\mathrm{O}$。向量丛 $V \to X$ 上的 ξ-结构 是一种数据，包含将分类映射 $f\colon X \to B\mathrm{O}$ 提升为映射 $f\colon X \to B$ 的提升，使得 $\widetilde{\ } \xi \circ f = f$：

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \overset{\tilde{f}}{\nearrow} & \big\downarrow \xi \\ X & \xrightarrow[f]{} & B\mathrm{O} \end{array} \tag{10.3}$$

若 M 是一个流形，则 M 上的 ξ-结构是指 TM 上的 ξ-结构。

例如，若 ξ 是 B 特殊正交群 $\mathrm{SO} \to B\mathrm{O}$，则 ξ-结构等价于一个定向；对于 $B\mathrm{Spin} \to B\mathrm{O}$，我们得到一个 Spin 结构；而对于 $B\mathrm{O} \times BG \to B\mathrm{O}$，我们得到一个主 G-丛。

设 M 是一个边界为 ∂M 的流形，并令 $\nu \to \partial M$ 为包含映射 $\partial M \hookrightarrow M$ 的法丛。那么 $TM|_{\partial M} \cong T(\partial M) \oplus \nu$.[24]此外，外向单位法向量场将 ν 平凡化，因此 $T(\partial M) \oplus \mathbb{R} \cong TM|_{\partial M}$。因此，由 $T(\partial M)$ 和 $TM|_{\partial M}$ 定义的虚向量丛同构，所以 M 上的 ξ-结构会在 ∂M 上诱导出一个 ξ-结构。

由于 ξ-结构会限制到边界上，我们可以定义带有 ξ-结构的流形的配边：带有 ξ-结构的闭流形 M，若其边界 M 是一个带有 ξ-结构的紧致流形 W，且可以使识别 $M \cong \partial W$ 与两侧的 ξ-结构相容，则它在 ξ-配边中是平凡的。这一一般形式体系归功于 Lashof [112]；带有 ξ-结构的 n-流形的配边群记为 Ω_n^ξ。通常，ξ 是一个映射 $BG \to B\mathrm{O}$，例如定向配边和 Spin 配边；在这种情况下，ξ-配边群通常记为 Ω_*^G。例如，Ω_*^{SO}表示定向配边群。

注记 10.4（乘法结构）。 两个定向流形的乘积具有诱导定向，且该定向与配边等价关系相容，从而使 Ω_*^{SO} 成为一个 $\mathbb{Z}$ 分次交换环。许多其他配边理论也有类似性质，包括针对 $G=\mathrm{O}$、Spin、Spin^c、String 和 U 的 G 配边，不过并非总是如此，例如 $G=\mathrm{Pin}^{\pm}$ 配边就不具有这种性质。在具有这种性质时，乘法会从配边环提升为相应 Thom 谱上的环结构；这可以看作体现了该乘法相对于空间的 ξ 配边群的自然性。经典上，确定环结构（若存在）是配边理论中的重要组成部分。

[24]要得到这样的分裂，需要在 ∂M 上选取一个黎曼度量，但这类度量构成的空间是可缩的。因此，从同伦论的角度来看（而这正是本节所需的全部内容），具体选择并不重要。

当 ξ 配边不是环时，它通常是另一种具有环结构的配边理论上的模。例如，Spin 流形与 Pin^+ 流形的乘积具有典范的 Pin^+ 结构，因此 $\Omega_*^{\mathrm{Pin}^+}$ 成为 Ω_*^{Spin}-模。

从物理学的角度来看，这些环和模结构提供了有关紧化的信息。在配边猜想的框架下，如果类 $x \in \Omega_k^\xi$ 可以表示为 ξ 维流形的乘积 $[M \times N]$，[25] 那么配边猜想对类 $[M \times N]$ 预测的缺陷，其自然候选是将对 N 预测的缺陷紧化到 M 上；不过，如第 6 节.8 和 Chronicles 中其他多处简要描述的那样，将缺陷包裹在 M 上可能会遇到障碍。

可逆场论 [114, 105] 的配边分类中，环和模结构也有类似的解释：定义在 ξ 维流形上的幺正可逆 n 维拓扑场论由其配分函数 Z 决定，而配分函数是一个配边不变量Z：$\Omega_n^\xi \to \mathbb{C}^\times$。将这一理论紧化在一个 k 维 ξ 流形 M 上，会得到另一个幺正可逆拓扑场论，它由以下配边不变量分类

$$\Omega_{n-k}^\xi \xrightarrow{-\times[M]} \Omega_n^\xi \xrightarrow{Z} \mathbb{C}^\times. \tag{10.5}$$

这里我们假设 ξ-配边构成一个环，但这一论述也可以推广到模。

▷ **物理直觉：** 分类空间 BG 在物理学中也广为人知，它们定义了各种物理上彼此不同的规范背景，即规范群为 G的规范理论的主 G-丛的同构类。一个简单的例子是规范群为 U(1) 的理论，此时分类空间为

$$B\mathrm{U}(1) = \mathbb{CP}^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)\,, \tag{10.6}$$

其中 $K(2,\ \mathbb{Z})$ 表示 Eilenberg-Mac Lane空间，其 $\pi_2\big(K(\mathbb{Z},\ 2)\big) = \mathbb{Z}$，且所有其他同伦群 π_i 都为 $i \neq 2$。U(1) 的上同调由一个 2 次的单个元素生成，它拉回到时空上即为第一陈类，也就是场强，

$$c_1 = \tfrac{1}{2\pi} F \in H^2(M; \mathbb{Z})\,, \tag{10.7}$$

由分类映射 f 将时空 M 映射到 BU(1) 所指定的规范丛。还可以通过映射到高阶分类空间来指定高形式规范场的背景。例如，具有规范群 U(1) 的 1-形式对称性规范理论（由 2-形式规范势指定）由映射到

[25] 这里我们对赋予 M、N 和 $M \times N$ 的切结构略有不严谨。本文中，M 带有 Spin 结构，而 N 以及 $M \times N$ 则带有 ξ-结构；在此设定下，ξ-配边是 Spin 配边上的模。紧化与切结构之间关系的完整细节颇为微妙；关于细致分析，参见 Schommer-Pries [113, §9]。

由 2-形式规范势描述）可表示为映射到

$$B^2\mathrm{U}(1) = BK(\mathbb{Z}, 2) = K(\mathbb{Z}, 3)\,, \tag{10.8}$$

它再次由一个 Eilenberg-Mac Lane空间描述，其中包含关于 $H^3(M;\,\mathbb{Z})$ 中通量的信息。 ◁

10.2 逐个素数处理

固定一个素数 p，令 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 表示分母不能被 p 整除的有理数所构成的环。将阿贝尔群与 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 张量化，会舍弃与 p 互素的信息。例如，若 A 是一个有限生成阿贝尔群，则存在同构

$$A \cong \mathbb{Z}^r \oplus (\mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/p_n^{e_n}\mathbb{Z}) \tag{10.9}$$

其中 p_1、……、p_n 是一些素数，而 r、e_1、……、e_n 是非负整数。于是，$A \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ 是 $\mathbb{Z}_{(p)}^r$ 与满足 $p_i = p$ 的那些 $\mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z}$ 直和项的直和。特别地，给定所有素数 p 对应的 $A \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$，就可以在同构意义下确定 A。

设 E 和 F 是广义同调理论。若映射 $E \to F$ 对所有空间 X 都使 $E_*(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \to F_*(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ 成为同构，则称其为 p-局部等价。在同伦论中，人们常通过寻找不同素数处到较简单理论的 p-局部等价来计算 E-同调，然后再将所有部分重新组合起来。我们将在第 10.5 节和第 10.6 节直接采用这种方法，也会间接用它来分析不同素数 p 对应的配边群中的 p 挠元。当我们说“p-局部地”或“p-主部分”时，意思是模去 p-局部等价来进行研究，或者等价地，舍弃与 p 互素的挠元。[26]

10.3 虚张声势地应对谱

我们的计算中有几个步骤需要提到“谱”这个词，这里指的是同伦理论中的谱。本小节的目的不是给出定义或正式的引言，而是提供足够的信息，让没有代数拓扑背景的读者也能跟上我们计算中的这些步骤。如需更深入的参考资料，请参阅 Freed-Hopkins [105,第 6 节。1]或 Beaudry-Campbell [115,第 2], 节，或 Schwede [116]，以了解更偏重同伦论且更深入的观点。

▷ **物理直觉：** 谱对于研究配边等广义（上）同调理论至关重要。X 的广义（上）同调类可通过构造映射来描述

[26]“等价地”并不完全准确，不过对于同调群是有限生成阿贝尔群的所有空间或谱，这样说确实成立。人们在这类计算中通常会遇到的情形，几乎都符合这一条件。

到相应的谱，再取其同伦类。

对于广义上同调理论，空间 X 的上同调群由从 X 到相应谱的映射的同伦类给出。这与分类空间定义各种互不等价的主 G-丛的方式非常相似，正如我们上文所讨论的那样。不过，谱所包含的信息比分类空间更多。例如，谱可以在负次数上有同伦群，这意味着它们不一定由拓扑空间给出。由于谱天然十分庞大（请记住，单是 $B\mathrm{U}(1) = \mathbb{CP}^\infty$就已经是无限维的），通常将它们拆分成若干部分会更容易。我们可以借助其他谱来实现这一点：这些谱与原谱在 p-局部意义下等价，因此包含相同的素数 p 处的信息。

一个相对简单的例子是 Eilenberg-Mac Lane 谱（例 10.12）， HA其中 A 是阿贝尔群，其满足

$$H^k(X;A) = [X, \Sigma^k HA]\,, \tag{10.10}$$

也就是说，这是系数取 A的带系数上同调。这里 Σ^k 是 k重悬挂运算。将 $H^k(X;A)$中的类解释为各种（高阶形式）规范场的场强，[27]我们看到，从某种意义上说，谱 HA 所包含的信息不仅涉及 BA（即 A的分类空间），还同时涉及所有高阶分类空间 B^nA 及其相互关系。同样，更复杂的谱包含了阿贝尔 n-群的分类空间信息；事实上，同伦群仅在次数 $0 \le k \le n-1$上非零的谱范畴，与阿贝尔 n-群 [117]的一个范畴等价。关于这一思想在数学物理文献中的一些应用，参见 [118,119] 。

如果能将 A 分解为更简单的阿贝尔群，也就能将 HA分解：例如，若 $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$， $H\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq (H\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \vee (H\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$，则会在上同调群上诱导出直和：

$$\begin{aligned} H^k(X;\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) &= [X, \Sigma^k H\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}] = [X, \Sigma^k H\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \vee \Sigma^k H\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}] \\ &= H^k(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus H^k(X;\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}). \end{aligned} \tag{10.11}$$

因此，在 $p = 2$处，我们只需考虑 $H\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$；在 $p = 3$ 处，我们只需考虑 $H\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$。这是一个相当简单的例子，但我们会利用类似的 p-局部配边谱简化，将配边群的计算归结为已知的计算或更易处理的计算，具体内容将在下文第10.5节和第10.6节讨论。不过，我们感兴趣的不只是 Spin 配边，还有更一般的切向结构，例如 Spin-Mp(2， $\mathbb{Z}$) 和 Spin-GL$^+$(2， $\mathbb{Z}$)。同样，我们可以通过一种称为“剪切”的技巧将它们与 Spin 配边联系起来，我们将在第 10.4 节讨论这一技巧。 ◁

谱中的 同伦论中的含义是由 Lima [120,121] 创造并命名的；它们

[27]请参阅分类空间部分中公式 (10.6) 附近的“物理直觉”部分。

在词源上与代数几何、泛函分析、量子力学等领域中的谱毫无关联。以下是关于谱的两个关键事实：

- 谱的行为与拓扑空间非常相似：它们有同伦群、同调群和上同调群，并且可以进行诸如谱的悬挂、空间与谱之间或两个谱之间的映射谱等运算；谱之间也有同伦等价的概念。

- 谱表示广义（上）同调理论。对于每个谱 E，都有一个广义同调理论 $h_*(X) := \pi_*(X \wedge E)$，以及一个广义上同调理论 $h^*(X) = \pi_{-*}(\mathrm{Map}(X, E))$，[28] 并且每个广义同调理论或上同调理论都以这种方式来源于某个谱。

空间与谱之间有一些重要区别：谱可以在负次数上有同伦群，而且悬挂运算在谱上是可逆的。也就是说，对谱进行 Σ^{-1} 是有意义的运算，尽管对空间进行 Σ^{-1} 没有意义。此外，谱的上同调上通常没有杯积。

广义上同调理论可以取直和等运算，这赋予谱一种代数的意味。可以将谱看作类似于阿贝尔群。

例 10.12（Eilenberg-Mac Lane 谱）。给定一个阿贝尔群 A，存在一个谱 HA，其对应的同调理论是 $H_*(-; A)$，上同调理论是 $H^*(-; A)$。HA 称为 ***Eilenberg-Mac Lane*** 谱。

例 10.13（悬挂谱）。给定一个拓扑空间 X，并在 X 中选定一个基点，则存在一个谱 $\Sigma^\infty X$，称为 X 的**悬挂谱**，其对应的同调理论是 $\lim_{k\to\infty} \pi_{*+k}(-\wedge\Sigma^k X)$。当 $X = S^0$ 时，其悬挂谱记作 $\mathbb{S}$，称为**球谱**；其同调理论在空间 X 上的取值为 X 的稳定同伦群。

球谱是稳定同伦论中的一个重要对象，其作用类似于阿贝尔群领域中的整数。给定一个阿贝尔群 A，存在一个$\tilde{}$自然同构 $\mathbb{Z}\otimes A \xrightarrow{\sim} A$，从而使阿贝尔群自然地成为 $\mathbb{Z}$-模。类似地，对于每个谱 E，存在一个自然同伦等价 $\mathbb{S} \wedge E \xrightarrow{\simeq} E$；在某种意义下，这使谱自然地成为 $\mathbb{S}$上的模。这带来的具体结果是，$\pi_*(\mathbb{S})$（称为球面的稳定同伦群）是一个分次环，并且对于每个谱 E，$\pi_*(E)$ 是一个 $\pi_*\mathbb{S}$-模。我们会多次使用这一事实，例如在引理 13.22 中。

[28] 这里的负号是同调分次与上同调分次之间差异所造成的表象：稳定同伦群的长正合列中的微分会降低次数，而在广义上同调理论中，我们希望长正合列中的微分提高次数。理解本文的数学内容并不需要关注这一细微差别。

例 10.14（Thom 谱）。设 X 是一个空间，$V \to X$ 是一个虚向量丛，并令 f_V: $X \to B\mathrm{O}$ 为 V 的分类映射。则存在一个谱 X^V，称为***Thom* 谱**，它具有两个关键性质：其上同调类似于 X 的上同调，而其同伦群是配边群。具体来说：

- ***Thom* 同构定理** 给出了一个自然同构

$$U\colon H^*(X;\mathbb{Z}_{w_1(V)}) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}^{*+\mathrm{rank}(V)}(X^V;\mathbb{Z}), \tag{10.15}$$

  其中，$\mathbb{Z}_{w_1(V)}$ 表示由 V 的定向丛给出的局部系统。通常会看到技术上有歧义的记号 $U := U(1)$；这个类称为 ***Thom* 类**。对于其他系数群，也有类似的同构；而对于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上同调，局部系数系统 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{w_1(V)}$ 是平凡的，因此 Thom 同构在两侧都使用未扭曲上同调。

- **庞特里亚金-托姆定理** [122–125] 将 $\pi_{*+\mathrm{rank}(V)}(X^V)$ 与具有 法 f_V-结构的流形的配边群相对应，也就是说，将稳定法丛的分类映射$_\sim f_\nu$：$M \to B\mathrm{O}$ 提升为映射 f_ν: $M \to X$，使得 $f_\nu =_\sim f_V \circ f_\nu$.[29]

由于有 rank(V) 的移位，通常会用秩零虚向量丛 $V - \mathbb{R}^{\oplus \mathrm{rank}(V)}$ 替换 V，常简写为 $V -$ rank(V)，这样便可以省去上述描述中的移位。本文中我们经常这样做。

当 V 是平凡且秩为 0 时，X^V 就是例 10.13 中的悬挂谱 $\Sigma^\infty X$。因此，给定一个带基点 i: pt $\hookrightarrow X$ 的空间 X 以及一个向量丛 $V \to X$，我们得到一个映射 $\mathrm{pt}^{i^*V} \to X^V$，也就是说，一个映射 $\mathbb{S} \to X^V$。我们会多次用到这一事实。

若 G 是一个拓扑群，且有一个到无限正交群 O 的映射，我们希望得到一个 Thom 谱，其同伦群是带有定义在 TM 上的 G 结构的流形的配边群，而不是带有定义在稳定法丛上的此类结构的流形的配边群。为此，在取 Thom 谱 [30] 之前，先与映射 -1: $B\mathrm{O} \to B\mathrm{O}$ 复合。所得的谱称为***Madsen-Tillman* 谱**，记作 MTG。我们最常用的是 $MTSO$，其同伦群是定向流形的配边群；$MTSpin$，其同伦群是 Spin 配边群；以及 $MTSpin$ 的变体。

10.4 剪切

有时，很难显而易见地用 Spin 结构来表述所关注的对称类型。例如，若研究一种含有费米子和 U(1) 对称性的理论，且

[29] 庞特里亚金和 Thom 专注于几种特定的法结构；将它们一般化加以考虑的想法则归功于 Lashof [112].
[30] 直观上，法丛与切丛相加构成平凡丛，因此它们的稳定等价类相加为零。

还附有一条选择规则：玻色场的荷为偶数，费米场的荷为奇数，那么其对称类型就是 Spin^c。我们的 Adams 谱序列技术可以计算 Spin 配边群，因此我们希望用 Spin 结构来表述 Spin^c 结构。“剪切”是一种通用方法，可将切结构 ξ 描述为等价于某种“扭曲的 ξ'结构”，其中 ξ' 更容易理解；对我们而言，ξ' 始终是 Spin。一旦找到这种等价关系，推论 10.19 就会将 ξ-配边群描述为某个 Thom 谱的 ξ'-配边群，从而使我们能够运用下一节将要讨论的谱序列技术。

例如，向量丛 $E \to M$ 上的 Spin^c 结构等价于复直线丛 $L \to M$ 和 $E \oplus L$上的 Spin 结构；我们将通过推论 10.19 说明如何由此推出

$$\Omega_*^{\mathrm{Spin}^c}(\mathrm{pt}) \cong \Omega_*^{\mathrm{Spin}}\big((B\mathrm{U}(1))^{\mathcal{T}_{\mathrm{U}(1)}-2}\big)\,. \tag{10.16}$$

关于剪切，有多种不同的看法，其表述的抽象程度各异。尽管证明需要用到一定程度的同伦论，我们仍尽量用群、表示和向量丛来表述定义 10.17 以及推论 10.19 和 10.23，以期让它们更易于使用。

▷ **物理直觉：** 在费米子带有内对称性荷的物理构造中，剪切也是一个熟悉的概念。未带荷的费米子可能是不允许的，而带荷的费米子则可以存在，前提是内部丛补偿缺失的 Spin 结构。最熟悉的例子之一是 Spin^c 结构：在这种结构下，只允许带有奇数荷、受内部 U(1) 对称性作用的费米子。Spin 结构的阻碍由第二 Stiefel–Whitney 类 w_2给出，而 U(1) 规范场的非平凡场强则对其进行补偿。将时空的切丛与一个关联于 U(1) 主丛的复直线丛扩张后，便可在这个扩张丛上定义 Spin 结构，即时空上的 Spin^c 结构。由此也可清楚看出，扭曲 Spin 结构会使 w_2 与描述内对称性的丛的特征类之间产生关联。

例如，$\mathbb{CP}^2$ 具有 $w_2 \neq 0$，因此没有 Spin 结构，但它具有一种 Spin^c 结构，其中 U(1)-丛是典范丛中的单位圆丛。

对于我们后续讨论 IIB 型弦理论所关注的情形，扭曲 Spin 结构可以用 F 理论/M 理论作出一种很好的诠释。一方面，流形上的 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 结构对应于该流形上的一个二维环面纤维丛上的 Spin 结构。因此，它会在 F 理论和 M 理论中诱导出全空间上的 Spin 结构。另一方面，Spin-GL$^+$(2，$\mathbb{Z}$) 结构允许定向反转，因此可以将其诠释为环面纤维丛上的 Pin$^+$ 结构，其中定向反转只发生在纤维中。根据上述论证，这还可以进一步提升为

5-环面纤维化上的 Spin 结构，[31] 其中额外的三个圆在 SL(2，$\mathbb{Z}$) 变换下保持不变，但在施加反射算子时会反转定向。 ◁

定义 10.17。 设 X 是一个空间， $V \to X$ 是一个虚向量丛。那么，向量丛 $E \to M$ 上的一个 (X, V)-扭曲 ***Spin*** 结构 是一个映射 $f\colon M \to X$，以及 $E \oplus f^*V \to M$ 上的一个 Spin 结构。

固定 X 和 V 后，(X, V)-扭曲 Spin 结构定义了一种对称类型，从而定义了一种配边概念。我们用 $\Omega^{\mathrm{Spin}}_{k+V}(X)$ 表示带有 (X, V)-扭曲 Spin 结构的 k 流形的配边类所构成的阿贝尔群。

引理 10.18 (剪切)。 令 $\mathcal{T}_{\mathrm{Spin}} \to B\mathrm{Spin}$ 表示典范稳定向量丛，定义见第 *10.1* 节。*(X,V)*-扭曲 ***Spin*** 结构的对称类型为 $\phi\colon \quad B\mathrm{Spin} \times X \to B\mathrm{O}$，其映射由向量丛 $-\mathcal{T}_{\mathrm{Spin}} \oplus V \to B\mathrm{Spin} \times X$ 给出。

证明。 给定 $E \to M$ 上的一个 (X, V)-扭曲 Spin 结构，即一个映射 $f\colon M \to X$，以及 $E \oplus f^*V$ 上的一个 Spin 结构，我们得到一个映射 $M \to B\mathrm{Spin} \times X$，并利用映射到 BSpin 的同伦类自然地对应于稳定虚 Spin 向量丛这一事实。反过来，给定一个映射 (ψ, f) : $M \to B\mathrm{Spin} \times X$，取 $\phi \circ \psi$ 得到一个 Spin 向量丛 E'，并令 $E := E' - f^*V$；于是我们在 E 上得到一个典范的 (X, V)-扭曲 Spin 结构。这两个操作互为逆，差别至多在于同构，因此任意空间上任意向量丛的每个 (X, V)-扭曲 Spin 结构，都以同伦意义下唯一的方式从 $B\mathrm{Spin} \times X$ 拉回，这正是我们要证明的结论。 □

于是，庞特里亚金-托姆定理推出

推论 10.19。 存在一个自然同构 $\Omega^{\mathrm{Spin}}_{*+V}(X) \cong \Omega^{\mathrm{Spin}}_{*}(X^{V-_{\mathrm{rank}(V)}})$，其中 $X^{V-\mathrm{rank}(V)}$ 是虚丛 $V - \mathbb{R}^{\mathrm{rank}(V)} \to X$ 的 ***Thom*** 谱。 _

也就是说，扭曲 Spin 配边就是某个对象的 Spin 配边——正如我们在例 10.14 中讨论的，这个“对象”的上同调相对容易理解。这表明，阿蒂亚-赫茨布鲁赫谱序列和 Adams 谱序列等以该上同调为输入的工具，可用于计算扭曲 Spin 配边群。

构造向量丛的一种方法是，选取一个空间，它带有一个主 G-丛 $P \to M$和一个在向量空间 V上的 G-表示 ρ。那么，关联丛

$$P_\rho := P \times V/((p \cdot g, v) \simeq (p, \rho(g) \cdot v)) \tag{10.20}$$

是一个秩等于 dim(V) 的向量丛。通常， $P \to M$ 是万有丛$EG \to BG$；在这种情况下，我们有时将 ρ 作为 $(EG)_\rho$ 的简写。

[31]注意，流形 TM 的切丛上的 Pin^+ 结构，等价于 $TM \oplus \mathrm{Det}(TM)^{\oplus 3}$ 上的 Spin 结构。

引理 10.21. 设 G 和 H 是拓扑群，且 $\rho\colon G \to \mathrm{SO}(d)$ 是一个表示。若存在一个拉回图

$$\begin{array}{ccccc} H & & \longrightarrow & & \mathrm{Spin} \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ \mathrm{SO}\times G & \xrightarrow{(\mathrm{id},\rho)} & \mathrm{SO}\times \mathrm{SO}(d) & \xrightarrow{\oplus} & \mathrm{SO}, \end{array} \tag{10.22}$$

那么 H结构自然等价于 $(BG,(EG)\rho)$-扭曲 ***Spin*** 结构 s.

证明。(10.22) 是一个拉回方块，这意味着映射 $f\colon M \to \mathrm{SO}\times G$ 经由p_1 提升，等价于将 $\oplus\circ(\mathrm{id}\ \rho)\circ f$ 经由 p_2提升。前者是关于定向向量丛 $E\to M$ 和主 G-丛 $P\to M$ 的转移函数的数据，用以定义一个 H-结构；后者则是关于转移函数的数据，用以在 $E\oplus P_\rho \to M$上定义一个 Spin 结构，其中 $P_\rho \to M$ 是与 P和 ρ相关联的向量丛。 □

推论 10.23. 设

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1 \tag{10.24}$$

是对应于上同调类 $\omega\in H^2(BG;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的中心扩张。设 $\rho\colon G\to \widetilde{\mathrm{SO}}(d)$ 是一个表示，满足 $w_2(\rho) = \omega$。那么 $\mathrm{Spin}\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} G$-结构自然等价于 $(BG,(EG)\rho)$-扭曲 ***Spin*** 结构。

证明。根据引理 10.21，我们只需构造一个图 (10.22)，其中 $H=\mathrm{Spin}\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} G$，并证明它是一个拉回图。第一步是构造一个映射 $\phi\colon \mathrm{Spin}\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\widetilde{G}\to \widetilde{\mathrm{SO}}$。令 $g\in G$ 表示由中心扩张 (10.24) 定义的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\subset G$ 中的非零元素。通过取 Spin 覆盖，该映射

$$(\mathrm{id},\rho)\circ p_1\colon \mathrm{Spin}\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\widetilde{G}\longrightarrow \mathrm{SO} \tag{10.25}$$

提升为一个映射

$$\widetilde{\phi}\colon \mathrm{Spin}\times\widetilde{G}\longrightarrow \mathrm{Spin}; \tag{10.26}$$

我们将证明它可下降为一个定义域为 $\mathrm{Spin}\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} G$ 的映射 ϕ，方法是证明 $(-1,g)\in \mathrm{Spin}\times G$ 被映射到单位元；因此 ϕ 可下降到商 $\mathrm{Spin}\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} G$。

$\widetilde{\mathrm{SO}}$ 现在证明 $\phi(-1,g)=1$。限制在 $\mathrm{Spin}\subset \mathrm{Spin}\times G$ 上时，ϕ 是单位元，[32] 所以 $\phi(-1,1)=-1$。而限制在 G 上时，此映射是 ρ 的 Spin 覆盖：$G\to \mathrm{SO}$，因此根据定义 $\widetilde{\mathrm{SO}}$ 它将 $g\mapsto -1$ 映射到。因此 $\phi(-1,g)=(-1)^2=1$，于是我们可以下降到 $\mathrm{Spin}\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} G$。

[32] 一种理解方式是，在映射 $\mathrm{SO}\to\mathrm{SO}$ 的下方，这个映射与一个单位矩阵作直和。群 SO 由任意大小的特殊正交矩阵的等价类构成，其中 A 和 $A\oplus I_n$ 被视为相同。因此，这个映射及其 Spin 覆盖都是恒等映射。

最后，我们必须检查 (10.22) 是一个拉回图，也就是说，$\widetilde{\ }$到 SO 的两个映射的拉回是 Spin$\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} G$。我们可以再次分别在两个因子上检查：只需$\widetilde{\ }$进一步拉回到 SO 和 G，并检查所得结果是 Spin $\to$ SO 和 $G \to G$。对于 Spin $\to$ SO，这显然成立：将 Spin $\to$ SO 沿恒等映射 SO $\to$ SO 拉回，便再次得到$\widetilde{\ }$Spin $\to$ SO。对于拉回到 G，并询问是否得到 $G \to G$，这恰好是在问$\widetilde{\ }$ $G \to G$ 是否是表示 ρ 下 G 的 Spin 覆盖。当且仅当 $w_2(\rho)$ 是中心扩张 (10.24) 的类时，这一条件成立。 □

备注 10.27. 证明剪切定理还有其他几种方法。Freed- Hopkins [105, Section 10] 通过证明扭曲 Spin 配边群的分类空间与BSpin $\times X$ 的分类空间都是同一个图的同伦拉回，来识别这两个空间；他们的方法也用于 [109, 126–131]。另一种方法则采用 Beardsley [132], 的一个结果，他直接研究 Thom 谱。

▷ **物理直觉：** 让我们将上文的一般讨论应用于 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 这个简单而具体的例子，它在接下来的应用中将发挥作用。首先，我们可以定义中心扩张

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow 1\,, \tag{10.28}$$

由 Ext($\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) $\simeq H^2(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$定义，其非平凡元素记作 ω。现在我们选择 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$的一个复一维表示，也就是说，一个映射 $\rho\colon \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to$ U(1)，使得它所关联的线丛在 $B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 上为 ρ，我们也用 ρ 表示该线丛；它具有

$$w_2(\rho) = \omega \in H^2(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\,. \tag{10.29}$$

这些恰好是具有奇数荷 $q \in \{1,3\}$ 的表示，其中映射ρ 定义为

$$\rho\colon a \longmapsto e^{2\pi i q a/4}\,, \quad a \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\,. \tag{10.30}$$

因此，我们发现 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 结构可以描述为扭曲的 ($B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, ρ)-Spin 结构。利用庞特里亚金-托姆定理，我们有

$$\Omega_*^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}(\text{pt}) \simeq \widetilde{\Omega}_*^{\text{Spin}}\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)\,, \tag{10.31}$$

并且我们成功地将计算归结为 Spin 配边理论，对此可以应用 Adams 谱序列。为了进一步简化计算，我们可以将配边群分解为各个素数部分，接下来会对此进行讨论。 ◁

10.5 在奇素数处分解 Spin 配边

同伦论学家一次处理一个素数的理念，为计算 Spin 配边提供了有效的方法：对于每个素数 p，Spin 配边都分解为若干更容易理解的同调理论的直和；我们可以分别计算这些信息，然后汇总得到最终答案。对于所有奇素数 p，p-局部的情况类似；2-局部的描述则更为复杂，我们将在下一小节中详细讨论。

映射 $\Omega_*^{\mathrm{Spin}} \to \Omega_*^{\mathrm{SO}}$是一个 p局部等价，归根结底是因为 $\mathrm{Spin}(n) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(n)$ 是一个二重覆盖。[33] 布朗-彼得森 [134] 证明，对于任意奇素数 p，Ω_*^{SO}在 p局部意义下分解为若干份布朗-彼得森同调之和，记作BP。[34] BP同调的一个点是多项式环

$$BP_*(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, v_3, \dots], \tag{10.32}$$

其中 v_i 的次数为 $2(p^i-1)$。Thom [122], Averbuh [135], 和 Milnor [136] 的工作表明

$$\Omega_*^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}_{(p)}[x_4, x_8, x_{12}, \dots], \tag{10.33}$$

其中 x_{4i} 位于次数 $4i$，也就是说，它是 $4i$维流形的一个配边类。因此，要确定定向配边在 p处分解为若干份BP同调的确切方式，只需比较这两个分次多项式环：从次数 0 的BP 开始，然后逐步向上，对于每个尚未计入的单项式，再添加一份BP 。

例如，如果 $p=3$, v_1 位于次数 4，那么 BP_* 和 Ω_*^{SO} 的 3-局部系数群在次数 0 和 4 上都有一个 $\mathbb{Z}_{(3)}$ ，而在次数 8 以下没有其他项。也就是说，对于 $k \le 7$，$\Omega_k^{\mathrm{SO}}(X) \otimes \mathbb{Z}_{(3)} \cong BP_k(X)$。

继续这样做，我们发现对于 $k \le 15$,

$$\Omega_k^{\mathrm{SO}}(X) \otimes \mathbb{Z}_{(3)} \cong BP_k(X) \oplus BP_{k-8}(X) \oplus BP_{k-12}(X). \tag{10.34}$$

然而，对于 $p \ge 5$, v_1 位于次数至少为 8 的地方，因此 $BP_4(\mathrm{pt}) = 0$。所以我们需要再添一个 BP_{k-4} 直和项来刻画 $\Omega_4^{\mathrm{SO}} \cong \mathbb{Z}$:

$$\Omega_k^{\mathrm{SO}}(X) \otimes \mathbb{Z}_{(5)} \cong BP_k(X) \oplus BP_{k-4}(X) \oplus BP_{k-8}(X) \oplus \cdots \tag{10.35}$$

在本文中，我们只需要 $p=3$。

[33]更具体地说：短正合列 $1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Spin} \to \mathrm{SO} \to 1$ 给出一个纤维丛π: $B\mathrm{Spin} \twoheadrightarrow B\mathrm{SO}$，其纤维为 $B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。若 p 是奇素数，则 $H^*(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z};\, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 是平凡的，也就是说，映射$H^*(B\mathrm{SO};\, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^*(B\mathrm{Spin};\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 是同构，例如可由 Serre 谱序列得到。Thom 同构表明，Thom 谱的诱导映射在 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上同调中是同构，而 p-局部稳定Whitehead定理 [133, 第三章，Th´eor`eme 3] 将此转化为所需的 p-局部等价。[34]每个素数 p 都对应一种 BP 。遗憾的是，标准记号中 p 是隐含的。

10.6 2-局部地分裂 Spin 配边

当 $p = 2$ 时，BP 不会作为直和项出现在 Spin 配边中。相反，我们得到普通的模 2 同调，以及另外两种与 K-理论相关的广义同调理论。

- 实连通 K-理论，记作 $ko_*(X)$。这是实 K-理论的一种变体，它在负次数上消失。其同伦群遵循通常的 Bott 周期性 $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 0, $\mathbb{Z}$, 0, 0, 0，并依此重复，但从次数 0 开始且只向上延伸：若 $k < 0$，则 $ko_k = 0$。

- 另一种理论记作 $ko\,\langle 2\rangle_*(X)$。它与 ko 类似，由 KO-理论构造而来，但我们不再要求次数为 $k < 0$ 的所有部分都消失，而是要求次数为 $k < 2$ 的所有部分都消失，然后向下平移 2，使最低的非零同伦群位于次数 0。因此，同伦群从次数 0 的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 开始，接着是 0, $\mathbb{Z}$, 0, 0, 0, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 0, $\mathbb{Z}$, ...

定理 10.36 (Anderson-Brown-Peterson [137])。 *存在一个从 Spin 配边到若干移位的 ko理论、ko $\langle 2\rangle$理论和模2 同调之直和的 2-主同构。对于 $k < 16$，这个同构的形式为*

$$\Omega_k^{\mathrm{Spin}}(X) \otimes \mathbb{Z}_{(2)} \cong \left(ko_k(X) \oplus ko_{k-8}(X) \oplus ko\,\langle 2\rangle_{k-10}(X)\right) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}. \tag{10.37}$$

注 10.38。 原则上，可以从 Anderson-Brown-Peterson 的论文中提取将 (10.37) 推广到 $k \geq 16$ 的显式分解，但他们没有给出闭式表达。Freed- Hopkins [105,绘制了一幅图，或许有助于看出接下来的几个直和项。

因此，我们想要计算素数 2 处的 ko-同调和 $ko\,\langle 2\rangle$-同调。对于 ko，有一种方便且广为确立的技巧：Adams 谱序列格外简单。我们将在第 11 节讨论这一点。

对于$ko\,\langle 2\rangle$-同调，我们只需了解其在 0 次和 1 次的情况，这关系到 10 维和 11 维 Spin 配边，而在这两种情况下都特别简单。

引理 10.39. *对于 $k \leq 1$，以及 X 一个空间或连通谱，ko $\langle 2\rangle_k(X) \cong H_k(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。*

证明。 根据定义，Postnikov 截断映射 $ko\,\langle 2\rangle \to \tau_{\leq 1}(ko\,\langle 2\rangle)$ 是 1-连通映射，[35]而 $\tau_{\leq 1}(ko\,\langle 2\rangle)$ 只有一个非零同伦群，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 位于 0 次，因此它等价于$H\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。所以$ko\,\langle 2\rangle$ 有一个到 $H\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的 1-连通映射，这意味着定理中的结论成立。

□

在更高次数中，可以用类似计算 $ko\,\langle 2\rangle$-同调的方法来计算 ko-同调。关于如何用 Adams 谱序列进行计算，参见 Freed- Hopkins [105, Section D.1] 。

[35]空间或谱的映射 $X \to Y$ 若在次数 n 及以下的所有同伦群上诱导同构，则称为 n-连通。这个 Postnikov 截断映射是此类 1-连通映射的普适例子。

注 10.40。 存在一种 ko 理论的复数类比，称为 ku；它可以用类似的方式由 KU 构造而成，只在非负次数上呈现 Bott 周期性：ku 的同伦群为 $\mathbb{Z}$、0、 $\mathbb{Z}$、0、 $\mathbb{Z}$，.....。
Anderson-Brown-Peterson 对 Spin 配边作出的 ko 同调分解也有相应的类比：Spin^c 配边可分解为若干移位的 ku 同调与模 2 同调 [137–139] 之和。

涉及ko 和ku的映射有几种很有用，它们之间的相互作用有时有助于解决计算ko或ku同调的谱序列中的微分或扩张问题。我们使用四个映射。

- 复化 同态 c: $ko_n(X) \to ku_n(X)$ 是映射$KO \to KU$ 的连通覆盖；该映射将实向量丛复化。
- 实化，也就是将复向量丛遗忘为实向量丛，会诱导映射R: $ku_n(X) \to ko_{n-2}(X)$。次数平移与复 Bott 周期性有关。
- 映射 η: $ko_n(X) \to ko_{n+1}(X)$，由乘以$ko_1(\text{pt}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$中的非零类给出；在 Spin 配边中，此映射提升为与 S^1_p作乘积。
- 映射 b: $ku_n(X) \to ku_{n+2}(X)$，它是 Bott 周期性同构的连通覆盖。

这些映射之间的相互作用相当良好。我们将使用以下两个事实。

- 复合映射 $R \circ b \circ c$: $ko_n(X) \to ko_n(X)$ 是乘以 2（见 [140, 定理1]）。

- 这三个映射 η、 c和 R 组成一个长正合列 [141, 第 12][36] 节

$$\cdots \xrightarrow{R} ko_n(X) \xrightarrow{\eta} ko_{n+1}(X) \xrightarrow{c} ku_{n+1}(X) \xrightarrow{R} ko_{n-1}(X) \xrightarrow{\eta} \cdots \tag{10.41}$$

11 关于 Adams 谱序列需要了解的内容

我们的一些计算使用 Adams 谱序列。这是同伦论中的标准工具，但在理论物理中还（尚）未普及，因此我们在此概述几条重要事实，帮助读者大致理解后文。若想阅读更完整的引言（包括一些我们略过的内容），请参阅 Beaudry-Campbell 的优秀论文 [115]。

[36]Bott 只考虑周期性的 K-理论情形，尽管他的结果蕴含了我们所使用的连通版本。参见 Bruner-Greenlees [142, 第 4.1.B 节]。

▷ **物理直觉：**在明确介绍 Adams 谱序列之前，我们先简要介绍谱序列本身。谱序列用于确定某些广义（上）同调群。它们通过谱序列各页所描述的、逐步精确的近似来实现这一点。起点是第二页，通常可以通过普通（上）同调或类似方法得到；这类结果往往能在文献中找到，也可以通过其他途径确定（如下文介绍 Adams 谱序列计算 ko-同调时所述）。每一页都带有双分次，以两个非负整数 s 和 t为参数。此外，每一页上都有映射，即微分 d_r，它们将 r^{th} 页上位于（s，t）处的项映射到位于（$s+r$，$t+r-1$）处的项。[37] 这些微分共同构成链复形，而谱序列的下一页，也就是更精确的下一步近似，便是这些链复形的同调。重复这一过程，就得到谱序列的 ∞ 页 $E^{s,t}_\infty$。此时，所需的（上）同调群 h_n 是由满足 $s+t=n$的各项 $E^{s,t}_\infty$扩张而成。换言之，这些项构成了相关同调群的一个滤过。因此，谱序列可以看作一种迭代过程，用来近似并最终确定广义（上）同调群。明确微分的作用以及求解扩张问题都极具挑战性，可以采用若干技巧，其中一些将在下文介绍。对于 Adams 谱序列，确定第二页更为困难，但其优势在于，许多微分和扩张问题都能以更直接的方式处理。对于 Atiyah-Hirzebruch 谱序列，第二页可化为普通（上）同调，但微分和扩张问题则较难表述。 ◁

虽然 Adams 谱序列有更一般的版本，但我们关注的是用于计算ko同调的那个版本，其形式如下

$$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}(1)}(H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \Longrightarrow ko_*(X)^\wedge_2. \tag{11.1}$$

记号 $(-)^\wedge_2$ 表示该谱序列计算的是 X 的ko同调的 2-完备化。“2-完备的”和“2-局部化的”并不完全相同，但对于有限生成阿贝尔群，2-完备化和 2-局部化可以相互确定。我们在计算中需要考虑的所有配边群都是有限生成的，因此这种区别不会造成任何问题。

E_2页稍微复杂一些：对于任意空间或谱 X，$H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是稳定上同调运算的 ***Steenrod*** 代数 $\mathcal{A}$ 上的一个模。$\mathcal{A}(1)$ 是由 Sq^1 和 Sq^2生成的子代数。Ext 是一个函子，用于对 $\mathcal{A}(1)$-模的扩张进行分类。本节旨在介绍如何定义和使用这些代数对象。在本文所讨论的情形中，$\mathcal{A}(1)$ 在 $H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上的作用以及相应的

[37]不同的谱序列有不同的分次约定；Adams 谱序列中的微分就是这样运作的。扩张问题也是如此。

Ext 群的结果基本上可以查到，但想进一步了解如何计算它们的读者应参阅 Beaudry-Campbell [115]。

▷ **物理直觉：** 如上文所述，Adams 谱序列确定了在素数 2 处完整配边群中出现的各个群。Adams 谱序列的起点，即它的第二页，依赖于所研究空间或谱的模 2 上同调的扩张。此外，它还对由斯廷罗德算子 Sq^1 和 Sq^2生成的这一扩张的代数结构敏感。与其他方法（例如 Atiyah-Hirzebruch 谱序列）相比，Adams 谱序列的一大优势在于，其中存在的额外结构可以免费确定大量微分和扩张问题。在许多替代谱序列中，类似的计算是出了名的困难。

虽然 Adams 谱序列中的一些部分以及其他谱序列中的一些部分具有物理学解释（例如参见 [56, 143, 22],），但目前我们还没有关于整体图景的良好直觉。因此，在下文中，我们主要局限于对所涉及技术及其在所考虑情形中的应用进行数学描述，并将对 Adams 谱序列的物理学分析留待未来工作。不过，关于 Adams 谱序列 E_1 页的物理学解释，请参见 [22] 。◁

11.1 Steenrod 代数

本小节旨在说明 Steenrod 代数 $\mathcal{A}$ 及其子代数$\mathcal{A}(1)$是什么，并介绍一些计算模 2 上同调上 $\mathcal{A}(1)$-模结构的技巧。更多信息请参见 [115, 第 3] 节。

一个（模 2 上同调中的）稳定上同调运算是阿贝尔群之间的自然变换 $H^*(-;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{*+k}(-;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，并且与悬挂同构相容。在复合运算下，稳定上同调运算的集合构成一个分次 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-代数，记作 $\mathcal{A}$ ，称为*Steenrod* 代数；它在上同调上的作用使任意空间或谱的模 2 上同调成为一个 $\mathcal{A}$-模。Steenrod 证明， $\mathcal{A}$ 由称为斯廷罗德平方的算子 Sq^k： $H^*(-;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{*+k}(-;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 生成，并满足若干关系。本文只需用到 $\mathcal{A}(1)$，即由 Sq^1 和 Sq^2生成的 $\mathcal{A}$ 的子代数。

▷ **物理直觉：** 我们提出对 Sq^1 和 Sq^2 的一种可能的物理解释。正如 [56], 中所讨论的，吴公式通过描述与子流形及其法丛相关的某些信息，刻画了流形上同调中的许多斯廷罗德平方，其中 Sq^i 大致由 $w_i(N) \cup -$ 给出。由于我们只关注 Spin 及相关结构，因此只需考虑 $i = 1, 2$。这表明，空间 X 的模 2 上同调上的 $\mathcal{A}(1)$-模结构，能够反映费米子在该空间及其子空间中的实现方式；或许甚至可以用可能的膜世界体来直接解释。 ◁

斯廷罗德平方的定义相当抽象，因此难以根据定义计算上同调上的$\mathcal{A}$-或 $\mathcal{A}(1)$-模结构。通常，我们可以改用若干关键性质来确定这些模结构。设 X 是一个空间。

1. 若 $x \in H^k(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，则 $\mathrm{Sq}^k(x) = x^2$。
2. 若 $x \in H^n(X;\mathbb{Z}/2)$ 且 $n < k$，则 $\mathrm{Sq}^k(x) = 0$。
3. （自然性）给定一个映射 $f\colon X \to Y$ and $x \in H^n(Y;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，$\mathrm{Sq}^k(f^*x) = f^*\mathrm{Sq}^k(x)$。
4. （嘉当公式）若 X 是一个空间，且 $x, y \in H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，则

$$\mathrm{Sq}^k(xy) = \sum_{i+j=k} \mathrm{Sq}^i(x)\mathrm{Sq}^j(y). \tag{11.2}$$

这里允许 $i, j = 0$: $\mathrm{Sq}^0 = \mathrm{id}$。

这些性质实际上唯一地刻画了斯廷罗德平方。

注记 11.3。需要注意几点：对于谱来说，这些性质大多不成立，部分原因是谱的上同调群没有杯积。不过，斯廷罗德平方在上述意义下仍然是自然的。

另一个无关的注意事项是，嘉当公式表明，空间上同调的 $\mathcal{A}$-模结构与杯积有关，但杯积并不能使上同调成为 $\mathcal{A}$-代数。

以下是关于斯廷罗德平方的其他一些有用事实。首先，给出 Thom 谱的斯廷罗德平方公式（回顾引言中对 Thom 谱和 Thom 同构的介绍U，见例 10.14）。

命题 11.4。设 $V \to X$ 为一个向量丛，且 $Ux \in H^*(X^V;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。则

$$\mathrm{Sq}^k(Ux) = \sum_{i+j=k} Uw_i(V)\mathrm{Sq}^j(x). \tag{11.5}$$

也就是说，若 U 表示 Thom 类，即 $1 \in H^0(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 在 Thom 同构下的像，则 $\mathrm{Sq}^k(U) = Uw_k(V)$，因此可以利用嘉当公式计算 Ux的斯廷罗德平方。此性质是 Thom 谱特有的。

其次，吴公式计算向量丛的斯蒂费尔–惠特尼类的斯廷罗德平方：

$$\mathrm{Sq}^k(w_j(V)) = \sum_{i=0}^{k} \binom{j-k+i-1}{i} w_{k-i}(V)w_{j+i}(V). \tag{11.6}$$

因此，计算斯廷罗德平方相对来说是常规操作：

- 命题 11.4 根据 X 的斯廷罗德平方以及 V 的斯蒂费尔–惠特尼类，计算 Thom 谱 X^V 的斯廷罗德平方。
- 嘉当公式 (11.2) 根据上同调环生成元的斯廷罗德平方，确定了所有 $H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的斯廷罗德平方。
- 对于特定生成元 x，可以根据上面的 (1) 和 (2) 自动推导出一些斯廷罗德平方。除此之外，可以尝试将某个向量丛 V 的 $x = w_n(V)$ 实现出来，并使用吴公式；也可以利用自然性：找一个更容易理解的空间 Y，以及一个映射 $f\colon X \to Y$，使得 $x = f^*(y)$，而我们知道 $\mathrm{Sq}^k(y)$。

通常，将这些技巧与文献中已有的计算结合起来，就能全面了解空间或 Thom 谱的模 2 上同调上的 $\mathcal{A}(1)$-模结构。例如，这足以完成本文所需的所有计算。

例 11.7. 令 $k > 1$；则 $H^*(B\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x,y]/(x^2)$，其中 x 和 y 的次数分别为 $|x| = 1$ 和 $|y| = 2$ [144, 命题 4.5.1]。我们将确定此上同调环上的$\mathcal{A}(1)$-模结构。由于 x 的次数为 1，(2) 表明对 $i \geq 2$，$\mathrm{Sq}^i(x) = 0$。Sq^0 是单位元，因此 $\mathrm{Sq}^0(x) = x$；又由于 $|x| = 1$，根据 (1)，$\mathrm{Sq}^1(x) = x^2 = 0$。

对于 y，由 (1) 可知 $\mathrm{Sq}^0(y) = y$、$\mathrm{Sq}^2(y) = y^2$，而由 (2) 可知，当 $i \geq 3$ 时，$\mathrm{Sq}^i(y) = 0$，因此只剩下 Sq^1。在引理 13.12 中，我们证明：若 $\rho\colon \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z} \to \mathrm{U}(1)$ 表示由 $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ 的旋转给出的标准一维复表示，且 $V_\rho := E\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z} \times_{\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}} \mathbb{C} \to B\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ 是关联复线丛，则 $y = w_2(V_\rho)$。由于 V_ρ 是复线丛，它是典范丛 $\mathcal{T}_{\mathrm{U}(1)} \to B\mathrm{U}(1)$ 在某个映射 $f\colon B\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z} \to B\mathrm{U}(1)$ 下的拉回。

由于斯廷罗德平方和斯蒂费尔–惠特尼类在拉回下都具有自然性，因此 $\mathrm{Sq}^1(y) = f^*\mathrm{Sq}^1\big(w_2(\mathcal{T}_{\mathrm{U}(1)})\big)$，且 $\mathrm{Sq}^1\big(w_2(\mathcal{T}_{\mathrm{U}(1)})\big) \in H^3(B\mathrm{U}(1);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$，所以 $\mathrm{Sq}^1(y) = f^*(0) = 0$，由此完成了对 y 的斯廷罗德平方计算。

对于 $H^*(B\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的一般元素，我们可以使用嘉当公式。例如，$\mathrm{Sq}^1(xy) = \mathrm{Sq}^1(x)y + x\mathrm{Sq}^1(y) = 0$，以及

$$\mathrm{Sq}^2(xy) = \mathrm{Sq}^2(x)y + \mathrm{Sq}^1(x)\mathrm{Sq}^1(y) + x\mathrm{Sq}^2(y) = 0 + 0 + xy^2. \tag{11.8}$$

我们将在定理 13.15 的证明中使用这个例子。

参见 Beaudry-Campbell [115, 第 3 节，4]其中还有一些演算示例 .

传统上，人们会用图示而不只是代数方式来描述 $\mathcal{A}(1)$-模：用一条从 x 到 y 的竖直直线表示 $\mathrm{Sq}^1(x) = y$，用一条从 z 到 w 的曲线表示 $\mathrm{Sq}^2(z) = w$。这种约定至少可以追溯到 Mahowald-Milgram [145, Section4]，并且已成为该领域的标准做法。我们在图 11 中给出一些例子。

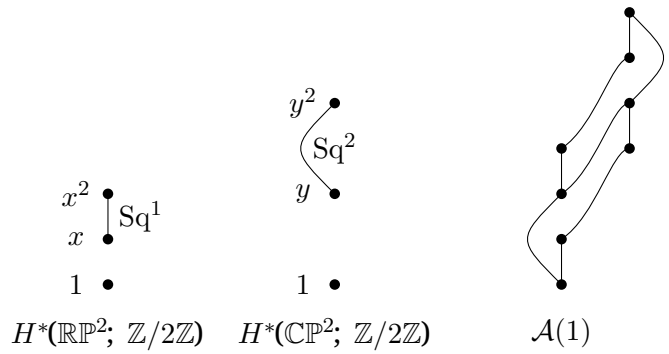


图 11：绘制模 2 上同调上的 $\mathcal{A}(1)$-模结构。左：$H^*(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^3)$，其中有 $|x| = 1$；竖线表示 $\mathrm{Sq}^1(x) = x^2$。中：$H^*(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[y]/(y^3)$，其中有 $|y| = 2$；曲线表示 $\mathrm{Sq}^2(y) = y^2$。右：$\mathcal{A}(1)$ 作为自身上的模。所有直线均表示 Sq^1 作用，所有曲线均表示 Sq^2 作用。

11.2 确定 Ext 群

Adams 谱序列的输入是上同调上 $\mathcal{A}(1)$-模结构的 Ext 群。如果 M 是一个 $\mathcal{A}(1)$-模，那么 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t,(1)}(M,\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 具有许多额外结构。本节最重要的内容就是阐明这些结构是什么，以及如何在 Ext 图表中展示它们；这些结构对于确定 Adams 谱序列中的微分和扩张至关重要。

这些 Ext 群是某些 $\mathcal{A}(1)$-模扩张的等价类所构成的阿贝尔群，但人们很少（如果有的话）需要直接使用其定义。在实例中，计算扭曲 Spin 配边的 Adams 谱序列所需的 Ext 群通常可以查阅资料或使用计算机程序计算；如果需要手工计算，则可以利用长正合列，迅速将问题化简为文献中的计算。一如既往，Beaudry-Campbell [115, Section 4] 是很好的参考资料，可供查阅我们此处未提供的补充信息。

由于 $\mathcal{A}(1)$ 是分次代数，我们将研究分次 $\mathcal{A}(1)$-模。若 M 是一个$\mathcal{A}(1)$-模，且 $k \in \mathbb{Z}$，我们用 $\Sigma^k M$ 表示这样一个 $\mathcal{A}(1)$-模：其底层未分次模与原模相同，但所有元素的分次都增加了 k。通常可以将 Σ^k 视为对“移位算子” Σ应用 k 次，因此记作 $\Sigma M := \Sigma^1 M$。

若 M和 N是 $\mathcal{A}(1)$-模，则 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t,(1)}(M,\ N)$ 是由如下形式的扩张的等价类构成的阿贝尔群

$$0 \longrightarrow \Sigma^t N \longrightarrow P_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_s \longrightarrow M \longrightarrow 0, \tag{11.9}$$

其中 $P_1, \ldots, P_s$ 是 $\mathcal{A}(1)$-模，且所有映射都是 $\mathcal{A}(1)$-模映射。若存在第三个序列 (Q_i)，以及 $\mathcal{A}(1)$-模映射 $(P_i) \leftarrow (Q_i) \rightarrow (P_i')$，使其与 (P_i)、(P_i') 和 (Q_i) 中的映射相交换，并且在 P_1 和上的映射是单位映射（参见 Tag 06XP, Definition 06XT P_s），则这两个序列 (P_i)、(P_i') 等价。

M 和 $\Sigma^t N$ 上的映射是单位映射（参见 [146, Tag 06XP, Definition 06XT]）。$\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A},(1)}(M,N)$ 上的阿贝尔群结构称为巴尔和，其定义稍显复杂，本文中我们无须了解；有兴趣的读者可参阅 Mac Lane [147,§III.5]。这种关于 Ext 的观点源于米田 [148, Section 3.4]。对于 $s=0$，Ext 有一个更简单的描述：$\mathrm{Ext}^{0,t}_{\mathcal{A},(1)}(M,N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}(1)}(M,\Sigma^t N)$。

注 11.10。给定一个形如 (11.9) 的扩张，它表示 $\mathrm{Ext}^{s,t}(M,N)$ 中的一个类，并给定一个映射 $L\to M$，我们可以通过取映射$P_i\to M$与 $L\to M$的纤维积来拉回 (11.9)，从而得到一个表示 $\mathrm{Ext}^{s,t}(L,N)$ 中类的扩张。也就是说，当第二个自变量保持不变时，Ext 是一个反变函子。

Ext 群上有一个乘法，称为米田积 [148, 第 4] 节，其特征为

$$\mathrm{Ext}^{s_1,t_1}_{\mathcal{A}(1)}(L,N)\times\mathrm{Ext}^{s_2,t_2}_{\mathcal{A}(1)}(N,M)\longrightarrow\mathrm{Ext}^{s_1+s_2,t_1+t_2}_{\mathcal{A}(1)}(L,M). \tag{11.11}$$

这个乘法的思想是：给定两个首尾匹配的形如 (11.9) 的扩张，可以将它们粘合起来。完整内容请参见 [148, 第 4.2]节或 [115, 第 4.2]节。令 $L=N=M=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，米田积使 $\mathrm{Ext}^{*,*}_{\mathcal{A}(1),()}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 成为一个 $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$-分次交换 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-代数；令 $L=N=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，米田积使 $\mathrm{Ext}^{*,*}_{\mathcal{A},(1)}(M,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 成为一个 $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$-分次 $\mathrm{Ext}^{*,*}_{\mathcal{A},(1)}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-模。我们分别将其称为 $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 和 $\mathrm{Ext}(M)$。$\mathrm{Ext}(M)$ 上的 $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-模结构为 Adams 谱序列提供了相当多的信息；在 Adams 谱序列比 Atiyah-Hirzebruch 谱序列更强大的情况下，这种模结构通常正是原因所在。

$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的样子如下。

定理 11.12 (Liulevicius [149,定理 3])。

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[h_0,h_1,v,w]/(h_0h_1,h_1^3,vh_1,h_0^2w-v^2),$$

其中 $\deg(h_0)=(1,1)$，$\deg(h_1)=(1,2)$，$\deg(v)=(3,7)$，以及 $\deg(w)=(4,12)$。

Ext 群通常用图来表示，这样在图 12 中绘制时，便于直观呈现定理 11.12 中的代数结构。绘制 $\mathcal{A}(1)$-模的 Ext 时，通常采用以下约定。$\mathrm{Ext}^{s,\,t}$中的每个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项都表示为坐标 $(t-s,\ s)$ 处的一个点；$t-s$ 称为拓扑次数，而 s 称为滤过。按照这一约定，h_0 的作用不会改变拓扑次数，而会使滤过增加 1，因此我们用一条连接两个点的竖线表示：h_0 将较低滤过的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 同构地映射到较高滤过的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。同样，h_1 的作用会使拓扑次数和滤过都增加 1，因此用一条斜线表示。Ext图表中较少绘制 v 和 w 的作用。按照这些约定，我们可以在图 12 中绘出 $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。

注11.13（利用已有的 Ext 群计算）。文献中有许多关于 $\mathcal{A}(1)$-模的 Ext 群计算，通常足以满足所需的各种计算；本文即是如此。

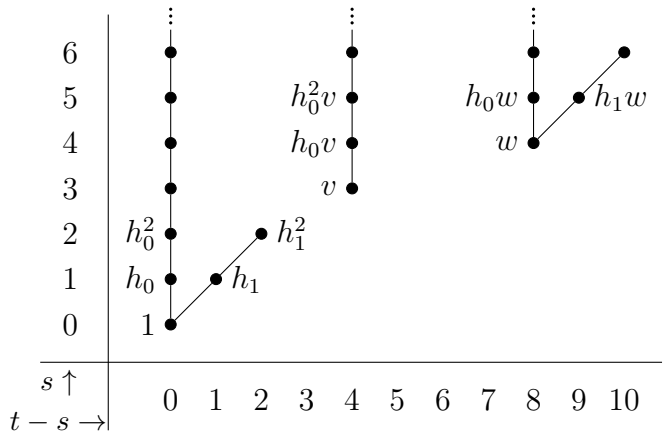


图 12：$\mathrm{Ext}^{*,*}_{\mathcal{A}(1)}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，其中一些元素已标出。乘以 w 是单射，并且图向右以类似方式延伸。利用该图可以看出定理 11.12 中的一些关系：例如，$h_1^2 \neq 0$ 和 $h_1^3 = 0$，因为沿对角线从 1 走两步会得到一个非零元素，但再走一步就会到达一个空方格，这对应于零群。关系 $h_0h_1 = 0$和 $vh_1 = 0$ 源于从 h_0 和 v出发没有对角线（h_1-作用）。关系 $h_0^2w = v^2$ 未在此图中表示。

人们可能需要；Beaudry-Campbell [115]给出了许多最常见的 $\mathcal{A}(1)$-模的 Ext 计算；在 [150–155, 109, 156, 157, 127, 130] 中还可以找到更多计算。此外，Bruner [158] 和 Chatham-Chua [159]还编写了用于计算 Ext 的计算机程序。

这里最后还应提到，当有必要了解某个模的 Ext 群，而你又无法在文献中找到它们时，一个很好的技巧是利用这一点：$\mathcal{A}(1)$-模的一个短正合列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ 会在 Ext 中诱导出如下形式的长正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^{s,t}(N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{s,t}(M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{s,t}(L) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^{s+1,t}(N) \longrightarrow \cdots \tag{11.14}$$

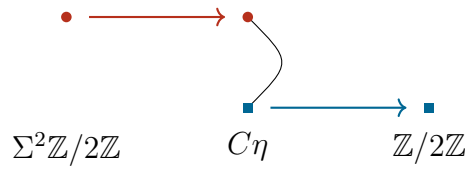
证明完全是形式上的，它依据的是将 Ext 刻画为 Hom 的导出函子的另一种等价方式。常见的做法是在同一张图表上同时画出 $\mathrm{Ext}(L)$ 和 $\mathrm{Ext}(N)$，并利用这个长正合列进行计算；边界映射使滤过增加 1，并使拓扑次数降低 1。(11.14) 中的所有映射都与 $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-作用相交换，这通常会将边界映射的计算简化为少数几项计算。下面我们会给出一个例子；[115], 中还有许多其他例子，[156, 130]中也有一些。

例 11.15. 令 $C\eta := \Sigma^{-2}\widetilde{H}^*(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$：它由两个分别位于次数 0 和 2 的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项组成，并由一个非零的 Sq^2作用连接。也可以等价地定义 $C\eta =$

$\mathcal{A}(1)/(\mathrm{Sq}^1,\mathrm{Sq}^3)$。存在一个 $\mathcal{A}(1)$-模的短正合列

$$0 \longrightarrow \Sigma^2\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow C\eta \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0, \tag{11.16a}$$

其形式如下：



(11.16b)

我们将使用由此导出的 Ext 长正合列来计算 Ext($C\eta$)。这可以查阅相关资料（例如 [115, 图 13 22]），但在命题 D.13 的证明中，我们需要知道 $v \in$Ext($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 的作用，而所引用的参考文献并未讨论这一点。

要运行长正合列，我们需要知道 Ext($\Sigma^2\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 和 Ext($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)。后者是定理 11.12；对于前者，将一个 $\mathcal{A}(1)$-模平移，只会使其 Ext 上的 t-分次平移相同的量。因此，我们可以在图 13 顶部绘出与 (11.16) 相关的 Ext 长正合列。

对于大多数边界映射，其源或靶至少有一个为零；在图 13 顶部所示的范围内，只有图中描绘的四个边界映射（实线箭头和虚线箭头）可能非零。此外，由于长正合列与 Ext($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 的作用相容，三个虚线边界映射可通过 h_1、w 和 h_1w 的作用由实线边界映射确定。我们将证明实线边界映射是同构，因此虚线边界映射也都是同构。

要证明实线边界映射是同构，根据正合性，只需证明 $\mathrm{Ext}^{0,2}(C\eta) = 0$，因为我们已经知道 $\mathrm{Ext}^{1,2}(\Sigma^2\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$。要证明 $\mathrm{Ext}^{0,2}(C\eta)$ 消失，注意它与 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{A}(1)}(C\eta, \Sigma^2\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 同一，而后者为零：由于 $C\eta$ 是一个循环$\mathcal{A}(1)$-模，从 $C\eta$ 出发的映射由其在生成元上的取值决定，而该生成元的次数为 0；由于 $\Sigma^2\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在次数 0 上没有非零元素，映射 $C\eta \to \Sigma^2\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 必为零。计算至此完成；最终答案绘于图 13 的底部。关于计算结果，我们有两点想要说明。

- 对于所有 n，v 对 Ext($C\eta$) 的作用，将拓扑次数 $4n$上的蓝色塔单射地映入拓扑次数 $4n+4$上的蓝色塔；同样，也将拓扑次数 $4n+2$ 上的红色塔单射地映入拓扑次数 $4n+6$。这是因为长正合列中的映射与 Ext($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 作用相容，因此只需知道 Ext($\Sigma^2\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 和 Ext($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 的这一性质；这里，Ext($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 作用就是乘法。

在 $\mathcal{A}(1)$-模的短正合列中，中间项的 Ext 上的 Ext($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)-作用并不总能从长正合列中确定：可能存在“缺失的作用”。例如，作用 by h_0 is an isomorphism $\mathrm{Ext}^{2,6}(C\eta) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ext}^{3,7}(C\eta)$（拓扑次数 12 时也类似），但查看图 13，我们的方法无法看出

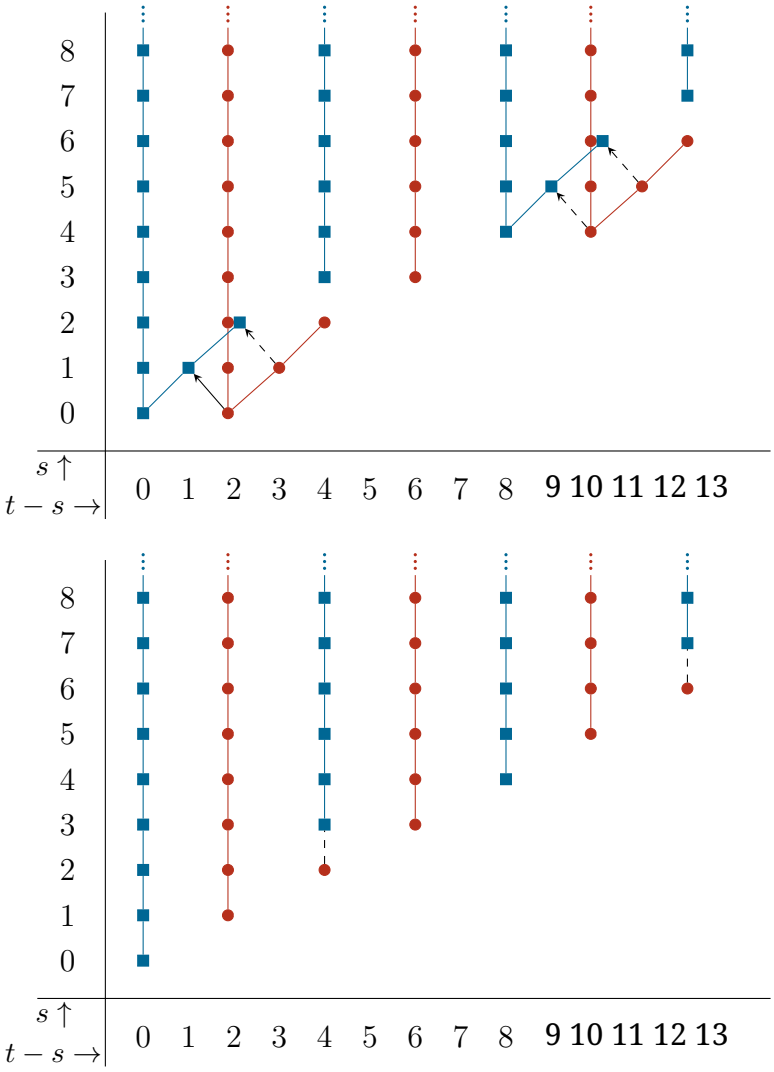


图 13：上：与$\mathcal{A}(1)$-模的短正合列（11.16）相关联的 Ext 中的长正合列。实线箭头和虚线箭头是边界映射。下：通过该长正合列计算得到的 Ext($C\eta$)。虚线表示长正合列无法显示的 h_0-作用，必须通过其他方式计算；更多详情请参见例 11.15。

这一点。要检查是否存在缺失的作用，必须另行计算，例如将该模放入另一个长正合列中。Beaudry-Campbell [115,例 4.5.6]用另一种方式计算 Ext($C\eta$)，从而可以看出这些隐藏的作用。

11.3 微分

Adams 谱序列的 E_r 页微分具有特征 d_r：$E^{s,t}_r \to E^{s+r,t+r-1}_r$。因此，按照惯例用 $(t-s,s)$ 坐标显示 Adams E_r 页时，这个微分向左移动一个刻度，向上移动 r 个刻度。

一般来说，Adams 谱序列的微分非常难以计算：例如，在计算球面的稳定同伦群的 Adams 谱序列中，常常需要专门撰写整篇论文来计算单个微分！参见 [160–162] 了解一些例子。“Mahowald不确定性原理”认为，任何用于计算 Adams 微分的单次计算，都会留下无穷多个尚未解决的问题。

不过，Adams 微分也受到极强的约束：Adams 谱序列的 E_r-页具有丰富的结构，而微分在多种意义下都与这种结构相容。因此，要确定 Adams 谱序列中的一个微分，往往不是轻而易举，就是极其困难。

在我们的情形中，情况不错：在次数 12 及以下，没有足够的空间让微分变得过于复杂；而 ko 理论的 Adams 谱序列更简单，其微分通常也更容易处理。我们将介绍几种计算微分的标准工具；这些工具足以确定本文中的所有 Adams 微分。

11.3.1 微分在 $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 作用下是等变的

首先，也是最有用的一条事实是，在 E_r-页上，微分在 $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 作用下是等变的。也就是说，如果 $a \in \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 且 $x \in E^{s,t}_r$，$d_r(a\cdot x) = a\cdot d_r(x)$。例如，这可以用来证明 $ko_*(\mathrm{pt})$ 的 Adams 谱序列中所有微分都为零：E_2-页是 $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。观察图 12，似乎可能存在一个从 h_1 到 h_0^{r+1} 的 d_r 微分，但 $h_0h_1 = 0$ 且 $h_0(h_0^{r+1}) \neq 0$。如果 $d_r(h_1) \neq 0$，那么 $d_r(h_0h_1) = h_0(h_0^{r+1})$，因此 d_r 会将 0 映到一个非零元素，这就矛盾了。

总之，微分要消去一个 h_0 塔中的元素，唯一的方式是借助另一个h_0塔。类似地，如果 $h_1x = 0$ 和 $h_1y \neq 0$，那么 $d_r(x)$ 不可能等于 y。我们会经常用到这一事实。

11.3.2 Margolis 定理

Margolis 定理是另一个非常有用的工具。

定理 11.17 (Margolis [163])**.** 一个分裂 $H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \Sigma^k\mathcal{A}(1)\oplus M$ 作为 $\mathcal{A}(1)$-模可提升为谱的 $ko \wedge X \simeq \Sigma^k H\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \vee X'$ 分裂。

这有些抽象，因此我们来看看一些更具体的推论。$\mathrm{Ext}\big(\Sigma^k\mathcal{A}(1)\big)$由双次数为 $s = 0$，$t = k$ 的一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项组成。这是计算 $ko_*(X)$ 的 Adams 谱序列 E_2 页上的一个直和项；Margolis 定理指出，这种分裂源于谱的分裂，因此整个 Adams 谱序列，包括所有微分和扩张问题，都分裂为来自 $\Sigma^k\mathcal{A}(1)$ 的单个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，以及其余部分。也就是说：

推论 11.18. 设 $S \subset \mathrm{Ext}\big(H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\big)$ 是一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项，它来自 $H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中的一个 $\Sigma^k\mathcal{A}(1)$ 直和项。那么，所有指向 S 或从 S 出发的微分都为零，并且 S 中没有任何元素会在 E_∞ 页上参与非分裂扩张。

这将为我们把 Spin-GL$^+$(2，$\mathbb{Z}$) 配边的 Adams 谱序列中的许多微分归零。

11.3.3 其他技巧

Adams 谱序列具有自然性，这属于抽象废话，但有助于我们推导微分。更具体地说，给定一个谱映射 $f\colon X \to Y$，就有一个从 X 的 Adams 谱序列的第 E_r 页到 Y 的 Adams E_r 页的映射，并且该映射与微分交换。当 $r = 2$ 时，这个映射还有另一种描述：上同调具有反变函子性，从而给出一个映射 $f^*\colon H^*(Y;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^*(X;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$；而 Ext(– $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 具有反变函子性（正如我们在注 11.10 中所讨论的），从而给出一个映射 $f_\sharp\colon \mathrm{Ext}\big(H^*(X;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\big) \to \mathrm{Ext}\big(H^*(Y;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\big)$，并且 $f_\sharp$ 是 Adams E_2 页上的映射。

要应用这一方法，可以令 X 为 Adams 谱序列已得到充分理解的一个谱，而令 Y 为 Adams 谱序列尚未得到充分理解的一个谱——有时也反过来。在这两种情况下，已知的微分都可能映射到我们想要理解的微分。对于我们而言，这一点在从 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 配边到 Spin-GL$^+$(2，$\mathbb{Z}$) 配边的映射中特别有用：我们利用 May-Milgram 定理确定 $\Omega_*^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$(pt) 的 Adams 谱序列中的所有微分（见下文），然后利用映射 $\Omega_*^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}(\text{pt}) \to \Omega^{\text{Spin-GL}^+(2,\,\mathbb{Z})}{}_*(\text{pt})$，推导出 Spin-GL$^+$(2，$\mathbb{Z}$) 配边的 Adams 谱序列中的许多微分。见图 23 和图 24。这是计算谱序列时常用的一种技巧：其他 Adams 谱序列的例子可参见 [130, 164–169, 162,170–173, 40]。

May-Milgram 定理 [174]是计算微分的另一种有用工具：它将由 h_0作用联系起来的元素塔之间的微分表示为上同调上的 Bockstein 同态，而后者通常容易计算得多。这是我们在第 13.2 节计算 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边时不可或缺的一部分；我们还会在那里进一步介绍 May-Milgram 定理。

还有其他各种方法，可以较为系统地计算 Adams 微分。通过称为 Massey 积和 Toda 括号 [175, 176]的二级运算，可以获得大量信息。最近，Gheorghe、Isaksen、Wang 和 Xu 运用源自动机稳定同伦论的方法，在研究球谱的 Adams 谱序列方面取得了重大进展 [170, 177, 178]。

当然，配边群具有几何意义；有时，通过找到该配边群的一个生成元，就能推导出计算配边群 Adams 谱序列时的微分。这种方法见于例如 [179, 附录 F]。

▷ **物理学直觉** tion: Adams 谱序列的某些方面可以作物理学上的解释。 -

Adams 谱序列第 E_2 页中涉及的核心对象包含如下形式的对象： $E^{s,t}_2 = \mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}(1)}(M,N)$，其中 M 和 N 是 $\mathcal{A}(1)$ 模。为展开这些定义，我们关注的扩张问题涉及以下长正合列：

$$0 \longrightarrow \Sigma^t N \longrightarrow P_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_s \longrightarrow M \longrightarrow 0, \tag{11.19}$$

其中， P_1、.....、 P_s 是 $\mathcal{A}(1)$-模，所有映射都是 $\mathcal{A}(1)$-模映射；也就是说，我们要寻找包含 s 项的 M 分解中的序列，而 $\Sigma^t N$ 是 N 的（约化）悬挂。将 N 视为 CW 复形，回想一下，约化悬挂 ΣN 涉及将 N 从“起点”扫掠至“终点”。换句话说，可以引入一个辅助的类时方向，并追踪 N 沿着这一辅助时间的演化。这在拓扑量子场论的路径积分背景下是一种相当自然的操作：在该背景中，需要指定初始和最终的时间演化步骤；这也为理解 E_2 页的 $t = 0$ 和 $t = 1$ 项提供了一个物理出发点。将 $\Sigma N = \Sigma^1 N$ 本身视为另一个 CW 复形，可以看到我们能够重复整个过程，从而得到 $\Sigma^2 N$。接下来考虑按整数 s 进行的分次。在卡拉比-丘三维复流形上研究 B-膜时，这类分解占有重要地位（参见例如 [180–182] 以及综述 [183] ）。在这一背景下，B-膜是相干层有界导出范畴中的对象，而长正合列可以解释为描述经历快子凝聚的膜束缚态（通过相干层之间的态射）。这意味着，在含有 P_1，.....，P_s 的项中，这些对象中的每一个都应被视为一个中间对象，它出现在将 $\Sigma^t N$ 与 M 融合的束缚态中。最后，我们来看看谱序列的微分。从物理角度而言，较“容易”理解的情形只涉及微分 d_1，它们对双分次的作用为（s，t）$\to$（$s+1$，t）；也就是说，我们只需在长正合列中再添加一项。在相干层导出范畴等相关背景下，这样的微分可以解释为超荷作用，而取其上同调便得到超对称束缚态（稳定性除外）。原则上， d_2 及更高微分的解释可以从这个更基本的 d_1 对象推导出来；不过，关于其具体运作方式，以及如何在 Adams 谱序列背景下解读上述物理系统，我们将留待未来详细探讨。 ◁

11.4 扩张与 E_∞-页

一旦我们计算出 Adams 谱序列中的所有微分，是否就能直接读出 ko-同调群？差不多，但还不完全；本节的目的就是完成这项工作。

许多谱序列都源于我们想要计算的代数对象 A 上的一种滤过。这意味着类似于这样一组子对象 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A$ 的数据：

$\bigcup_i A_i = A$.[38] 谱序列计算的是滤过的关联分次，即各个商 A_{i+1}/A_i。这是对 A的一种很好的近似，但并不总是足够：例如， $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 和 $A = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 都允许具有 $A_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 和 $A_2 = A$的二项滤过，而且在这两种情况下，关联分次都是两个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的副本。因此，如果谱序列的输出为 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，就必须确定 A实际上是否为 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，还是 $A \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$。这称为扩张问题。

Adams 谱序列中的扩张与微分非常相似：大多数扩张都能通过丰富的结构加以处理，但当这些结构无能为力时，扩张可能会相当棘手，因此我们有各种临时技巧来应对。

11.4.1 一般 Adams 谱序列中扩张问题的一般结构

Adams 谱序列的 $(t-s, s)$ 分次约定有一个优点：扩张问题是竖直的。具体而言，假设对于固定的拓扑次数 k，计算 E_∞的 Adams 谱序列第 $ko_*(Y$页仅在 $s = 0$、1、3 和 4 处非零；这些对应的群是 $E^0_{\infty}{}^{,k}$、 $E^1_{\infty}{}^{,k+1}$、 $E^3_{\infty}{}^{,k+3}$ 和 $E^4_{\infty}{}^{,k+4}$。我们在图 14 中画出了这一情况。

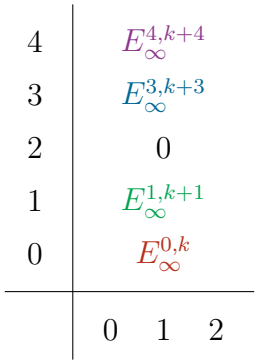


图 14：固定拓扑次数下一个 E_∞ 页的局部。这种情形会引出（11.20）中的三个扩张问题。

根据这些数据，有阿贝尔群 A_1 和 A_2 以及扩张

$$0 \longrightarrow E_\infty^{1,k+1} \longrightarrow A_1 \longrightarrow E_\infty^{0,k} \longrightarrow 0 \tag{11.20a}$$

$$0 \longrightarrow E_\infty^{3,k+3} \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_1 \longrightarrow 0 \tag{11.20b}$$

$$0 \longrightarrow E_\infty^{4,k+4} \longrightarrow ko_k(Y) \longrightarrow A_2 \longrightarrow 0. \tag{11.20c}$$

也就是说，我们向上推进，用 E_∞-页中的下一个群扩展已经计算出的结果。

[38] 一般来说，人们使用余极限而非并集，但其思路相同。此外，有时还会遇到这种滤过概念的变体，例如我们可能会遇到 $A_i \supset A_{i+1}$ 等。

如果在固定拓扑次数下，E_∞-页上只有有限多个非零群，那么纳入最后一个群后，这个过程就会结束；但也可能存在无限多个非零群，因此计算的这一部分需要无限步。这种情况相当常见：Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 配边和 Spin-GL$^+$(2，$\mathbb{Z}$) 配边的计算中都出现了这种情况，而且在 $[105,109,115,130]$ 中见到的大多数例子也如此。

幸运的是，这个看似无穷的问题有一个有限的答案——我们可以利用 Atiyah-Hirzebruch 谱序列证明，除非 X 大得惊人，[39] 否则（X，V）-扭曲 Spin 配边群是有限生成阿贝尔群。因此，在一个有无穷多个步骤的扩张问题中，除有限多个群外，其余群都必须合并成一个自由阿贝尔群。[40]

注11.21。其他谱序列中也会出现类似的扩张问题；尤其是在证明定理 14.3 时，我们必须处理 Atiyah-Hirzebruch 谱序列中的扩张问题。这个问题的大体形式相同：我们要计算的最终答案，是给定总次数中 E_∞-页上所有元素的迭代扩张。不过，这一次分级方式有所不同：所有总次数为 k 的元素并非沿垂直方向排列，而是位于 E^∞-页上的对角线 $p+q=k$。证明定理 14.3 时，我们无需深入讨论这类扩张问题的细节；有关更多信息，以及 Atiyah-Hirzebruch 谱序列中扩张问题的更多示例，请参见 [37, 第 2.2.2 节、第 3] 节。

11.4.2 我们可以从$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$作用中推断出什么

由于我们在第 11.2 节引入的 Adams 谱序列的 E_2 页上的 Ext($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 作用与微分相容，因此它会诱导出谱序列每一页上的 Ext($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 作用，包括 E_∞ 页。这些额外信息可以自动解决大量扩张问题，尤其是在计算物理相关次数下的 ko 同调时；这或许是 Adams 谱序列相较于 Atiyah-Hirzebruch 谱序列最大的竞争优势。[41]

关键事实是：

[39]具体来说，我们要求 X 与一个 CW复形同伦等价，并且该复形在每个维数上都只有有限个胞腔。这不仅适用于本文中的每一次谱序列计算，也适用于我们引用的数学物理领域中的所有谱序列计算。[40]从本质上说，这里发生的是：在一个无限步扩张问题中，最终答案是每个有限步骤的扩张的极限。这正是 2-完备化发挥作用的地方：$ko_k(Y)$ 中的一个 $\mathbb{Z}$ 直和项，在 $ko_k(Y))^\wedge_2$ 中会变成一个 $\mathbb{Z}_2$ 直和项，其中 $\mathbb{Z}_2$ 表示 2 进整数，而 $ko_k(Y)^\wedge_2$ 是 Adams 谱序列实际计算的对象。由于 $\mathbb{Z}_2 = \lim_{\longleftarrow n} \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$，无限步扩张问题可以产生 $\mathbb{Z}_2$ 的副本；由于我们知道 $ko_k(Y)$ 是有限生成的，任何无限步扩张问题都必须将除有限多个部分以外的所有部分合并为 $\mathbb{Z}_2^{\oplus r}$，而 $\mathbb{Z}_2^{\oplus r}$ 是由 $\mathbb{Z}^r$ 经过 2-完备化得到的。[41]举例来说，Pin$^-$ 结构等价于 $(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\sigma)$-扭曲 Spin 结构，其中 $\sigma \to B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 是典范线丛。因此，可以通过计算 $\Omega_*^{\mathrm{Spin}}\big((B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\sigma-1}\big)$ 来计算 Pin$^-$ 配边；对此既可以使用 Adams 谱序列，也可以使用 Atiyah-Hirzebruch 谱序列进行研究。在 Adams 谱序列中，Ext($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 作用解决了所有扩张问题 [109, 例 6.3]，；但在 Atiyah-Hirzebruch 谱序列中，若不做额外工作，我们几乎无法获知扩张情况。

引理 11.22. 在计算 $ko_*(Y)$ 的 *Adams* 谱序列中，[42] 假设存在类 $x \in E_\infty^{s,t}$ 和 $y \in E_\infty^{s+1,t+1}$，使得 $h_0\overline{x} = y$。那么存在元素 $x, y \in \overline{ko}_{t-s}(Y)$，它们在 E_∞ 页上的像分别为 x 和 y，且满足 $2x = y$。

也就是说，h_0-作用迫使扩张 $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to A \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ 具有$A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，而不是 $A = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$！同样，在 E_∞页上由 h_0-作用连接起来的更长元素序列，对应于 ko-同调中的 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$、$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 等副本。相关图示见图 15。反之则不成立：并非每个非平凡扩张都能被 h_0 检测到，正如我们将在第 11.4.3 节中讨论的那样。

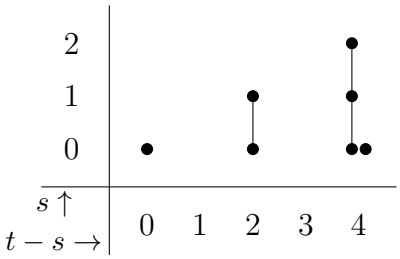


图 15：计算 Pin^c 配边的 Adams 谱序列的 E_∞页。在 2 次和 4 次处存在扩张问题；h_0 在 2 次处的作用迫使 $\Omega_2^{\mathrm{Pin}^c} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，而不是 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$；4 次处的 h_0- 作用意味着两个扩张都是非分裂的，从而迫使 $\Omega_4^{\mathrm{Pin}^c} \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。图改编自 Beaudry-Campbell [115, 图 42]；更多信息请参见该处。

$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的其他生成元对应于由ko_*的其他元素所产生的作用。

- 对于 h_1，引理 11.22 的类似结论是：若 $x \in E_\infty^{s,t}$, $y \in E_\infty^{s+1,t+2}$，且 $h_1 x = y$，则存在类 $x \in ko_{t-s}(X)$ 和 $y \in ko_{t-s+1}(X)$，分别对应于 x和 y，使得 $\eta \cdot x = \overline{y}$，其中 $\overline{\eta}$ 是ko_1的非零元素。转到 Spin 配边时，η是 S_p^1的类，因此，若 x由流形 M表示，则 $y = [S_p^1 \times M]$。在寻找第14.3节中的生成元时，我们相当频繁地利用这一事实。

- 作用 $v \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_1}^{3,7}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 在 Spin 配边中提升为与 K3 曲面作积。

- 由 $w \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_1}^{4,12}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 给出的作用，在 Spin 配边中提升为与 Bott 流形取乘积。

11.4.3 隐藏扩张与一些技巧

尽管 E_∞ 页上的 h_0 作用表明 ko-同调中存在乘以 2，但反过来并不成立：某些ko-同调群中存在乘以 2,

[42]这一事实以及本小节中的大多数事实，都可以推广到基于 Steenrod 代数任意子代数的 Adams 谱序列，用来计算其他广义同调群。

但它们并不对应于 E_∞ 页上的 h_0 作用。其他 ko_* 元素及其在 Adams E_∞ 页上的像也可能出现同样的情况，特别是 h_1 和 η。未被 Ext($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 作用检测到的扩张称为隐藏扩张。

隐藏扩张相对少见，尤其是在物理相关维数中：例如，Freed-Hopkins [105] 和 Beaudry-Campbell [115]所做的 Adams 谱序列计算中都没有隐藏扩张。不过，隐藏扩张并没有少见到可以忽略的程度；事实上，我们将在 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 和 Spin-D_{16} 配边中发现非平凡的隐藏扩张。

处理扩张问题的一个好方法是映射到某个我们已经了解的其他群，或从该群映射出去。根据 Adams 谱序列的 E_∞ 页上的诱导映射，我们通常可以推断原映射是单射还是满射，而这可能就足够了：例如，如果我们要区分 ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) $\oplus$($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 和 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，只需构造一个来自 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 的单射即可。我们用这种方法在引理 13.22 中解决了一个 Adams 隐藏扩张问题，并在定理 14.3 中解决了一些 Atiyah-Hirzebruch扩张问题。

将 Adams 谱序列应用于配边问题时，另一种有用的技巧是用不同方法计算配边群的子群。例如，在第 13.2 节中，我们看到 Adams 谱序列表明 $\Omega_5^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}$ (点)是一个阶为 64 的阿贝尔群，但无法完全确定所得的群是哪一个。在附录 C.3 中，我们证明，η-不变量的一个组合是配边不变量 $\Omega_5^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}$ (点) $\to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，并且在透镜空间上取值为 $-5/32$，因此 $\Omega_5^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}$ (点)必定同构于 ($\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$) $\oplus$($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 或 $\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$；另一项 η-不变量计算表明，我们得到的是前者。

在 Spin-D_{16} 配边的 Adams 谱序列中，我们将频繁用到以下结果。回想一下，η 是 ko_1(点)的非零元素，而在扭曲 Spin 配边中，η 表示带有非定向边界条件的圆，费米子 S^1_p。

引理 11.23。 设 $x \in ko_n(X)$ 满足 $\eta x \neq 0$。那么不存在满足 $2y = x$ 的 $y \in ko_n(X)$。

证明。 假设存在这样的 y。那么 $\eta(2y) \neq 0$，但它也等于 $(2\eta)y$，并且在 ko_*(pt) 中 $2\eta = 0$。 □

通常在使用这一点时，例如引理14.29和14.31，我们会根据 E_∞ 页上的 h_1-作用推得 $\eta x \neq 0$。

本文大量依赖的最后一个工具是 Margolis 定理（推论 11.18）：我们此前曾用它消去 E_r 页上由上同调中自由 $\mathcal{A}(1)$-模直和项产生的元素上的微分，但该定理也阻止这些元素参与隐藏扩张。

注记 11.24. 人们还会使用许多其他技巧来确定 Adams 谱序列中的扩张。在相关问题中可能有用的一种技巧是，乘法——

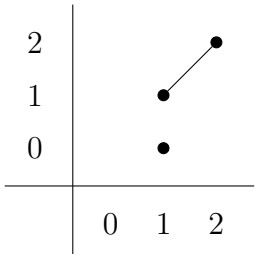


图 16：引理 11.23 中情形下的 E_∞-页示意图。该图中的 h_1作用表明，$ko_1(X) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，而不是 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$。

ko 理论上的乘以 2 的映射分解为

$$ko \xrightarrow{c} ku \xrightarrow{b} \Sigma^2 ku \xrightarrow{R} ko, \tag{11.25}$$

其中 c 是复化映射，b 是 Bott 映射，而 R 是通过遗忘向量丛的复结构得到的“实化”映射（见第 10.6 节）。有时这有助于分裂扩张，例如，如果 b 在 $ku_n(X)$ 上的作用为 0，就可以得出结论：乘以 2 是 $ko_n(X)$ 上的零映射。我们在命题 E.16 中使用了这一点。

与微分类似，近期发展出的合成谱相关技术已被用于处理 [177, 184–186] 中的扩张问题。

12 $\Omega_*^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 的计算

本节将着手进行本文三项配边计算中的第一项：计算 11 维及以下的 $\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$。这是三项中最简单的一项：我们可以从已有文献中的结果汇集所需的一切。所用技术是对一种更为人熟知的群上同调计算技术的推广：如果群 G分解为 amalgamated 积 $G \cong H_1 *_K H_2$，那么就存在一个 Mayer-Vietoris 序列，可根据 H_1、H_2 和 K 的上同调来计算 G 的上同调：

$$\longrightarrow H^k(BK) \longrightarrow H^k(BH_1) \oplus H^k(BH_2) \longrightarrow H^k(BG) \longrightarrow H^{k+1}(BK) \longrightarrow \tag{12.1}$$

存在一个同构 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$，正如我们在附录 B 中回顾的那样，而 (12.1) 允许对 $H^*\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 进行完整计算。另请注意，amalgamated 积中的两个因子对应于两个有限子群，它们由 S和 U生成，并将轴子-膨胀子 τ 固定在表 6 所示的特殊值上。

任何广义同调或上同调理论都有类似的 Mayer-Vietoris 序列。这将 $\Omega_*^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 的计算归结为计算 $\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$（$\ell = 2$，4，6）。按照第 10.2 节所述，通过在 $p = 2$ 和 $p = 3$处局部化，我们可以进一步简化问题，从而只需知道 $\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$（$\ell = 3$ 以及

$\ell = 4$。接着，我们利用文献中已有的密切相关的计算来计算这些群。特别是，本节不需要用到任何谱序列。

在第 12.1 节中，我们计算 $B\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$ 在 11 维及以下的 2-局部自旋配 bordism 群；在第 12.2 节中，我们研究奇素数处的情形。随后，在第 12.3 节中，我们找出 $\Omega_k^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})\big)$ for $k \leq 11$ 的一组生成元。

12.1 在 $p = 2$ 处工作

首先，我们简化 $B\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$。

引理 12.2。 包含映射 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ 诱导出一个映射

$$\Omega_k^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \longrightarrow \Omega_k^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)\,, \tag{12.3}$$

将两边张量化 $\mathbb{Z}_{(2)}$ 后，该映射是一个同构。

我们用来证明这一点的技巧之后还会用到几次，因此我们将它单独提炼为一个引理。首先，回顾一下，对于 amalgamated 积 $G = H_1 *_K H_2$，任意广义同调理论 E 都有一个 Mayer- Vietoris 序列：

$$\cdots \longrightarrow E_n(BK) \longrightarrow E_n(BH_1) \oplus E_n(BH_2) \longrightarrow E_n(BG) \longrightarrow E_{n-1}(BK) \longrightarrow \cdots \tag{12.4}$$

引理 12.5。 *Mayer-Vietoris* 序列 (12.4)对于群的融合积是自然的。也就是说，如果 f: $H_1 *_K H_2 \to H_1' *_{K'} H_2'$满足 $f(H_i) \subset H_i'$且 $f(K) \subset K'$，那么它在 E-同调上诱导的映射与 (12.4)可交换。

证明。 我们使用以下模型来表示离散群 G的分类空间 BG ： 令C_G 表示一个只有一个对象点 pt 的范畴，并且其 End$_{C_G}$(pt) 为 $= G$。然后令 BG 为 C_G的神经的几何实现。这是一个单纯复形，其 n-单纯形由 G中元素的 n-元组标记。

该模型的优点在于，如果 $G_0 \subset G$, $BG_0 \subset BG$ 则作为由 G_0中元素的 n-元组所对应的单纯形的并集。在 BG内，特别地，对于融合积 $G : = H_1 *_K H_2$,$BH_1 \cap BH_2 = BK$ ，从而得到 (12.4)。在此模型下，诱导映射f: $B(H_1 *_K H_2) \to B(H_1' *_{K'} H_2')$ 满足 $f(BH_i) \subset BH_i'$且 $f(BK) \subset BK'$，这正是使其与 Mayer-Vietoris 序列可交换所需的条件。

□

引理 *12.2* 的证明。 我们可以将 SL(2, $\mathbb{Z}$) $= (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ 和 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 写成上述形式；按照这些描述，包含映射 f: $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \hookrightarrow$ SL(2, $\mathbb{Z}$) 与这些 amalgamated 积的描述相容：它在第一个因子上是单位映射，在第二个因子上是包含映射$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ，在公共的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 子群上是单位映射。

根据引理 12.5，我们得到一个关于 Spin 配边的 Mayer-Vietoris 序列交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow \Omega_n^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega_n^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus \Omega_n^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega_n^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle (b,c)} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \\
\cdots \longrightarrow \Omega_n^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega_n^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus \Omega_n^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega_n^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big) & \longrightarrow & \cdots
\end{array} \tag{12.6}$$

由于 f 在 amalgamating $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上是单位元，因此竖直箭头 a 是恒等映射；第一个因子 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 及映射 b也同理。对于 c，我们利用映射$H_*(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_*(B\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ 在素数 2 处是同构这一事实，这意味着（例如，利用 Atiyah-Hirzebruch 谱序列的自然性） c: $\Omega_n^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \Omega_n^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ 也是 2-局部同构。由五引理，剩下的箭头 d: $\Omega_n^{\mathrm{Spin}}($ $B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \to \Omega_n^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$也为 2-局部同构。[43]

□

因此，我们需要确定 $k \le 11$ 对应的 $\Omega_k^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$；根据定理 10.36，我们需要求出 $k \le 11$ 对应的 $ko_k(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$，以及 $k \le 1$ 对应的 $ko\langle 2\rangle_k(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$。群 $ko_*(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 由 Bruner-Greenlees [142, Example 7.3.3],[44] 计算；对于 $ko\langle 2\rangle_*(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$，使用引理 10.39。

我们在表 7 中总结了结果，该表给出了素数 2 处的$ko_k\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$，其中

k	$ko_k(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$	$ko\langle 2\rangle_k(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$
0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
1	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
2	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	
3	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$	
4	$\mathbb{Z}$	
5	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	
6	0	
7	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/32\mathbb{Z})$	
8	$\mathbb{Z}$	
9	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2} \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$	
10	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	
11	$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/128\mathbb{Z})$	

表 7：当 $k \le 11$ 时的群 $ko_k(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$，以及当 $k \le 1$ 时的群 $ko\langle 2\rangle_k(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$。

可以与 $ko_{k-8}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 和 $ko\langle 2\rangle_{k-10}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 一起组装成 $\Omega_k\mathrm{Spin}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$，如定理 10.36 所示。

[43]更具体地说，我们想证明，将 (12.6) 中的所有内容与 $\mathbb{Z}_{(2)}$ 张量化后，最右侧的垂直箭头是一个同构。要使用五引理，各行必须是正合的；这是因为对于任意素数 p，$\mathbb{Z}_{(p)}$ 都是一个平坦的 $\mathbb{Z}$-模。[44]请注意，Bruner-Greenlees 在第 135 页表格中的计算有一个笔误，在 $n = 10$ 这一行：$ko_{10}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$，而不是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

12.2 在奇素数处工作

引理 12.7。 包含映射 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 诱导出一个映射

$$\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \longrightarrow \Omega_*^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)\,, \tag{12.8}$$

对于任意奇素数 p，与 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 张量化后是一个同构。

证明。 证明与引理 12.2 的证明基本相同。包含映射 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 可改写为 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \hookrightarrow (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$，由此诱导出的映射与 Mayer-Vietoris 序列相容。映射 $H_*(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_*(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 在任意奇素数 p 处都是 p-局部等价，因此 Spin 配边上的映射也都是 p-局部等价，从而可得 $\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \to \Omega_*^{\mathrm{Spin}}(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ 是一个 p-局部等价。最后，由于 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，映射 $B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to B\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 在同调上诱导一个 p-局部同构，因此在 Spin 配边上也如此；于是我们可以用 $B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 替换 $B\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$，得到定理所述结论。 □

对于 $p > 3$，$H^\ell(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z};\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 根据推论 10.2]，对 $\ell > 0$ [187，消失，因此映射 $B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to$pt 在模 p 上同调中诱导同构，故由 Whitehead 定理的一个版本 [133, 第三章，定理´eor`eme 3], 是稳定的 p-局部等价。因此，只需理解 3-局部情形。回顾 (10.34) 中 $\Omega_*^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Z}_{(3)}$ 分解为若干份 BP-同调的结果：当 $k \le 15$ 时，该分解具有如下形式

$$\Omega_k^{\mathrm{SO}}(X) \otimes \mathbb{Z}_{(3)} \cong BP_k(X) \oplus BP_{k-8}(X) \oplus BP_{k-12}(X)\,. \tag{12.9}$$

Bahri-Bendersky-Davis-Gilkey [188, 定理 1.2(a)] 用 $B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 的ℓ-同调计算 $BP_*(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$，其中 ℓ 是一种称为 ***ku*** 的 3-局部 ***Adams* 直和项** 的广义同调理论（因此，$\ell_*(X)$ 指的是 X 的 ℓ-同调群）。

定理 12.10 (Bahri-Bendersky-Davis-Gilkey [188, 定理 1.2(a)])。

$$BP_*(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \ell_*(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}_{(3)}} \mathbb{Z}_{(3)}[v_2, v_3, \dots]\,. \tag{12.11}$$

因此我们必须确定 $\ell_*(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$，这可以通过 ku-同调来完成。存在一个同构[45]

$$ku_k(X) \otimes \mathbb{Z}_{(3)} \cong \ell_k(X) \oplus \ell_{k-2}(X)\,. \tag{12.12}$$

这里 ***ku*** 是 **连通复** K**-理论** (见注 10.40)。

T定理 12.13 (Hashimoto [191, 定理 3.1])**.** 存在一个同构

$$\widetilde{ku}_n(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/3^{j+1}\mathbb{Z})^{\oplus s} \oplus (\mathbb{Z}/3^j\mathbb{Z})^{\oplus 2-s}\,, \tag{12.14}$$

[45] p-局部分解：将 ku 分解为 ℓ 的移位之和，这曾是一个民间定理。Adams [189, 讲座 4，推论 8] 证明了 KU的类似分解；对于 ku，我们能找到的最早表述是 [190, 命题 2.7]。

if $n = 4j + 2s - 1$ *for* $0 < s \leq 2$. *Otherwise,* $\widetilde{ku}_n(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = 0$.

具体而言，在低次情形下，

$$\begin{aligned}
\widetilde{ku}_1(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\,,\\
\widetilde{ku}_3(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) &\cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\,,\\
\widetilde{ku}_5(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) &\cong (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\,,\\
\widetilde{ku}_7(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) &\cong (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})\,,\\
\widetilde{ku}_9(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) &\cong (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})\,,\\
\widetilde{ku}_{11}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) &\cong (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})\,,
\end{aligned} \tag{12.15}$$

这个模式还会继续。将此代入 (12.12),

$$\begin{aligned}
\widetilde{\ell}_1(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\,,\\
\widetilde{\ell}_3(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\,,\\
\widetilde{\ell}_5(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}\,,\\
\widetilde{\ell}_7(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}\,,\\
\widetilde{\ell}_9(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}\,,\\
\widetilde{\ell}_{11}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}\,,
\end{aligned} \tag{12.16}$$

依此类推。 $B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 的偶数次约化 ℓ-同调消失。

现在将此代入定理 12.10。由于在 15 次及以下的次数中， $|v_2| = 2(3^2 - 1) = 16$，定理 12.10 告诉我们， $B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 的 BP-同调与 ℓ-同调没有区别。

最后，(10.34) 让我们回到（约化）定向配边。

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Omega}^{\mathrm{SO}}_1(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(3)} &\cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\,,\\
\widetilde{\Omega}^{\mathrm{SO}}_3(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(3)} &\cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\,,\\
\widetilde{\Omega}^{\mathrm{SO}}_5(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(3)} &\cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}\,,\\
\widetilde{\Omega}^{\mathrm{SO}}_7(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(3)} &\cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}\,,\\
\widetilde{\Omega}^{\mathrm{SO}}_9(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(3)} &\cong (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\,,\\
\widetilde{\Omega}^{\mathrm{SO}}_{11}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(3)} &\cong (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\,.
\end{aligned} \tag{12.17}$$

至此，我们已具备确定 $\Omega^{\mathrm{Spin}}_*\big(B\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})\big)$ 所需的全部要素，现将结果总结于表8。

k	$\Omega_k^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$	生成元
0	$\mathbb{Z}$	pt
1	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	(S_p^1, L_4^1, L_3^1)
2	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	$(S_p^1 \times S_p^1, S_p^1 \times L_4^1)$
3	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	$(S_p^1 \times S_p^1 \times L_4^1, L_4^3, L_3^3)$
4	$\mathbb{Z}$	K3
5	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$	$(Q_4^5,\ L_3^5)$
6	0	
7	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$	$(\widetilde{L_4^7},\ L_4^7,\ L_3^7)$
8	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$(B,\ \mathbb{HP}^2)$
9	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3} \oplus(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ $\oplus(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$	$(B \times L_4^1, B \times S_p^1, \mathbb{HP}^2 \times S_p^1, \mathbb{HP}^2 \times L_4^1,$ $Q_4^9, \mathbb{HP}^2 \times L_3^1, L_3^9)$
10	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 5}$	$(B \times S_p^1 \times S_p^1, \mathbb{HP}^2 \times S_p^1 \times S_p^1, B \times S_p^1 \times L_4^1,$ $\mathbb{HP}^2 \times S_p^1 \times L_4^1, X_{10})$
11	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ $\oplus(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{\oplus 2} \oplus(\mathbb{Z}/128\mathbb{Z})$ $\oplus\ (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\ \oplus\ (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$	$(X_{10} \times L_4^1, \mathbb{HP}^2 \times L_4^1 \times S_p^1 \times S_p^1,$ $\mathbb{HP}^2 \times\ L_4^3,\ \widetilde{L_4^{11}},\ L_4^{11},$ $\mathbb{HP}^2 \times L_3^3,\ L_3^{11})$

表8：配边群 $\Omega_k^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})\big)$ 及其生成元（按群直和项的相同顺序排列，或用它们的线性组合表示），对于 $k \leq 11$。

12.3 寻找生成元

我们重点讨论 $\widetilde{\Omega}_*^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})\big)$，也就是主 $\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$-丛非平凡时的配边群子群——当丛平凡时，这就是 Spin 配边，其低次数生成元是标准结果。我们将在附录 A 中讨论这些生成元。

现在进入更有趣的部分。作为引理 12.2 和 12.7 的推论，包含映射$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$ 和 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$ 诱导出一个同构

$$\widetilde{\Omega}_k^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus \widetilde{\Omega}_k^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \widetilde{\Omega}_k^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)\,. \tag{12.18}$$

因此，我们将用带有主 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-丛和 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-丛的 Spin 流形来描述 $\widetilde{\Omega}_k^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})\big)$ 的生成元。我们并非首批研究 $\widetilde{\Omega}_*^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ 生成元的人，先前的工作表明，我们应尝试用透镜空间和透镜空间丛作为生成元，

并使用 η-不变量来检测它们。

我们先讨论 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 情形：这比较简单，因为所有透镜空间 L_3^{2k-1} 都有唯一的 Spin 结构。Rosenberg 的一个定理 [192,定理 2 的证明12]表明，群 $\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 由透镜空间以及透镜空间与 Spin 流形的乘积生成。我们利用 η-不变量来寻找特定群的特定生成元，因为透镜空间上扭曲 Dirac 算子的 η-不变量公式很容易获得。我们将在附录 C.1 中回顾这些公式，并在表 16 中计算一些 η-不变量；这些不变量是 L_3^{2k-1}上的配边不变量，适用于 $2 \le k \le 6$。由此得到以下生成元；在所有情况下，对偶丛均由主 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-丛 $S^{2k-1} \to L_3^{2k-1}$经包含映射 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 诱导得到。

- $L_3^1 \cong S^1$ 生成 $\Omega_{\mathrm{Spin}\ 1}\ \big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 中的 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 直和项。
- L_3^3 生成 $\Omega_{\mathrm{Spin}\ 3}\ \big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 中的 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 直和项。
- L_3^5 生成 $\Omega_{\mathrm{Spin}\ 5}\ \big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 中的 $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ 直和项。
- L_3^7 生成 $\Omega_{\mathrm{Spin}\ 7}\ \big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 中的 $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ 直和项。
- L_3^9 生成 $\Omega_{\mathrm{Spin}\ 9}\ \big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 中的 $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ 直和项。
- L_3^{11}生成 $\Omega_{\mathrm{Spin}\ 11}\ \big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 中的 $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ 直和项。

如果 M 是维数为 $4m$ 的 Spin 流形，那么 $\eta^D(M \times N) = $ 指标$^D(M)\eta^D(N)$，其中 D 指 Dirac 算子；扭曲 Dirac 算子也有类似结果。这为我们提供了所需的最后两个 3-挠生成元。

- $\mathbb{HP}^2 \times L_3^1 \cong \mathbb{HP}^2 \times S^1$ 生成 $\Omega_{\mathrm{Spin}\ 9}\ \big(B\mathrm{SL}(2\mathbb{Z})\big)$ 中的 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 直和项。
- $\mathbb{HP}^2 \times L_3^3$ 生成 $\Omega_{\mathrm{Spin}\ 11}\ \big(B\mathrm{SL}(2\mathbb{Z})\big)$ 中的 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 直和项。

在这两种情况下，对偶丛在 $\mathbb{HP}^2$ 上是平凡的，并且与上文一样，是从乘积的透镜空间分量上的 $S^{2k-1} \to L_3^{2k-1}$ 诱导而来。

现在来看 2-挠。上文 Rosenberg 结果的类似结论仍然成立，但生成元现在稍微复杂一些：透镜空间以及 S^2 上的透镜空间丛。具体而言，将 S^2 和 $\mathbb{CP}^1$ 视为.....，并考虑一个由复直线丛 $\mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{m-1} \to \mathbb{CP}^1$ 直和而成的向量丛。让 $\mathbb{Z}/2^\ell\mathbb{Z}$ 在该向量丛的单位球面丛上作用为乘以 2^ℓ 次单位根；这是一个自由作用，其商是 S^2 上的一个 $L_{2^\ell}^{2m-3}$ 丛。具体来说，我们把 $Q_{2^\ell}^{2m-1}$ 定为满足 $\mathcal{L}_1 = \mathcal{O}$(2) 且其余线丛均为平凡丛的情形。更多信息请参见附录 C.2。

定理 12.19 (Botvinnik-Gilkey-Stolz [193, 节 5])。对于值为 $\ell \ge 2$ 时，$ko_{2m-1}(B\mathbb{Z}/2^\ell\mathbb{Z})$ 在 $\Omega_{2m-1}^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 中的子群由透镜空间以及其上的透镜空间丛生成，这些透镜空间丛的形式为上文所述的 Q_4^{2m-1}，并且可由 η-不变量检测。

这已经足够了——在表 7 中，我们看到，如果 k 为偶数且小于 11，则 $\widetilde{\ }ko_k(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 除了次数 2 和 10 外均为零，在这两个次数上，它同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。这两个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项是透镜空间与 Spin 流形的乘积，具体而言是 $L_1^4\times S_p^1$ 和$L_1^4\times S_p^1\times \mathbb{HP}^2$。因此，我们知道如何求出 $\widetilde{\ }\Omega_k^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 的整个 ko_k 直和项。[46] ko_{k-8} 直和项的生成元是ko_k 直和项的生成元与 $\mathbb{HP}^2$ 的直积。对于 $ko\ \langle 2\rangle_{k-10}$，引理 10.39（将$ko\ \langle 2\rangle_k(X)\ \cong H_k(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 识别为 $k\le 1$ 和 X 连通）意味着，我们可以使用模 2 上同调特征类检测生成元，从而得到生成 $ko\ \langle 2\rangle_1(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\ \hookrightarrow \Omega_{11}^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 的 $X_{10}\times L_1^4$。

关于透镜空间及透镜空间丛的 η-不变量的公式和计算，我们再次参见附录 C。从表 19 中可以得到以下生成元；在所有情形下，对偶丛都由 $S^{2k-1}\to L_4^{2k-1}$ 和包含映射 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\hookrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 诱导而来，与 3-挠情形相同。这次有一点微妙之处：L_4^{2k-1} 在 k 为偶数时有两个 Spin 结构，而在 $k>1$ 为奇数时没有 Spin 结构。

- $L_4^1\cong S^1$ 取其任一 Spin 结构，都生成 $\Omega_{\mathrm{Spin}\ 1}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 中剩余的 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 直和项。
- L_4^3 取其任一 Spin 结构，都生成 $\Omega_{\mathrm{Spin}\ 3}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 中的 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 直和项。
- 透镜空间丛 Q_4^5 取其任一 Spin 结构，都生成 $\Omega_{\mathrm{Spin}\ 5}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 中的 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 直和项。
- L_4^7及其两个 Spin 结构生成 $\Omega_{\mathrm{Spin}\ 7}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 的其余（$\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$）$\oplus$（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）直和项。
- 透镜空间丛 Q_4^9 取其任一 Spin 结构时，生成 $\Omega_{\mathrm{Spin}\,9}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 的 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 直和项。与 3-挠情形类似，$\mathbb{HP}^2\times L_4^1$生成 $\Omega_{\mathrm{Spin}\,9}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 中的$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$直和项。
- L_4^{11}及其两个 Spin 结构生成 $\Omega_{\mathrm{Spin}\ 11}(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ 的两个直和项（$\mathbb{Z}/128\mathbb{Z}$）$\oplus$（$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$）。与 3-挠情形类似，$\mathbb{HP}^2\times L_4^3$ 生成 $\Omega_{\mathrm{Spin}\ 11}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 中的其余$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 直和项。

13 $\Omega_*^{\mathrm{Spin\text{-}Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (点)的计算

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 的定义表示不是 Spin；其 Spin 覆盖称为元辛群 $\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})$。对 Spin 群的中心 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 子群取商，定义了一个短正合列

$$1\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\longrightarrow \mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})\longrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\longrightarrow 1\ . \tag{13.1}$$

[46]或者，Botvinnik-Gilkey [155,定理 4.5] 告诉我们如何检测所有的 $ko_k(B\mathbb{Z}/2^\ell\mathbb{Z})$。

IIB 型弦理论的 S-对偶对称性，先验上是一个 SL(2, ℤ) 对称性，它与费米子宇称混合，形成扩张 (13.1)。因此，要研究 IIB 型弦理论中的对偶缺陷（正如我们在第 6 节所做的那样），我们应计算结构群为

$$\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z}) \coloneqq \text{Spin} \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \text{Mp}(2,\mathbb{Z})\,. \tag{13.2}$$

本节中，我们计算 11 维及以下的 Spin-Mp(2, ℤ) 配边群。我们采用的方法与确定第 12 节中 $\Omega_*^{\text{Spin}}\big(B\text{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 的方法类似：利用融合积分解 (B.6)

$$\text{Mp}(2,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) *_{(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})} (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \tag{13.3}$$

在 $p=2$ 处以及奇素数处，将 Spin-Mp(2, ℤ) 表示为更简单的形式。我们在第 13.1 节研究奇素数，并发现对于任意奇素数 p，Spin-Mp(2, ℤ) 配边在 p-局部同构于 $\Omega_*^{\text{Spin}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$（引理 13.4），因此可以沿用第 12.2 节中的计算。在第 13.2 节中，我们在 2 处局部化，并得知 Spin-Mp(2, ℤ) 配边在 2-局部同构于群 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ≔ Spin$\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 的配边。对于 $k>5$，$\Omega_k^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}$(点) 尚未见于文献中。我们使用 Adams 谱序列将其计算至 11 维，并采用 Campbell [109, 第 7 节.9] 和 Davighi-Lohitsiri [111, 附录 A.4] 的策略。

在第 13.3 节中，我们沿用第 12.3 节计算 $\Omega_*^{\text{Spin}}\big(B\text{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 时采用的相同策略，为计算出的 Spin-Mp(2, ℤ) 配边群构造生成元。接着在第 13.4 节中，我们讨论 $\Omega_*^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}$(pt) 上的环结构。

13.1 在奇素数处工作

引理 13.4. 设 p 为奇素数。包含映射 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \hookrightarrow \text{Mp}(2,\mathbb{Z})$ 诱导一个 p-局部等价

$$\Omega_k^{\text{Spin}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \longrightarrow \Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}(\text{pt})\,. \tag{13.5}$$

证明. 与引理 12.2 和 12.7 的证明相同，包含映射 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \hookrightarrow$ Mp(2, ℤ) 可以写成

$$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) = \text{Mp}(2,\mathbb{Z})\,, \tag{13.6}$$

so $\mathbb{Z}_{(p)}$-同调上的诱导映射是一个同构。因此映射

$$B(\text{Spin} \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \longrightarrow B\big(\text{Spin} \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \text{Mp}(2,\mathbb{Z})\big) \tag{13.7}$$

还在 $\mathbb{Z}_{(p)}$-同调上诱导出同构；此映射也交织了向下映射至

BO，它由遗忘 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ or Mp(2， $\mathbb{Z}$) 给出，因此它诱导出一个 Thom 谱的映射

$$MT(\mathrm{Spin}\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})\longrightarrow MT\big(\mathrm{Spin}\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})\big)\,, \tag{13.8}$$

根据 Thom 同构，它在 $\mathbb{Z}_{(p)}$同调上也是一个同构，因此根据稳定Whitehead定理 [133, 第三章，Th´eor`eme 3] 在 p-局部同伦群上也是一个同构。

接下来，映射 i: $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 在 p-局部同调上是一个同构，因为在同构 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$下， i 可视为包含映射 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$上的单位映射。因此，Thom 谱的诱导映射

$$MT(\mathrm{Spin}\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})\longrightarrow MT\big(\mathrm{Spin}\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}\big)\,, \tag{13.9}$$

在 $\mathbb{Z}_{(p)}$同调上诱导出一个同构，因此在 p-局部同伦群上也如此，就像 (13.8) 一样。

最后，因为 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$，Spin $\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\cong$ Spin $\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$。 □

因此，在奇素数处，我们只需要 $\Omega_k^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$，这已在第 12.2 节中确定。其生成元与我们在第 12.3 节中找到的 3-挠生成元相同。

13.2 在 $p=2$ 处工作

本节中，我们计算 $\Omega_*^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$(pt) 的 2-主部分的 Adams 谱序列。我们需要解决若干隐藏扩张，并通过寻找配边群的生成元来解决它们。我们发现了若干非分裂的隐藏扩张。

我们用 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 表示对称类型 Spin $\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$，其到 O 的映射是投影到第一个因子的投影。Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边已在 $[109,110,37,111,32,130]$, 中得到研究，但仅限于 5 及以下维数。我们在 6–11 维的计算是新的。

引理13.10。 包含映射 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})$ 诱导一个2-局部等价

$$\Omega_*^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}(\mathrm{pt})\longrightarrow\Omega_*^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}(\mathrm{pt})\,. \tag{13.11}$$

证明的推理思路与引理 13.4 相同，只是我们无法像该证明最后一行那样消除扭曲。

接下来，我们剪切 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边。

引理 13.12。 $H^*(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x,y]/(x^2)$，其中 $|x|=1$ 且 $|y|=2$。类y 可由以下方式刻画：

1. 令 ρ: $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\to\mathrm{SO}(2)$ 表示旋转表示，并令$(E\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_\rho\to B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$表示相应的秩-2 向量丛；则 $w_2\big((E\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_\rho\big)=y$。

2. 中心扩张的上同调类

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{13.13}$$

等于 y。

证明。 上同调环是标准结果；例如参见 [144, 命题 4.5.1]。由于群$H^2(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ $\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，只有一个非零元素，因此对于引理的其余部分，只需证明 $w_2\big((E\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})_\rho\big)$ 和 (13.13) 都非平凡。对于前者，这是因为 ρ 不能提升到 Spin(2)；对于后者，这是因为 (13.13) 不分裂。

□

因此，推论 10.23 告诉我们，Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 结构自然等价于 $(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\ (E\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\rho)$-扭曲 Spin 结构。为便于阅读，我们用 ρ 同时表示该表示及其伴随向量丛，也就是我们之前称为 $(E\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\rho$ 的对象；其具体含义将由上下文明确。因此，Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 结构自然等价于 $(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\ \rho)$-扭曲 Spin 结构，而引理 10.18 意味着

$$\Omega_*^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}(\mathrm{pt}) \cong \Omega_*^{\mathrm{Spin}}\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)\,. \tag{13.14}$$

根据 (10.37)，我们还需要计算 $ko_*\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)$ 在 11 及以下次数中的情形，以及$ko\langle 2\rangle_*\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)$ 在 1 及以下次数中的情形。引理 10.39 和模 2 Thom 同构处理了后者：我们得知 $ko\langle 2\rangle_k((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2})$ 对于 $k=0$ 和$k=1$为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

定理 13.15。$(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}$ 的前几个 *ko*-同调群为：

$$\begin{aligned}
&ko_0\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \cong \mathbb{Z} && ko_6\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \cong 0\\
&ko_1\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} && ko_7\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\\
&ko_2\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \cong 0 && ko_8\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \cong \mathbb{Z}\\
&ko_3\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} && ko_9\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \cong (\mathbb{Z}/128\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\\
&ko_4\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \cong \mathbb{Z} && ko_{10}\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \cong 0\\
&ko_5\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \cong (\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) && ko_{11}\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\,.
\end{aligned} \tag{13.16}$$

Barrera-Yanez [194, 定理 3.1] 使用解析方法计算 $ko_{2k+1}\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)$。尽管如此，我们仍然进行谱序列计算，因为在第 14 节研究 Spin-$\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ 配边时将会需要它。

证明。为便于阅读，令 $X := (B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}$。我们将使用第 11 节中回顾过的 Adams 谱序列。问题的步骤如下：

1. 使用我们在第 11.1 节中回顾过的技巧，确定 $H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上的 $\mathcal{A}(1)$-模结构。

2. 用它来计算 $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}(1)}(H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，它是 Adams 谱序列的 E_2 页。我们在第11.2节讨论了 Ext 以及如何确定它。3. 计算谱序列中的微分。我们在第 11.3 节讨论了一般 Adams 谱序列中的微分；在这个例子中，May-Milgram 定理（的一个变体）为我们计算出所有微分。我们会在附录 D 中更详细地讨论这一工具。

4. 最后，我们需要解决一些扩张问题；我们在第 11.4 节讨论了扩张问题的一般情况。为了解决计算$ko_*(X)$时的扩张问题，我们使用附录 C.3 中关于透镜空间和透镜空间丛的 η-不变量计算。

首先是上同调上的 $\mathcal{A}(1)$-模结构。Thom 同构 (10.15) 给出一个同构 $U\colon H^*(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$；类 $U := U(1)$ 称为*Thom* 类。

命题 11.4 用 $\mathrm{Sq}(\alpha)$ 和 $w(\rho)$ 表示 $\mathrm{Sq}(U\alpha)$。我们只需要 Sq^1 和 Sq^2，，因此只需要 w_1 和 w_2。由于 ρ 的像包含于 SO(2) 中，w_1 消失，而引理 13.12 告诉我们 $w_2 = y$。我们在例 11.7 中计算了 $H^*(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中各类的斯廷罗德平方。由此可知 $\mathrm{Sq}^1(x) = 0$、$\mathrm{Sq}^2(x) = 0$、$\mathrm{Sq}^1(y) = 0$，以及 $\mathrm{Sq}^2(y) = y^2$。利用命题 11.4（它告诉我们 $\mathrm{Sq}^1(U\alpha) = \mathrm{Sq}^1(U)\alpha + U\mathrm{Sq}^1(\alpha)$，以及 $\mathrm{Sq}^2(U\alpha) = \mathrm{Sq}^2(U)\alpha + \mathrm{Sq}^1(U)\mathrm{Sq}^1(\alpha) + U\mathrm{Sq}^2(\alpha)$），我们得知 Sq^1 在 $H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的所有类上都消失，并且

$$\mathrm{Sq}^2(U\alpha) = U\alpha y + U\mathrm{Sq}^2(\alpha). \tag{13.17}$$

利用这一点，我们可以完整描述 $H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上的 $\mathcal{A}(1)$-模结构。该模分解为若干个模的直和，而这些模是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上的二维向量空间。具体而言，若 $C\eta$ 表示这样一个 $\mathcal{A}(1)$-模：由位于次数 0 和 2 的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项组成，并通过一个 Sq^2, 连接，那么

$$H^*\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big) \cong C\eta \oplus \Sigma C\eta \oplus \Sigma^4 C\eta \oplus \Sigma^5 C\eta \oplus \Sigma^8 C\eta \oplus \Sigma^9 C\eta \oplus \Sigma^{12} C\eta \oplus P, \tag{13.18}$$

其中，P 是 12-连通的，即在 12 或以下的次数中没有非零类。我们只关注 12 及以下次数中的 Adams 谱序列，这意味着我们可以（也将）忽略 P。我们在图 17 中绘出了 $H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上的 $\mathcal{A}(1)$- 模结构。

现在来确定 Adams E_2-页。Adams 谱序列的 E_2-页分裂为我们在 (13.18) 中辨认出的所有直和项的 Ext 群的直和。对于单个 $C\eta$ 直和项，可以查阅例如 Beaudry-Campbell [115, 图 22]，因此我们可以画出图 18 顶部的 E_2-页。

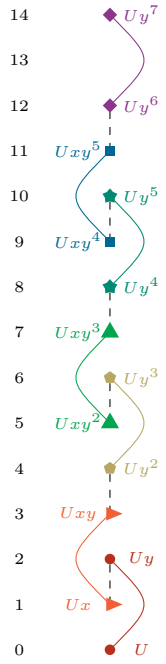


图 17：低次时 $H^*\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)$ 的模 2 上同调。不同的颜色/形状表示不同的直和项，曲线表示第 11.1 节中描述的 Sq^2-作用。虚线表示存在非平凡的 Bocksteinβ：$H^k\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2};\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\big)\to H^{k+1}\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2};\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\big)$，从较低类的一个原像指向较高类的一个原像。此图完整展示了 12 次及以下的情况。

有许多微分无法利用 h_i-作用排除。很容易验证其中许多微分非零，例如利用以下事实计算 $ko_*(X)\otimes\mathbb{Q}$：张量化后得到 $\mathbb{Q}$，Atiyah-Hirzebruch 谱序列总会退化 [195, Bemerkung 14.18]。

好消息是，E_2 页具有足够的结构，使我们无需费太多功夫就能确定微分。

定义 13.19. Adams 谱序列的 E_r 页中的一个 h_0-塔 是一个无限序列 $x_i\in E^{s+i,\ t-s-i}_r$，满足 $h_0x_i=x_{i+1}$。

观察图 18 顶部的 E_2 页，我们可以看到谱序列中有许多 h_0 塔。由于微分与 h_0 作用可交换，如果知道 h_0 塔中一个元素上的 d_r，就能知道整个塔上的 d_r；因此，通常会说 h_0 塔之间的微分，而不只说元素之间的微分。

May-Milgram [174] 将 h_0 塔之间的微分与上同调中的 Bockstein 同态联系起来。后者通常不难计算，这提示了一种求解 Adams 谱序列的方法：计算 $H^*(X)$ 中的 Bockstein 映射，并用它们确定 Adams 微分。我们将在下文更详细地讨论 May-Milgram 定理

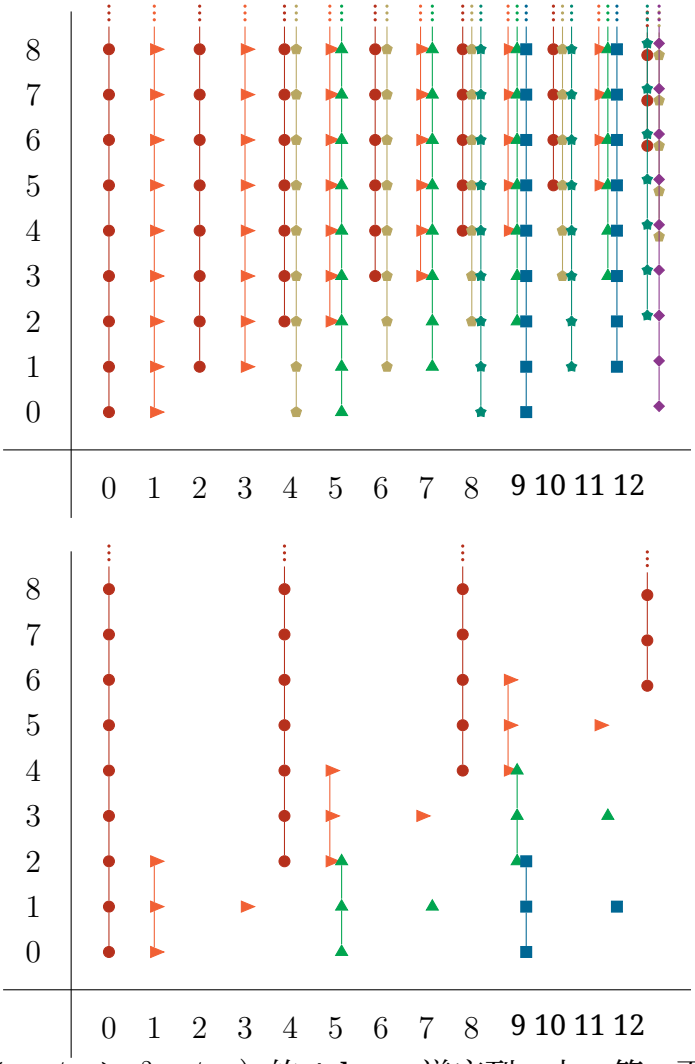


图 18：计算 $ko_*\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)$ 的 Adams 谱序列。上：第E_2页。下：第 E_∞页。

附录 D。

实际上，我们将使用 May-Milgram 定理的一种变体，即命题 D.13，它专为上同调是 $C\eta$ 的多个副本的直和的空间 / 谱而定制。令 β_r：$H^n(-;\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}) \to H^{n+1}(-;\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})$ 为与短正合列相关联的 Bockstein

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2^{2r}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ ; \tag{13.20}$$

那么，命题 D.13 表明，若 $\alpha \in H^n(X;\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})$ 和 $\beta_r(\alpha) \in H^{n+1}(X;\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})$ 都生成 $\mathbb{Z}/2^r$ 直和项，且 α 和 $\beta_r(\alpha)$ 的模 2 约化分别属于 $C\eta$ $\mathcal{A}(1)$- 模直和项 M_0 和 M_1 of $H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，则 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(1)}(X)$ 中次数为 $n+4k$ 和 $n+4k+1$ 的 h_0-塔之间存在一个微分，它来自 M_0 和 M_1；反过来，微分也意味着存在这样的 Bockstein 关系。本节将把命题 D.13 当作黑箱使用，并请有兴趣的读者参阅附录 D 中的证明及相关背景。

Thom 同构与 Bockstein 对易 β_r，因此当 $r > 1$,[47] 时，我们可以利用 $H^*(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z};\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})$ 中的作用，计算 $H^*(X;\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})$ 中 β_r 的作用。一个标准事实[48] 是：恰当在 $r=2$ 且 n 为奇数时，存在一个次数为 n 的类 α，满足上一段所述命题 D.13 的条件；并且 α 和 $\beta_r(\alpha)$ 的模 2 约化分别为 Uxy^k 和 Uy^{k+1}，其中 $k=(n-1)/2$；因此，在图 17 中，我们用虚线表示这些 Bockstein 映射。

对这些类应用命题 D.13，可得以下微分。

1. 假设 $x \in E_2^{s,t}$ 是红色 h_0-塔中的一个元素，即来自 $C\eta \subset H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的副本。若 $t-s \equiv 0$ 模 4，$d_r(x) = 0$ 对所有 r 都成立。若 $t-s \equiv 2$ 模 4，则 $d_2(x)$ 非零，并且是次数为 $t-s-1$ 的 h_0-塔中的一个元素，来自 Ext($\Sigma C\eta$)（指向右侧的三角形）。这些微分源于次数 0 处没有 Bockstein 映射，以及 Ux 和 Uy 的 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-上同调提升上存在 Bockstein 映射。

2. 所有从 h_0-塔中引出的微分，这些塔来自 Ext($\Sigma C\eta$)（向右的三角形），都为零，因为 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-上同调中非零元素的原像不属于 $\Sigma C\eta$ 的像。对于 β_2，也有类似结论 $\Sigma^5 C\eta$（向上的三角形）和 $\Sigma^9 C\eta$（方形）也同样如此。

3. 若 $x \in E_2^{s,t}$ 是来自 Ext($\Sigma^4 C\eta$) 的 h_0-塔中的一个元素（五边形），则 $d_2(x) \neq 0$。若 $t-s \equiv 0$ 模 4，则 $d_2(x) \in$ Ext($\Sigma C\eta$)（向右三角形）；若 $t-s \equiv$ 为 2 模 4，则 $d_2(x) \in$ Ext($\Sigma^5 C\eta$)（向上三角形）。这些微分源自 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 值上同调中的 Bockstein 映射，其模 2 约化分别为 $Uxy \mapsto Uy^2$ 和 $Uxy^2 \mapsto Uy^3$。

[47] 对于 $r=1$，必须谨慎区分扭曲系数与非扭曲系数。[48] 要证明这个标准事实，回忆附录 D（具体来说，(D.5) 附近）中的结论：β_r 在 $H^{n-1}(X;\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})$ 上作用非平凡，当且仅当 $H^n(X;\mathbb{Z})$ 含有 2^r-挠元；然后利用同构 $H^*(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[y]/4y$，其中 $|y|=2$，进行计算。

4. 若 $x \in E^{s,t}_2$ 是来自 Ext($\Sigma^8 C\eta$) 的 h_0-塔中的一个元素（星形），则 $d_2(x) \neq 0$。若 $t-s \equiv 0$ 模 4，则 $d_2(x) \in$ Ext($\Sigma^5 C\eta$)（向上三角形）；若 $t-s \equiv 2$ 模 4，则 $d_2(x) \in$ Ext($\Sigma^9 C\eta$)（正方形）。这些微分源自 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 值上同调中的 Bockstein 映射，其模 2 约化分别为 $Uxy^3 \mapsto Uy^4$ 和 $Uxy^4 \mapsto Uy^5$。

5. 如果 x 是拓扑次数 12 中来自 Ext($\Sigma^{12} C\eta$) 的 h_0-塔（菱形）中的一个元素，那么 $d_2(x) \in$Ext($\Sigma^9 C\eta$)（正方形），这可由一个 β_2 推出，其模 2 约化将 $Uxy^5 \mapsto Uy^6$映为 x。

还可以继续讨论，但没有必要。我们关心范围内的所有微分都已列出，并在图 18 底部展示了 E_∞-页。由此可立即推得范围内除次数 5、7、9 和 11 外的所有 ko-同调群；这些次数可能存在扩张问题。具体来说：

- 在次数 5 中，根据 Adams 滤过里绿色部分（朝上的三角形）与橙色部分（朝右的三角形）的相互作用，可能是 $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$、$(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$，或 $(\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。

- 在 7 次中，我们可能有 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 或 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$。

- 在 9 次中，有许多种可能。答案必须是一个阶为 2_9 的阿贝尔群，并且必须有两个或三个循环直和项。没有元素的阶大于 2_7。例如，我们可能有 $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{\oplus 3}$、$(\mathbb{Z}/128\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$、$(\mathbb{Z}/128\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$，或其他可能性。

- 在 11 度中，我们可能有 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3}$、$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 或 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$。

Hsieh [110,第 2 节2]和 Hsieh-Tachikawa-Yonekura [32, 第 8 节4] 研究了次数为 5 时的这些扩张问题，而 Barrera-Yanez [194, 定理 31] 则研究了所有奇数次数的情形。他们的证明计算了由 η-不变量构造的配边不变量。例如，他们证明，在 L_4^5 上取值的某个特定 η-不变量等于 $1/32$ 模 $\mathbb{Z}$，而该 η-不变量在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 中的取值是 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 流形的配边不变量，这意味着 $\Omega^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}_5$(点)有一个 $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$ 子群，因此必为 $(\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。我们以类似于 Barrera-Yanez 的方式解决这些扩张问题，使用 Atiyah-Patodi-Singer [196, 命题 212], 、Donnelly [197, 第 4], 节、Botvinnik-Gilkey-Stolz [193], 以及 Hsieh-Tachikawa-Yonekura [32,附录 C]计算的 η-不变量公式。具体而言，在 C.3节中，若 L_4^{2k-1}表示透镜空间 $S^{2k-1}/(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$，而 Q_4^{2k-1}是第 12.3 节定义在 S^2上的 L_4^{2k-3}-丛，则

$$\begin{aligned} \eta^{\mathrm{D}}_{1/2}(L_4^5) &= -\tfrac{5}{32} & \eta^{\mathrm{D}}_{1/2}(L_4^9) &= \tfrac{9}{128} \\ \eta^{\mathrm{D}}_{3/2}(\widetilde{L}_4^5) &= -\tfrac{3}{32} & \eta^{\mathrm{D}}_{3/2}(\widetilde{L}_4^9) &= -\tfrac{7}{128} \\ (\eta^{\mathrm{D}}_{3/2} - \eta^{\mathrm{D}}_{1/2})(Q_4^7) &= \tfrac{1}{4} & (\eta^{\mathrm{D}}_{3/2} - \eta^{\mathrm{D}}_{1/2})(Q_4^{11}) &= \tfrac{1}{8}\,. \end{aligned} \tag{13.21}$$

为表述这一点，我们必须指定这些透镜空间丛上的 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 结构；我们在附录 C 中进行说明，详情请见该处。

由于这些 η-不变量模 $\mathbb{Z}$ 的取值是配边不变量，因此这意味着$ko_5(X) \cong (\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$、$ko_7(X) \cong \mathbb{Z}/4$、$ko_9(X) \cong (\mathbb{Z}/128\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$以及 $ko_{11}(X) \cong\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$。

尽管此前对这些群的所有计算都使用了解析方法，我们可以纯粹用代数处理 5 次的扩张问题，从而为 η-不变量计算提供检验。尝试将其推广到维数 7、9 和 11 中的扩张问题将会很有意思。

引理 13.22. $ko_5\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \cong (\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$

证明。 回忆注 10.40 中的 η, c, R 长正合列 (10.41)；我们将研究这一长正合列在 $X = (B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}$ 的 ko-和 ku-同调中的情形。由于 $V \to B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$是一个复向量丛，特别地，它是 Spin^{c}的。广义上同调理论 ku 对于 Spin^c 向量丛 [198, 199],[49] 是定向的，因此存在 Thom 同构 $ku_*\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \cong ku_*(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$。Hashimoto [191] 证明了 $ku_5(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$。

$\mathrm{ko}_5\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)$ 有三种可能：$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{\oplus 2}$、$(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 和 $(\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。这些阿贝尔群都无法单射地映入 $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$，因此$c$：$\mathrm{ko}_5\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \to \mathrm{ku}_5(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 不是单射。(10.41) 的正合性意味着映射 η：$\mathrm{ko}_4\big((B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \to \mathrm{ko}_5((B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\rho-2})$ 非零；[50] 因为 $2\eta = 0$ 属于 $\pi_1(\mathbb{S})$，所以对于任意 $x \in \mathrm{ko}_4\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)$，$2\eta(x) = 0$。由于 $\mathrm{ko}_4\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)$ 只有一个生成元，η 的像是 $\mathrm{ko}_5\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)$ 的一个子群，而 (10.41) 的正合性进而意味着

$$c/\ker(c) :, ko_5\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow ku_5\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \cong (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2} \tag{13.23}$$

是单射。如果$ko_5\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)$ 与$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{\oplus 2}$同构，就不可能出现这种情况：将 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$商掉之后，会有太多满足 $2x \neq 0$的元素 x 。

再稍作推导，我们还可以排除这种可能性 $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$：因为在球谱的 Adams 谱序列中，$\eta$的 Adams 滤子为 1，所以乘以 η 后，Adams 滤子至少增加 1。观察图 18 底部，$\mathrm{ko}_4\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)$ 的生成元x 的 Adams 滤子至少为 2，因为它在 E_∞-页上的像处于滤子 2。因此，ηx的滤子至少为 3，且 $2\eta = 0$；观察图 18 底部 E_∞-页的 5 线上，只有当 ηx 在 E_∞-页上的像是 $E^{4,9}_\infty \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的生成元时，才会出现这种情况。特别是，5 线上的 h_0作用表明，存在某个类 $y \in \mathrm{ko}_5\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)$ ，使得 $4y = \eta$。因此，若存在一个同构

[49]或者，也可以使用 Conner-Floyd 在第 5]节构造的ku定向来处理复向量丛。[50]预期可以在 Adams 谱序列的 E_∞页看到 η 的作用，因为它由 $h_1 \in$Ext$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$检测到。这种 η作用在 E_∞页上看不到，因此这是一个“隐藏乘法扩张”的例子。参见第 13.4 节。

$ko_5\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \cong (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$， ηx 被识别为 (8，0) 或 (8， 2)。因此，除以 ηx 所得的商为 $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$，它不能单射到 $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$中。

唯一剩下的选项是 $ko_5\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big) \cong (\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。 □

至此完成了 11 维及以下的 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边群计算。 □

汇总所有部分，我们得到 Spin-Mp$(2,\mathbb{Z})$ 配边群，如表9所总结。为方便起见，我们还列出了之后将要研究的各种生成流形

k	$\Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (点)	生成元
0	$\mathbb{Z}$	pt_+
1	$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	$(L_1^4,\ L_3^1)$
2	0	
3	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	$(L_4^3,\ L_3^3)$
4	$\mathbb{Z}$	E
5	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$	$(\widetilde{L}_4^5,\ L_4^5,\ L_3^5)$
6	0	
7	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$	$(Q_4^7,\ L_3^7)$
8	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$(B,\ \mathbb{HP}^2)$
9	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/128\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$	$(\widetilde{L}_4^9, \mathbb{HP}^2 \times L_4^1, L_4^9, \mathbb{HP}^2 \times L_3^1, L_3^9)$
10	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	X_{10}
11	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2} \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$	$(\mathbb{HP}^2 \times L_4^3, X_{10} \times L_4^1, Q_4^{11}, \mathbb{HP}^2 \times L_3^3, L_3^{11})$

表9： $k \le 11$的配边群$\Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (点)及其生成元（顺序与群的直和项相同）。

下一个。

13.3 寻找生成元

在奇素数处，$\Omega_*^{\text{Spin}}\big(B\text{SL}(2,\ \mathbb{Z})\big)$ 与 $\Omega_*^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (点)没有区别，因此我们可以重复使用第 12.3 节中的生成元。在素数 2 处，我们的策略也无需作太多修改：Botvinnik-Gilkey [155, 定理 4.5] 表明，当 $k \ge 3$ 时， A-属和 η-不变量可以完全检测 Spin-$\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ 配边的 ko_* 直和项。我们已经在 (13.21) 及其附近确定了相应的具体透镜空间和 η-不变量，

因此我们找到了来自 ko_*中 2-挠的生成元。对于ko_{*-8}，与我们处理 $\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(B\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z}))$ 的做法类似，将 $\mathbb{HP}^2$ 与$ko_*\big((B\mathbb{Z}/4)^{\rho-2}\big)$中相应的生成元相乘即可；对于$ko\,\langle 2\rangle_{*-10}$，引理 10.39 意味着我们可以用所需次数上的模 2 上同调类来检测生成元，从而得到次数为 10 的生成元 X_{10} 和次数为 11 的生成元$X_{10}\times L_4^1$。

13.4 乘法结构

由于我们在研究紧化时会用到乘积，正如注 10.4 中所讨论的，本小节将讨论如何计算 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边上的乘法结构。

两个 Spin-$\mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}$ 流形 (M,P) 和 (N,Q) 的乘积（这里 $P\to M$和 $Q\to N$是相应的 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$-丛）具有一个诱导的 Spin-$\mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}$ 结构，非正式地说，它由 P 和 Q的特征类相加而得。更具体地说，令 $\otimes$ 表示 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$-丛的张量积，它提升了其特征类在 $H^1(-;\,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ 中的加法运算。若 $\pi_1\colon M\times N\to M$和 $\pi_2\colon M\times N\to N$分别是到第一因子和第二因子的投影，则存在同构

$$\begin{aligned} T(M\times N)\oplus(\pi_1^*P\otimes\pi_2^*Q)_\rho &\xrightarrow{\cong} \pi_1^*TM\oplus\pi_2^*TN\oplus\pi_1^*P_\rho\oplus\pi_2^*Q_\rho \\ &\cong \pi_1^*(TM\oplus P_\rho)\oplus\pi_2^*(TN\oplus Q_\rho), \end{aligned} \tag{13.24}$$

因此，$TM\oplus P_\rho$和 $TN\oplus Q_\rho$上的 Spin 结构，也就是 (M,P) 和 (N,Q) 上的 Spin-$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 结构，会在 $T(M\times N)\oplus(\pi_1^*P\otimes\pi_2^*Q)_\rho$上诱导出一个 Spin 结构，也就是 $(M\times N,\ \pi_1^*P\otimes\pi_2^*Q)$ 上的 Spin-$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$结构。允许 P和/或 Q 为平凡丛，便可看出这个乘积与 Spin 配边上的乘积相容，这意味着 Spin-$\mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}$ 配边不仅是一个环，还是一个 Ω_*^{Spin}-代数。

我们简要说明如何明确描述低维情形下 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边的环结构。在高维中，确定 Ω_*^{Spin} 的完整环结构仍是一个开放问题（例如参见 [201]），而 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$配边的环结构很可能更为复杂，因此我们聚焦于 11 维及以下。我们关心的大多数乘积都因次数原因而消失，或者因为挠元无法非平凡地映射到自由直和项。唯一有意思的乘积形式如下：

$$\Omega_{4k}^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}\times\Omega_{4\ell}^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}\longrightarrow\Omega_{4(k+\ell)}^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}} \tag{13.25a}$$

and

$$\Omega_{4k}^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}\times\Omega_{2\ell+1}^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}\longrightarrow\Omega_{4k+2\ell+1}^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}. \tag{13.25b}$$

对于第一类乘积，两个配边群都是自由阿贝尔群，因此可以通过与 $\mathbb{Q}$ 张量化，并使用包括庞特里亚金

类来计算乘积。[51]

对于类型 (13.25b) 的乘积，Botvinnik-Gilkey [155] 证明，$\Omega^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}_{4k+2\ell+1}$ 可由 η-不变量检测，因此，通过计算乘积流形的 η-不变量，并借助形如 $\eta(M\times N) = \text{Index}(M)\eta(N)$ 的分解结果，可以计算 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边中的乘法结构。

Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边上的 Ω^{Spin}_*-代数结构大部分由 $\text{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 在对应于 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边的 E_∞-页上的作用，以及我们发现的扩张所决定。不过，也可能存在不只是由 2^m 乘法产生的扩张，还包括与 Ω^{Spin}_* 中各种元素的乘积。例如，$\eta = [S^1_p]$ 对应于 $h_1 \in \text{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，但也可能存在形如 $y = \eta x$ 的乘积；此时，若 x 和 y 分别是 x 和 y 在 E_∞-页上的像，则 $h_1 x = 0$。

这种现象发生在 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边中，而且出现在可能的最低次数！观察图 18 底部，h_1 在 0 线上作用平凡，这似乎表明 S^1_p 是某个 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$流形的边界，但事实并非如此！回想引理 13.22 的证明，$\eta\colon \Omega^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}_4 \to \Omega^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}_5$ 非零，并将生成元映射到 $(16,\ 0) \in \Omega^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}_5 \cong (\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。要使这与次数为 0、4 和 8 的类之间的乘法相容，唯一的可能就是 $\eta\colon \Omega^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}_{4k} \to \Omega^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}_{4k+1}$ 始终非零。结合 $k=0$，我们得知 S^1_p 的 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$配边类非平凡，且能被 4 整除。[52] 我们在图 19 中展示了目前发现的所有隐藏扩张。

对于所有偶数 k，Spin-$\mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}$ 配边也有类似的情况：S^1_p 的类非零，且可被 k 整除。当 $k \equiv 0$模 4 时，这是一个隐藏乘法扩张；当$k \equiv 2$ 模 4 时，这一扩张来自 E_∞-页上的 h_1 作用。[53]

14 ΩSpin- 的计算$(2,\ \mathbb{Z})\ _*$ (点)

IIB 型弦理论的完整对偶群是 $\text{GL}(2,\mathbb{Z})$ 的 Pin^+ 覆盖群，我们将其记作 $\text{GL}^+(2,\mathbb{Z})$。因此，$\text{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ 包含一个典范子群，即商 $\text{GL}^+(2,\mathbb{Z}) \to \text{GL}(2,\mathbb{Z})$ 的核。这个子群的非零元素以费米子宇称的方式作用，因此时空对称类型为 Spin-$\text{GL}^+(2,\mathbb{Z}) \coloneqq \text{Spin} \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \text{GL}^+(2,\mathbb{Z})$。本节将确定这种对称类型在 11 维及以下的配边群及其生成元；与 $\text{Spin}\times\text{SL}(2,\mathbb{Z})$ 和 Spin-$\text{Mp}(2,\mathbb{Z})$ 的情形一样，我们大量

[51]在足够高的维数中，还必须使用 Pontrjagin 类在KO理论中的类似物；这是 Anderson-Brown-Peterson 的一个定理 [202]。参见 Freed-Hopkins [40, 附录 B]，其中给出了使用这些特征类进行计算的示例。[52]还有一种更直接的证明方法，即研究 $[S^1_p] \in \Omega^{\text{Spin}}_1$ 在由单位映射 $\mathbb{S} \to (B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}$ 所诱导的 Atiyah-Hirzebruch 谱序列映射下的像。[53]这一 h_1 作用见于 [150, 第 2] 节，但在 [109, 图 7.4] 和 [115, 图 25 以及26] 中被遗漏。要看出这一点，计算与短正合列 $0 \to \Sigma R_0 \to R_1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ 相关联的 Ext 中的长正合列，其中 R_0 和 R_1 如 [115, 第 4 节6] 中所定义。Campbell [109, 第 7 节8] 表明，对应于 Spin-$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 配边的 Thom 谱的上同调同构于 R_1。

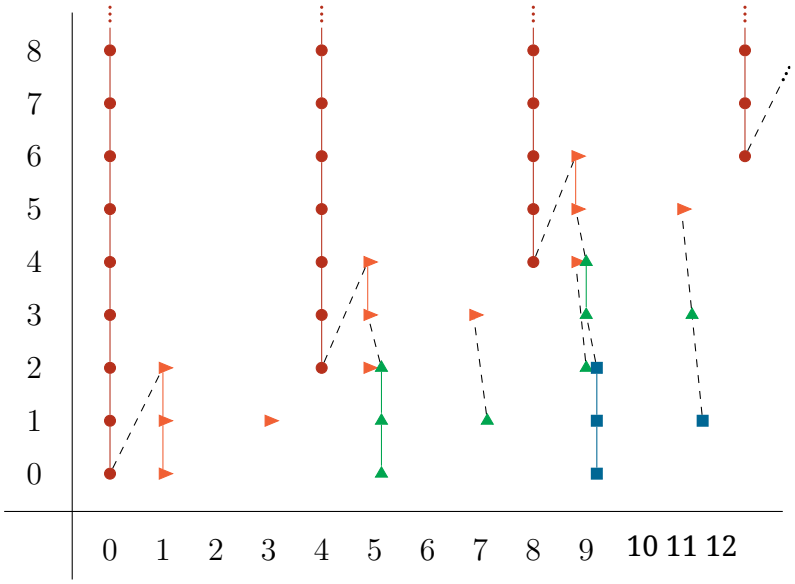


图 19：在 E_∞ 页上为 $ko_*\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)$ 添加隐藏扩张；参见图 18 底部。在此图中，所有不改变拓扑次数（x 坐标）的线都表示在 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边中乘以 2，而所有使拓扑次数增加 1 的线都表示乘以 $[S^1_p]$。虚线表示无法从 Adams 谱序列中看出的隐藏扩张。

使用混成　　使用 $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ 的纤维积分解，我们将在附录 B 中证明这一点　　：

$$\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} D_{16} *_{D_8} D_{24}. \tag{14.1}$$

我们在第 14.1 节利用 Atiyah-Hirzebruch 谱序列计算奇素数处的情况，并在第 14.2 节利用 Adams 谱序列计算 $p=2$ 处的情况。在第14.3节中，我们确定所计算的配边群的生成元；这是整个计算中最冗长的部分。我们分别在第 14.3.1、14.3.2 和 14.3.3 节中，辨认出来自 Spin-Mp$(2,\mathbb{Z})$ 配边、$B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的 Spin 配边以及 Spin-D_8 配边的生成元族；此后仍有四个生成元待寻找，我们将在第 14.3.4、14.3.5、14.3.6 和 14.3.7 节中依次构造它们。最后，在第14.4节中，我们讨论 Spin-D_{16} 配边上的乘法结构。

14.1 奇素数处的工作

由于映射 Spin $\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ $\to$ SO $\times$ $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ 是一个双覆盖，映射$B\big(\text{Spin-}\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z})\big) \to B\mathrm{SO} \times B\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ 是一个纤维为 $B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的纤维化。这意味着，如果 p 是奇素数，那么遗忘映射 $\Omega^{\text{Spin-GL}^+}{}_{(2,\mathbb{Z})\,*} \to \Omega^{\mathrm{SO}}_*\big(B\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 是一个 p-局部同构；其证明类似于我们在第10.5节中证明 $\Omega^{\mathrm{Spin}}_* \to \Omega^{\mathrm{SO}}_*$ 是奇素数等价时所用的论证。

因此，我们将在素数 3 处计算 $\Omega_*^{\mathrm{SO}}\big(B\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})\big)$；在其他奇素数处，映射$B\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})\to\mathrm{pt}$ 在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上同调上诱导一个同构，因此在 p-局部 bordism 上也诱导一个同构。[54] 在 (B.10) 中，我们将 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ 分解为一个 amalgamated 积。利用这一点和 (12.4)，我们可以证明映射 $\Omega_*^{\mathrm{SO}}(BD_{12})\to\Omega_*^{\mathrm{SO}}\big(B\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 是一个 3-局部同构，证明与引理 12.2 基本相同。存在一个同构 $D_{12}\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times D_6$;[55]由于 $B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的模 3 上同调在正次数上消失，$D_6\hookrightarrow D_{12}$ 在分类空间上诱导一个奇素数等价。因此，我们应当计算 $\Omega_*^{\mathrm{SO}}(BD_6)$。由于$|D_6|$ 只能被 2 和 3 整除，所以在素数 5 及以上处这是平凡的，因此我们照例聚焦于 3。

正如我们在第 12.2 节中讨论的（尤其参见（10.34）），对于 $k\le 15$，存在一个 3-局部同构

$$\Omega_k^{\mathrm{SO}}(BD_6)\otimes\mathbb{Z}_{(3)}\xrightarrow{\cong}BP_k(BD_6)\oplus BP_{k-8}(BD_6)\oplus BP_{k-12}(BD_6)\,. \tag{14.2}$$

定理 14.3。

$$\widetilde{BP}_k(BD_6)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, & k=3\\ \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, & k=7\\ \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}, & k=11\\ 0, & \text{all other } k\le 11.\end{cases} \tag{14.4}$$

证明。 我们利用 Atiyah-Hirzebruch 谱序列（阿蒂亚-赫尔兹布鲁赫谱序列）[56]计算 $BP_*(BD_6)$

$$E^2_{p,q}=H_p(BD_6;BP_q)\Longrightarrow BP_{p+q}(BD_6). \tag{14.5}$$

Handel [203] 计算了 $H^*(BD_{2n};\mathbb{Z})$，他的结果结合泛系数定理告诉我们 $H_*(BD_6;\mathbb{Z}_{(3)})$:

$$H_k(BD_6;\mathbb{Z}_{(3)})\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_{(3)}, & k=0\\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, & k\equiv 3 \bmod 4\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{14.6}$$

因此，我们可以在图 20 中画出 Atiyah-Hirzebruch 谱序列的 E^2 页。由于次数原因，所有微分都为零：在同调阿蒂亚-赫尔兹布鲁赫谱序列中，微分向左上方移动，并使总次数减 1，因此所有这类微分的起点或终点都是零

[54]要验证这个关于上同调的断言，可使用与（B.10）中给出的 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ 的 amalgamated 积描述相对应的 Mayer-Vietoris 序列，并利用如下事实：若 G 是有限群，且 p 不整除 G的阶，则 $H^*(BG;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 在正次数上消失 [187, 推论 10.2]。一旦知道该映射在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上同调上是同构，Atiyah-Hirzebruch 谱序列也使我们能够得出结论：对于 p-局部定向配边，该映射也是同构。[55]在六边形中描绘大卫之星。[56]与 Adams 谱序列相比，我们用上标 $E^2_{*,*}$ 标示页码，以强调这个谱序列来自同调。

群。

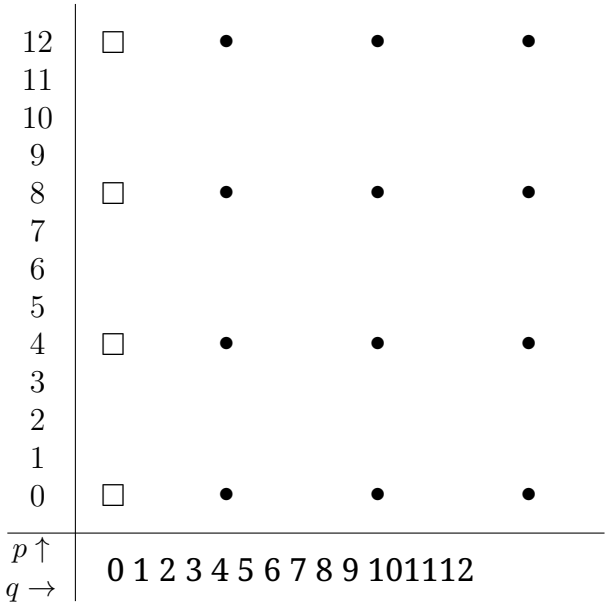


图 20：计算 $\Omega_*^{\mathrm{SO}}(BD_6)\otimes\mathbb{Z}_{(3)}$ 的 Atiyah-Hirzebruch 谱序列的 E^2 页。这里 $\square := \mathbb{Z}_{(3)}$ 和 $\bullet := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$。

对于约化 BP 同调，我们对竖直线 $p = 0$ 上的 $\mathbb{Z}_{(3)}$s 取商。因此，我们在次数 3 处有 a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$，在次数 7 和 11 处有两个扩张问题，而在我们关注的范围内，其余约化 BP 同调群均为零。

包含映射 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \hookrightarrow D_6$ 诱导出关于$BP_*(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \to BP_*(BD_6)$ 的 Atiyah-Hirzebruch 谱序列映射。$B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 的同调在 0 次数时为 $\mathbb{Z}$，在所有奇数次数时为 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$，在正偶数次数时为 0；谱序列映射在总次数为 3、7 和 11 的 E^2 页上是同构。与 BD_6 的情况相同，这个谱序列在 $B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 处退化；因此，AHSS 谱序列的 E^∞ 页上的映射在次数 $p+q=7$ 和 $p+q=11$ 上是同构，这意味着映射 $BP_k(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \to BP_k(BD_6)$ 对于 $k=7,\ 11$ 是同构。

在第 12.2 节中，我们看到 $BP_7(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$和 $BP_{11}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$，从而解决了扩张问题。 □

备注 14.7。另一种进行这项计算的方法是使用“Leray-Serre-Atiyah-Hirzebruch 谱序列”

$$E^2_{p,q} = H_p\big(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; BP_q(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\big) \Longrightarrow BP_{p+q}(BD_6)\,. \tag{14.8}$$

我们发现，研究这一变体是个很好的练习——谱序列在 E^2 页坍缩，并给出一个同构 $BP_*(B\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \cong BP_*(BD_6)$。[57]接着我们

[57]Kamata-Minami [204,定理 13] 和 Kamata [205, 定理 13]还给出了至少两种其他且截然不同的证明。

直接计算这一作用，并考察余不变量是什么。

在我们关注的范围内，映射 $\Omega_*^{\mathrm{SO}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \to \Omega_*^{\mathrm{SO}}(BD_6)$ 的满射性意味着，在此范围内，$\Omega^{\text{Spin-GL}^+}{}_{(2,\mathbb{Z})\ *}$ 的 3-挠子子群的生成元可以选为我们为 $k=3$、7 和 11 找到的 $\Omega_k^{\mathrm{SO}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 的生成元。我们在第 12.3 节中构造了这些生成元：3 维时为 L_3^3，7 维时为 L_3^7，11 维时为 L_3^{11} 和 $\mathbb{HP}^2 \times L_3^3$。

14.2 Adams谱序列在 $p=2$ 处

利用 (B.6) 和 (B.12) 中 $\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})$ 与 $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ 的并合积描述，可得交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} & \xrightarrow{\ a\ } & \mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{16} & \xrightarrow{\ b\ } & \mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z}), \end{array} \tag{14.9}$$

其中，竖直箭头是标准嵌入，a 是标准嵌入 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 的 Spin 覆盖，而 b 是标准嵌入 $D_8 \hookrightarrow \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ 的 Pin^+ 覆盖。现在对 (14.9) 应用 $B(\mathrm{Spin}\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}-)$；于是水平箭头在模 2 上同调上诱导等价，这可由类似于引理12.2、12.7、13.4和13.10的Mayer-Vietoris论证得到，其中使用了上文提到的 $\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})$ 和 $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ 的并合积描述。因此，特别地：

推论14.10. 在(14.9) 中的包含映射 b 诱导出映射$\Omega_*^{\mathrm{Spin}\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}D_{16}} \to \Omega^{\text{Spin-GL}^+}{}_{(2,\mathbb{Z})\ *}$，且此映射是一个2-局部等价，其中 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset D_{16}$ 由半周旋转生成。

（14.9）的另一个推论是，此等价与引理13.10中从 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边到 Spin-$\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})$ 配边的 2-主等价相容。我们将利用这一点，计算第14.3.1节中 $k \le 11$ 对应的映射 $\Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})} \to \Omega^{\text{Spin-GL}^+}{}_{(2,\mathbb{Z})\ k}$ 的像的 2-挠子子群。

首先，我们需要对 Spin-D_{16} 对称类型进行剪切。为此，我们需要知道 BD_8 的模 2 上同调。

引理 14.11 (Handel $[203,$ 定理 5.5$]$)。当 $k \equiv 0$ 模 4，

$$H^*(BD_{2k};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x,y,w]/(xy+y^2) \tag{14.12}$$

其中有 $|x| = |y| = 1$ 和 $|w| = 2$。若 V 是 D_{2k} 的标准二维实表示，而 χ_y 是在反射上取1 、在生成旋转上取 -1 的一维表示，则有 $x = w_1(V)$、$y = w_1(\chi_y)$和 $w = w_2(V)$。

我们还需要斯廷罗德平方：由公理可确定 $\mathrm{Sq}(x) = x + x^2$ 和 $\mathrm{Sq}(y) = y + y^2$，而 $\mathrm{Sq}(w) = w + wx + w^2$ 则可由吴公式（11.6）推出。

引理 14.13。 中心扩张的上同调类

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow D_{16} \longrightarrow D_8 \longrightarrow 1 \tag{14.14}$$

等于标准表示的 w_2 V： $D_8 \to \mathrm{O}(2)$。

这里以及引理的证明中，当我们说“表示的 w_k ”时，指的是其伴随向量丛的 w_k。

证明。 首先注意，沿任意反射 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow D_8$ 的包含映射拉回时，扩张 (14.14) 是平凡的；但沿旋转子群$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \hookrightarrow D_8$拉回时，它并非平凡。这是因为，定义任意反射的包含映射 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow D_8$ 可提升为定义另一反射的包含映射 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow D_{16}$，但 D_{16} 中 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 的原像是旋转子群 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$，且商 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 不分裂。

最后，我们将证明 $w_2(V)$ 是 $H^2(BD_8;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中唯一一个沿反射子群的包含映射拉回时平凡、但沿 $B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 拉回时非平凡的元素。由于由 H^2 中的元素给出的扩张分类具有自然性，这就必然意味着 (14.14) 的类为 $w_2(V)$。

要计算 $w_2(V)$ 在子群 $H \hookrightarrow D_8$ 的包含映射下的拉回，只需计算将 D_8 的标准表示限制到 H 后所诱导的向量丛的 w_2 。

1. 如果 i： $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow D_8$ 是由反射生成的子群，那么该反射保持一条直线不变，因此对某个一维表示 χ，有 $i^*V \cong \mathbb{R} \oplus \chi$。添加平凡直和项不会改变斯蒂费尔–惠特尼类，因此

$$i^*(w_2(V)) = w_2(\mathbb{R} \oplus \chi) = w_2(\chi) = 0, \tag{14.15}$$

因为 w_2 在一维表示上为零。

2. 将 V 限制到 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 后，得到 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 的标准旋转表示；正如我们在引理 13.12 中所讨论的，标准旋转表示不是 Spin。因此，将 $w_2(V)$ 拉回到 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 后不为零。

根据引理 14.11， $H^2(BD_8;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的其他七个元素要么是 0，要么具有 $aw + bx^2 + cy^2$ 的形式，其中 $b \neq 0$ 或 $c \neq 0$。零类拉回到 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 后是平凡的；如果我们能证明 x^2 和 y^2 拉回到某个反射子群时非平凡，那么就证明了 w 是唯一一个拉回到反射子群时平凡、而拉回到旋转子群时非平凡的类，这正是我们想要证明的。

惠特尼和公式意味着 $x^2 = w_2\big(2\mathbf{Det}(V)\big)$，而 $\mathbf{Det}(V)$ 可识别为表示 $D_8 \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbf{O}(1)$，该表示由旋转子群取商得到。因此，$2\mathbf{Det}(V)$ 及其特征类通过 q 从 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 拉回。对于 D_8 中的任意反射 T，复合映射 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle T\rangle \hookrightarrow D_8 \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 是单位映射，因此在特征类上诱导单位映射，所以 $w_2(2\mathbf{Det}(V))$ 必须拉回为一个非零类。

对于 y^2，情况要微妙得多。回想附录 B.2，D_8 中有两个反射子群类；i_4 和 $\tilde{i}_4$ 这两个将 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 嵌入 D_8 的嵌入（定义见附录）分别代表这两个类，并且在上同调上诱导的映射并不相同。具体来说，引理 14.11 中的一维表示 L 沿 $\tilde{i}_4$拉回后是非平凡的，因此相应线丛的 w_1 必定非零，故它是 $H^1(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的非零元素。因此，该元素的平方（即 y^2 沿 $\tilde{i}_4$的拉回）也非零。

□

V 不可定向，因此我们暂时不能调用推论 10.23 来进行剪切——转而考虑表示 $V \oplus 3\mathbf{Det}(V)$。利用惠特尼和公式可以验证，$w_1\big(V \oplus 3\mathbf{Det}(V)\big) = 0$ 且 $w_2\big(V \oplus 3\mathbf{Det}(V)\big) = w_2(V)$，因此利用推论 10.23，我们得到：

推论 14.16。*Spin-D_{16} 结构自然等价于 $\big(BD_8$、$V \oplus 3\mathrm{Det}(V)\big)$- 扭曲 Spin 结构。*

因此，根据推论 10.19，如果 $X := (BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}$，Spin-$D_{16}$ 配边群就是 X 的 Spin 配边群。[58] 在次数 4 中，这个配边群及其生成元由 Pedrotti [206, 定理 9.011], 研究；而对于一种密切相关的结构，将D_8 替换为 O(2)，其配边则由 Guillou-Marin [207], Kirby-Taylor [208, 第 6],节以及 Stehouwer [131, 第 4]节进行研究。[59]

引理 14.17。$ko\ \langle 2\rangle_0(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 和 $ko\ \langle 2\rangle_1(X) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。

证明。引理 10.39 将问题化简为计算 X 的模 2 同调；然后将引理 14.11 应用于泛系数定理和 Thom 同构，即可得到结果。

□

[58]这样一来，Thom 同构和庞特里亚金-托姆定理中就不会出现次数偏移；参见例 10.14。[59] Han-Huang-Liu-Zhang 的 [209,章节 6] 以及 Lazaroiu-Shahbazi 的工作中也出现了 Spin-O(2) 结构，但没有讨论其配边群 [210]。

定理 14.18。 $^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}$ 的前几个 *ko*-同调群为：

$$\begin{aligned}
ko_0\big((BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}\big) &\cong \mathbb{Z} & ko_6\big((BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}\big) &\cong 0\\
ko_1\big((BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}\big) &\cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2} & ko_7\big((BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}\big) &\cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3}\\
ko_2\big((BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}\big) &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & ko_8\big((BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}\big) &\cong \mathbb{Z}\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\\
ko_3\big((BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}\big) &\cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3} & ko_9\big((BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}\big) &\cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 6}\\
ko_4\big((BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}\big) &\cong \mathbb{Z} & ko_{10}\big((BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}\big) &\cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}\\
ko_5\big((BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}\big) &\cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2} & ko_{11}\big((BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}\big) &\cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 4}\,.
\end{aligned} \tag{14.19}$$

证明。 我们将使用 Adams 谱序列。第一步是计算 E_2 页，也就是 $H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上的 $\mathcal{A}(1)$ 的 Ext。因此，我们需要确定 $\mathcal{A}(1)$ 在 $H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上的作用。命题 11.4 表明，对于 $a\in H^*(BD_8;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，

$$\mathrm{Sq}^1(Ua) = U\big(w_1(V\oplus 3\mathrm{Det}(V))a + \mathrm{Sq}^1(a)\big) \tag{14.20a}$$
$$\mathrm{Sq}^2(Ua) = U\big(w_2(V\oplus 3\mathrm{Det}(V))a + w_1(V\oplus 3\mathrm{Det}(V))\mathrm{Sq}^1(a) + \mathrm{Sq}^2(a)\big)\,. \tag{14.20b}$$

在引理 14.11 中，我们得知 $w_1(V)=x$ 且 $w_2(V)=w$，因此利用惠特尼和公式，$w_1(V\oplus 3\mathrm{Det}(V))=0$ 且 $w_2(V\oplus 3\mathrm{Det}(V))=w$。这样，我们便原则上根据 $H^*(BD_8;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上的 $\mathcal{A}(1)$ 作用，确定了 $H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上的 $\mathcal{A}(1)$ 作用。为使描述明确，首先利用嘉当公式 (11.2)，将问题归结为计算生成元 x、y 和 w 的斯廷罗德平方。我们在引理 14.13 的陈述之前刚刚给出了这些元素的斯廷罗德平方。现在，我们已经完全明确地描述了 X 的上同调上的 $\mathcal{A}(1)$-模结构；例如，$\mathrm{Sq}^1(Ux)=Ux^2$ 且 $\mathrm{Sq}^2(U)=Uwx$。我们可以照此继续，确定 12 次及以下所有类上的 $\mathcal{A}(1)$ 作用；我们使用计算机程序验证了以下计算。

命题 14.21。 存在一个 $\mathcal{A}(1)$-模的同构

$$\begin{aligned}
H^*\big((BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big) \cong\ & R_2\oplus\Sigma J\oplus\Sigma^4 \quad \oplus\Sigma^7\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\Sigma^8 R_2\oplus\Sigma^9 J\oplus\Sigma^{12}\\
&\oplus\Sigma^3\mathcal{A}(1)\oplus\Sigma^3\mathcal{A}(1)\oplus\Sigma^5\mathcal{A}(1)\oplus\Sigma^5\mathcal{A}(1)\oplus\Sigma^7\mathcal{A}(1)\\
&\oplus\Sigma^7\mathcal{A}(1)\oplus\Sigma^9\mathcal{A}(1)\oplus\Sigma^9\mathcal{A}(1)\oplus\Sigma^{11}\mathcal{A}(1)\oplus\Sigma^{11}\mathcal{A}(1)\\
&\oplus\Sigma^{11}\mathcal{A}(1)\oplus\Sigma^{11}\mathcal{A}(1)\oplus P
\end{aligned} \tag{14.22}$$

其中 P是13-连通的。自由的 $\mathcal{A}(1)$ 直和项由类 Ux^3, Uy^3,Uw^2x, Uw^2y, Ux^7, Uy^7, Uw^2x^5, Uw^2y^5, Ux^{11}, Uy^{11}, Uw^4x^3 和 Uw^4y^3 生成。我们将其绘于图 *21*。

这些分量 $\mathcal{A}(1)$-模定义如下。

- R_2 是唯一非零映射 $\Sigma^{-1}\mathcal{A}(1)\to\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的核。

- $J := \mathcal{A}(1)/\mathrm{Sq}^3$。这个模称为小丑模。
- $:= \mathcal{A}(1)/(\mathrm{Sq}_1,\ \mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^3)$。这称为倒置问号。
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 只是一个一维的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-向量空间，其 $\mathcal{A}(1)$ 作用是平凡的 n.

我们无需担心 P：它的 Ext 集中在次数 13 及以上，因此不会影响计算。对于其余这些 $\mathcal{A}$(1)-模 M，$\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(1)}(M)$ 已知： $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 见定理 11.12， $[115,$ 、 R_2、 J 见图 $29]$ ， 以及 。

有了这些结果，我们在图 22 顶部画出 Adams 谱序列的 E_2 页，用于 $ko_*(X)$。黑点部分来自 $H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中的 $\Sigma^k\mathcal{A}(1)$ 直和项；Margolis 定理（以推论 11.18 的形式）表明，它们不参与非零微分或非平凡扩张。

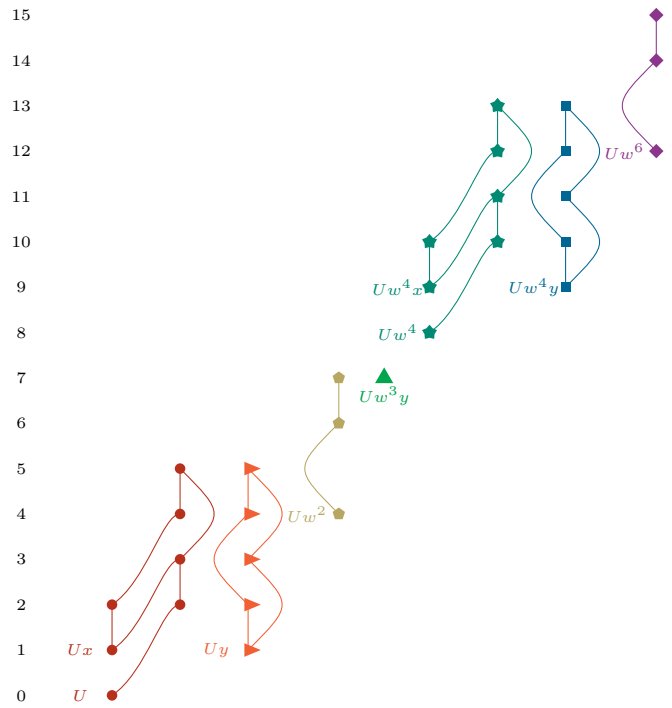


图 21：命题 14.21 中所述的 $(BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}$ 的低次模 2 上同调的一部分。图中所示的直和项包含 12 次及以下的所有元素，但那些包含在未绘出的 12 $\Sigma^k\mathcal{A}(1)$ 直和项中的元素除外，以免图示过于杂乱。

可能存在许多不同的微分。我们将利用此前关于 Spin-Mp$(2,\mathbb{Z})$ 配边的工作推导其中一些：映射 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \hookrightarrow D_8$ 诱导 Thom 谱的映射Φ：$(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2} \to (BD_8)^{V+3_{\mathrm{Det}(V)}-5}$。取 Spin 配边后，此映射有一个几何描述：将一个 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 流形映到其典范 Spin-D_{16}结构所对应的配边类。

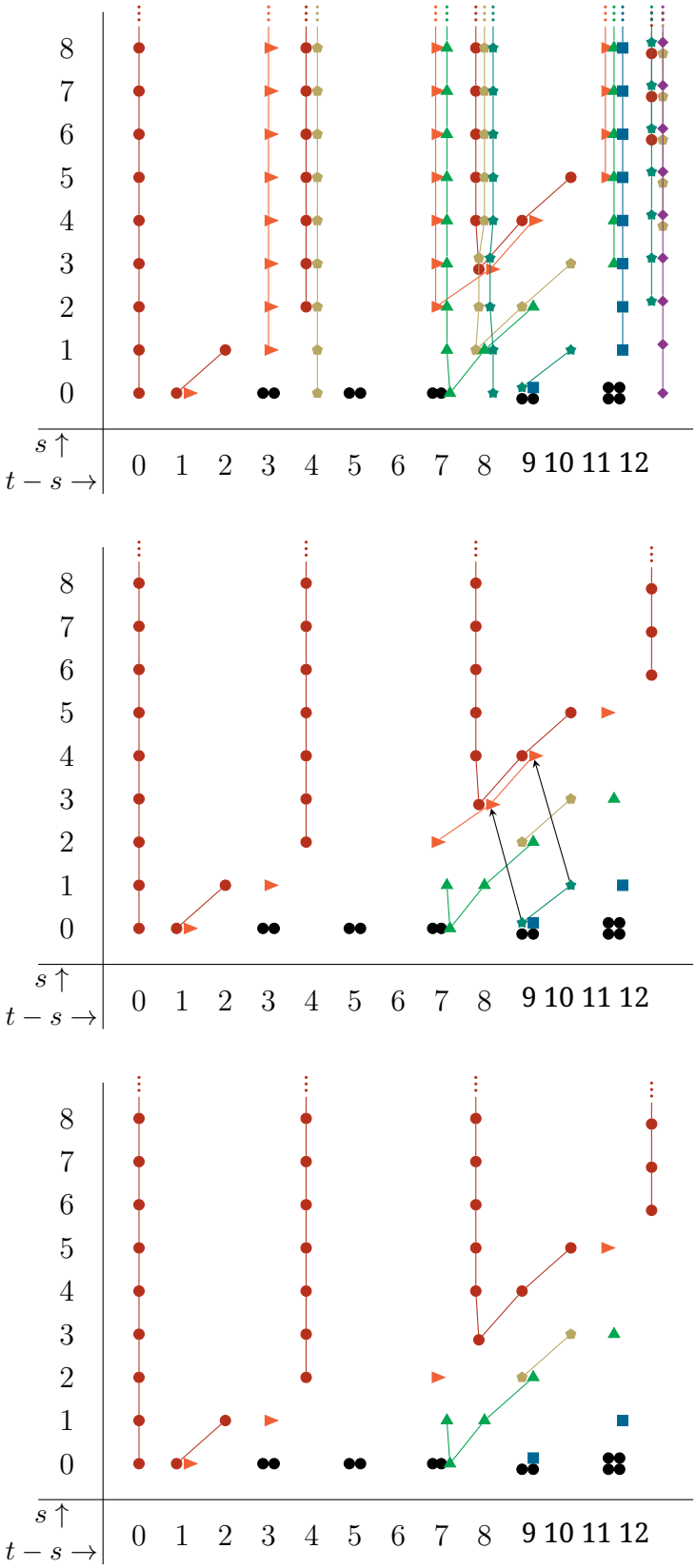


图 22：计算 $ko_*\left((BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}\right)$ 的 Adams 谱序列。上： E_2 页。存在许多非零的 d_2，我们将在引理 14.24 中证明这一点。中：E_3 页；我们将在引理 14.26 中确定这些微分。下： $E_4 = E_\infty$ 页。112

对于 $2 \le r \le \infty$, Φ 会诱导一个映射 Φ_*，从 $ko_*\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)$ 的 Adams 谱序列第 E_r 页映射到 $ko_*(X)$ 的 Adams 谱序列第 E_r 页，并且该映射与微分交换。我们将计算 Φ_* 的像，并发现它足够大，使我们能够推断出所需的大部分微分。

为了计算 Φ_*，我们可以使用一个技巧：我们已将 Thom 谱 $(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}$ 和 X 的上同调分解为若干直和项，而它们之间的映射大体上保留了这种分解。对于每个直和项，该映射构成一个 $\mathcal{A}(1)$-模的短正合列的一部分，因此我们可以利用 Ext 中的长正合列进行计算。有关此技巧的更多信息和示例，请参见 [115, 第 4.6] 节。我们在图 23 中逐个直和项地进行计算。

定义 14.23。如果某个微分因显然的理由而为零，我们就称它因显然的理由而为零：若其定义域或陪域为零，因此可证明它为零；若为了在 E_2 页上与 h_i 作用相容，它必须为零；或者若它来自上同调中的一个 $\Sigma^k\mathcal{A}(1)$ 直和项，则根据 Margolis 定理它为零（见推论 11.18）。

引理 14.24。在范围 $t-s \le 12$ 内，所有 d_2 要么因显然的理由而为零，要么属于 Φ_* 的像。

证明。我们已在图 23 中计算了 $\mathrm{Im}(\Phi_*)$；接下来只需直接验证该引理。具体来说，所有不因显然的理由而为零的 d_2，要么位于 h_0 塔之间，要么从 11 线映到 10 线。所有 h_0 塔都属于 Φ_*,[60] 的像，整个 10 线也如此；而整个 11 线中，只有来自 $H^*\big((BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}$ 中 $\Sigma^{11}\mathcal{A}(1)$ 直和项的直和项除外；此外，Margolis 定理会消去从这些后者直和项出发的微分。因此，从 11 线映到 10 线的 d_2，要么因显然的理由而为零，要么属于 Φ_* 的像。

□

因此，我们知道范围内所有的 d_2s：h_0-塔之间的微分与 $ko_*\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)$ 中的相同，其他所有 d_2s 都消失。我们在图 22 中间绘制 E_3-页。出于显而易见的原因，大多数 d_3 微分都消失，除了 d_3：$E^{0,\ 9\ 3} \to E^{3,\ 11\ 3}$ 以及d_3：$E^{1,\ 11\ 3} \to E^{4,\ 13\ 3}$。Margolis 定理与 h_i-等变性的结合意味着，第一个 d_3 要么为 0，要么将青色直和项映射到橙色直和项，并在 $E^{0,\ 9\ 3}$ 的其余生成元上消失；h_1-等变性进而迫使后一个 d_3 要么消失，要么满射到 $E^{4,\ 13\ 3}$ 中的橙色直和项，并且一个消失当且仅当另一个也消失。

为了处理这些 d_3s，我们需要证明它们是最后一批可能非零的微分。除 d_4：$E^{1,\ 12\ 2} \to E^{5,\ 15\ 2}$ 之外，所有更长的微分都出于显而易见的原因而消失。

[60] Φ_* 在 h_0 塔上并非总是满射，例如拓扑次数7中的绿色 h_0塔。但它的满射程度已经足够：对于范围内的每个 h_0 塔，Φ_* 在该 h_0 塔上的余核都是有限维的。由于h_0塔是通过对 E_2 页上的某个元素施加 h_0 生成的，而且微分必须与 h_0 作用相容，因此这种“并非完全满射”的情况已经足够：它决定了该 h_0塔上所有元素的微分值。

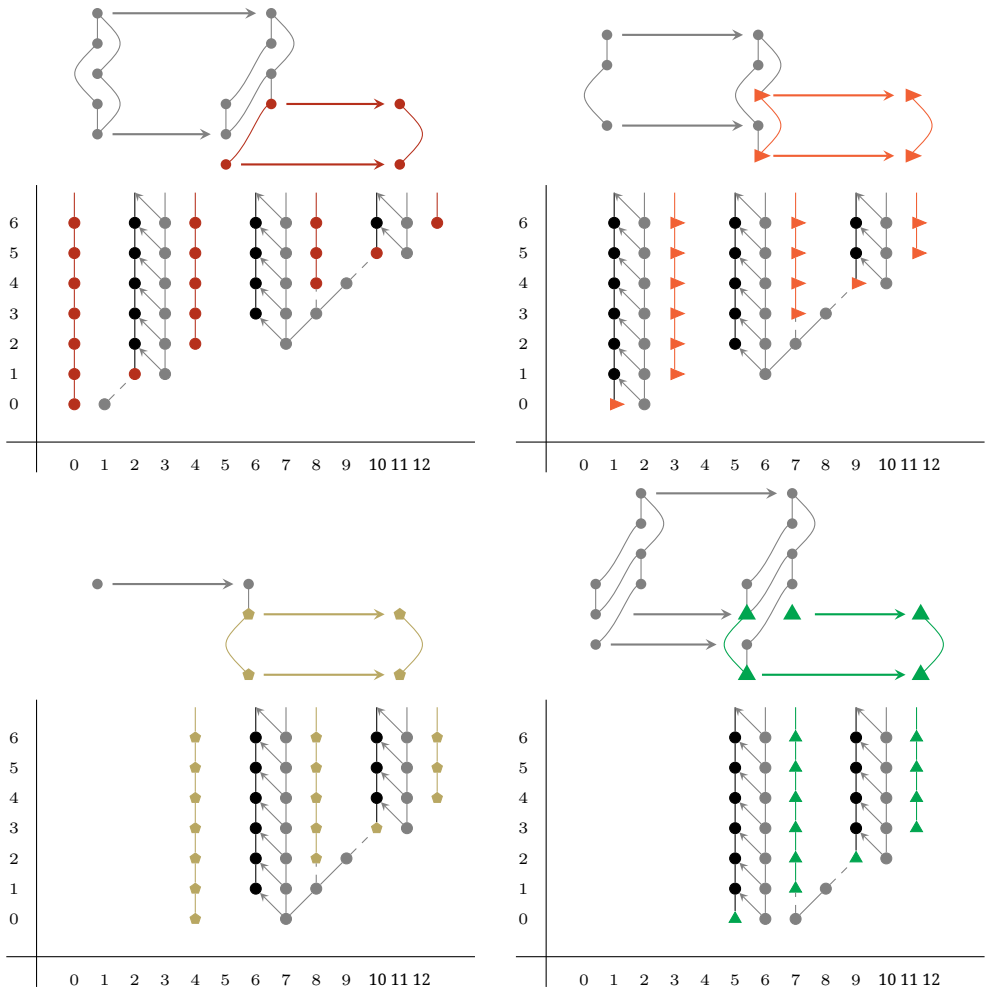


图 23：映射在 E_2页上的像的计算的一部分，该映射由从 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边到 Spin-D_{16} 配边的映射诱导。彩色部分表示像；黑色部分表示核。在右下角的图（绿色三角形）中，2次的两个绿色直和项都非平凡地映射到 $C\eta$中的 2 次直和项；核中的 2 次类 ΣR_2 映射到它们的和。青绿色星形项、蓝色正方形和紫色菱形直和项的论证，分别类似于红色圆圈、橙色三角形和黄色五边形直和项的论证。

引理 14.25. *This* d_4: $E^{1,\ 12}_{*,\ 4} \to E^{5,\ 15\ 4}$ 为零。

证明。 生成元 x 属于 $E^{1,\ 12}_{*,\ 4} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 属于 Im(Φ_*)。由于 d_4 与 Φ_*对易， $d_4(x) \in$也属于 Im(Φ_*)。然而，在定理 13.15 的证明中，我们看到，在 $ko_*\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)$ 的 Adams 谱序列中， $E^{5,\ 15}_{*,\ 4} = 0$，因此 $d_4(x) = 0$。 □

证明示意见图 24。

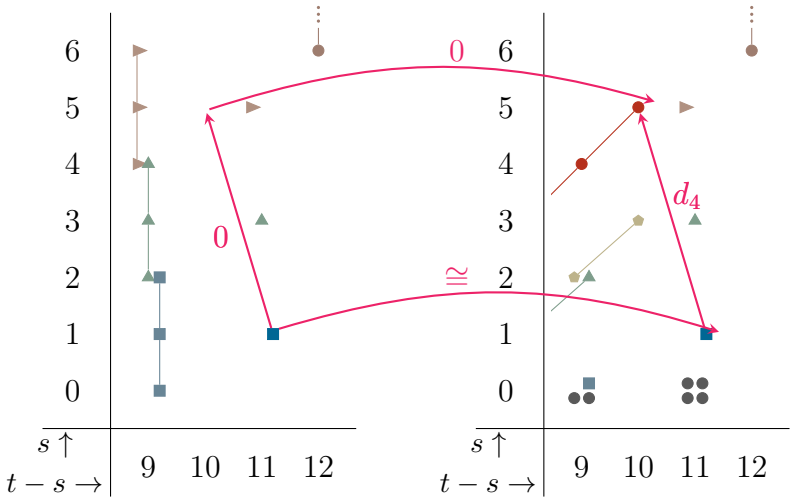


图 24：左：$ko_*\big((B\mathbb{Z}/4)^{V-2}\big)$ 的 E_4-页（Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 配边的计算）。右：$ko_*\big((BD_8)^{V+3\mathrm{Det}(V)-5}\big)$ 的 E_4-页（Spin-GL$^+$(2，$\mathbb{Z}$) 配边的计算）。水平的粉色箭头表示由 Φ 诱导的这两个谱序列之间的映射。该映射与微分对易，因此图示的 d_4 必须为零。这是引理 14.25 的图示证明。

现在，除了标出的两个 d_3 微分外，我们已经理解了 E_∞-页。

引理 14.26。 从 $E^{0,}{}_{9\ 3}$ 和 $E^{1,}{}_{11\ 3}$ 出发的 d_3*s* 不为零。

证明。 $E^{4,\ 13}_{*,3} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，但由于 Adams 微分与 h_1 交换， d_3: $E^{1,\ 11}_{*,\ 3} \to E^{4,13\ 3}$ 的像包含在橙色三角形 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项中，而不是红色圆圈中。因此，当且仅当该直和项的非零元素能存活到 E_∞-页时，这个微分才为零。将该非零元素记为 α。由于微分与 h_1 交换，从 $E^{0,}{}_{9\ 3}$ 和 $E^{1,}{}_{11\ 3}$ 出发的微分命运相连：一个为零当且仅当另一个也为零。因此，为了证明这个引理，我们将证明 $\alpha \in E^{4,}{}_{13\ 3}$ 不可能存活到 E_∞-页。

反过来，假设 α 确实存活。观察图 23 可知， α 属于由 Φ诱导的谱序列映射 Φ_* 的像；选取其原像 $\widetilde{\alpha}$，它是 ko$_*((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2})$ 的 E^4 中橙色三角形 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项的非零元素。令 $\widetilde{\beta}$为 ko$_*((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2})$ 的 E^2 中绿色三角形 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项的非零元素，令 β 为 ko$_*(X)$ 的 E^2 中绿色三角形 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项的非零元素；那么

$\sim\Phi_*(\beta) = \beta$。根据我们的假设，这四个类都存活到各自的 E_∞页，因此在 $ko_9((B\mathbb{Z}/4)^{\rho-2})$ 和 $ko_*(X)$ 中分别定义非零元素 a、b、$\tilde{a}$ 和 b，其中 a 是 α的提升，b 是 β的提升，$\tilde{a}$ 是 $\tilde{\alpha}$的提升，b 是 β的提升，并且 $\Phi(\tilde{a}) = a$ 以及 $\Phi(b) = b$。我们在定理 13.15 的证明中推得的隐藏扩张（见图 19）意味着我们可以选择 $\tilde{a} = 2b$，因此也可以选择 $a = 2b$。

α 和 β 分别是 h_1 乘以其他一些类 γ 和 δ，根据我们的假设，γ 和 δ 都存活到 E_∞页，因此提升定义类 c，$d \in ko_8(X)$，其中 $\eta c = a$和 $\eta d = b$。也就是说，$a = 2\eta d$，但这与事实矛盾，因为 $2\eta = 0$ 和 $a \neq 0$。 □

因此，对于 $t - s < 12$，有 $E_4 = E_\infty$；我们在图 22 的下方画出了这一点。

现在我们必须处理扩张问题。经检查，$t-s < 6$ 可能出现隐藏扩张的唯一位置是在维数 3，而 Margolis 定理（推论 11.18）排除了此处存在隐藏扩张的可能性。然而，在拓扑次数 7 到 11 中，我们必须处理扩张问题。

引理 14.27。该扩张

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow ko_7(X) \longrightarrow (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \tag{14.28}$$

分裂，因此 $ko_7(X) \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。

证明。Margolis 定理（推论 11.18）分裂出黑色的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项。若 (14.28) 不分裂，则橙色向右三角形 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 和绿色向上三角形 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 合并成一个 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$。令 $x \in ko_7(X)$ 为一个元素，其在E_∞-页中的像是绿色向上三角形 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset E^{0,7}_\infty$的生成元；那么 (14.28) 分裂当且仅当 $4x = 0$。

图 23 中的计算表明 $2x \in \mathrm{Im}(\Phi_*)$。令 $y \in ko_7\big((B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\rho-2}\big)$ 为 $2x$ 的一个原像。于是 $4x = \Phi_*(2y)$，且 $2y = 0$，因此 (14.28) 分裂。 □

引理 14.29。$ko_8(X) \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。

证明。这里有无数个扩张问题需要处理，但最终答案的同构类型要么是 $\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，要么是 $\mathbb{Z}$，而后一种情况只有在第一个扩张

$$0 \longrightarrow E^{3,11}_\infty \longrightarrow A \longrightarrow E^{1,9}_\infty \longrightarrow 0 \tag{14.30}$$

是非平凡的，但非平凡的 h_1-作用 $E^{3,11}_\infty \to E^{4,13}_\infty$可提升为由 η in$ko_*(X)$ 给出的非零作用；根据引理 11.23，这会使该扩张分裂。 □

引理 14.31。$ko_9(X) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。

证明。我们需要确定该扩张

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ . \tag{14.32}$$

原则上，该扩张也可能涉及红色圆圈和黄色五边形直和项，但引理 11.23 表明，限制在这些直和项上的扩张是分裂的，因此我们只需确定 (14.32)。然后，仿照引理 14.26 的证明进行论证，得出若 x 是蓝色正方形直和项的生成元的一个原像，则 $2x = 0$。这使 (14.32) 分裂。

□

Lemma 14.33. $ko_{10}(X) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

证明。 我们必须拆分这个扩张

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{14.34}$$

在 E_∞ 页上， h_1 从第 9 线到第 10 线的作用是满射。这可以提升，从而推出 $\eta \in \pi_1(\mathbb{S})$ 的作用也是满射；该作用定义了映射 $ko_9(X) \to ko_{10}(X)$。这意味着 $ko_{10}(X)$ 中元素的阶不超过 $ko_9(X)$ 中最大元素的阶，而 $2ko_9(X) = 0$，因此 $ko_{10}(X)$ 中不可能存在 4 阶元素。

□

引理 14.35。 $ko_{11}(X) \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 4}$.

证明。 滤过 0 中的四个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项由 Margolis 定理（定理 11.17）分裂出来，因为它们来自 $H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中的 $\Sigma^{11}\mathcal{A}(1)$ 直和项。剩下的是 Adams 滤过较高处的橙色、绿色和蓝色直和项；它们属于从 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边的 E_∞ 页到 Spin-D_{16} 配边的映射 Φ 的像。对于 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边，我们在定理 13.15 的证明中看到，这三个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项合并成一个 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$，因此这里也同样如此。

□

注记 14.36。 利用这一点，我们可以给出引理 14.27 的另一种证明。回忆定理 11.12 中的元素 $v \in \mathrm{Ext}^{3,7}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，它作用于空间或谱 X 的 Adams 谱序列的各页上。在 Spin 配边中，这对应于与一个 K3 曲面取直积。

可以证明 v 将绿色向上三角形 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset E^0_{\infty,7}$ 同构地映到 $E^3_{\infty,14} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，同样也将 $E^2_{\infty,9} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 同构地映到$E^5_{\infty,16} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.[61] 设 $x \in ko_7(X)$ 是一个类，其在 E_∞-页中的像是绿色向上三角形 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset E^0_{\infty,7}$ 的生成元，并假设 (14.28) 中的扩张不分裂。正如我们在引理 14.27 的证明中所指出的，Margolis 定理意味着黑色 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项分裂出来，因此 (14.28) 不分裂的唯一可能性是绿色和橙色直和项合并，这将意味着 $4x$ 在E_∞-页中的像是橙色三角形 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset E^2_{\infty,9}$中的非零元素。

现在作用 v。引理 14.35 意味着，11 线中的彩色直和项组合成一个$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$，其生成元为 y，而绿色向上三角形的生成元 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset E^3_{\infty,14}$

[61]这来自对 Ext($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 在 Ext($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 和 Ext(J) 上的作用所作的一次计算。对于 Ext($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)，所声称的 v-作用是环结构的推论，我们已在定理 11.12 中给出该环结构；对于 Ext(J)，可以利用与 v (1)-模的一个短正合列相关联的 Ext 群长正合列，得到所声称的 $\mathcal{A}$-作用，这与我们在例 11.15 中计算某些 v-作用的方法类似。

提升到 $2y \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$。我们上面注意到，从 7 线到 11 线的 v 作用意味着 $\mathrm{K3} \cdot x = 2y$,[62] 因此 $4(\mathrm{K3} \cdot x) = 0$。但我们上面注意到，橙色直和项上的非平凡 v 作用意味着 $\mathrm{K3} \cdot (4x) \neq 0$，这就产生了矛盾。

至此，我们完成了定理 14.18 的证明。 □

汇总所有部分，我们得到 Spin-$\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{Z})$ 配边群，如表 10 所示。同样，我们已列出接下来将推导的生成元。

k	$\Omega_k^{\text{Spin-GL}^+_{(2,\mathbb{Z})}}$(点)	生成元
0	$\mathbb{Z}$	pt_+
1	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	$(L_1^4,\ S_R^1)$
2	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$S_p^1 \times S_R^1$
3	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3} \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	$(L_4^3, \mathbb{RP}^3, \widetilde{\mathbb{RP}}^3\ L_3^3)$
4	$\mathbb{Z}$	E
5	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	$(L_4^5,\ X_5)$
6	0	
7	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3} \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$	$(\mathbb{RP}^7, \widetilde{\mathbb{RP}}^7, W_2^7, W_1^7, L_3^7)$
8	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	$(W_{1,8}, \mathbb{HP}^2, W_1^7 \times S_p^1)$
9	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 8}$	$(W_1^7 \times S_p^1 \times S_p^1, X_9, \widetilde{X}_9、\ L_4^9、\ W_1^9、$ $B \times L_4^1、\ \mathbb{HP}^2 \times L_4^1、\ \mathbb{HP}^2 \times S_R^1)$
10	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 4}$	$(B \times L_4^1 \times S_p^1、\ W_1^9 \times S_p^1、\ \mathbb{HP}^2 \times L_4^1 \times S_p^1、\ X_{10})$
11	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 9} \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$	$(\mathbb{RP}^{11}、\widetilde{\mathbb{RP}}^{11}\ X_{11},\ \widetilde{X}_{11}, \mathbb{HP}^2 \times L_4^3, \mathbb{HP}^2 \times \mathbb{RP}^3,$ $\mathbb{HP}^2 \times \widetilde{\mathbb{RP}}^3\ X_{10} \times L_4^1, X_{10} \times S_R^1, Q_4^{11}, \mathbb{HP}^2 \times L_3^3, L_3^{11})$

表 10：配边群 $\Omega^{\text{Spin-GL}^+}_{(2,\mathbb{Z})}\ k$ (点)及其生成元（顺序与群直和项相同），对应于 $k \leq 11$。

14.3 确定 $p = 2$ 处的生成元

从 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 配边到 Spin-$\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{Z})$ 配边的映射在 3-挠元上是满射，正如我们在第 14.1 节中所见。这个映射在 2-挠元上不是满射，因此我们需要为余核（相当大）中的所有元素找到生成元。

[62]生成元的选择不止一种 y；更严谨地说，我们可以选择一个生成元 y，使得 $\mathrm{K3} \cdot x = 2y$。

14.3.1 来自 Spin-$\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})$ 配边的生成元

我们已经利用从 Spin-Mp(2， $\mathbb{Z}$) 配边到 Spin-GL$^+$(2， $\mathbb{Z}$) 配边的映射，求出了 Spin-GL$^+$(2， $\mathbb{Z}$) 配边的 Adams 谱序列；我们还将再次利用这个映射来寻找一些生成元。我们在第 14.1 节中已经看到，在 3-局部情形下，这个映射是满射，因此本小节余下部分将聚焦于素数 2 处的情形，此时该映射是从 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边到 Spin-D_{16} 配边的映射。观察图 23，我们可以刻画这个映射的像。

- 在维数0和4中，该映射是满射，因此我们得知点$_+$ 生成$\Omega^{\text{Spin-}}_{0}{}^{D_{16}}$(点)，而恩里克斯曲面生成 $\Omega^{\text{Spin-}}_{4}{}^{D_{16}}$(点)。
- 在维数1和3中，该映射覆盖橙色三角形 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项，从而得到透镜空间 L_4^k 作为 Spin-GL$^+(2,\mathbb{Z})$ 配边中这些直和项的生成元；然而，还有其他 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 不在像中的直和项。
- 在维数2和10中，该映射的像为0。
- $\Omega^{\text{Spin-}}_{5}{}^{D_{16}}$(点) $\cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$；Margolis 定理指出，这些直和项由模2特征类 w^2x 和 w^2y检测。 w^2y 直和项属于来自 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边的映像，因此由透镜空间L_4^5生成。
- 在 7 维时，映射的像不包含任何生成元，不过它确实包含绿色三角形 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 直和项生成元的两倍。
- 在维数 8 时，其中一个生成元是 $\mathbb{HP}^2$，它属于该映射的像。另一个生成元 X 不在像中，但与 Bott 流形共边的 $2X$在像中。
- 在 9 维时，$\Omega^{\text{Spin-}}_{9}{}^{D_{16}}$(点)由八个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项组成。其中三个属于从 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边映射得到的像：绿色三角形 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 和蓝色正方形 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$在ko_9中的直和项，以及橙色三角形 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在ko_1中，因此得到三个生成元，分别为：L_4^9、$\widetilde{L}_4^9$和 $\mathbb{HP}^2 \times L_4^1$。
- 在 11维时，映射的像包含 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 直和项，因此 Q_4^{11}是一个生成元；但不包含 ko_{11} 中的四个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项，这些直和项可由模 2 上同调类 x^{11}、 y^{11}、 w^4x^3和 w^4y^3检测到。在 ko_3 上，它像在 3 维时一样，能看到三个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$直和项中的一个，因此得到生成元 $\mathbb{HP}^2 \times L_4^3$。在 $ko\langle 2\rangle_1$上，它能看到其中一个生成元，因此得到 $X_{10} \times L_4^1$。

该映射的示意图见图25。

从 F理论 的角度来看，$\Omega_*^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (点) 中的类对应于保持超对称性的缺陷，而 $\Omega^{\text{Spin-GL}^+}_{(2,\ \mathbb{Z})\ *}$ (点) 中的类则可能破坏超对称性。因此

映射 $\Omega_*^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})} \to \Omega^{\text{Spin-GL}^+}{}_{(2,\ \mathbb{Z})\ *}$ 的像由这样的类构成：尽管我们不关心保持超对称性，但这些类仍能与保持超对称性的缺陷相匹配。更多信息请参见第 7.1 节。例如，在 1 维中，映射 $\Omega_1^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})} \to \Omega^{\text{Spin-GL}^+}{}_{(2,\ \mathbb{Z})\ 1}$ 是一个映射 $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$：$\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ 的每个生成元都映射到一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项的生成元，而第二个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项是新的。

- $\Omega_{\text{Spin-Mp}(2,\ \mathbb{Z})\ 1}\,(\text{pt})$ 的 $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ 直和项由透镜空间 L^1_{12}生成，在弦理论中对应于一个 D7 膜（见第 6.1 节）。此类在 Spin-$\text{GL}^+(2,\ \mathbb{Z})$ 配边中的像的两倍为零；这意味着，无需堆叠 24 个 D7 膜使其变得平凡，只需两个即可。

- $\Omega_{\text{Spin-GL}^+(2,\ \mathbb{Z})\ 1}\,(\text{pt})$ 中由 S^1_R 生成的新颖 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项，对应于一种我们预测不会保持超对称性的新缺陷。这就是反射 7 膜，正如我们在第 7.1 节中讨论的那样（另见 [23]）。

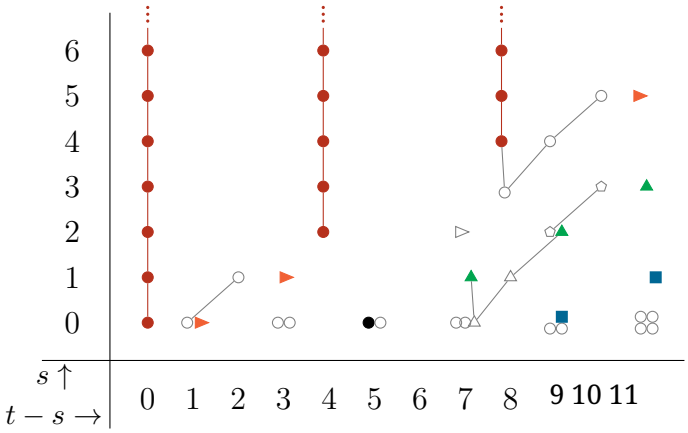


图25：映射 $\Omega_*^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}\,(\text{pt}) \to \Omega^{\text{Spin-GL}^+}{}_{(2,\ \mathbb{Z})\ *}\,(\text{pt})$ 的部分像：具体来说，是来自 ko_* 的部分。ko_{*-8} 部分类似；得益于引理 10.39，$ko\langle 2\rangle_{*-10}$ 部分是直接的，而 3-局部部分是满射的，正如我们在第 14.1 节中所证明的。

14.3.2 来自$\Omega_k^{\text{Spin}}\,(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$的生成元

令 $i_4, \tilde{i}_4$ 为附录 B.2 中定义的两个包含映射：具体而言，这些映射将旋转映射为旋转，将反射映射为反射，但 i_4 将 D_4 的标准反射生成元 s 映射为 D_8 的标准反射生成元，而 $\tilde{i}_4$ 将 s 映射为另一个反射。映射 i_4 和 $\tilde{i}_4$ 从 Spin-D_4 流形诱导出两个到 Spin-D_{16} 流形的映射。由于 $D_4 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，Spin $\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} D_4 \cong$ Spin $\times\, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作为对称类型是相同的：Spin-D_4 流形等同于带有主 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-丛的 Spin 流形。$\Omega_k^{\text{Spin}}\,(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的生成元已得到充分理解，因此我们将利用它们寻找更多 Spin-D_8流形。图 26 展示了这种方法能够揭示的内容。

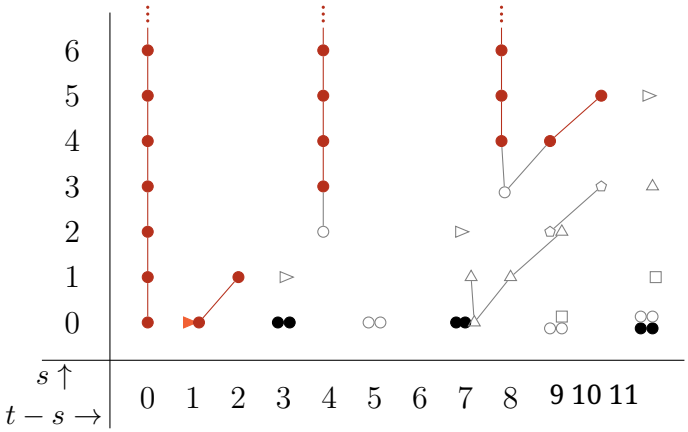


图 26：彩色和黑色的直和项是 $\Omega_*^{\text{Spin}}(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \Omega_*^{\text{Spin-}D_{16}}$(点) 在两个映射 i_4, $\tilde{i}_4$ 下的像。更多信息请参见第 14.3.2 节。与图25一样，这幅图仅编码了来自 ko_* 的直和项；ko_{*-8} 类似，而 $ko\langle 2\rangle_{*-10}$ 则因引理 10.39 而显而易见。

给定一个带有主 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-丛的 Spin 流形 M，我们将用 M 表示由 i_4 诱导的 Spin-D_{16} 结构，并用 M 表示由 $\tilde{i}_4$诱导的 Spin-D_{16} 结构。我们将找到若干例子，其中 $\Omega_*^{\text{Spin}}(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的一个生成元在 i_4 和 $\tilde{i}_4$的作用下，分别给出 $\Omega_*^{\text{Spin-}D_{16}}$(pt) 的两个不同生成元。

回顾一下，$H^*(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[a]$，其中 a 的次数为 1。

引理 14.37。 拉回映射 $i_4^*\colon H^*(BD_8;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^*(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 将 $x \mapsto a, y \mapsto 0$ 和 $w \mapsto 0$ 发送到。$\tilde{i}_4^*$ 将 $x \mapsto a$, $y \mapsto a$ 和 $w \mapsto 0$ 发送到。

证明。回顾一下，我们将 x、y 和 w 定义为与 D_8 的表示相关联的向量丛的斯蒂费尔–惠特尼类。因此，要理解 i_4^* 和 $\tilde{i}_4^*$，只需将这些表示限制到 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset D_8$，并计算其在 $B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上的伴随向量丛的斯蒂费尔–惠特尼类。

- 对于 x 和 w，我们使用了 D_8 在 $\mathbb{R}^2$ 上通过旋转和反射作用的标准表示 V。对于 i_4 和 $\tilde{i}_4$，V 的拉回都是 $\mathbb{R}\oplus\sigma$，其中 σ 是符号表示，因此 x 的拉回是 $w_1(\sigma) = a$，而 w 的拉回是 $w_2(\sigma) = 0$。
- 对于 y，我们使用了 D_8 的实特征 χ_y，其中四分之一转被映射到 -1，反射 s 被映射到 1。因此 $i_4^*(\chi_y)$ 是平凡的，所以 $i_4^*(y) = 0$ ——又因为 $\chi_y(rs) = -1$，$\tilde{i}_4^*(y)$ 是非平凡的！因此，它是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的唯一非零特征，其 $w_1 = a$，所以 $\tilde{i}_4^*(y) = a$。

□

特别是，我们假设，如果 c 是一个模 2 上同调类，对应于 $\Omega_*^{\text{Spin-}D_{16}}$(点) 中 Adams 滤过 0 的某个生成元，并且 $i_4^*(c)$ 或 $\tilde{i}_4^*(c)$ 非零，那么该生成元或许可以由 $\Omega_*^{\text{Spin}}(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$中的一个元素实现。这个猜想适用于 x， y，

x^3, y^3, x^7, y^7, w_4^2x, w_4^2y, x^{11}, y^{11}, $w_4^2x^3$, $w_4^2y^3$, w_4w_6x 和 w_4w_6y ——在所有这些情况下，我们都能找到一个生成元。

- 对于 x、y、x^3、y^3、x^7、y^7、x^{11} 和 y^{11}，生成元是适当维数的实射影空间，其主 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-丛为 $S^k \to \mathbb{RP}^k$。对于 x^k，使用 $\mathbb{RP}^k$；对于 y^k，使用 $\widetilde{\mathbb{RP}}^k$。我们用 S^1_R 表示 $\mathbb{RP}^1$，因为我们通常将第二部分中的这个生成元视为一个圆，其对偶丛由 M¨obius 丛和由反射定义的映射 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ 诱导而来。

- 对于 w_4^2x 和 w_4^2y，分别使用 $\mathbb{HP}^2 \times S^1_R$ 和 $\mathbb{HP}^2 \times \widetilde{S}^1_R$，其主 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-丛是 S^1 因子上的 M¨obius 丛。同样，对于 $w_4^2x^3$ 和 $w_4^2y^3$，使用 $\mathbb{HP}^2 \times \mathbb{RP}^3$ 和 $\mathbb{HP}^2 \times \widetilde{\mathbb{RP}}^3$，其主 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-丛为 $\mathbb{HP}^2 \times S^3 \to \mathbb{HP}^2 \times \mathbb{RP}^3$。∼

- 对于 w_4w_6x，使用 $X_{10} \times S^1_R$；对于 w_4w_6y，使用 $X_{10} \times S^1_R$；这两种情况下，主$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-丛都是 S^1_R 因子上的 M¨obius 丛。

我们也可以利用 $\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 看出正 Adams 滤子中的三个类。正如我们在第 11.4.2 节中讨论的，h_1-作用 $E^{0,1}_\infty{}^3$可提升到与 S^1_p的乘积上，这意味着 $\Omega_2^{\text{Spin-}D_{16}}(\mathrm{pt})$ 由 $S^1_p \times S^1_R$生成，其中主 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-丛在第二个因子上非平凡；这里使用 i_4 还是 $\tilde{\imath}_4$ 都无关紧要。Bott 元素 $w \in \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的作用定义了一个同构 $E^{0,1}_\infty{}^3 \to E^{4,13}_\infty$；正如我们在第 11.4.2 节中提到的，这意味着 $\Omega_9^{\text{Spin-}D_{16}}(\mathrm{pt})$ 的红圆分量 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$（对应于 $E^{4,13}_\infty$）由 $B \times S^1_R$生成，其中主 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-丛在第二个因子上非平凡。最后，h_1-作用 $E^{4,13}_\infty \to E^{5,15}_\infty$可提升，从而告诉我们 $\Omega_{10}^{\text{Spin-}D_{16}}(\mathrm{pt})$ 的红色圆圈 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项由 $B \times S^1_p \times S^1_R$生成，其中主 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-丛在最后一个因子上非平凡。

14.3.3 Spin-D_8 生成元与 Arcana

使用 D_4 而非 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，我们可以做得更好。与 i_4 和 $\tilde{\imath}_4$ 类似，存在两个映射 i_8，$\tilde{\imath}_8$：$D_4 \hookrightarrow D_8$，我们也会在附录 B.2 中讨论它们。由于 $D_4 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，$H^*(BD_4;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[a,b]$ 且具有 $|a| = |b| = 1$。

引理 14.38。$i_8^*(x) = \tilde{\imath}_8^*(x) = \tilde{\imath}_8^*(y) = a$，$i_8^*(y) = 0$，以及 $i_8^*(w) = \tilde{\imath}_8^*(w) = ab + b^2$。

证明。回顾一下，我们将 x、y 和 w 定义为与 D_8 表示相关联的向量丛的斯蒂费尔-惠特尼类。因此，它们在 BD_4 上的拉回就是与这些表示限制到 D_4 后所关联的丛相对应的斯蒂费尔-惠特尼类。由于 D_4 是阿贝尔的，这些表示可分解为一维表示之和，因此可以用 a 和 b 来计算它们的斯蒂费尔-惠特尼类。

□

我们称一种 *Spin-D_8 结构* 类似于 Spin-D_{16} 结构，只是用 D_8 代替了 D_{16}。Giambalvo [154]和 Pedrotti [206, 第 6] 节研究了 Spin-D_8 配边，而

Barkeshli-Chen-Hsin-Manjunath [211,第 VII.D 节], 、Ning-Qi-Gu-Wang [212,第 II 节],以及 Manjunath-Calvera-Barkeshli [213] 将这种对称类型应用于物理学。引理 14.38 指出，Spin-D_8 结构由两个主 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-丛（等价于一个主 $(D_4 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-丛）以及 $w_2(TM) - ab - b^2$的一个平凡化构成，其中 a和 b分别是主 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-丛的 1 次特征类。给定一个 Spin-D_8 流形$\sim M$， i_8和 $\tilde{i}_8$为其赋予两个 Spin-D_{16}结构，分别记为 M和 M。

推论 14.16 中的剪切论证经过相应调整后同样适用：以 D_4 替代 D_8。若 V 是 D_4 的标准二维实表示所对应的（伴随向量丛）向量丛，我们便得到一个同伦等价

$$MT(\text{Spin-}D_8) \xrightarrow{\simeq} MTSpin \wedge (BD_4)^{V+3\text{Det}(V)-5}. \tag{14.39}$$

因此，一如既往，为了运行 Spin-D_8 配边的 Adams 谱序列，我们需要了解 M_4 的上同调上的 $\mathcal{A}(1)$-模结构：$=(BD_4)^{V+3}\text{Det}(v)^{-5}$。通过从 $H^*(BD_8;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 拉回可知，在 $H^*(BD_4;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中，$w_1(V + 3\text{Det}(V) - 5) = 0$ 和 $w_2(V + 3\text{Det}(V) - 5) = ab + b^2$。因此在 $H^*(M_4;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中，$\text{Sq}^1(U) = 0$ 且 $\text{Sq}^2(U) = U(ab + b^2)$。根据公理可以直接确定 a 和 b 的斯廷罗德平方分别为 $\text{Sq}(a) = a + a^2$ 和 $\text{Sq}(b) = b + b^2$。因此，利用嘉当公式，我们可以计算 $H^*(M_4;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中任意元素的斯廷罗德平方。

引理 14.40. 假设 $x \in H^k(M_4;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 满足 $\text{Sq}^2\text{Sq}^2\text{Sq}^2(x) \neq 0$。那么，$\Omega_k^{\text{Spin-}D_8}$(点)中有一个由 x 检测到的$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 自由直和项。

证明。 $\text{Sq}^2\text{Sq}^2\text{Sq}^2(x) \neq 0$ 这一事实意味着 x 在$H^*(M_4;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中生成一个秩为 1 的自由直和项 [105, 引理 D.8]。Margolis 定理以推论 11.18 的形式，进而表明 $\text{Ext}^{0,k}\big(H^*(M_4;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\big)$ 中对应于该直和项的元素存活到 E_∞ 页，并生成 $\Omega_k^{\text{Spin-}D_8}$(点) 的一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项。最后，E_∞ 页滤过 0 中的类由模 2 上同调中相应的类检测到（见 [40,第 8.4] 节），因此该直和项由 x 检测到。 □

下面我们会多次用到这一点，以证明各种特征类能够检测 Spin-D_8 配边中的元素；在所有情况下，我们都用计算机验证了 $\text{Sq}^2\text{Sq}^2\text{Sq}^2(x) \neq 0$，不过这些计算手工完成也不算太繁琐。

Giambalvo [154, 引理 4.2] 表明，Spin-D_8 配边的 Adams 谱序列退化。[63] 现在我们刻画 Spin-D_8 配边在 Spin-D_{16} 配边中的像。Giambalvo 在 4] 节的计算 [154, 表明，在$H^*(M_4;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中存在一个 R_2 直和项，而 $H^*\big((BD_8)^{V+3\text{Det}(V)-5}$ 中的 R_2 直和项 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)$ 同构地拉回到这个 R_2，因此这些直和项的 Ext 群之间在 E_2页上的映射是同构。Adams 谱序列的 E_2页其余部分位于滤过

[63] Giambalvo 计算的内容略有不同：特征类条件是 $w_2(M) = ab$，而不是 $w_2(M) = ab + b^2$。这两个条件通过 $D_4 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的一个自同构相关联，因此它们所对应的配边概念相同。

0 [154, 4], 节，它典范地是模 2 上同调的一个子空间，因此我们只需计算模 2 上同调类沿着这两个映射 $D_4 \to D_8$ 的拉回。

- 由于 i_4 和 $\tilde{i}_4$ 可分解为先经过 $D_4 \hookrightarrow D_8$ 再经过 i_8, $\tilde{i}_8$: $D_8 \to D_{16}$，因此 Spin-D_8 配边在 Spin-D_{16} 配边中的像包含了我们在第 14.3.2 节中找到的所有元素。

- 在次数 5 中，我们想检测上同调类 w^2x 和 w^2y。我们得到 $i_8^*(w^2x) = \tilde{i}_8^*(w^2x) = a^3b^2 + ab^4$, $i_8^*(w^2y) = 0$，以及 $\tilde{i}_8^*(w^2y) = a^3b^2 + ab^4$。可以计算得出 $\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2(U(a^3b^2+ab^4)) \neq 0$，因此由引理 14.40，存在一个由 $a^3b^2 + ab^4$ 检测到的闭 Spin-D_8 5 流形。应用 i_8^* 和 $\tilde{i}_8^*$, X_5 是对应于 $w^2\widetilde{x}$ 的生成元，而 X_5 是对应于 w^2y 的生成元。

- 在次数 7 中，我们希望检测上同调类 w^3y （我们已经利用 $\Omega^{\mathrm{Spin}}_7(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 检测到了 x^7 和 y^7）。尽管 $i_8^*(w^3y) = 0$, $\tilde{i}_8^*(w^3y) \neq 0$:

$$\tilde{i}_8^*(w^3y) = a^4b^3 + a^3b^4 + a^2b^5 + ab^6, \tag{14.41}$$

  但 $\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2$ 在这个类上为零。事实上，通过对这个类积分得到的配边不变量 $\Omega_7^{\text{Spin-}D_8}$(点) $\to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 为零！通过注意到以下事实，可以先验地推导出这一点：$2\Omega_7^{\text{Spin-}D_8}(\text{点}) = 0$, 并且如果 M 是一个闭的 Spin-D_{16} 7 流形，满足 $w^3y \neq 0$，那么 $2[M] \neq 0$，因为 $[M]$ 生成了绿色三角形 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \subset \Omega_7^{\text{Spin-}D_{16}}$(点)。因此，如果 $\tilde{i}_8^*(w^3y)$ 在某个流形 M 上非零，那么 $2[M] = 0$ 属于 $\Omega_7^{\text{Spin-}D_8}$(点)，而 $2[\widetilde{M}] \neq 0$ 属于 $\Omega_7^{\text{Spin-}D_{16}}$(点，这就不理想了。

- 在次数 9 时，我们希望检测 w^2x^5 和 w^2y^5。与往常一样，$i_8^*(w^2y^5) = 0$ 和

$$i_8^*(w^2x^5) = \tilde{i}_8^*(w^2x^5) = \tilde{i}_8^*(w^2y^5) = a^7b^2 + a^5b^4. \tag{14.42}$$

  $\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2(U(a^7b^2 + a^5b^4)) \neq 0$，因此根据引理 14.40，某个闭 Spin-$D_8$ 流形 $\widetilde{X_9}$ 分别由 $a^7b^2 + a^5b^4$ 检测，而 X_9 分别给出 w^2x^5。
  $\Omega^{\text{Spin-GL}^+}_{(2,\ \mathbb{Z})\ 9}$ (点)还有另一个直和项，由模2上同调类 w^4y 检测。可以利用吴定理证明，这个类在所有 Spin-D_8 流形上都为零。这个类属于从 Spin-Mp(2，$\mathbb{Z}$) 配边映射的像，而且我们已经知道它的一个代表元，因此不必再操心它。

- 最后，11度。我们想要检测类 w^4x^3 和 w^4y^3，它们拉回后为 $i_8^*(w^4y^3) = 0$ 和

$$i_8^*(w^4x^3) = \tilde{i}_8^*(w_4x^3) = \tilde{i}_8^*(w_4y^3) = a^7b^4 + a^3b^8. \tag{14.43}$$

  照例，验证其中的 $\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2$ 非零；由引理 14.40 可知，存在一个闭 Spin-D_8 11-流形，使得 X_{11} 和 X_{11} 分别由 w^4x^3 和 w^4y^3 检测到。这兑现了我们在 [33, 附录 C]中作出的承诺。

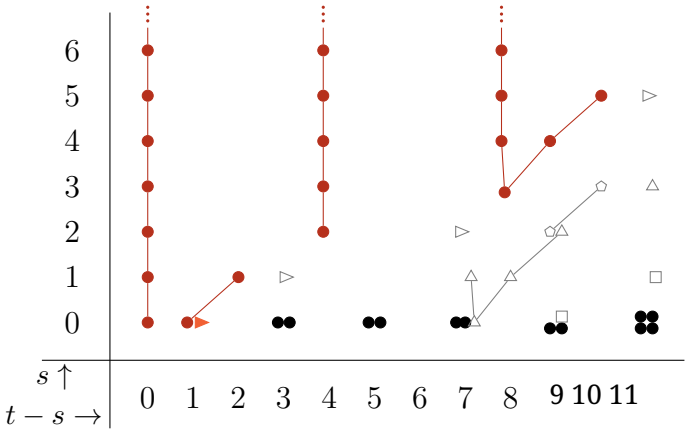


图 27：Spin-D_8 配边在 Spin-D_{16} 配边中的像；更多信息请参见第14.3.3节。与图25一样，这幅图仅编码来自 ko_* 的直和项；ko_{*-8} 类似，而我们已经在 §14.3.2 中处理了 $ko\langle 2\rangle_{*-10}$。

现在我们需要实际写出 X_5、X_9 和 X_{11}。我们将这些流形称为“Arcana 流形”。我们在 X_{11} [33, 附录 C2], 中写出了 X_{11}，但另外两个是新的。按照 Nath-Sankaran [214], 的定义，Arcana 是广义多尔德流形，也是 Sarkar-Zvengrowski [215, 例 3.1]所研究的一种构造的特例。

定义 14.44。“奥秘十一”流形 X_{11} 是 $(S^6\times S^5)/\big((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\big)$，其中，若我们将 $S^6\times S^5\subset\mathbb{R}^7\times\mathbb{R}^6$ 视为具有坐标 $(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_7,\ y_1,\ \ldots\ldots,\ y_6)$ 的空间，则 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的生成元 α 和 β $\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的作用为

$$\begin{aligned}\alpha(x_1,\ldots,x_7,y_1,\ldots,y_6)&=(-x_1,\ldots,-x_7,-y_1,y_2,\ldots,y_6)\\ \beta(x_1,\ldots,x_7,y_1,\ldots,y_6)&=(x_1,\ldots,x_7,-y_1,\ldots,-y_6).\end{aligned}\tag{14.45}$$

在 [33, 附录 C。2], 中，我们证明这是一个具有 $a^7b^4+a^3b^8\neq 0$ 的 Spin-D_8 流形，因此它就是我们一直在寻找的 11维流形。

我们以类似的方式定义 X_5 和 X_9。

定义 14.46. “Arcanum V”流形 X_5 是一个商 $(S^2\times S^3)/\big((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\big)$。如上所述，我们将 $S^2\times S^3\subset\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^4$ 嵌入坐标为 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$ 的空间中，并令 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的生成元 α 和 β 按以下方式作用

$$\begin{aligned}\alpha(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,y_4)&=(x_1,x_2,x_3,-y_1,-y_2,-y_3,-y_4)\\ \beta(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,y_4)&=(-x_1,-x_2,-x_3,y_1,-y_2,-y_3,-y_4).\end{aligned}\tag{14.47}$$

“奥秘九”流形 X_9 是一个商 $(S^6\times S^3)\ /\big((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\big)$。与上文相同，我们将 $S^6\times S^3\subset\mathbb{R}^7\times\mathbb{R}^4$ 嵌入，其坐标为 $(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_7,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$，并令生成元

α 和 β （$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）$\oplus$（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）的作用为

$$\begin{aligned}\alpha(x_1,\dots,x_7,y_1,y_2,y_3,y_4) &= (x_1,\dots,x_7,-y_1,-y_2,-y_3,-y_4)\\ \beta(x_1,\dots,x_7,y_1,y_2,y_3,y_4) &= (-x_1,\dots,-x_7,y_1,-y_2,-y_3,-y_4).\end{aligned} \tag{14.48}$$

投影到 x_i 坐标后， X_5 和 X_9 分别成为以 $\mathbb{RP}^2$ 和$\mathbb{RP}^6$为底、纤维均为 $\mathbb{RP}^3$ 的纤维丛。

注 14.49。 这三个流形都是向量丛的射影化：若 $\sigma \to \mathbb{RP}^n$ 表示典范线丛，则存在微分同胚 $X_5 \cong \mathbb{P}(\mathbb{R}\oplus\sigma^{\oplus 3}) \to \mathbb{RP}^2$、 $X_9 \cong \mathbb{P}(\mathbb{R}\oplus\sigma^{\oplus 3}) \to \mathbb{RP}^6$和 $X_{11} \cong \mathbb{P}(\mathbb{R}^5\oplus\sigma) \to \mathbb{RP}^6$。

现在我们要证明 X_5 和 X_9 是 Spin-D_8 流形，并且代表我们要寻找的配边类。为进行这项计算，我们将对 Arcana 流形的切丛作稳定分裂： 添加两个平凡直和项后， TX_5、TX_9和TX_{11} 同构于线丛的直和，从而更容易计算它们的斯蒂费尔–惠特尼类。接下来的几个小节中，我们会多次使用这一技巧，因此先花点时间介绍它的运作方式。

回顾一下， $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 的法丛是平凡的，其平凡化由外向单位法向量场指定，而这给出了一个稳定分裂

$$TS^n \oplus \underline{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cong} T\underline{\mathbb{R}}^{n+1}|_{S^n} = \underline{\mathbb{R}}^{n+1}. \tag{14.50}$$

但更进一步，对于 O($n+1$) 在S^n上的作用，法丛是等变的平凡丛，从而将 (14.50) 提升为等变向量丛的同构。如果 $G \subset$ O($n+1$) 在 S^n 上自由作用，因此我们可以将 (14.50) 下降到商空间 S^n/G。

例 14.51 （实射影空间）。 令 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上以 $\{\pm 1\}$ 的方式作用，此作用限制在 S^n 上为对踵作用。外向单位法向量场在此作用下保持不变，因此 (14.50) 升级为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-等变向量丛之间的等价，其中$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在法丛上平凡作用，而在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上非平凡作用：具体而言，在每个 $\mathbb{R}$直和项上， $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的作用为 -1。

因此，这个稳定分裂会下降到商空间：若 $\sigma \to \mathbb{RP}^n$ 表示 (14.50) 右侧某个 $\mathbb{R}$ 直和项对 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 取商所得的结果，则我们得到一个（非等变）向量丛同构

$$T\mathbb{RP}^n \oplus \underline{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cong} \sigma^{\oplus(n+1)}. \tag{14.52}$$

这是计算 $\mathbb{RP}^n$ 的斯蒂费尔–惠特尼类的一种常见方法：由于 σ 是非平凡线丛， $w(\sigma) = 1+x$，其中 $x \in H^1(\mathbb{RP}^2;\, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是生成元，然后惠特尼和公式告诉我们

$$w(T\mathbb{RP}^n) = w(T\mathbb{RP}^n \oplus \underline{\mathbb{R}}) = w(\sigma^{\oplus(n+1)}) = (1+x)^{n+1}. \tag{14.53}$$

基本上根据定义， $\sigma \to \mathbb{RP}^n$ 是与主 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-丛 $S^n \to \mathbb{RP}^n$ 以及我们赋予 $\mathbb{R}$ 的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-表示相关联的线丛，从而使 $\mathbb{R}$ 具有等变性。类似的情况之后还会再次出现。

例 14.54（透镜空间）。对于透镜空间，我们想要 $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$，因此 (14.50) 现在应写成 $TS^{2n-1} \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{C}^n$。现在取一个本原的 k^{th} 单位根 ζ，并令 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 通过让生成元按 ζ 乘法作用于 $\mathbb{C}^n$ 来作用于它。与上面一样，这使外向单位法向量场保持不变，因此稳定分裂是 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$-等变的，从而下降到商 [216, 217]:

$$TL_k^{2n-1} \oplus \underline{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}^{\oplus n}, \tag{14.55}$$

其中 $\mathcal{L} \to L_k^{2n-1}$ 是 $\mathbb{C} \to S^{2n-1}$ 关于 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$作用的商，即主 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$-丛 $S^{2n-1} \to L_k^{2n-1}$ 与 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{C}$ 上的标准表示所关联的复线丛。

现在回到正题。

引理 14.56. 切丛 $\pi\colon \mathbb{P}(\mathbb{R}^p \oplus \sigma^{\oplus q}) \to \mathbb{RP}^n$ 存在如下稳定分裂：

$$T\mathbb{P}(\underline{\mathbb{R}}^p \oplus \sigma^{\oplus q}) \oplus \underline{\mathbb{R}}^2 \xrightarrow{\cong} \pi^*\sigma^{\oplus(n+1)} \oplus \tau^{\oplus p} \oplus (\pi^*\sigma \otimes \tau)^{\oplus q}, \tag{14.57}$$

其中 $\tau \to \mathbb{P}(\underline{\mathbb{R}}^p \oplus \sigma^{\oplus q})$ 是沿纤维方向的典范线丛（见第 *10.1* 节）.

我们的论证沿用 [215, 第 5 节1]中的论证。

证明。首先考虑球丛 $S(\mathbb{R}^p \oplus \sigma^{\oplus q}) \to \mathbb{RP}^n$；为这个纤维丛选取一个联络，可将 $TS(\mathbb{R}^p \oplus \sigma^{\oplus q}) \cong V \oplus \pi^*(T\mathbb{RP}^n)$ 分解，其中 $V \to S(\mathbb{R}^p \oplus \sigma^{\oplus q})$ 是垂直切丛。通常，借助沿纤维方向的外向单位法向量场，纤维法丛是平凡的，因此我们有如下分解

$$TS(\underline{\mathbb{R}}^p \oplus \sigma^{\oplus q}) \oplus \underline{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbb{R}}^p \oplus \pi^*\sigma^{\oplus q} \oplus \pi^*(T\mathbb{RP}^n). \tag{14.58}$$

利用例 14.51 进行化简：

$$TS(\underline{\mathbb{R}}^p \oplus \sigma^{\oplus q}) \oplus \underline{\mathbb{R}}^2 \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbb{R}}^p \oplus \pi^*\sigma^{\oplus q} \oplus \pi^*\sigma^{\oplus(n+1)}. \tag{14.59}$$

现在加入纤维上的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 对踵作用。它在水平方向上是平凡的，特别是在 $\pi^*\sigma^{\oplus(n+1)}$ 上；纤维法丛也像上面的例子一样是等变平凡的。此作用在 $\mathbb{R}^p$ 和 $\pi^*\sigma^{\oplus q}$ 的每个直和项上都通过 -1 作用。因此取商时，这些丛都与 τ 张量积，从而得到分解式 (14.57)。

□

推论 14.60。 X_5 和 X_9 具有 *Spin*-D_8 结构，其 D_4-丛是它们的万有覆盖 $S^p \times S^q \to X_n$。

证明。对于 $m=5,\ 9$，令 $a\in H^1(X_m;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 为在同构 $H^1(X_m;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cong \mathrm{Hom}\big(\pi_1(X_m)\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)$ 下与 $\alpha\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})=\pi_1(X_m)$ 对偶的类；同样，令 b 为与 β 对偶的类。定义于 X_m 上的 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-作用表明，对 β 取商会得到球丛 $S(\mathbb{R}^p\oplus\sigma^{\oplus q})\to\mathbb{RP}^n$，随后对 α 取商即为逐纤维对径映射；因此 $w(\pi^*\sigma)=1+b$ 且 $w(\tau)=1+a$。

引理 14.56 告诉我们

$$TX_m=\pi^*\sigma^{\oplus(m-3)}\oplus\tau\oplus(\pi^*\sigma\otimes\tau)^{\oplus 3},\tag{14.61}$$

因此 $w(X_m)=(1+b)^{m-3}(1+a)(1+a+b)^3$；展开后，$w_1(X_m)=0$ 以及 $w_2(X_m)=ab+b^2$，这正是我们所需要的。□

引理 14.62. 类 $a^3b^2+ab^4$ 在 $H^5(X_5;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中非零，而类 $a^7b^2+a^5b^4$ 在 $H^9(X_9;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中非零。

因此，X_5 和 X_9 代表了我们一直在寻找的 Spin-D_8 配边类。

证明. 证明与 [33, 引理 C.12]的证明相似：我们要计算杯积，因此先利用庞加莱对偶，再计算与我们要相乘的上同调类对偶的子流形之间的交。对于子流形代表元的一般选取，这一横截条件是满足的。Arcana 流形本身有些难以想象，因此我们在 $S^p\times S^q$ 上进行计算，求取在（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）$\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$作用下映射到自身的子流形的交，然后再取商。

例如，考虑 $N:=\{x_1=0\}\subset S^p\times S^q$。这是一个余维 1 子流形，而 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 将 N 映射到自身。尽管 N 在 $S^p\times S^q$ 中是零调的，但不存在关于 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$- 作用的等变零调，因此 N 在 X_m 中的商不是零调的，并且在 $H^1(X_m;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中表示某个非零类。具体而言，由于 α 在 N 上平凡作用，而 β 的作用非平凡，因此 N 是 b 的 Poincar´e 对偶。类似地，对于每个 i，$\{x_i=0\}$ 是 b 的 Poincar´e 对偶；$\{y_1=0\}$ 是 a 的 Poincar´e 对偶，而对于 $i>1$，$\{y_i=0\}$ 是 $a+b$ 的 Poincar´e 对偶。

在 $S^2\times S^3$ 上，考虑方程 $x_1=x_2=y_1=y_2=y_3=0$的解集 W，它是五个余维 1 子流形 $\{x_1=0\}$、$\{x_2=0\}$、.....、$\{y_3=0\}$的交集。这些子流形在 X_5 中的像横截相交，因此 W 是一个零维子流形，而 W 的庞加莱对偶是这些子流形所定义的类的杯积。具体而言，W 是 $b^2a(a+b)^2=a^3b^2+ab^4$的庞加莱对偶，因此，我们可以通过检查 W 是否零调，来判断$a^3b^2+ab^4$ 在 $H^5(X_5;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$中是否为零。由于 W 是零维的，这相当于统计 W 中的点数是奇数还是偶数。

在上方，$x_1=x_2=y_1=y_2=y_3=0$ 的解集在 $S^2\times S^3$ 中有四个解：$\{x_3=\pm1,y_4=\pm1,$其余所有 $x_i,\ y_i=0\}$。因此，当我们对 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus$ 取商时

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，这四个解会被视为相同，因此在 X_5 中只有一个解，由此我们得出 $a^3b^2 + ab^4 \neq 0$ 在 $H^5(X_5;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中。

对于 X_9，论证相同；我们需要的方程是 $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = y_4 = 0$和 $x_3y_3 = x_4y_3 = x_5y_3 = x_6y_3 = 0$。同样，在 $S^6\times S^3$ 上，解为 $\{x_7 = \pm 1, y_3 = \pm 1\}$，因此在 X_9 上有一个解，这对应于上同调类 $b^2(a)(a+b)^2a^4 = a^7b^2 + a^5b^4$。

□

~ $a^7b^4 + a^3b^8 \neq 0$ 在 X_{11} 上的计算表明 X_{11}，因此 X_{11} 代表了我们想要检测的 11 维 Spin-D_{16} 配边类，详见 [33, 命题 C.7]。

此时我们只剩下四个有待检测的类：7 维中绿色向上三角形的生成元 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 和橙色向右三角形的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项；8 维中的 $\mathbb{Z}$ 生成元；以及 9 维中黄色五边形 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的生成元。所有其余的类都是这四个类与非配边圆或环面的乘积。

14.3.4 维数 8 中的生成元 $W_{1,\ 8}$

首先，我们来处理维数 8 中红色 $\mathbb{Z}$ 的生成元。正如我们在第14.3.3节中所证明的（特别参见图 27），这个配边类属于映射 i_8: $\Omega_8^{\text{Spin-}D_8} \to \Omega_8^{\text{Spin-}D_{16}}$ 的像，因此我们可以找到一个代表元，其 Spin-D_{16} 结构来自 Spin-D_8 结构。此外，考察 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边到 Spin-D_{16} 配边的包含映射，我们得知，所求生成元的两个副本必与 Bott 流形共边；因此，只需构造一个 Spin-D_8 流形，使其庞特里亚金数为 ˆ Bott 流形的一半。例如，一个连通的卡拉比-丘四维簇 X_4 满足 $A(M) = 2$，即为 ˆtwice A(Bott)，因此其庞特里亚金数是 Bott 流形的两倍，所以 X_4 在一个 4 阶群的保向作用下的任意商，其庞特里亚金数都符合我们所需生成元的条件。我们将构造一个特定选择的 X_4 的商 $W_{1,\ 8}$，并证明 $W_{1,\ 8}$ 是 Spin-D_8，从而它就是我们所需的生成元。

定义 14.63。令 X_4 为 $\mathbb{CP}^7$ 上的完全交，其通过选取射影坐标

$$(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 : y_1 : y_2) \text{ for } \mathbb{CP}^7, \tag{14.64}$$

并考虑由以下三个方程所规定的完全交

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = x_1^2 + P(y) = x_2^3 + P'(y) = 0, \tag{14.65}$$

其中 P和 P'是三次多项式。对于 P和 P'的一般选择，交集是完全交，因此得到一个光滑的 Calabi-Yau 四维簇 X_4.[64]

[64]完全交为卡拉比-丘的判据是：定义多项式的次数之和等于环境射影空间的维数加一。例如参见 [218]。

考虑 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\ \oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 在 $\mathbb{CP}^7$ 上的如下作用：

$$\begin{aligned}\alpha(x_1:\cdots:x_6:y_1:y_2)&=(-x_1:\cdots:-x_6:y_1:y_2)\\ \beta(x_1:\cdots:x_6:y_1:y_2)&=(x_1^*:\cdots:x_6^*:y_1:y_2).\end{aligned}\tag{14.66}$$

此作用保持方程 (14.65) 不变，因此定义了 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 在 X_4 上的作用。可以验证，α 和 β 都是保定向的，并且限制在 X_4上时没有不动点：对于 α的不动点，最后两个方程对 y无解；而对于 β的不动点，所有 x_i 都是实数，此时第一个方程意味着它们全都为零。因此，商 $W_{1,\ 8}:=X_4/\big((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\big)$ 是一个定向光滑流形。 $\hat{}\ \hat{}W_{1,\ 8}$ 不可能是 Spin 流形：若它是 Spin 流形，其 A-属将是 $1/2$，但在 Spin 流形上， A-属是整数。我们称这个流形为“半 Bott 流形”，因为 $W_{1,\ 8}\sqcup W_{1,\ 8}$ 与一个 Bott 流形共边。

命题 14.67. $W_{1,\ 8}$ 具有 *Spin*-D_8 结构。

证明。 考虑环境 $\mathbb{CP}^7$ 上的标准 Spin 结构。$\mathbb{CP}^7$ 上在作用 (14.66) 下不变的等变旋量会下降为 $W_{1,\ 8}$ 上的旋量。为了显式构造 $\mathbb{CP}^n$ 上的旋量，我们可以从 $\mathbb{C}^{n+1}=\mathbb{R}^{2n+2}$ 上的狄拉克旋量 Ψ 入手。对于 $z\in\mathbb{C}^{n+1}$，我们为了得到复射影空间而取商的变换 $z\to\lambda z$，会在旋量场上诱导一个无穷小作用，其中包含旋转和缩放变换 [219]:

$$\delta_\lambda\Psi=(M-\mathrm{id})\Psi,\quad M=\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i\Gamma_{i+1}\,,\tag{14.68}$$

其中，上述变换的第一部分实现了复缩放所涉及的无穷小旋转，而与单位矩阵成比例的部分则实现了缩放。 $\mathbb{CP}^n$ 上的旋量恰好对应于 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上满足 $\delta_\lambda\Psi=0$ 的旋量。由 (14.68) 可清楚看出，只有当矩阵 M 具有一个 $+1$ 特征值时，这才可能实现。根据 [32], 方程 (D.6) 附近的分析，这只有在 $n+1$ 为偶数时才可能。因此，这是一个非常初等的方式，可以看出只有当 n 为奇数时，我们在 $\mathbb{CP}^n$ 上才有 Spin 结构。

现在取 $n=7$，$W_{1,\ 8}$ 上的旋量对应于 $\mathbb{C}^8$ 上的旋量，这些旋量满足 $\delta_\lambda\Psi=0$，并且在（14.66）的 Spin 提升下也保持不变,

$$\Psi=\Big(\prod_{i=1}^{12}\Gamma_i\Big)\Psi,\quad \Psi=\Big(\prod_{i=0}^{5}\Gamma_{2i+1}\Big)\Psi\,.\tag{14.69}$$

要实现这一点，这两个矩阵

$$M_1=\prod_{i=1}^{12}\Gamma_i\,,\quad M_2=\prod_{i=0}^{5}\Gamma_{2i+1}\tag{14.70}$$

在限制于满足 $\delta_\lambda \Psi = 0$ 的旋量时，应生成群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。但可以明确计算出，对易关系实际上是

$$M_1^2 = \mathrm{id}\,, \quad M_2^2 = -\mathrm{id}\,, \quad M_1 M_2 M_1 = -M_2\,, \tag{14.71}$$

即，它们生成一个 D_8 群。这就是为什么$W_{1,\,8}$上不存在 Spin 结构。然而，同样显然的是，通过将上述矩阵与D_8的适当表示进行张量化，两个错误也能成就正确的结果，我们可以得到 D_4 表示。因此，如所声称的，$W_{1,\,8}$ 承认一个 Spin-D_8 结构。

□

14.3.5 9 维中的生成元 W_1^9

我们接下来讨论的生成元对应于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在 $E^{2,\,11}_\infty$中的黄色五边形直和项。我们找到的流形类似于我们为 7维中其余类给出的生成元，但这个更简单，因此我们先从 9 维开始作为热身。

正在研究的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 类不在来自 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 或 Spin-D_8 配边的映射的像中，因此我们需要其代表元 W_1^9 具有至少与 D_8一样复杂的基本群。我们稍后将定义 W_1^9；本节的关键结果是命题 14.74，它表明 W_1^9 是 Spin-D_{16}，以及命题 14.77，它表明它与我们已经找到的其他生成元线性无关。

定义 14.72。令 ζ 为一个本原 k^{th} 单位根，并令 L_k^{2n-1} 表示 $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上由 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 作用得到的商透镜空间，其中该作用是乘以 ζ，并且保持单位球面不变。复共轭将 ζ 与另一个本原 k^{th} 单位根互换，因此，$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 轨道 S^{2n-1} 在复共轭下的像是另一个 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 轨道。因此，这个对合下降为 L_k^{2n-1} 上的一个对合，我们也称之为**复共轭**。

由于复共轭在 $\mathbb{C}$ 上是反定向的，因此它在 $\mathbb{C}^{2m}$ 上是保定向的，在 $\mathbb{C}^{2m+1}$ 上是反定向的。$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 在 S^{2n-1} 上的作用是保定向的，因此我们可以将其下降到 L_k^{2n-1}，并推知，当 n 为偶数时，L_k^{2n-1} 上的复共轭是保定向的；当 n 为奇数时，则是反定向的。

定义 14.73。令 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 通过在透镜空间上取复共轭、在 S^4 上取对径映射来作用于 $L_4^5 \times S^4$。这是一个自由作用；我们将 W_1^9 定义为其商。

据我们所知，Kamata-Minami 最早在 [204, Section 2],研究了这个流形，并将其称为 $D(5,4)$。

首先要检查的是 W_1^9 是否可定向，或者等价地说，我们用来定义它的对合是否保定向。确实如此：对径映射在 S^{2n}上是反定向的，而我们刚刚看到，复共轭在 L_k^5上也是反定向的。因此，这两个对合的组合是保定向的。事实上，由于 L_4^5 和 S^4 都带有典范定向，W_1^9也有典范定向。

复共轭对合在 $\pi_1(L_4^5) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$上诱导出取逆，因此 $\pi_1(W_1^9) = D_8$；具体来说， W_1^9 也是 $S^5 \times S^4$ 关于由两个微分同胚 r 和 s生成的 D_8-作用的商： $r = (m, \mathrm{id})$ 是在 S^5 上的 i 乘法，并且在 S^4 上为单位映射；而s 是在 S^5 上的反射和在 S^4上的对径映射。

命题 14.74。 W_1^9连同其 D_8-丛 $S^5 \times S^4 \to W_1^9$具有 ***Spin***-D_{16} 结构。

为此，我们将对 TW_1^9作稳定分裂，以计算其低次斯蒂费尔–惠特尼类，遵循 Fujino [220, 命题 3.2]。

证明。利用例 14.51 和 14.54，可得到一个向量丛同构 es

$$T(L_4^5 \times S^4) \oplus \underline{\mathbb{R}}^2 \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}^{\oplus 3} \oplus \underline{\mathbb{R}}^5. \tag{14.75}$$

令 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 通过在 L_4^5上的复共轭和在 S^4上的对径映射作用于 $L_4^5 \times S^4$，使得商为 W_1^9。于是，例 14.51 以及关于复共轭的类似事实告诉我们，(14.75) 可提升为一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-等变向量丛的同构，其中：

- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在 (14.75) 左边的 $\underline{\mathbb{R}}^2$ 上平凡作用。
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在右侧的每个 $\mathcal{L}$ 直和项上作用为复共轭。
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在右侧 $\underline{\mathbb{R}}$ 的每个因子上作用为 -1。

因此，取商后，我们重新证明了 Fujino 的一个定理 [220,命题 3.2]：存在一个向量丛同构

$$TW_1^9 \oplus \underline{\mathbb{R}}^2 \xrightarrow{\cong} V^{\oplus 3} \oplus \sigma^{\oplus 5}, \tag{14.76}$$

其中 V和 σ如下：若 $P \to W_1^9$表示商 $S^5 \times S^4 \to W_1^9$，它是一个主 D_8-丛，则 σ与 P 及符号表示 $D_8 \to \mathrm{O}(1)$相关联，其中旋转映到 1，反射映到 -1；而 V 与标准表示$D_8 \to \mathrm{O}(2)$相关联，其中旋转和反射作用于 $\mathbb{R}^2$。[65] 因此， $\sigma = \mathrm{Det}(V)$，所以 $w_1(V) = w_1(\sigma)$。

将惠特尼和公式用于 (14.76)，并利用以下事实： $w_1(V) = w_1(\sigma)$，且 $w_2(\sigma) = 0$，因为 σ是线丛，我们得到 $w_1(TW_1^9) = 0$，以及 $w_2(TW_1^9) = w_2(V)$。由于 V 是通过标准表示$D_8 \to \mathrm{O}(2)$与一个主 D_8-丛相关联的，这恰好就是 W_1^9 具有 Spin-D_{16} 结构的条件。 □

除了两个生成元外，我们已经找到了 $\Omega_9^{\text{Spin-}D_{16}}$(点)的所有生成元。这两个剩余的生成元各自生成一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项。我们将证明 W_1^9 生成黄色的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项，但目前我们也不知道绿色三角形 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项的生成元。不过，

[65]我们所称的 V，Fujino [220, 命题 3.1] 称为 η_1。

观察 E_∞页（图 22，下方），我们知道存在某个 Spin-D_{16} 7流形W_1^7，使得这个绿色的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$由 $W_1^7\times S^1_p\times S^1_p$生成。现在，先选取这样一个流形$W_1^7$；此刻我们无需进一步了解它。稍后在第14.3.6节中，我们将为 W_1^7 选取一个具体例子。

命题 14.77. 存在一个配边不变量 $\mu\colon \Omega_9^{\text{Spin-}D_{16}}$(点) $\to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，它在$W_1^9$上取值1，并在其他生成元（即 L_4^9、 $W_1^7\times S^1_p\times S^1_p$、$\mathrm{Bott}\times S^1_R$、 $\mathbb{HP}^2\times S^1_R$、$\mathbb{HP}^2\times \widetilde{S}^1_R$、 X_9和 $\widetilde{X}_9$）上取值为零。

证明。设 M 是一个 Spin-D_{16} 流形，其对应的 D_8-丛为 $P\to M$。 P 对 $D_4\subset D_8$ 取商得到的$\widehat{\ }$是一个 Spin-D_8 流形 M，它是 M的双覆盖：它是 Spin-D_8，因为 D_8在 P 上的作用可提升为在其旋量丛 $\mathbb{S}$上的 D_{16}作用；沿 $D_4\hookrightarrow D_8$拉回$\widehat{\ }$后，我们得到作用于 $\mathbb{S}$ 的子群 $D_8\subset D_{16}$。双覆盖 $M\to M$对应于类 $y(P)\in H^1(M;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。赋值 $M\mapsto \widehat{M}$与取边界相容，因此定义了一个映射

$$D\colon \Omega_k^{\text{Spin-}D_{16}}(\mathrm{pt})\longrightarrow \Omega_k^{\text{Spin-}D_8}(\mathrm{pt})\,. \tag{14.78}$$

我们采用第14.3.3节中 Spin-D_8 特征类的记号： a 和 b 是 $H^*(BD_4;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$的两个生成元，次数均为 1。类 a 可由反射检测，而b 可由生成旋转检测。我们的不变量 μ 定义为

$$\mu\colon \Omega_9^{\text{Spin-}D_{16}}(\mathrm{pt})\xrightarrow{D}\Omega_9^{\text{Spin-}D_8}(\mathrm{pt})\xrightarrow{\int(a^5b^4+a^3b^6)}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \tag{14.79}$$

回顾我们用于定义流形 M上的两个 Spin-D_{16} 结构的映射 $i_8,\widetilde{i}_8\colon D_8\to D_{16}$。复合映射为 $D\circ i_8=0$，因为 $i_8^*(y)=0$，因此 $\mu\circ i_8=0$。对于 $\widetilde{i}_8$， $\widetilde{i}_8^*(y)=\widetilde{i}_8^*(x)=a$，所以映射 $D\circ\widetilde{i}_8$的像中的流形满足 $a(P)=0$，因此$\mu\circ\widetilde{i}_8=0$也满足。由此，当 N是以下生成元之一时， $\mu(N)=0$：Bott $\times S^1_R$、$\mathbb{HP}^2\times S^1_R$、 $\mathbb{HP}^2\times\widetilde{S}^1_R$、 X_9和 $\widetilde{X}_9$。

接下来 L_9^4。 $D(L_9^4)=\mathbb{RP}^9$，它是 Spin-D_8，但不是 Spin。因此，对于 $\mathbb{RP}^9$，$ab+b^2\neq 0$，所以 $a\neq b$；由于 $H^1(\mathbb{RP}^9;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 只有一个非零元素， a 和 b 中必有一个为零，因此 $a^5b^4+a^6b^3=0$ 和 $\mu(L_4^9)=0$。

最后，$W_1^7\times S^1_p\times S^1_p$。相应的 D_4-丛在环面方向上是平凡的，因此其特征类沿投影 $\mathrm{pr}_1\colon W_1^7\times S^1_p\times S^1_p\to W_1^7$ 拉回， $D(W_1^7\times S^1_p\times S^1_p)\cong D(W_1^7)\times S^1_p\times S^1_p$ 也是如此。次数为 9 的类 $a^5b^4+a^3b^6$ 在 7 维流形 $D(W_1^7)$ 上消失，因此 $\mu(W_1^7\times S^1_p\times S^1_p)=0$。

这就涵盖了此前发现的所有生成元，因此只需证明$\mu(W_1^9)=1$。首先，我们应当刻画 $D(W_1^9)$。这是一个以射影空间为底的射影丛，类似于 Arcana；如第14.3.3节所述，它是一个 $\mathbb{RP}^5$ 丛，底空间为 $\mathbb{RP}^4$，我们将其指定为 $\mathbb{R}^6\times\mathbb{R}^5$ 内、坐标为（x_1，……，x_6，y_1，……，y_5）的 $S^5\times S^4$ 的（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）$\oplus$($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)商。具体而言，令 α和 β为（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）$\oplus$($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)的生成元，

作用如下：

$$\begin{aligned}\alpha(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,y_1,\dots,y_5)&=(-x_1,-x_2,-x_3,-x_4,-x_5,-x_6,y_1,\dots,y_5),\\ \beta(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,y_1,\dots,y_5)&=(-x_1,x_2,-x_3,x_4,-x_5,x_6,-y_1,\dots,-y_5).\end{aligned}\tag{14.80}$$

为什么会这样？ $D(W_1^9)$是 $\mathbb{RP}^5\times S^4$ 关于一个对合的商； β 是这个对合，而α 是 S^5 上的对踵作用，它将我们带到 $\mathbb{RP}^5\times S^4$。

与引理 14.62 中一样，可以验证 $w\big(D(W_1^9)\big)=ab+b^2$，并且方程 $x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=y_1=y_2=y_3=y_4=0$ 的解集在 $S^5\times S^4$上有四个解 $\{x_1=\pm1,y_5=\pm1\}$，因此在 $D(W_1^9)$上有一个解，所以相应的上同调类非零。像引理 14.62 中那样，追踪这些坐标上的（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$） $\oplus$($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)作用，我们得到的类是（$a+b$）$^2a^3b^4=a^5b^4+a^3b^6$，因此 $\mu(W_1^9)=1$。 □

备注 14.81。 流形 $(\mathbb{CP}^m\times S^n)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中， $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{CP}^m$ 上通过复共轭作用，在 S^n上通过对径映射作用，这类流形称为 ***Dold*** 流形。Dold 在 [221], 中研究了它们，并证明它们生成无定向配边环。这些流形是 $S^{2m+1}\times S^n$ 在自由 O(2) 作用下的商；就此而言， W_1^9 类似于 Dold 流形，只是将 O(2) 换成了 D_8。从这个角度看，像 W_1^9 这样的流形出现在我们的生成元列表中也就不足为奇了。Kamata-Minami [204] 和 Kamata [205] 利用一个包含 W_1^9的流形族研究 $\Omega_*^{\mathrm{U}}(BD_{2k})$，这进一步表明 W_1^9或类似的对象应当是 $\Omega_9^{\text{Spin-}D_{16}}(pt)$ 中的一个非零元素。

14.3.6 7维中的生成元 W_1^7

接下来， $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 在7维中。回顾附录 C.2 中 Q_4^7 的定义：它是 V中单位球面丛的商：$=\mathcal{O}(2)\oplus\mathbb{C}^3\to\mathbb{CP}^1$ 按 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$作用得到的商，其中该作用由乘以 i给出。这是一个以 $S^2=\mathbb{CP}^1$ 为底空间、纤维为 L_4^5的纤维丛。

定义 14.82。令 τ 表示 Q_4^7 上的对合，它在透镜空间纤维上是复共轭，在 S^2 上是对径映射。这是一个自由对合；令 W_1^7 为其商。

W_1^7 是一个以 $\mathbb{RP}^2$ 为底空间、纤维为 L_4^5 的纤维丛。L_4^5 上的反射是反定向的，而 S^2 上的对径映射也是反定向的，因此 W_1^7 可定向。

复共轭在 $\pi_1(Q_4^7)\cong\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 上通过 -1 作用，因此 $\pi_1(W_1^7)\cong D_8$。万有覆盖是 $S(V)\to W_1^7$，这是一个主 D_8 丛。

命题 14。 **83.** W_1^7，其主 D_8 丛为 $S(V)\to W_1^7$，具有 ***Spin-***D_{16} 结构 .

证明。 首先，与第14.3.5节中一样，我们将 W_1^7 的稳定切丛分裂。分裂 (14.50) 在丛族中表现良好；也就是说，如果 π: $E\to M$ 是定义在

流形 M 上的欧几里得向量丛，且 $i\colon S(E) \hookrightarrow E$ 表示单位球面丛，那么包含映射 i 的法丛可利用外向单位法向量场平凡化。也就是说，

$$TS(E) \oplus \underline{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cong} TE|_{S(E)} \xrightarrow{\cong} (\pi^* TM \oplus \pi^* E)|_{S(E)}\,, \tag{14.84}$$

后一个同构由在 V 上选取一个联络给出。我们关注向量丛 $V := \mathbb{C}^2 \oplus \mathcal{O}(2) \to S^2$；由 (14.84) 可知_

$$TS(V) \oplus \underline{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cong} \pi^*(TS^2) \oplus \underline{\mathbb{C}}^2 \oplus \pi^* \mathcal{O}(2)\,. \tag{14.85}$$

将 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 的法丛加上去，以使 TS^2 稳定平凡化：

$$TS(V) \oplus \underline{\mathbb{R}}^2 \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbb{R}}^3 \oplus \underline{\mathbb{C}}^2 \oplus \pi^* \mathcal{O}(2)\,. \tag{14.86}$$

现在我们下降到 Q_4^7，这意味着在 (14.86) 中加入 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-作用。 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 通过对 Q_4^7 上的 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-作用求导，作用于 $TS(V)$。正如 (14.54) 中那样， $S(V) \subset V$ 的法丛上的 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-作用是等变平凡的；而 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 的法丛上的作用是平凡的，因为 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 在底空间 S^2 上平凡作用。至此，(14.86) 左边的部分已处理完毕；对于右边， $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上平凡作用，因为这一直和项来自底空间，而 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 逐纤维作用；对于$\mathbb{C}^2 \oplus \pi^* \mathcal{O}(2)$ 的每个直和项， $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 都通过标准的一维复表示逐纤维作用。因此，取商后，我们得到一个稳定分裂

$$TQ_4^7 \oplus \underline{\mathbb{R}}^2 \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbb{R}}^3 \oplus \mathcal{L}_1^{\oplus 2} \oplus \mathcal{L}_2, \tag{14.87}$$

其中 $\mathcal{L}_1$， $\mathcal{L}_2 \to Q_4^7$ 是复直线丛。具体而言， $\mathcal{L}_1$ 与主$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-丛 $S(V) \to Q_4^7$ 相关联，其关联方式由旋转表示 $\rho\colon \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathrm{U}(1)$ 和 $\mathcal{L}_2 \cong \mathcal{L}_1 \otimes p^* \mathcal{O}(2)$ 给出，其中 $p\colon Q_4^7 \to S^2$ 是丛映射。利用这些描述以及纤维丛 $p\colon Q_4^7 \to S^2$ 的 Serre谱序列，可以计算 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$的陈类，这与下文引理 14.89 证明中的计算类似。

接下来我们希望下降到 W_1^7，因此将 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-作用纳入 (14.87)。同样，左侧的法丛是等变平凡的。在右侧，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 通过对径映射作用于 $\mathbb{R}^3$，该映射是 -1。在 $\mathcal{L}_1^{\oplus 2}$和 $\mathcal{L}_2$上，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 通过复共轭作用。因此，我们得到一个类似于 (14.76) 的稳定分裂：

$$TW_1^7 \oplus \underline{\mathbb{R}}^2 \xrightarrow{\cong} p^* \sigma^{\oplus 3} \oplus E_1^{\oplus 2} \oplus E_2, \tag{14.88}$$

其中， $p\colon W_1^7 \to \mathbb{RP}^2$由 $\pi\colon Q_4^7 \to S^2$诱导而来， E_1、 $E_2 \to W_1^7$是实秩二向量丛，而 $\sigma \to \mathbb{RP}^2$ 是典范线丛。通过追踪 D_8 的哪些元素对每个直和项施加反定向作用，我们得知 $w_1(p^*\sigma) = w_1(E_1) = w_1(E_2)$。将此元素记作 x。利用这一点以及 $w_2(\sigma) = 0$这一事实，将惠特尼和公式应用于 (14.88)。我们得知 $w_1(TW_1^7) = 0$（事实上，我们已经验证了 W_1^7是可定向的），并且

$w_2(TW_1^7) = w_2(E_2) + x^2$。

T为了继续，我们需要更好地理解 W 的模 2 上同调环 $^{7}_{1}$.

引理 14.89. 纤维丛 $L_4^5 \to W_1^7 \to \mathbb{RP}^2$ 的 *Serre* 谱序列退化，从而给出一个同构

$$H^*(W_1^7;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x,y,w]/(x^3, xy+y^2, w^3)\,, \tag{14.90}$$

其中 $|x| = |y| = 1$ 和 $|w| = 2$。

类 $x \in H^1(W_1^7;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 与我们上面遇到的 x 相同。

证明。 画出图28中的 Serre 谱序列，看看会发生什么！由于次数的原因，唯一可能非零的微分具有形式 $d_2\colon\ E^{0,\,q} \to E^{2,2\,q-1}$。由于$E^{0,2\,*} = H^*(L_4^5;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$作为一个环由 $y \in H^1(L_4^5;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 和 $w \in H^2(L_4^5;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 生成，莱布尼茨法则告诉我们，所有从 $p = 0$ 行出发的微分都由它们在y 和 w 上的取值决定。我们将证明 $d_2(y) = 0$ 和 $d_2(w) = 0$。

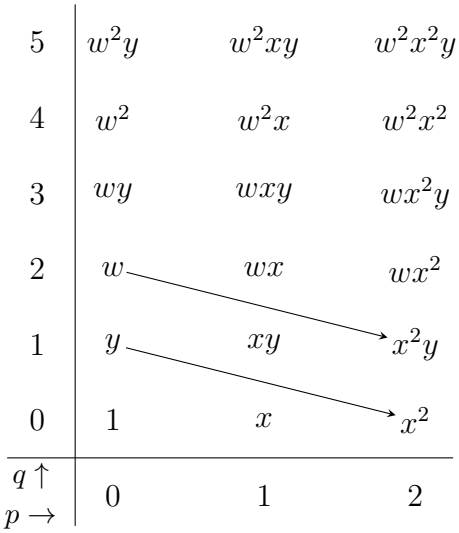


图28：计算 $H^*(W_1^7;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的 Serre谱序列。在引理 14.89 中，我们证明图中所示的两个微分均为零，并且这意味着整个谱序列退化。

假设 $d_2(y) \neq 0$。那么在 E_∞ 页上，总次数为 1 的只有一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$直和项，因此 $H^1(W_1^7;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 必须是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。然而，我们已经知道

$$H^1(W_1^7;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\pi_1(W_1^7),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(D_8,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\,, \tag{14.91}$$

所以 $d_2(y) = 0$。

现在假设 $d_2(w) \neq 0$。这与 $d_2(y) = 0$ 一起意味着 $d_2(wy) = wyx^2, d_2(w^2) = 0$，以及 $d_2(w^2y) = 0$。但在 E_∞ 页上，总次数 2 中共有两个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项，总次数 5 中有三个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项，这违反了 W_1^7 的庞加莱对偶。

除了关系式 $xy + y^2 = 0$ 以外，乘法结构都很清楚。这是因为 x 和 y 是从 BD_8 拉回的，而 $xy + y^2 = 0$ 属于 $H^*(BD_8; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。 □

回顾一下，$w_2(TW_1^7) = w_2(E_2) + x^2$，我们要证明这等于主 D_8-丛 $S(V) \to W_1^7$ 与 D_8 的标准二维实表示所关联的丛的 w_2。将此丛记为 E。

引理 14.89 告诉我们，$w_2(E_2) = a_1x^2 + a_2xy + a_3z$，且 $w_2(E) = b_1x^2 + b_2xy + b_3z$。

- 为了计算 a_1 和 b_1，令 W 为 $\widetilde{S(V)}$ 除以 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 所得的商，其中 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在底空间上通过对踵映射作用，在纤维上通过复共轭作用。于是 $\pi\colon W \to W$ 是一个主 $\sim\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-丛，而 x^2 拉回到 $H^2(W; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中的非零类。可以验证 π^*E_2 是 Spin，但 π^*E 不是，因此 $a_1 = 0$ 和 $b_1 = 1$。

- 要计算 a_2 和 b_2，首先沿 $\mathbb{RP}^1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^2$拉回 $W_1^7 \to \mathbb{RP}^2$；然后沿包含映射 $L_4^1 \hookrightarrow L_4^5$拉回，该映射与纤维丛结构相容。所得空间是克莱因瓶 KB，它是一个以 $\mathbb{RP}^1 = S^1$为底空间的 $L_4^1 = S^1$-丛。对于E_2 和 E，$\pi_1(KB) \cong \mathbb{Z}$ 的作用方式都可以提升到旋量丛，因此$a_2 = b_2 = 0$。

- 最后，将 E_2 和 E 限制到纤维上即可得到 $a_3 = b_3 = 1$；作为透镜空间上的丛，两者都不是 Spin。

因此 $w_2(E_2) + x^2 = w_2(E)$。 □

回顾一下，$\Omega_7^{\text{Spin-}D_{16}}(\text{点}) \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。我们要生成绿色的 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$直和项（对应于 E_∞-页中朝上三角形部分）。

若 M 是一个 Spin-D_{16} 流形，且其关联的主 D_8-丛为 $P \to M$，令 $M := \widehat{P/\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$；那么，$M$ 是 M的一个双覆盖 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 流形：Spin-$\widehat{\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}$结构来自 $P \to M$，它是一个 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 丛；旋量上的作用提升为沿 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \hookrightarrow D_8$对 $D_{16} \to D_8$ 的拉回，从而得到所声称的 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$。双覆盖$\widehat{M} \to M$由 $x(P) \in H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 分类。与我们在第 14.3.5节中使用的 Spin-D_8双覆盖一样，这一对应定义了一个配边不变量

$$\varpi\colon \Omega_k^{\text{Spin-}D_{16}}(\text{pt}) \longrightarrow \Omega_k^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}(\text{pt})\,. \tag{14.92}$$

命题 14.93。 $\varpi(W_1^7)$ 是 $\Omega_7^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}$(点)$\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$的一个生成元。

这意味着 W_1^7表示 Ω中的(1，0) 或 (1，1)$_7^{\text{Spin-}D_{16}}$(点) $\cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，这正是我们想要的结果。

证明。基本上根据定义，我们从 ϖ 得到的 W_1^7 的双覆盖是 Q_4^7，而 Q_4^7 配备任意一种 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 结构时，在 $\Omega_7^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}$ (点) 中的阶为 4。 □

14.3.7 7维中的橙色生成元

我们在7维中还缺少一个生成元，在 E_∞页上对应拓扑次数7中的橙色（指向右侧的三角形）$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项。令 Q_{16} 为 $^-$关于标准二维表示的 Pin D_8 双覆盖；也就是说，Q_{16} 是 $D_8 \hookrightarrow$ O(2) 在双覆盖 Pin$^-(2) \to$ O(2) 下的拉回。[66] Q_{16} 称为 广义四元数群，也称为16阶二元二面体群 $2D_8$, 或二循环群Dic_{16}。Q_{16} 在 S^3上自由作用；其商称为棱柱流形。

在 Q_{16} 中有类$\hat{}r$ 和 j，使得 Q_{16} 有如下表示

$$Q_{16} = \langle \hat{r} \mid \hat{r}^8 = \mathrm{id}\,,\ j^2 = \hat{r}^4\,,\ j^{-1}\hat{r}\,j = \hat{r}^{-1} \rangle. \tag{14.94}$$

在双覆盖 $Q_{16} \to D_8$下，$\hat{}r$ 映射为旋转，而 j 映射为反射。

令 ζ 为四元数 $\mathbb{H}$ 上的对合，它在 **1** 和 i 方向上的作用为 **1**，在 j 和 k 方向上的作用为 -1。那么，除去因子 -1，ζ 与 $\mathbb{H}$ 上 Q_{16} 的标准作用可交换：若将 $\mathbb{H}$ 看作 $\mathbb{C}^2$，则 $\zeta(z,w) = (z,-w)$。这与在两个因子上同时乘以一个单位复数（即 $\hat{}r$ 的作用）可交换，但 $j\cdot(z,w) = (w,-z)$，所以$\zeta\circ j = -j\circ\zeta$。由于 ζ 是等距变换，它在 $S^3 \subset \mathbb{H}$ 上限制为一个对合。我们希望将它下降为 S^3/Q_{16} 上的一个对合；先验地，这并不可能，因为 ζ 与 S^3 上的 Q_{16} 作用并不交换，但这两个作用在相差一个符号的意义下交换。又因为 S^3/Q_{16} 是 $\mathbb{RP}^3$ 的商，符号差异无关紧要，因此 ζ 可在 S^3/Q_{16} 上诱导一个（极不自由的） $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用 $\bar{\zeta}$。

我们称为 W_2^7 的最终生成元是以下对象的商：

$$(S^3/Q_{16}) \times T_p^2 \times S^2 \tag{14.95}$$

其中 $T_p^2 = S_p^1 \times S_p^1$ 是由以下对合得到的：

- $\bar{\zeta}$ 在 S^3/Q_{16}上，
- 在 T_p^2 上的对合，其商是克莱因瓶 KB，以及
- 在 S^2 上的对踵作用。

该商是一个位于 $\mathbb{RP}^2$ 上的 $S^3/Q_{16}\times T^2$-丛；它也可以实现为位于 克莱因瓶 上的纤维丛，其纤维是一个位于 $\mathbb{RP}^2$ 上的 S^3/Q_{16}-丛。该商是定向的。利用与纤维化相关的同伦群长

[66] Q_{16} 的另一种产生方式是作为表示 $V \oplus \mathrm{Det}(V)$: $D_8 \to$ SO(3) 的 Spin 覆盖，即通过双覆盖 SU(2) $\to$ SO(3) 对该表示进行拉回。

正合列，我们得知

$$\pi_1(W_2^7) \cong (Q_{16} \times \mathbb{Z}^2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \tag{14.96}$$

其中 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 分别作用于 Q_{16} 和 $\mathbb{Z}^2$；因此 $\mathbb{Z}^2$ 是 $\pi_1(W_2^7)$ 的正规子群。

定义 14.97。我们通过指定一个从基本群 λ 到 $\pi_1(W_2^7) \to D_8$ 的映射来定义一个主 D_8-丛 $P \to W_2^7$；然后定义 P，使其沿 W_2^7 中的环路 γ 的单值化为 $\lambda([-\gamma])$，这唯一确定了一个在同构意义下的主 D_8-丛。

首先，令 $q_1\colon \pi_1(W_2^7) \to Q_{16} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 为上述正规 $\mathbb{Z}^2 \subset \pi_1(W_2^7)$ 的商。然后令 q_2 为 $-1 \in Q_{16}$ 的商；因为 ζ 是在某些坐标方向上乘以 -1，取这个商后，半直积便解开了扭结，因此 q_2 是一个同态

$$Q_{16} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to D_8 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \tag{14.98}$$

最后，令 $q_3\colon D_8 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to D_8$ 在第一个因子上为单位元，在第二个因子上为反射子群的包含映射。[67] 于是定义

$$\lambda \coloneqq q_3 \circ q_2 \circ q_1. \tag{14.99}$$

为了证明 W_2^7 是最后一个生成元，我们必须证明它是 Spin-D_{16}，且带有定义 14.97 中的主 D_8- 丛；还必须证明 $(W_2^7,\ P)$ 的配边类与 W_1^7 的配边类线性无关。第一个事实将在命题 14.101 中证明，其证明方法与我们在命题 14.74 和 14.83 中证明 W_1^7 和 W_1^9 的方法类似：将切丛稳定地分裂并进行计算。不过，我们证明 W_2^7 与 W_1^7 线性无关的方法不同于以往的方法：我们使用 史密斯同态 $S_{x^2}\colon \Omega_7^{\text{Spin-}D_{16}} \to \Omega_5^{\text{Spin-}Q_{16}}$，并证明 W_1^7 和 W_2^7 的像线性无关。关于史密斯同态的背景信息，请参见附录 E.1。

由于我们使用 Q_{16} 构造了主 D_8-丛 $P \to W_2^7$，因此在本节余下部分中，了解 $H^*(BQ_{16};\mathbb{Z}/2)$ 将很有帮助，这样我们就能为主 Q_{16}-丛赋予特征类。

命题 *14.100*（[222,引理 *4.1.1b*]和 [223,定理 *4.40ii*]）。存在一个同构 $H^*(BQ_{16};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\hat{x}, \hat{y}, p]/(\hat{x}\hat{y} + \hat{y}^2, \hat{x}^3)$，其中 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 分别是 x 和 y 在映射 $Q_{16} \to D_8$ 下的拉回，因此次数为 *1*；并且 $|p| = 4$。

命题 14.101。W_2^7 及其定义 *14.97* 中的主 D_8-丛 $P \to W_2^7$ 具有 *Spin-*D_{16} 结构。

证明。和往常一样，我们首先分析 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在 $S^3/Q_{16} \times T_p^2 \times S^2$ 的切丛上的作用。T_p^2 的切丛是平凡的，因为 T^2 具有李群结构；

[67] 此处选取哪个特定的反射子群并不重要，尽管在本文其他地方这点确实重要。

S^2 的切丛在添加一个平凡直和项后是平凡的，正如我们在（14.50）中所看到的。S^3/Q_{16} 的切丛实际上是可平凡化的，就像任意紧致定向的三维流形一样；但对我们而言，拥有一个到不同向量丛的显式同构更为有用。

如例 14.54，考虑 $TS^3 \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{C}^2$ 上的 Q_{16} 作用。该作用是 Q_{16} 在 $\mathbb{C}^2$ 上的标准表示，且外向单位法向量场是不变的，因此我们得知，$T(S^3/Q_{16}) \oplus \mathbb{R}$ 是一个秩二复向量丛 $E \to S^3/Q_{16}$，由主 Q_{16}-丛 $S^3 \to S^3/Q_{16}$ 诱导而来。

现在考虑 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用。从例 14.51 可知，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 通过 -1 作用于 $TS^2 \oplus \mathbb{R}$。对于 T_p^2，利用克莱因瓶的切空间分裂为 $\mathbb{R}$ 加上一个非平凡线丛这一事实，可以推断 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 如何作用于 $T(T_p^2)$。而对于 $T(S^3/Q_{16}) \oplus \mathbb{R} \cong E$，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 通过 ζ 作用。因此

$$TW_2^7 \oplus \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} E' \oplus \mathbb{R} \oplus \sigma^{\oplus 4}, \tag{14.102}$$

其中，$E' \to W_2^7$ 是一个实秩四向量丛，而 $\sigma \to W_2^7$ 是沿着 $W_2^7 \to \mathbb{RP}^2$ 从 $\mathbb{RP}^2$ 上的典范丛拉回的丛。将惠特尼和公式应用于 (14.102)，我们得知 $w_1(TW_2^7) = w_1(E')$，且 $w_2(TW_2^7) = w_2(E')$。ζ 在 $\mathbb{H}$ 上的作用保持定向，因此 $w_1(E') = 0$，所以 W_2^7 是可定向的。要计算 w_2，首先注意到 $E \to S^3/Q_{16} \times T_p^2 \times S^2$ 是 Spin 的，因为 Q_{16} 在 $\mathbb{H}$ 上的作用是 Spin；因此我们只需考察 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 如何作用于 E。在坐标中，我们在四个实坐标上得到两个平凡作用和两个反射作用，由此可以证明 $w_2(E') = \hat{}x^2$。因此 $w_2(TW_2^7) = \hat{}x^2$。

接下来我们需要计算 $w(P)$，方法是追踪 w 在经由 q_3、q_2，再到 q_1的拉回下的变化。在引理 14.37 中，我们证明了对于由反射给出的任意包含映射 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow D_8$，$w$ 的拉回为 0，因此 $q_3^*(w) = w$；原则上还需要验证 K¨unneth 公式中的交叉项不会产生诸如 $x\hat{}x$ 或 $y\hat{}x$ 这样的项，但所有此类项在 $q_3^*(w)$ 中都消失了。接下来，由于 Q_{16} 是关于标准表示 V 的 D_8 的 Pin^- 覆盖，$w_2(V)$ 和 $w_1(V)^2$ 在 $H^2(BQ_{16};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中被视为相同。因此 $q_2^*(w) = q_2^*(x^2) = \hat{}x^2$。最后，$q_1^*$ 拉回 $x \mapsto \hat{}x$，所以 $w(P) = \lambda^*(w) = \hat{}x^2$。

我们已经证明 W_2^7是可定向的，且 $w_2(TW_2^7) = w(P)$，因此 $(W_2^7,\ P)$ 是 Spin-D_{16}。□

现在我们证明 W_1^7和 W_2^7在 $\Omega_7^{\text{Spin-}D_{16}}$(点) $\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$中线性无关。由于我们已经在命题 14.93 中证明了 W_1^7 的阶为 4，这足以证明 W_1^7 和 W_2^7 共同生成 $\Omega_7^{\text{Spin-}D_{16}}$(点)。

设 ξ: $H \to \mathrm{O}$ 是一个切结构，且 $c \in H^k(BH;\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，因此我们可以将 c解释为带有 H-结构的流形上的特征类。设 M 是一个 H-流形，$N \subset M$ 是一个闭的、（$n-k$）维子流形，并且 N在 $H_{n-k}(M;\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中的模 2 基本类的像是 $c(M) \in H^k(M;\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的庞加莱对偶。在这种情况下，我们称 N 为至 $c(M)$ 的庞加莱对偶的光滑代表。在某些情形下，N会获得一个典范的 H'-结构，其中 $H' \to \mathrm{O}$ 是另一种切结构。在这种情况下，N 在 $\Omega_{n-k}^{H'}$ 中的类仅取决于 M 在 Ω_n^H中的类，并且这一构造提升为一个同态 S_c: $\Omega_n^H \to \Omega_{n-k}^{H'}$。这称为史密斯同态。

我们将在附录 E 中进一步讨论史密斯同态；目前我们需要知道的是，存在一个史密斯同态 $S_{x^2}\colon \Omega_n^{\text{Spin-}D_{16}} \to \Omega_{n-2}^{\text{Spin-}Q_{16}}$，它通过取 $x(P)^2$，的庞加莱对偶的光滑代表来定义，其中 $P \to M$ 是与 Spin-D_{16} 结构相关联的主 D_8-丛，且 Spin-Q_{16} ≔ Spin $\times_{\mathbb{Z}/2} Q_{16}$。我们将在附录 E.3 中证明这一点。

以下三个命题共同推出 W_1^7 和 W_2^7 在 $\Omega_7^{\text{Spin-}D_{16}}$(点) 中线性无关。

命题 14.103。令 $\nu\colon \Omega_7^{\text{Spin-}D_{16}}$ 为配边不变量

$$\nu\colon \Omega_7^{\text{Spin-}D_{16}} \xrightarrow{S_{x^2}} \Omega_5^{\text{Spin-}Q_{16}} \xrightarrow{\int w^2 y} \mathbb{Z}/2. \tag{14.104}$$

那么 $\nu(W_1^7) = 1$ 和 $\nu(W_2^7) = 0$。

命题 14.105。$S_{x^2}(W_2^7) \neq 0$ 属于 $\Omega_5^{\text{Spin-}Q_{16}}$。

命题 14.106。$\Omega_5^{\text{Spin-}Q_{16}} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus k}$ 对于某个 k。

我们在附录 E.3 中以命题 E.16 的形式证明命题 14.106；命题 14.103 和 14.105 在此处证明。不过，首先我们计算 $x(P)^2 \in H^2(W_2^7;\, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。

引理 14.107。设 $\alpha \in H^1(W_2^7;\, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是与主 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-丛 $S^3/Q_{16} \times T_p^2 \times S^2 \to W_2^7$ 对应的 $H^1(W_2^7;\, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中的元素。那么 $x(P)^2 = \hat{}x^2 + \hat{}x\alpha + \alpha^2$。

快速考察该纤维丛的 Serre谱序列

$$S^3/Q_{16} \times T_p^2 \longrightarrow W_2^7 \longrightarrow \mathbb{RP}^2 \tag{14.108}$$

可知第 三个单项式 $\hat{}x^2$、$\hat{}x\alpha$ 和 α^2 在 $H^2(W_2^7;\, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中线性无关 .

引理 *14.107* 的证明。特征类 $x(P)$ 是通过复合映射 $W_2^7 \to BD_8 \to B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 拉回 $H^1(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z};\, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中的非零类得到的，其中第一个映射是 P 的分类映射，第二个映射由对旋转子群取商诱导。因此，我们需要追踪 λ 如何拉回 $x \in H^1(BD_8; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。应用 q_3^*，若 α' 是 $BD_8 \times B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项对应的 $H^1(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的生成元，则 $q_3^*(x) = x + \alpha'$，因为 x 在反射上的取值非平凡（如我们在引理 14.37 中所讨论的）。于是 q_2^* 将 $x \mapsto \hat{}x$ 映到.....，而 q_1^* 不会影响这个类，由此得到 $q_1^* q_2^*(\alpha') = \alpha$。因此，$x(P) = \hat{}x + \alpha$ 且 $x(P)^2 = \hat{}x^2 + \hat{}x\alpha + \alpha^2$。 □

现在来介绍我们承诺过的命题。

命题 *14.103* 的证明。首先，我们证明 $\nu(W_1^7) = 1$。为此，只需证明 $S_{x^2}(W_1^7) = L_4^5$，其中对偶丛由 $S^5 \to L_4^5$ 诱导，因为对于这个对偶丛，$\int_{L_5^4} w^2 y =$

1. 为了说明这一点，注意光滑子流形 $i\colon N \hookrightarrow M$ 是类 α 的庞加莱对偶的光滑代表，当且仅当对任意 $\beta \in H^*(M;\, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$,

$$\int_N i^*(\beta) = \int_M \alpha\beta. \tag{14.109}$$

只有当 $|\beta| = \dim(N)$ 和 $|\alpha| = \dim(M) - \dim(N)$ 时，这个等式才有意义；否则两边都为零。令 $N \subset W_1^7$为 $M = W_1^7$在 $\mathbb{RP}^2$中某点上的 L_4^5纤维；我们要在这个例子中验证 (14.109)。引理 14.89 解决了这个问题：唯一非零的情形是 $\beta = w^2 y$，并且

$$\int_{L_4^5} w^2 y = \int_{W_1^7} w^2 x^2 y = 1. \tag{14.110}$$

这个命题的后半部分要证明 $\nu(W_2^7) = 0$。我们先计算 W_2^7上的史密斯同态；引理 14.107 告诉我们要计算 $\hat{}x^2 + \hat{}x\alpha + \alpha^2$ 的庞加莱对偶。我们可以逐个单项式进行计算，再取不交并。

- 由于 $\hat{}x^2$ 来自 (14.108) 中的纤维，$\hat{}x^2$ 的庞加莱对偶也可以取为一个纤维丛，具体而言，是 $S^1 \times T^2 \to Y_1 \to \mathbb{RP}^2$ 这种形式。可以发现，对偶丛限制在任意纤维 S^1 上都是平凡的，而且这些 S^1 携带非配边的 Spin 结构；因此，通过用 D^2 的副本填充逐纤维的 S^1， Y_1 就是配边的。

- 由于 α^2 是底空间 $\mathbb{RP}^2$上的顶次上同调类， α^2 的庞加莱对偶就是纤维 $S^3/Q_{16} \times T_p^2$；这里的论证与我们上面计算$S_{x^2}(W_1^7)$的方式基本相同。 $S^3/Q_{16} \times T_p^2$上的对偶丛沿商 $S^3/Q_{16} \times T_p^2 \to S^3/Q_{16}$拉回，因此其特征类也从 S^3/Q_{16} 拉回，故在次数高于 3 时消失。因此 $\int_{S^3/Q_{16}\times T^2} w^2 y = 0$。

- 最后， $x\alpha$ 的庞加莱对偶的一个代表是一个可分解为纤维丛 $\Sigma \times T_p^2 \to Y_2 \to \mathbb{RP}^1$ 的流形，其中 Σ是一个闭非定向曲面。该流形上的类w^2从一个三维流形拉回而来；这个三维流形是将 Y_2 按 T_p^2 取商得到的，因此当 Y_2时，$w^2 = 0$ 成立，故 $\int_{Y_2} w^2 y = 0$ 也成立。

因此 $\nu(W_2^7) = 0$。 □

命题 *14.105* 的证明。 在前一个命题的证明中，我们找到了 $S_{x^2}(W_2^7)$ 的一个代表，它是三个五维流形 $S^3/Q_{16} \times T_p^2$、 Y_1 和 Y_2 的不交并；我们还看到 Y_1 作为 Spin-Q_{16} 流形是配边的。在命题 E.13 中，我们证明 $[S^3/Q_{16} \times T_p^2] \neq 0$ 属于 $\Omega_5^{\text{Spin-}Q_{16}}$；在这里，我们定义 W_2^7 时赋予 T_p^2 非配边的 Spin 结构至关重要，这样经过 Smith 同态后，我们得到 $S^3/Q_{16}\times T_p^2$。最后， Y_2 与 $S^3/Q_{16}\times T_p^2$ 不共边，因此可以得出结论： $S_{x^2}(W_2^7) \neq 0$。 □

至此，我们完成了对 11 维及以下维度中 Spin-$\mathrm{GL}^+(2,\ \mathbb{Z})$ 配边群生成元的确定。

14.4 乘法结构

我们在第 13.4 节看到，Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边是一个环。Spin-D_{16} 配边不是环，根本原因是无法以非平凡的方式将两个 D_8丛张量在一起，得到一个D_8丛。Spin-D_{16} 配边仍然是一个 Ω_*^{Spin}-模，这与任何类型的扭曲 Spin 配边一样，而这些信息大多可以从 Adams 谱序列的 E_∞ 页读出。

令人意外的是，尽管 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边是一个环，而且我们有一个从 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 配边到 Spin-D_{16} 配边的映射，Spin-D_{16} 配边却不是 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$配边上的模！这是因为在 $\Omega_*^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}$(点) 中， S_p^1 的类可被 4 整除。然而，我们看到 $\Omega_2^{\text{Spin-}D_{16}}$(点) $\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的生成元 x 是另一个类的 S_p^1 倍，但 x 不能被 4 整除。因此，Spin-D_{16} 流形与 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$流形的乘积上不存在自然的 Spin-D_{16} 结构。这类似于（并且与之相关的）这样一个事实：包含映射 U(1) $\to$O(2) 定义了一个从 Spin^c 配边到 Spin-O(2) 配边的映射；Spin^{c}配边是一个环，但 Spin-O(2) 配边不是这个环上的模（在此情形下，这是因为与 S_p^1 取乘积并不总是为零，而这在任何 $\Omega_*^{\mathrm{Spin}^c}$ -模中都不可能发生）。

我们的计算到此结束。更多细节请见附录。

一组配边群

本附录汇总了本文计算得到的一些十一维及以下的配边群。我们还列出了一组生成元。

k	Ω_k^{Spin} (点)	生成元
0	$\mathbb{Z}$	pt_+
1	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	S^1_p
2	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$S^1_p \times S^1_p$
3	0	
4	$\mathbb{Z}$	K3
5	0	
6	0	
7	0	
8	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$(B\,, \mathbb{HP}^2)$
9	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	$(B \times S^1_p\,, \mathbb{HP}^2 \times S^1_p)$
10	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	$(B \times S^1_p \times S^1_p,\ \mathbb{HP}^2 \times S^1_p \times S^1_p,\ X_{10})$
11	0	

表11：小于十二维的 Spin 流形的配边群及其一组完整生成元。

我们列出其中一些生成元，并解释相关记号。

- S^1_p 是一个带有由李群标架诱导的 Spin 结构的圆，即费米子的周期性边界条件。

- K3 表示一个 K3 曲面，而 E 表示一个恩里克斯曲面。

- B 描述了一个 Bott 流形和 $\mathbb{HP}^2$ 四元数射影空间。“Bott 流形”这一名称并不能在微分同胚意义下唯一确定 B；我们无需选定某个具体的 Bott 流形，但 [224, 第 7] 节和 [40, 第 5 节中构造了明确的例子3]。

- X_{10} 是一个 Milnor超曲面。

- L^{2n-1}_k 是透镜空间，另见附录 C.1。离散的 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$-丛由纤维化 $S^{2n-1} \to L^{2n-1}_k$ 诱导。记号 $\widetilde{L}^{2n-1}_k$ 表示一种不同的 Spin

k	$\Omega_k^{\mathrm{Spin}}\quad (B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	生成元
0	$\mathbb{Z}$	pt_+
1	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	$(S^1_p,\ L^1_3)$
2	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$S^1_p\times S^1_p$
3	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	L^3_3
4	$\mathbb{Z}$	K3
5	$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$	L^5_3
6	0	
7	$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$	L^7_3
8	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$(B,\ \mathbb{HP}^2)$
9	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\ \oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\ \oplus(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\ \oplus(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$	$(B\times S^1_p, \mathbb{HP}^2\times S^1_p, \mathbb{HP}^2\times L^1_3, L^9_3)$
10	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\ \oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\ \oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	$(B\times S^1_p\times S^1_p,\ \mathbb{HP}^2\times S^1_p\times S^1_p,\ X_{10})$
11	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$	$(\mathbb{HP}^2\times L^3_3, L^{11}_3)$

表12：小于十二维时带有 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 丛的 Spin 流形的配边群及一组完整的生成元。此表包含上文的 Spin 配边群。

或 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 结构，其实现可从 (C.3) 中给出的 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$对费米子的作用的提升中提取。

- 这些空间 Q_k^{2n-1} 是 L_k^{2n-3} 上的透镜空间丛，且在透镜空间纤维上带有 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 丛，另见附录 C.2。
- S^1_R 是一个带有涉及反射的对偶丛的圆。
- $\mathbb{RP}^{3+4m}$ 和 $\widetilde{\mathbb{RP}}^{3+4m}$ 是实射影空间，带有与将反射嵌入 D_8 （或其在 D_{16}中的提升）时所得到的不同嵌入相关联的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$对偶丛。
- W_1^7 是 Q_4^7的一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 商。
- W_2^7是 $S^3/Q_{16}\times S^2\times T^2$的一个涉及反射的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 商，其中商在 S^3/Q_{16} 因子上通过反射作用，在 S^2上表现为对径映射，并在作用于 T^2时表现为可产生克莱因瓶的无不动点等距变换。
- $W_{1,\ 8}$ 是一个半 Bott 流形，可以构造为卡拉比-丘四维簇的（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）$\oplus$（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）商。
- W_1^9是 $L_4^5\times S^4$的一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 商。

k	$\Omega_k^{\mathrm{Spin}}\quad (B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$	生成元
0	$\mathbb{Z}$	pt_+
1	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$	$(S^1_p,\ L^1_4)$
2	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	$(S^1_p\times S^1_p,\ S^1_p\times L^1_4)$
3	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$	$(S^1_p\times S^1_p\times L^1_4,\ L^3_4)$
4	$\mathbb{Z}$	K3
5	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	Q^5_4
6	0	
7	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\ \oplus(\mathbb{Z}/32\mathbb{Z})$	$(\widetilde{L^7_4},\ L^7_4)$
8	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$(B,\ \mathbb{HP}^2)$
9	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3}\oplus(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\ \oplus(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$	$(B\times S^1_p, \mathbb{HP}^2\times S^1_p, B\times L^1_4, \mathbb{HP}^2\times L^1_4, Q^9_4)$
10	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 5}$	$(B\times S^1_p\times S^1_p, \mathbb{HP}^2\times S^1_p\times S^1_p, X_{10},$ $(B\times S^1_p\times L^1_4, \mathbb{HP}^2\times S^1_p\times L^1_4)$
11	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ $\oplus(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{\oplus 2}\oplus(\mathbb{Z}/128\mathbb{Z})$	$(X_{10}\times L^1_4, \mathbb{HP}^2\times S^1_p\times S^1_p\times L^1_4,$ $\mathbb{HP}^2\times L^3_4,\ \widetilde{L^{11}_4}, L^{11}_4)$

表13：维数小于十二且带有 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 丛的 Spin 流形的配边群及一组完整的生成元。其中包含上述 Spin 配边群。在9维时，若要获得一组生成元，使其生成给定的直和分解，而不只是生成集，请将 $B\times L^1_4$ 替换为（$B\times L^1_4$） # （$-2Q^9_4$）。

- X_5、 X_9、 X_{11} 及其带波浪号的版本，都是实射影空间上的实射影空间纤维化；其对偶丛由 D_8 嵌入 D_{16}所区分，我们称之为 Arcana。

k	$\Omega_k^{\text{Spin-}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})}$(点)	生成元
0	$\mathbb{Z}$	pt_+
1	$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$	L_4^1
2	0	
3	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	L_4^3
4	$\mathbb{Z}$	E
5	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/32\mathbb{Z})$	$(\widetilde{L}_4^5, L_4^5)$
6	0	
7	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	Q_4^7
8	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$(B, \mathbb{HP}^2)$
9	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/128\mathbb{Z})$	$(\widetilde{L}_4^9、\ \mathbb{HP}^2 \times L_4^1、\ L_4^9)$
10	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	X_{10}
11	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$	$(\mathbb{HP}^2 \times L_4^3,\ X_{10} \times L_4^1,\ Q_4^{11})$

表14：维数低于十二且具有完整生成元集的 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 流形的配边群完整的生成元集。

B 对偶群

在本附录中，我们总结各种对偶群及其各自的群结构，另见 [33]。

我们讨论的第一个群是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$，它可以理解为 IIB 型的玻色对偶群。它由两个元素生成

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.1}$$

有限阶

$$S^4 = \mathrm{id}\,, \quad U^6 = \mathrm{id}\,. \tag{B.2}$$

它可以定义为

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \langle U, S |\, S^4 = \mathrm{id}\,,\ S^2 = U^3 \rangle = (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) *_{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\,, \tag{B.3}$$

这使其合并自由积的结构显而易见，另见 [30–32]。该

k	$\Omega_k^{\text{Spin-}D_{16}}$(点)	生成元
0	$\mathbb{Z}$	pt_+
1	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	$(L_4^1,\ S_R^1)$
2	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$S_p^1 \times S_R^1$
3	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3}$	$(L_4^3, \mathbb{RP}^3, \widetilde{\mathbb{RP}}^3)$
4	$\mathbb{Z}$	E
5	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	$(L_4^5,\ X_5)$
6	0	
7	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3} \oplus(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$	$(\mathbb{RP}^7, \widetilde{\mathbb{RP}}^7 W_2^7,\ W_1^7)$
8	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	$(W_{1,8}, \mathbb{HP}^2, W_1^7 \times S_p^1)$
9	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 8}$	$(W_1^7 \times S_p^1 \times S_p^1, X_9, \widetilde{X}_9, L_4^9, W_1^9,$ $B \times L_4^1, \mathbb{HP}^2 \times L_4^1, \mathbb{HP}^2 \times S_R^1)$
10	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 4}$	$(B \times L_4^1 \times S_p^1, W_1^9 \times S_p^1, \mathbb{HP}^2 \times L_4^1 \times S_p^1, X_{10})$
11	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 9} \oplus(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$	$(\mathbb{RP}^{11}, \widetilde{\mathbb{RP}}^{11} X_{11},\ \widetilde{X}_{11}, \mathbb{HP}^2 \times L_4^3, \mathbb{HP}^2 \times \mathbb{RP}^3,$ $\mathbb{HP}^2 \times \widetilde{\mathbb{RP}}^3 X_{10} \times L_4^1, X_{10} \times S_R^1, Q_4^{11})$

表15：维数低于十二且具有完整生成元集的 Spin-D_{16} 流形的配边群。

通常的无限阶生成元 T 如下得到

$$T = S^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{B.4}$$

$\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$ 的阿贝尔化为

$$\mathrm{Ab}\big(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big) = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}\,, \tag{B.5}$$

它由 T 在 $\mathrm{Ab}\big(\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})\big)$ 中的像生成。

加入费米子后，我们需要将对偶群的作用提升到费米自由度上。这引出了第二个群 $\mathrm{Mp}(2,\ \mathbb{Z})$，即元辛群，参见 [28, 32]。将生成元定义为 U（阶为 12）和 S（阶为 8），则该群可表示为

$$\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z}) = \langle \hat{U}, \hat{S} |\, \hat{S}^8 = \mathrm{id}\,,\ \ \hat{S}^2 = \hat{U}^3 \rangle = (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) *_{(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})} (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})\,. \tag{B.6}$$

Spin 提升编码在

$$\hat{S}^4 = \hat{U}^6 = (-1)^F \,. \tag{B.7}$$

其阿贝尔化由以下给出

$$\mathrm{Ab}\big(\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})\big) = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}\,, \tag{B.8}$$

由$\hat{}T = \hat{}S^{-1}\,\hat{}U$的像生成。

最后，我们还加入反射算子

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.9}$$

以定义群

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) = \langle U, S, R \,|\, S^4 = \mathrm{id}\,,\ RSR^{-1} = S^{-1}\,,\ RUR^{-1} = U^{-1}\,,\ S^2 = U^3 \rangle = D_{12} *_{D_4} D_8\,, \tag{B.10}$$

其中 D_{2n} 表示含有 $2n$ 个元素的二面体群（不是二元二面体群）。例如，

$$D_8 = \langle S, R \,|\, S^4 = \mathrm{id}\,,\ R^2 = \mathrm{id}\,,\ RSR^{-1} = S^{-1} \rangle\,. \tag{B.11}$$

GL(2, $\mathbb{Z}$) 的 Pin$^+$ 覆盖定义为

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z}) &= \langle \hat{U}, \hat{S}, \hat{R} \,|\, \hat{S}^8 = \mathrm{id},\ \hat{R}^2 = \mathrm{id}\,,\ \hat{R}\hat{S}\hat{R}^{-1} = \hat{S}^{-1}\,,\ \hat{R}\hat{U}\hat{R}^{-1} = \hat{U}^{-1}\,,\ \hat{S}^2 = \hat{U}^3 \rangle \\ &= D_{16} *_{D_8} D_{24}\,, \end{aligned} \tag{B.12}$$

其中，$\hat{}R$ 表示 R的 Pin$^+$ 提升。请注意，Pin$^+$ 覆盖恰好意味着反射的提升 $\hat{}R$ 平方后等于 id，而不是 $(-1)^F$，后者是 Pin$^-$ 覆盖的情形。在这两种情况下，阿贝尔化为

$$\mathrm{Ab}\big(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})\big) = \mathrm{Ab}\big(\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z})\big) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\,, \tag{B.13}$$

$\hat{}\,\hat{}$ 分别由 R、S 和 R、S 的像生成。

B.1 费米子宇称与世界面定向反转

也可以考虑世界面定向反转 Ω 的作用，其定义为

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{B.14}$$

这可以从 IIB 型二形式场上的作用推导出来，这些场按 GL(2, $\mathbb{Z}$) 双重态 $(C_2, B_2)^T$ 变换。类似地，可以得到左手费米子宇称 $(-1)^{F_L}$ 以 GL(2, $\mathbb{Z}$) 元素表示时的形式

$$(-1)^{F_L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{B.15}$$

由此可以看出

$$S\,\Omega\,S^{-1} = (-1)^{F_L}, \tag{B.16}$$

这意味着 Ω 和 $(-1)^{F_L}$ 互为 S 对偶。它与反射 R 的关系为

$$S\,R = (-1)^{F_L}, \quad R\,S = \Omega, \tag{B.17}$$

from，由此我们可以定义 $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ 中相应元素的 Spin 提升

$$\hat{S}\,\hat{R} = (-1)^{\hat{F}_L}, \quad \hat{R}\,\hat{S} = \hat{\Omega}, \tag{B.18}$$

根据 (B.12)，它们的平方都等于单位元。

这两个元素都会使膨胀子场保持不变，但会使 RR 零形式变号，因此轴子-膨胀子的变换规则为：

$$\Omega \text{ or } (-1)^{F_L}: \quad \tau \to -\overline{\tau}. \tag{B.19}$$

这一变换涉及复共轭，因此会给涉及反射的局部 Calabi–Yau 流形的定义带来障碍。

还要注意，虽然 IIB 型弦理论的手征4形式 C_4 在 SL(2, $\mathbb{Z}$) 变换下保持不变，但在 GL(2, $\mathbb{Z}$) 中的反射下会改变符号。此外，如上所述，IIB 型的两个 2-形式场在 GL(2, $\mathbb{Z}$) 对称性下变换为一个双重态，因此 (p, q)- 弦及其磁对偶五膜会受到非平凡背景的影响。

B.2 二面体群的嵌入

Spin-GL$^+$(2，$\mathbb{Z}$) 流形的一些生成元源自 Spin-D_4 流形或 Spin-D_8 流形，这是通过将这些群嵌入 GL$^+$(2，$\mathbb{Z}$) 实现的。将 D_4 和 D_8 嵌入 D_{16} 有不止一种可能；每种嵌入都会导出不同的 Spin-D_{16} 结构，进而得到不同的 Spin-GL$^+$(2，$\mathbb{Z}$) 流形。同一个底层流形上配置不同的丛，会产生不同的配边类。本附录将介绍这些嵌入，以及如何对其进行刻画。

我们先聚焦于将 $D_4 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 嵌入到 D_{16} 中。后者可以实现为八边形的对称群。将 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 嵌入其中时，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 之一总是对应一个 180° 旋转，我们将其称为 s_4；另一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 则描述反射，记为 r_4。第一个嵌入 i_4 为

$$i_4 \colon \quad s_4 \mapsto \hat{S}^4\,, \;\; r_4 \mapsto \hat{\Omega}\,. \tag{B.20}$$

通过应用 (B.12) 中的定义恒等式，很容易证明其具有正确的群结构。从几何上看，这相当于将该群嵌入为由沿八边形一条边的反射和旋转 180°生成的群。第二个嵌入对反射作如下修改

$$\tilde{i}_4 \colon \quad s_4 \mapsto \hat{S}^4\,, \;\; r_4 \mapsto \hat{S}\,\hat{\Omega}\,, \tag{B.21}$$

具有正确的群结构

$$r_4^2 = \hat{S}\,\hat{\Omega}\,\hat{S}\,\hat{\Omega} = \hat{S}\,\hat{S}^{-1} = \mathsf{id} \quad s_4 r_4 = \hat{S}^5\,\hat{\Omega} = \hat{S}\,\hat{\Omega}\,\hat{\Omega}\,\hat{S}^4\,\hat{\Omega} = \hat{S}\,\hat{\Omega}\,\hat{S}^{-4} = \hat{S}\,\hat{\Omega}\,\hat{S}^4 = r_4 s_4, \tag{B.22}$$

其中我们利用了

$$\hat{\Omega}\,\hat{S}\,\hat{\Omega} = \hat{R}\,\hat{S}^2\,\hat{R}\,\hat{S} = \hat{S}^{-1}\,, \tag{B.23}$$

ˆ，因此可以在二面体群的定义中用 R 替代。这第二个嵌入与前一个类似，但它将 r_4 映射为沿八边形对角线而非边的反射。

I以类似的方式，我们发现了 D_8 到 D_{16} 的两种不同嵌入，分别由 y

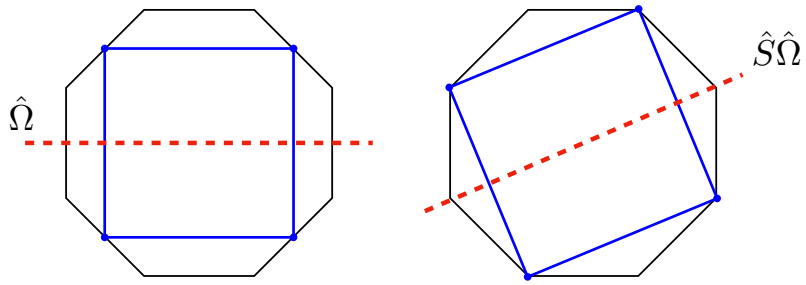
$$i_8 \colon \quad s_8 \mapsto \hat{S}^2\,, \;\; r_8 \mapsto \hat{\Omega}\,, \tag{B.24}$$

and

$$\tilde{i}_8 \colon \quad s_8 \mapsto \hat{S}^2\,, \;\; r_8 \mapsto \hat{S}\,\hat{\Omega}\,, \tag{B.25}$$

分别带有反射 r_8 和旋转 s_8。对于 $\tilde{\imath}_8$，我们验证定义性质

$$\tilde{r}_8\,\tilde{s}_8\,\tilde{r}_8 = \hat{S}\,\hat{\Omega}\,\hat{S}^3\,\hat{\Omega} = \hat{S}^{-2} = \tilde{s}_8^{-1}\,. \tag{B.26}$$



^^^ 图29： D_8 到 D_{16} 的两种嵌入，并标出了 Ω 和 SΩ 的作用。

当然，我们也可以定义如下形式的中间映射

$$\begin{aligned} &s_4 \mapsto s_8^2 \mapsto \hat{S}^4\,, \quad r_4 \mapsto r_8 \mapsto \hat{\Omega}\,, \\ &s_4 \mapsto s_8^2 \mapsto \hat{S}^4\,, \quad r_4 \mapsto r_8 \mapsto \hat{S}\,\hat{\Omega}\,, \end{aligned} \tag{B.27}$$

以定义从 D_4 到 D_8 的嵌入。

将 D_{2n} 理解为一个 n 边形的对称性后，我们可以把反射的不同嵌入想象成关于一条经过两条边或两个顶点的直线的反射。图10展示了这一点，我们在此重现该图（见图29）。由此我们还可以看到，所有其他将反射映射到元素 ^S^k^Ω 的嵌入，都可以通过对上述嵌入施以旋转共轭得到；也就是说，反射轴会按某个旋转移动，而该旋转由 ^S 的倍数定义。正如我们所见，这适用于 $(-1)^{\hat{F}_L}$ 作为 Ω 的 S 对偶的情形。

C η-不变量

在本附录中，我们概述了透镜空间及透镜空间丛上 η 不变量的计算。这些结果通常有助于确保某些流形生成我们所寻找的非平凡配边类，并解决谱序列计算中的某些扩张问题。它们还可用于证明不同的透镜空间（即由不同群作用的商构造而来的透镜空间）是否共边。为此，我们需要 η 不变量是配边不变量；这在维数（$4n+1$）时成立，但在维数（$4n-1$）时不成立，因为（$4n$）维指标密度包含纯引力贡献。因此，在维数（$4n-3$）时，我们使用具有不同荷的两个 η 不变量之差作为配边不变量；此时指标密度中的纯引力贡献会消失，另见下文 C.3节的讨论。

透镜空间的 C.1 η-不变量

我们先讨论透镜空间上的 η 不变量。我们将主要遵循 [32] 中的描述，并将其推广到包括 Rarita-Schwinger 场的 Spin $_{3\,2}$ 的 η 不变量以及一般的 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 作用。在大部分讨论中，我们只关注 η 不变量的小数部分，所得结果均按模 $\mathbb{Z}$ 理解。

一般而言，我们将透镜空间定义为

$$L_k^{2n-1}(j_1\,,\ldots\,,j_n) = S^{2n-1}/(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})\,, \tag{C.1}$$

其中 j_i 是与 k 互素的整数；这些流形可视为 $\mathbb{C}^n/(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ 的渐近边界。$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 对 $\mathbb{C}^n$ 的复坐标 z_i 的作用为

$$z_i \mapsto \exp(2\pi i j_i/k) z_i\,. \tag{C.2}$$

这可概括为 $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ 的切丛上的一个由 $(2n\times 2n)$-矩阵 τ 给出的作用，其中

$$\det\big(\mathrm{id} - \tau(\ell)\big) = \big|1 - e^{2\pi i \ell j_1/k}\big|^2 \ldots \big|1 - e^{2\pi i \ell j_n/k}\big|^2 \tag{C.3}$$

此外，这自然定义了一个由纤维化结构给出的 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 丛

$$\begin{array}{c} \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \hookrightarrow S^{2n-1} \\ \downarrow \\ L_k^{2n-1}(j_1\,,\ldots\,,j_n) \end{array} \tag{C.4}$$

在我们的许多生成元中，它可解释为非平凡的对偶丛。带有荷 q 、属于该 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 丛的狄拉克费米子 ψ_q 按如下方式变换

$$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}: \quad \psi_q \mapsto e^{-2\pi i q/k} \exp\big(-\tfrac{\pi}{k}(j_1\,\Gamma^1\Gamma^2 + \cdots + j_n\,\Gamma^{2n-1}\Gamma^{2n})\big)\,\psi_q\,. \tag{C.5}$$

定义群作用的 Spin 提升。这里，Γ^ℓ 是 $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ 上的 γ 矩阵，并且我们进一步定义

$$\overline{\Gamma} = i^{-n}\Gamma^1\ldots\Gamma^{2n}\,. \tag{C.6}$$

要使这个作用定义良好，必须满足

$$e^{-2\pi i q}\exp\big(-\pi(j_1\,\Gamma^1\Gamma^2 + \cdots + j_n\,\Gamma^{2n-1}\Gamma^{2n})\big) = 1\,, \tag{C.7}$$

这要求 q 可能为半整数。这也可以概括为一个作用于 Spin丛的矩阵$\rho(\ell)$。

透镜空间上的 Spin 结构

在详细介绍透镜空间上各种 η-不变量的计算之前，我们先描述其不同的 Spin 结构。为此，我们考察如下形式的透镜空间：

$$L_4^{4n-1} \coloneqq L_4^{4n-1}(1,\dots,1)\,. \tag{C.8}$$

这些都是 Spin 流形，但允许存在两种不同的 Spin 结构。通过考察旋转作用在旋量场上的提升（如 (C.5) 中所述），可以区分这两种结构。暂时关闭对偶丛（即设为 $q=0$），我们看到，有不止一种提升可以定义良好的 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 作用

$$\psi \mapsto \alpha\, \exp\big(-\tfrac{\pi}{4}(\Gamma^1\Gamma^2+\cdots+\Gamma^{4n-1}\Gamma^{4n})\big)\,\psi\,, \tag{C.9}$$

其中，α 考虑了在 (C.5) 中被吸收到对偶部分的歧义 $e^{-2\pi i q/k}$。为了定义 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 作用，α 必须满足

$$\alpha^4 = 1 \quad \to \alpha = e^{-2\pi i\kappa/4}\,. \tag{C.10}$$

选择 κ 决定了旋转作用提升到旋量丛的不同可能方式，也就是不同的 Spin 结构。重新引入对偶丛后，我们进一步看到，这种选择可以通过改变相应费米子的荷来体现。在 Spin 结构由 κ 指定的流形上，荷为 q 的费米子，其变换方式就如同它在由 Spin 结构 $\kappa=0$指定的流形上具有荷 $\kappa+q$。由于 Spin 结构由 $H^1(L_4^{4n-1};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 分类，因此还必须将 α限制为 ±1，也就是说，只有两个值 $\kappa=\{0,2\}$ 对应不同的 Spin 结构。

对于透镜空间丛，以及不允许存在 Spin 结构、但允许存在 Spin-$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 结构的透镜空间，也有非常相似的结论，例如 L_4^5。在所有这些情况下，都可以通过改变旋量的有效荷来探测各种结构；而对于扭曲 Spin 结构，有效荷可能受到一致性约束。

狄拉克场

我们先从通常的自旋 $_1$ $_2$ 狄拉克场开始讨论，其 η 不变量记为 η^{D}。等变指标定理 [197, 32] 可根据费米子在 $\mathbb{C}^n/(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ 中奇异点处的变换性质，推导出 η 不变量的小数部分

$$\eta_q^{\mathrm{D}}\big(L_k^{2n-1}\big) = -\frac{1}{k}\bigg(\sum_{\ell=1}^{k-1}\frac{\mathrm{tr}\big(\overline{\Gamma}\rho(\ell)\big)}{\det(\mathrm{id}-\tau(\ell))}\bigg)\,, \tag{C.11}$$

其中，矩阵 τ 和 ρ 是上文定义的矩阵。对于作用 (C.5)，有

$$\mathrm{tr}\big(\overline{\Gamma}\rho(\ell)\big) = e^{-2\pi i\ell q/k}\big(e^{-\pi i\ell j_1/k} - e^{\pi i\ell j_1/k}\big)\ldots\big(e^{-\pi i\ell j_n/k} - e^{\pi i\ell j_n/k}\big)\,. \tag{C.12}$$

结合 (C.3)，可得

$$\eta_q^{\mathrm{D}}\big(L_k^{2n-1}\big) = -\frac{1}{(2i)^n k}\sum_{\ell=1}^{k-1}\frac{e^{-2\pi i\ell q/k}}{\sin(\pi\ell j_1/k)\big)\ldots\sin(\pi\ell j_n/k)}\,, \tag{C.13}$$

这与 [32] 中的公式一致，适用于所有 j_i 相等的情况。

Rarita-Schwinger 场

我们介绍两种确定 η_q^{RS} 的方法，即荷为 q 的 Rarita-Schwinger 算子的 η-不变量。第一种方法可根据以下事实推导：Rarita-Schwinger 场 Ψ_μ 在 Spin 丛与切丛的张量积中变换。这会修正矩阵 $\rho_{\mathrm{RS}}(\ell)$，使其也包含向量指标的旋转，从而得到

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\big(\overline{\Gamma}\rho_{\mathrm{RS}}(\ell)\big) = e^{-2\pi i\ell q/k}\big(e^{-\pi i\ell j_1/k} - e^{\pi i\ell j_1/k}\big)\ldots\big(e^{-\pi i\ell j_n/k} - e^{\pi i\ell j_n/k}\big)\\ \times\big(2\cos(2\pi\ell j_1/k) + \cdots + 2\cos(2\pi i\ell j_n/k) - 1\big)\,.\end{aligned} \tag{C.14}$$

最后一个因子中的 **−1** 大致反映了 L_k^{2n-1} 的切空间比 $\mathbb{C}^n$ 的切空间少一维，另见下文 (C.16)。更正式地说，诸如此类运用等变指标定理的计算，本质上是通过寻找一个高一维的带边界流形来求出 η 不变量，在该流形上可通过 APS 指标定理计算指标。在 $(d+1)$ 维中，Rarita-Schwinger 算子限制到一个 d 维的 Rarita-Schwinger $+$，并带有狄拉克贡献。(C.14) 中额外的 -1 正是用于消去多出的狄拉克贡献。综合以上各项，Rarita-Schwinger 算子的 η-不变量由下式给出

$$\begin{aligned}\eta_q^{\mathrm{RS}}\big(L_k^{2n-1}\big) = -\frac{1}{(2i)^n k}\sum_{\ell=1}^{k-1}\Bigg(\frac{e^{-2\pi i\ell q/k}}{\sin(\pi\ell j_1/k)\big)\ldots\sin(\pi\ell j_n/k)}\\ \times\big(2\cos(2\pi\ell j_1/k) + \cdots + 2\cos(2\pi i\ell j_n/k) - 1\big)\Bigg)\,.\end{aligned} \tag{C.15}$$

或者，也可以通过注意到透镜空间的切丛复化分解为以下形式，推导出 RS η 不变量：

$$\big(TL_k^{2n-1}\otimes\mathbb{C}\big)\oplus\mathbb{C} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n}\big(\mathcal{L}^{j_i}\oplus\mathcal{L}^{-j_i}\big)\,, \tag{C.16}$$

其中， $\mathcal{L}$ 是与一种 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 丛相关联的复直线丛，该丛具有 (C.4) 中定义的形式，且所有 j_i 均设为 1。将其与 $\mathcal{L}^q$ 张量化，另见 [33], ，可得

$$\left(TL_k^{2n-1}\otimes\mathcal{L}^q\right)\oplus\mathcal{L}^q\simeq\bigoplus_{i=1}^{n}\left(\mathcal{L}^{q+j_i}\oplus\mathcal{L}^{q-j_i}\right), \tag{C.17}$$

这意味着

$$\eta_q^{\mathrm{RS}}\left(L_k^{2n-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\eta_{q+j_i}^{\mathrm{D}}\left(L_k^{2n-1}\right)+\eta_{q-j_i}^{\mathrm{D}}\left(L_k^{2n-1}\right)\right)-\eta_q^{\mathrm{D}}\left(L_k^{2n-1}\right). \tag{C.18}$$

代入 (C.13)，即可得到 (C.15) 中的结果。将所有 j_i 设为 1，我们再次发现这与 [33]中的公式完全一致。

符号算子

为保证完备性，我们还给出与特征相关的 η-不变量公式；如 [32]中所述，该公式可由双旋量场推导得到。

特征对应的 ρ 矩阵，其荷为 q 时，同样会根据其对双旋量场的作用进行修正，因此有

$$\mathrm{tr}\left(\overline{\Gamma}\rho_{\mathrm{sig}}(\ell)\right)=e^{-2\pi i\ell q/k}\prod_{i=1}^{n}\left(e^{-\pi i\ell j_1/k}-e^{\pi i\ell j_1/k}\right)\left(e^{-\pi i\ell j_1/k}+e^{\pi i\ell j_1/k}\right), \tag{C.19}$$

由此可得

$$\eta_q^{\mathrm{sig}}\left(L_k^{2n-1}\right)=-\frac{1}{(i)^n\,k}\sum_{\ell=1}^{k-1}\frac{e^{2\pi i\ell q/k}}{\tan(\pi\ell j_1/k)\ldots\tan(\pi\ell j_n/k)}, \tag{C.20}$$

与关于 $j_i=1$ 的结果一致。

C.2 η-不变量与透镜空间丛

我们还可以描述正文中作为流形 Q_k^{2n-1} 描述的透镜空间丛的 η-不变量的小数部分。下面简要回顾这些透镜空间丛的构造。

从基流形 $B=\mathbb{CP}^1$ 出发，我们定义 $(n-1)$ 个复直线丛的直和，它可以描述为超平面丛 $H=\mathcal{O}(1)$ 的张量积

$$\mathcal{L}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{L}_{n-1}=H^{m_1}\oplus\ldots H^{m_{n-1}}. \tag{C.21}$$

因此，在 $\mathbb{CP}^1$ 上每一点的纤维由 $\mathbb{C}^{n-1}$ 给出。接下来，我们取

这个线丛直和的球丛，并像往常一样定义一个 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 作用，使其逐纤维作用为

$$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}: \quad z_i \mapsto e^{2\pi i j_i/k} z_i \,, \tag{C.22}$$

其中， z_i 描述线丛的纤维坐标。此类空间的 η不变量由 [139, 110]给出

$$\begin{aligned}\eta_q^{\mathrm{D}}\big(Q_k^{2n-1}(j_1\,,\dots j_{n-1};m_1\,,\dots m_{n-1})\big) = -\frac{1}{k(-2i)^n}\sum_{\ell=1}^{k-1}\frac{e^{2\pi i q\ell/k}}{\sin(\pi\ell j_1/k)\dots\sin(\pi\ell j_{n-1}/k)} \\ \times\sum_{r=1}^{n-1} m_r\cot(\pi\ell j_r/k)\,.\end{aligned} \tag{C.23}$$

应用于情形（m_1，……， m_{n-1}） =（±2，0，……，0）时，可得

$$\eta_q^{\mathrm{D}}\big(Q_k^{2n-1}(j_1\,,\dots j_{n-1})\big) = \mp\frac{2}{k(-2i)^n}\sum_{\ell=1}^{k-1}\frac{e^{2\pi i q\ell/k}\cos(\pi\ell j_1/k)}{\sin(\pi\ell j_1/k)^2\sin(\pi\ell j_2/k)\dots\sin(\pi\ell j_{n-1}/k)}\,, \tag{C.24}$$

借此我们可以解决一些扩张问题。

计算这些 η不变量的其他方法包括对等变η不变量取绝热极限，参见例如 [225–228]。

C.3 Ev利用 η不变量解决扩张问题的计算

由于谱序列描述了所研究群的滤过，因此通常还需要解决扩张问题。一种解决方法是寻找足够精细的配边不变量，例如（两个 η不变量之差），以刻画非平凡扩张。为此，我们在候选生成元上计算配边不变量；如果得到形如 $1/k$ 的结果，就可以确定该流形至少生成一个阶为 k的子群，即 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$，这通常足以完全确定该群。

如上文所述，要应用这些技术，使用配边不变量至关重要。由 APS 指标定理 [229, 196, 230] 可知，对于 $X = \partial Y$

$$\eta_q^{\mathrm{op}}(X) = \mathrm{Index}_q^{\mathrm{op}}(Y) - \int_Y I^{\mathrm{op}}\,, \tag{C.25}$$

其中 op 可以表示 D、RS 或 sig，而 I^{op} 表示相应算子的通常指标密度。这意味着，对于两个共边流形，即可描述为某个高一维流形 Y 的边界的流形，其 η 不变量的小数部分可能因指标密度的贡献而不同。由于除切丛相关对称性之外的所有背景对称性都是离散的，指标密度可表示为纯引力贡献。由于这些引力贡献仅在维数

$4n$、 $n \in \mathbb{Z}$ 时不为零，因此我们看到，除 $4n-1$ 之外的维数中， η 不变量都是配边不变量。在维数 $4n-1$ 中，可以考虑两个荷不同的 η 不变量之差，此时指标密度贡献会相互抵消。

我们可以将此方法应用于由上述透镜空间 L_3^{2n-1} 生成的 $\Omega_k^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 的生成元。对于偶数 n ，必须考虑两个 η 不变量之差，因为单个不变量可能会受到 $4m$ 维度中 A 的贡献。对于奇数 n ，还需要使用形式为 $q = Q + \frac{1}{2}$ 的荷，其中 $Q \in \mathbb{Z}$ ，以确保费米子上的 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 作用定义良好。结果汇总于表 16。

生成元	配边不变量
L_3^3	$\eta_1^{\mathrm{D}} - \eta_0^{\mathrm{D}} = -\frac{1}{3}$
L_3^5	$\eta_{1/2}^{\mathrm{D}} = -\frac{1}{9}$
L_3^7	$\eta_1^{\mathrm{D}} - \eta_0^{\mathrm{D}} = \frac{1}{9}$
L_3^9	$\eta_{1/2}^{\mathrm{D}} = \frac{1}{27}$
L_3^{11}	$\eta_1^{\mathrm{D}} - \eta_0^{\mathrm{D}} = -\frac{1}{27}$

表 16：形式为 L_3^{2n-1} 的某些透镜空间的配边不变量，可用于确定求解 $\Omega_k^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 时遇到的一些扩张问题。

由此可见，这些透镜空间确实生成了相应配边群中的全部直和项。

同样的考量也适用于透镜空间 L_4^{2n-1}，它们生成了素数 2 处配边群的一部分。相应的配边不变量汇总于表 17。请注意，在五维和九维中，我们有两种不同的 Spin 结构。在

生成元	配边不变量
L_4^3	$\eta_1^{\mathrm{D}} - \eta_0^{\mathrm{D}} = -\frac{3}{8}$
L_4^5	$\eta^{\mathrm{D}'/2} = -\frac{5}{32}$ $\eta^{\mathrm{RS}}_{1/2} = \frac{11}{32}$
$\widetilde{L}_4^5$	$\eta^{\mathrm{D}'/2} = -\frac{3}{32}$ $\eta^{\mathrm{RS}}_{3/2} = -\frac{3}{32}$
L_4^9	$\eta^{\mathrm{D}'/2} = \frac{9}{128}$ $\eta^{\mathrm{RS}}_{1/2} = -\frac{19}{128}$
$\widetilde{L}_4^9$	$\eta^{\mathrm{D}'/2} = \frac{7}{128}$ $\eta^{\mathrm{RS}}_{3/2} = \frac{3}{128}$

表17：形如 L_4^{2n-1} 的某些透镜空间的配边不变量，可用于确定在素数 2 处求 $\Omega_k^{\mathrm{Spin\text{-}Mp}(2,\mathbb{Z})}$(点) 时的一些扩张问题。

阶，以形成 tw 要得到线性无关生成元，还需要第二个配边不变量 ，

例如 Rarita-Schwinger 不变量，正如第 6.5 节和第 6.10 节所做的那样。根据上述 η-不变量的取值，可以看出配边群分别包含一个 $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$和$\mathbb{Z}/128\mathbb{Z}$ 直和项，这已经解决了第 13 节中的五维扩张问题。在九维中，可以定义一个线性无关的配边不变量，它在透镜空间上的某个 Spin 结构上取值为零，并证明另一个 Spin 结构生成元构成一个 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ，正如所需；这在第 6.10 节的最后几段中完成。

我们还剩下　七维和十一维中的生成元 Q_4^{2n-1}。计算关联　-

生成元	配边不变量
Q_4^7	$\eta^{\mathrm{D}}_{3/2} - \eta^{\mathrm{D}}_{1/2} = \frac{1}{4}$
Q_4^{11}	$\eta^{\mathrm{D}}_{3/2} - \eta^{\mathrm{D}}_{1/2} = -\frac{1}{8}$

表 18：某些形如 Q_4^{2n-1} 的透镜空间丛的配边不变量，可用于确定求素数 2 处 $\Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (点) 时的一些扩张问题。

配边不变量（见表 18）后，我们再次能够解决该扩张问题。

为了确定带有 SL(2, $\mathbb{Z}$) 丛的 Spin 流形的配边群，我们还需要一些其他配边不变量，汇总于表19中（$\sim L_4^7$ 上方的波浪号表示上文讨论的透镜空间的替代 Spin 结构），这些不变量可以

生成元	配边不变量
Q_4^5	$\eta_1^{\mathrm{D}} = -\frac{1}{4}$
L_4^7	$\eta_1^{\mathrm{D}} - \eta_0^{\mathrm{D}} = \frac{5}{32}$, $\eta_2^{\mathrm{D}} - \eta_0^{\mathrm{D}} = \frac{1}{4}$
$\widetilde{L}_4^7$	$\eta_3^{\mathrm{D}} - \eta_2^{\mathrm{D}} = -\frac{3}{32}$, $\eta_0^{\mathrm{D}} - \eta_2^{\mathrm{D}} = -\frac{1}{4}$
Q_4^9	$\eta_1^{\mathrm{D}} = \frac{1}{8}$
L_4^{11}	$\eta_1^{\mathrm{D}} - \eta_0^{\mathrm{D}} = -\frac{9}{128}$, $\frac{1}{2}\left(\eta_2^{\mathrm{D}} - \eta_0^{\mathrm{D}}\right) = -\frac{1}{16}$
$\widetilde{L}_4^{11}$	$\eta_3^{\mathrm{D}} - \eta_2^{\mathrm{D}} = -\frac{7}{128}$, $\frac{1}{2}\left(\eta_0^{\mathrm{D}} - \eta_2^{\mathrm{D}}\right) = \frac{1}{16}$

表 19：用于确定 $\Omega_k^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ 的更多配边不变量。

通过应用与上文相同的公式计算得出。[68]

[68]注意，在十二维中，实表示中的费米子指标为偶数，参见例如 [32]，因此我们看到 $\frac{1}{2}\left(\eta_2^{\mathrm{D}} - \eta_0^{\mathrm{D}}\right)$ mod $\mathbb{Z}$ 确实是一个配边不变量。

D May-Milgram 定理

本附录讨论 May-Milgram 定理，这是一种用于确定 Adams 谱序列中微分的关键工具。我们着重指出，将该定理应用于 $\mathcal{A}(1)$ 上的 Adams 谱序列时会遇到一个重要细节；近期的一些相关计算并未始终谨慎处理这一细节。我们希望本附录能清晰地说明如何在 $\mathcal{A}(1)$ 上的 Adams 谱序列中运用 May-Milgram 定理。[69]

定义 D.1. 取一个 $r \geq 1$。短正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2^r} \mathbb{Z}/2^{2r}\mathbb{Z} \xrightarrow{\bmod 2^r} \mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{D.2}$$

诱导出一个上同调长正合列：

$$\longrightarrow H^*(-;\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(-;\mathbb{Z}/2^{2r}\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(-;\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta_r} H^{*+1}(-;\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}) \longrightarrow \tag{D.3}$$

我们令 β_r 为此长正合列中的连接同态；它称为*Bockstein* 同态。

(D.2) 与乘以 2^r 的短正合列相容

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2^r} \mathbb{Z} \xrightarrow{\bmod 2^r} \mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z} \longrightarrow 0, \tag{D.4}$$

因此存在一个由长正合列构成的交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H^k(-;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cdot 2^r} & H^k(-;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\bmod 2^r} & H^k(-;\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^k(-;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \bmod 2^r} & & \downarrow{\scriptstyle \bmod 2^{2r}} & & \downarrow{\scriptstyle \bmod 2^r} & & \downarrow{\scriptstyle \bmod 2^r} & & \\
\cdots & \longrightarrow & H^k(-;\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cdot 2^r} & H^k(-;\mathbb{Z}/2^{2r}\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\bmod 2^r} & H^k(-;\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\beta_r} & H^k(-;\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \cdots
\end{array} \tag{D.5}$$

利用这张图，可以证明当且仅当 $H^k(X;\mathbb{Z})$ 有 2^r-挠元时，$\beta_r \neq 0$ 作用于 $H^{k-1}(X;\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})$。我们想用这一点来检测直和项。

定义 D.6。2^r 的关键 *Bockstein* 类是 $x \in H^*(X;\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})$ 中的一个元素，它属于 β_r 的像，并且对所有 $s < r$，x模 s 都不属于 β_s 的像。

引理 D.7. 2^r 的次数-k *key Bockstein* 类与 $H^{k+1}(X;\mathbb{Z})$中的$\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}$ 直和项一一对应。

[69]尽管本文聚焦于 $\mathcal{A}(1)$，但 Steenrod 代数还有其他子代数，使得基于这些子代数的 Adams 谱序列能够计算有趣的广义同调理论，例如 2-完备的ku-或tmf-同调：参见 Beaudry-Campbell [115, 备注 3.2.2]。我们强调的关于 May-Milgram 定理的细微之处，以及为解决该问题所采用的技术，也应适用于这些更一般的例子。

证明采用图追踪，因此我们简要概述一下。如果 x 属于 β_r的像，那么 x 在 $\mathbb{Z}$ 上同调中的原像生成一个 $\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}$ 子群。这个子群未必是直和项，但模 s 条件可以解决这个问题：如果 $x = 2y$，那么 x模 $2 = 0$，并且 $0 = \beta_2$(0)。因此，key Bockstein 类与直和项相对应。

定义 D.8. Adams 谱序列中的一个 h_0-塔 是由非零元素组成的无限序列 $x_i \in E_2^{s+i,\ t+i}$ 满足 $h_0 x_i = x_{i+1}$。我们不要求这个序列从 $i = 0$ 开始。

例如，查看图 12 中的 Ext$_{\mathcal{A}(1)}$($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)，可见所有次数 $4k$ 上都有 h_0-塔。

由于微分与 E_r-页上的 h_0-作用可交换， h_0-塔上的微分行为受到很大限制。如果 T 是一个 h_0-塔，则会出现以下两种情况之一：

1. T 中的每个元素都存活到 E_∞-页，或者
2. 存在一个数 r ，使得 d_r 微分会杀死 T中除有限多个元素之外的所有元素。

在第二种情况下， d_r 从 T 出发，指向恰好另一个 h_0-塔 T'。由于这两种情况，我们常常会说 h_0-塔之间的 d_r，或整个 h_0-塔是否存活到 E_∞-页。现在我们可以陈述主要定理：

定理 D.9 (May-Milgram [174])。 考虑计算空间或谱 X 的2进完备稳定同伦群的 ***Adams*** 谱序列。对于 $H^k(X;\ \mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})$，从拓扑次数为 k 的 h_0-塔发出的非零 d_r 微分与关键 ***Bockstein*** 类之间存在双射2^r 。

简要说来，就是“Bockstein 映射告诉我们有关 h_0-塔之间微分的一切。” ”

注 D.10。 May-Milgram 定理通常以不同的方式表述：将 h_0-塔之间的 Adams 微分与和短正合列 (D.4) 相关的***Bockstein*** 谱序列 中的微分对应起来。要得到我们在定理 D.9 中采用的表述，方法是求解上述 Bockstein 谱序列，见 [231, 第 24 节2]。

我们希望在计算扭曲 Spin 配边时使用 May-Milgram 定理；或者，借助 Anderson-Brown-Peterson 定理 [137], ko-同调。因此，我们应当考察 $H^*(ko \wedge X;\ \mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})$ 中的 Bockstein 映射。这正是我们上文提到的重要细节：数学物理文献中先前应用 May-Milgram 定理的工作，例如 [130], ，并不总是清楚地说明如何从 $H^*(X)$ 中的 Bockstein 映射过渡到 $H^*(ko \wedge X)$ 中的 Bockstein 映射。

K¨unneth 公式表明， $H^*(ko \wedge X; \mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})$ 至少与组合 $H^*(ko;\ \mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}) \otimes H^*(X; \mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})$ 一样复杂。Mahowald-Milgram [145, 推论 1.3] 计算 $H^*(ko; \mathbb{Z}_{(2)})$，其复杂程度足以使 Bockstein 映射的直接计算

在 $H^*(ko \wedge X; \mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})$ 中显得十分棘手。Bayen [232, 章 1] 提供了一种利用 $\mathcal{A}$ 的霍普夫代数结构的一般方法，但我们可以采用一种临时方法来解决。

令 $\mathcal{A}(0)$ 为由 Sq^1 生成的子代数；那么 $\mathcal{A}(0) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\mathrm{Sq}^1]/\left((\mathrm{Sq}^1)^2\right)$，也就是说，这是一个外代数。存在一个同构[70]

$$H^*(H\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}(0)} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \tag{D.11}$$

因此，正如换环定理给出了一个以对 $\mathcal{A}(1)$ 上的 Ext 进行计算为起点、并计算 ko 同调的 Adams 谱序列，也存在一个形式为[71]的更简单的 Adams 谱序列

$$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}(0)}(H^*(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \Longrightarrow H_{t-s}(X; \mathbb{Z})^\wedge_2. \tag{D.12}$$

我们采用临时方法处理 May-Milgram 定理，其背后的思路是：在 $\mathcal{A}(0)$ 上，Adams塔之间的微分很容易计算，因为我们通常知道 X 的整系数同调；接着，我们通过由商 $\mathcal{A}(1) \to \mathcal{A}(0)$ 诱导的 Adams 谱序列映射将它们拉回。

若 M 是一个 $\mathcal{A}(0)$-模，且在每个次数上都是有限维的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-向量空间，那么 M 是两个 $\mathcal{A}(0)$-模 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 和 $\mathcal{A}(0)$ 的移位的直和。这些模的 Ext 群很容易计算。

- $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(0)}\left(\mathcal{A}(0)\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ 由单个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 组成，位于双次数 (0，0) 中；对于一个代数关于自身的 Ext，情况总是如此。

- $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(0)}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 由拓扑次数为 0 的单个 h_0-塔组成，这是 Koszul对偶 [115,例 4.5.5] 的结果。

因此，在 X的 $\mathcal{A}(0)$-Adams 谱序列中，d_r 塔之间的微分 h_0对应于 X同调中的一个 $\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}$ 直和项，正如我们在图30中所画的那样；如上文所述，这样的直和项与一个关键的 Bockstein 类所包含的数据等价。

回忆一下，$C\eta$ 表示由两个位于次数 0 和 2、并通过一个 Sq^2相连的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项组成的 $\mathcal{A}$-模。

命题 *D.13*（关于 $C\eta$ 的 *May-Milgram*）。设 X 是一个空间或谱，且 M_0 和 M_1 是 $H^*(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的两个 $\mathcal{A}(1)$-模直和项，它们同构于 $C\eta$ 的移位。假设存在次数分别为 n 和 $n+1$ 的 $x \in M_0$ 和 $y \in M_1$，以及类 $\widetilde{x}$、$y \in H^*(X; \mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})$，使得 $\widetilde{x}$ 模 $2 = x$、$\widetilde{y}$ 模 $2 = y$、$\beta_r(\widetilde{x}) = \widetilde{y}$，且 $\widetilde{y}$ 是一个关键的 *Bockstein* 类。那么对于所有 $k \geq 0$，都存在一个微分：它从次数为 $n+4k+1$ 的 h_0-塔（来自 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(1)}(M_1)$）指向次数为 $n+4k$ 的 h_0-塔（来自 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(1)}(M_0)$）。

[70]我们不知道最初是谁证明了这一点。Ravenel [233, 引理 3.1.11]指出这是“标准的”。[71]事实上，这个 Adams 谱序列同构于 Bockstein 谱序列的某种表示 [234, 第 1 节。4], ，而 May-Milgram 对其定理的证明可以从这一角度来理解。

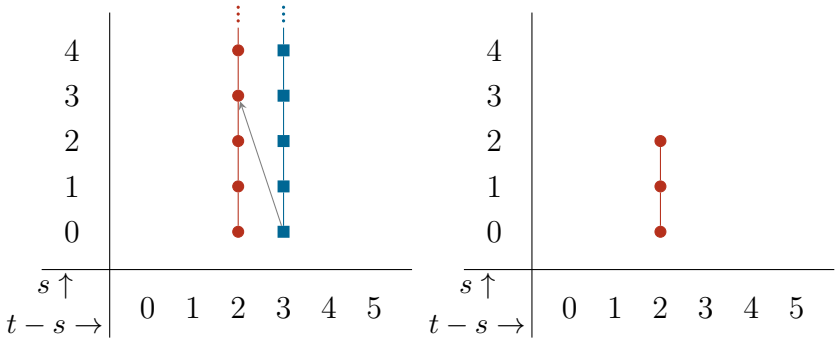


图30：Adams 谱序列中两个 h_0 塔之间的一条微分，位于实数域 $\mathcal{A}(0)$上，它源自上同调的 $\mathcal{A}(0)$-模结构中的两个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项。 E_r-页（左侧）上的 d_r微分在 E_∞-页（右侧）留下一个 $\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}$ 直和项。此处$r=3$。

这些次数为 $n+4k$ 和 $n+4k+1$ 的 h_0-塔的存在性，源于我们在例 11.15 中进行的计算。

证明。 回忆例 11.15，$\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(1)}(\Sigma^n C\eta)$ 中拓扑次数为$n+4k$ 和 $n+4k+4$ 的 h_0塔通过 $v\in \mathrm{Ext}^{3,7}_{\mathcal{A}(1)}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的作用相连：较高次数塔中除有限多个元素外，其余元素都属于将此 v作用施加于较低次数塔所得的像。此 v作用与微分交换，因此如果我们已证明定理对 k 成立，就可以推出定理对 $k+1$成立。因此，在证明的其余部分中，我们假设$k=0$。

作为一个 $\mathcal{A}(0)$-模， $C\eta\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\Sigma^2\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，因此 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(0)}(C\eta,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 由次数 0 和 2 中的 h_0-塔组成。映射 $\mathcal{A}(1)\to\mathcal{A}(0)$ 诱导出映射 $\phi\colon \mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(1)}(C\eta,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(0)}(C\eta,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$；将 Ext 的元素视为 $\mathcal{A}(1)$-模扩张的等价类，正如我们在第11.2节中讨论的那样，ϕ 将一个 $\mathcal{A}(1)$-模的扩张遗忘掉 Sq^2-作用，从而得到同一个扩张，不过是在 $\mathcal{A}(0)$-模中。这个关于 ϕ 的模型适用于计算：例如，在图31中，我们展示了

$$\phi^{1,3}\colon \mathrm{Ext}^{1,3}_{\mathcal{A}(1)}(C\eta,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\longrightarrow \mathrm{Ext}^{1,3}_{\mathcal{A}(0)}(C\eta,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \tag{D.14}$$

非零；由于这两个 Ext 群都同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，这意味着 $\phi^{1,3}$ 是一个同构。根据 h_0 作用的米田积描述（11.11），可以证明 ϕ 与 h_0 作用可交换，因此图31中的计算表明，在次数 $s\geq 1$, ϕ 将 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(1)}(C\eta)$ 中拓扑次数 2 的 h_0 塔同构地映射到 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(0)}(C\eta)$ 中拓扑次数 2 的 h_0 塔。拓扑次数 0 的 h_0 塔也同样如此，这留给读者作为练习。[72] 因此，存在一个 d_r 微分，从 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}(1)}(M_1)$ 中次数 $n+1$ 的 h_0 塔映射到次数 n 的 h_0 塔

[72]计算 ϕ 在次数 0 和 2 中的另一种方法是注意到 $\Sigma^2 C\eta\cong\widetilde{H}^*(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，因此 ϕ 是与映射 $\psi\colon ko_*(\mathbb{CP}^2)\to H_*(\mathbb{CP}^2)$ 相对应的 Adams 谱序列映射，并且可以用 Atiyah-Hirzebruch 谱序列计算 ψ。

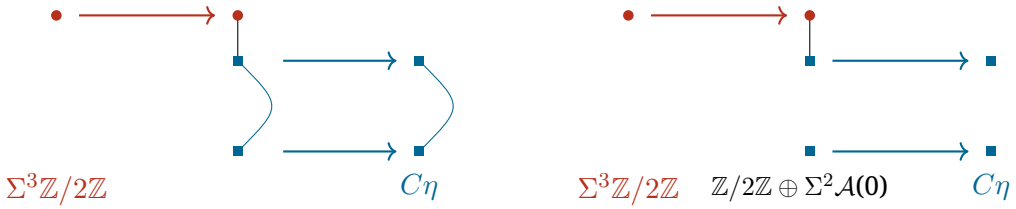


图31：左：一个 $\mathcal{A}(1)$-模的扩张，表示 $\mathrm{Ext}^{1,3}_{\mathcal{A}(1),0}(C\eta, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的非零元素 x 。右：如果我们只记住 $\mathcal{A}(0)$ 的作用，这个扩张仍然不是分裂的，因此 $\phi(x) \neq 0$。这项计算是命题 D.13 证明的一部分。

在 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}(1)}(M_0)$ 中，当且仅当 Ext 在 $\mathcal{A}(0)$ 上也如此；而后者成立的条件是， x 和 y 在 $\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}$ 上同调中的原像由一个 β_r Bockstein 连接，并且 y 的提升是一个关键的 Bockstein 类。

□

Se参见图32， 了解命题 D.13 证明中关键思想的示意图 .

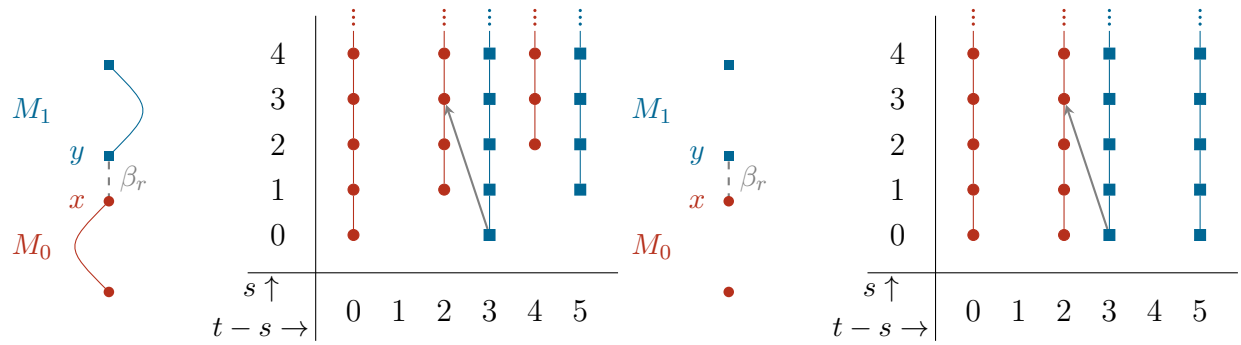


图32：命题 D.13 证明的一部分。左侧是 $\mathcal{A}(1)$ 上关于 $M_0 \oplus M_1 \subset H^*(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的模结构和 Adams 谱序列的一部分；右侧是 $\mathcal{A}(0)$ 上对应的数据。右侧灰色的 d_r 微分可由 Bockstein 的存在推出，并蕴含左侧灰色的 d_r 微分。

注记 D.15。 命题 D.13 的适用范围相当狭窄，但证明起来很简单。对于 May-Milgram 定理在扭曲 Spin 配边问题中的其他应用，我们建议采用类似的方法：计算 h_0 塔之间在 $\mathcal{A}(0)$ 上的微分；这些微分对应于 X 的上同调中的 Bockstein 映射，然后将它们拉回到 $\mathcal{A}(1)$ 上的 Ext，以了解$ko_*(X)$。

E 一些 Smith 同态

史密斯同态是在配边群之间的一类映射，其中维数和切结构都会变化。将其应用于 Spin-Mp(2， $\mathbb{Z}$) 和 Spin-GL^+(2， $\mathbb{Z}$) 配边时，有几个值得关注且

很有用的史密斯同态，本附录旨在讨论这些同态。在附录 E.1 中，我们介绍史密斯同态及其一般性质；在附录 E.2 中，我们讨论 $\Omega_k^{\mathrm{Spin}}\big(B\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})\big)$ 与 $\Omega_k^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (pt) 之间的一系列史密斯映射；在附录 E.3 中，我们讨论 Spin-$\mathrm{GL}^+(2,\ \mathbb{Z})$ 配边的一种史密斯映射。后一种史密斯映射在我们于第 14.3.7 节证明 $[W_2^7] \in \Omega^{\text{Spin-GL}^+}{}_{(2,\ \mathbb{Z})\,7}$(pt) 与 $[W_1^7]$ 线性无关的过程中发挥着关键作用。

E.1 这位迷人的男（流形）：关于史密斯同态的一般论述

本小节回顾扭曲 Spin 配边中史密斯同态的一般框架，以便在本附录其余部分研究涉及 Spin-Mp$(2,\ \mathbb{Z})$ 和 Spin-$\mathrm{GL}^+(2,\ \mathbb{Z})$ 配边的例子。关于更多细节，尤其是物理学应用方面的内容，请参见 [235–237] 。

回顾定义 10.17，对于空间 X 和向量丛 $V \to X$，向量丛 $E \to M$ 上的 $(X,\ V)$-扭曲 Spin 结构是一个映射 $f\colon M \to X$，以及 $E \oplus f^*V$ 上的 Spin 结构。设 M 是一个流形，且 TM 带有 $(X,\ V)$-扭曲 Spin 结构。选取另一个秩为 r 的向量丛 $W \to X$，并令 $N \subset M$ 为 Poincar´e 对偶的一个光滑代表；也就是说，N 的模 2 基本类在$H_*(M;\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中的像，是 $w_r(f^*W) \in H^*(M;\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的 Poincar´e 对偶。

史密斯同态背后的关键事实是，在这种情况下，N 具有典范的 $(X,\ V \oplus W)$ 扭曲 Spin结构，并且这一构造会通过配边类分解，从而定义一个映射

$$S_W\colon \Omega^{\mathrm{Spin}}_{n+V}(X) \longrightarrow \Omega^{\mathrm{Spin}}_{n-r+V\oplus W}(X). \tag{E.1}$$

现在来解释一下：如果 N 是向量丛 $E \to M$的最高斯蒂费尔-惠特尼类的庞加莱对偶的光滑代表，那么 $N \hookrightarrow M$ 的法丛 ν_N 与 $E|_N$同构。利用同构$TN \oplus \nu_N \cong TM|_N$，$M$ 上的 $(X,\ V)$ 扭曲Spin结构会在……上诱导出一个Spin结构

$$(TM \oplus f^*V)|_N \cong TN \oplus \nu_N \oplus f^*V|_N \cong TN \oplus E|_N \oplus f^*V|_N, \tag{E.2}$$

并代入 到 $E = f^*W$中，我们便在 N上得到了一个 $(X,\ V \oplus W)$ 扭曲Spin结构.

[237]的一个定理将史密斯同态纳入长正合列，使得计算史密斯同态的核与像更加容易。

定理 E.3 ([237])。 设 $p\colon\ S(V) \to X$ 是向量丛 $V \to X$ 的球丛。那么存在一个长正合列

$$\cdots \longrightarrow \Omega^{\mathrm{Spin}}_{k+p^*W}\big(S(V)\big) \xrightarrow{p_*} \Omega^{\mathrm{Spin}}_{k+V}(X) \xrightarrow{S_W} \Omega^{\mathrm{Spin}}_{k-r+V\oplus W}(X) \longrightarrow \Omega^{\mathrm{Spin}}_{k-1+p^*W}\big(S(V)\big) \longrightarrow \cdots, \tag{E.4}$$

通常，$S(V)$ i 是某种相对简单的分类空间，而整个长正合列

都可以用与本文类似的技巧推导出来。下面我们讨论几个例子。

E.2 Spin-$\mathrm{Mp}(2,\mathbb{Z})$ 配边的史密斯同态

回顾第 13 节，Spin-Mp(2, ℤ) 结构以一种自然的方式等价于(BSL(2, ℤ) V)-扭曲 Spin 结构，其中 $V \to B$SL(2, ℤ) 由 SL(2, ℤ) 的标准二维实表示诱导得到。[73] 因此，存在余维二史密斯同态，在 BSL(2, ℤ) 的 Spin 配边与 Spin-Mp(2, ℤ) 配边之间相互转换。

为了计算这些史密斯同态，我们希望确定长正合列 (E.4) 中的第三项。$V \to$ SL(2, ℤ) 的球丛与 SL(2, ℝ)/SL(2, ℤ) 同伦等价，而后者的描述稍显复杂，因此我们将分别在素数 2 和 3 处进行处理，这样更为容易。

对于 $p = 2$，此史密斯同态拉回为一个史密斯同态，它交换 Spin-ℤ/8ℤ 配边与 $B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 的 Spin 配边。$V \to B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 的球丛与 S^1 [237] 同伦等价，并且每个向量丛在拉回到其球丛时都变为平凡，因此存在长正合列

$$\cdots \longrightarrow \Omega_k^{\mathrm{Spin}}(S^1) \longrightarrow \Omega_k^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}(\mathrm{pt}) \xrightarrow{S_V} \Omega_{k-2}^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \longrightarrow \Omega_{k-1}^{\mathrm{Spin}}(S^1) \longrightarrow \cdots \tag{E.5a}$$

$$\cdots \longrightarrow \Omega_k^{\mathrm{Spin}}(S^1) \longrightarrow \Omega_k^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \xrightarrow{S_V} \Omega_{k-2}^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}(\mathrm{pt}) \longrightarrow \Omega_{k-1}^{\mathrm{Spin}}(S^1) \longrightarrow \cdots \tag{E.5b}$$

引理 E.6. 对于任意广义同调理论 E，$E_k(S^1) \cong E_k$(点) $\oplus E_{k-1}$(点) .

证明概要。这等价于计算 E-同调的 S^1 的 Atiyah-Hirzebruch 谱序列塌缩，且不存在隐藏扩张。可以通过考察映射 点 $\to S^1 \to$ 点 及其对微分和扩张问题的影响来证明这一点。

□

利用此引理以及我们在表 7 和第 13.2 节中对 $\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 和 $\Omega_*^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}$(点) 所作的计算，可以将长正合列 (E.5) 明确写出。例如：

命题 E.7. 史密斯同态 $S_V\colon \Omega_5^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}$(点) $\to \Omega_3^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$，它是一个映射 $(\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，是满射，将 $(x, y) \mapsto (x$ 模 8, $y)$送至。

证明。一旦知道这个映射是满射，就可以确定它在生成元上的取值，可能需要先对 ($\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$) $\oplus$(ℤ/2ℤ) 施加一个自同构。史密斯同态 S_V 在长正合列中的下一个映射是 Ω_3^{Spin} ($B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$) $\to \Omega_4^{\mathrm{Spin}}$ (S^1)；正如我们在第 13.2 节中计算的那样，这个映射的定义域是挠元，而陪域是自由的，因此该映射为 0，所以根据正合性，S_V 是满射。

□

[73] 严格来说，我们只证明了在对 2 和 3 局部化之后这一结论成立；但基于推论 10.23 的同一论证在局部化之前也成立。

另一种证明方法是计算 $\Omega_5^{\text{Spin-}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}$ (点) 的生成元对应的特征类的庞加莱对偶；我们发现，同时掌握这两种方法很有帮助。

对于 $p=3$，论证思路也类似：$V\to B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 的球丛再次与 S^1 [237]同伦等价；在 3-局部意义下，$\Omega_*^{\text{Spin}}\big(B\text{SL}(2,\ \mathbb{Z})\big)$ 和 $\Omega_*^{\text{Spin-Mp}(2,\mathbb{Z})}$ (pt) 都等价于 $\Omega_*^{\text{SO}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$，这分别是我们在引理 12.7 和 13.4 中证明的。因此，我们的史密斯长正合列具有如下形式

$$\cdots\longrightarrow\Omega_k^{\text{SO}}(S^1)\longrightarrow\Omega_k^{\text{SO}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\xrightarrow{S_V}\Omega_{k-2}^{\text{SO}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\longrightarrow\Omega_{k-1}^{\text{SO}}(S^1)\longrightarrow\cdots \tag{E.8}$$

引理 E.6 和 (12.17) 使我们能够补全这个长正合列。举例来说，我们得知，史密斯同态 $\Omega_3^{\text{SO}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\to\Omega_1^{\text{SO}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 是同构 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$，因为该映射在长正合列中两侧的两项都是 $\Omega_k^{\text{SO}}(S^1)$，其中 $k=2,\ 3$，而它们都为零。类似地，可以证明 $\widetilde{\Omega}_5^{\text{SO}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\to\widetilde{\Omega}_3^{\text{SO}}(B\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 是满射 $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$，因为长正合列中的下一个映射从一个挠阿贝尔群映到一个自由群，因此为零。

E.3 Spin-$\text{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ 配边的史密斯同态

正如上文所述，从 $\Omega^{\text{Spin-GL}^+(2,\mathbb{Z})\ k}$ (点)出发的可能史密斯同态，由 BGL(2, $\mathbb{Z}$) 上的向量丛同构类给出；因此，即使在余维 1 和 2 的情况下，我们也有许多选择。我们聚焦于一个在第 14.3.7 节中需要的特定例子：一个交换 GL(2, $\mathbb{Z}$) 的 Pin^+ 和 Pin^- 覆盖的余维 2 映射。

令 $\text{GL}^-(2,\mathbb{Z})$ 表示 GL(2, $\mathbb{Z}$) 的 Pin^- 覆盖，并令 Spin-$\text{GL}^-(2,\mathbb{Z})\coloneqq\text{Spin}\times_{\{\pm1\}}\text{GL}^-(2,\mathbb{Z})$。我们上文研究 Spin-$\text{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ 配边时所用的论证在此情形下同样适用，由此可证明：

- 映射 $\Omega^{\text{Spin-GL}^-(2,\mathbb{Z})\ k}$ (点) $\to\Omega^{\text{SO}k}$ (BD_{12}) 对任意奇素数p都是一个 p-局部同构。证明与第 14.1 节开头给出的论证相同。
- Pin^- 覆盖 D_8 是四元数群 Q_{16}，这意味着中心扩张$0\to\mathbb{Z}/2\to Q_{16}\to D_8\to 0$ 由 $w+x^2\in H^2(BD_8;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 分类。包含映射$D_8\hookrightarrow$ GL(2, $\mathbb{Z}$) 可提升为包含映射 $Q_{16}\hookrightarrow\text{GL}^-(2,\mathbb{Z})$，并诱导出一个 2-局部同构 $\Omega^{\text{Spin-}Q_{16}}$(pt) $\to\Omega^{\text{Spin-GL}^-(2,\mathbb{Z})\ k}$ (pt)。
- 向量丛 $V\to M$ 上的 Spin-Q_{16} 结构等价于一组 $\big(BD_8, V\oplus\text{Det}(V)\big)$-扭曲Spin结构的数据，即一个主 D_8-丛 $P\to M$，以及一个识别 $w_2(V)=w(P)+x(P)^2$ 的数据。证明与推论 14.16 的证明类似，只需用 $V\oplus\text{Det}(V)$ 替代 $V\oplus 3\text{Det}(V)$，并用 $w+x^2$ 替代 w。

我们考虑由向量丛 2Det(V) 给出的史密斯同态，它会使维数降低 2。该同态从 $\big(B$GL(2, $\mathbb{Z}$) $V\oplus\text{Det}(V)\big)$-扭曲 Spin 配边

到 $\big(B\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})\ V\oplus 3\mathrm{Det}(V)\big)$-扭曲 Spin 配边，即从 Spin-$\mathrm{GL}^-(2,\mathbb{Z})$ 配边到 Spin-$\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ 配边。我们也可以用它从 $\big(B\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})\ V\oplus 3\mathrm{Det}(V)\big)$-扭曲 Spin 配边映射到 $\big(B\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})\ V\oplus 5\mathrm{Det}(V)\big)$-扭曲 Spin 配边；不过，由于任意向量丛的四份直和都是 Spin，这可以等同于 $(B\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})\ V\oplus\mathrm{Det}(V))$-扭曲 Spin 配边，而史密斯同态则从 Spin-$\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Z})$ 配边映射到 Spin-$\mathrm{GL}^-(2,\mathbb{Z})$ 配边。[74]

和上一节一样，分别在 $p=2$ 和 $p=3$ 处处理更容易。进行 3-局部化后，这个史密斯同态是一个映射 $\Omega_k^{\mathrm{SO}}(BD_{12})\to\Omega_{k-2}^{\mathrm{SO}}(BD_{12})$；但在定理 14.3 中我们看到，至少对于我们关注范围内的所有 k，$\Omega_k^{\mathrm{SO}}(BD_{12})$ 和 $\Omega_{k-2}^{\mathrm{SO}}(BD_{12})$ 中至少有一个$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$为零，因此这个史密斯同态是平凡的。使用非约化配边并不会让这个映射有趣多少。

不过，在 $p=2$ 处，这个史密斯同态更有用。关于 $\mathrm{GL}^{\pm}(2,\ \mathbb{Z})$ 的整套论述可以拉回：史密斯同态交换 Spin-D_{16} 和 Spin-Q_{16} 配边。不过，这些史密斯长正合列中的第三项有些复杂：$B(\mathbb{Z}\ltimes\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 的扭曲 Spin 配边群，其中 $\mathbb{Z}$ 通过 $\alpha\cdot\beta=(-1)^\alpha\beta$ 作用于 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，并由 $V\oplus\mathrm{Det}(V)$ 的拉回扭曲。证明这一点相当于计算 $2\mathrm{Det}(V)\to BD_8$ 的球丛；我们发现这是一个有趣的练习，与 [237], 中的一些球丛计算以及 [238, 引理 7]类似。

这些扭曲 Spin 配边群并不难计算，可以使用与本文类似的技巧；我们也邀请读者尝试其中的一些计算。[75]

我们在第 14.3.7 节使用映射 $S_{x^2}\colon\Omega_7^{\text{Spin-}D_{16}}(\text{点})\to\Omega_5^{\text{Spin-}Q_{16}}(\text{点})$，因此借此机会研究 $\Omega_5^{\text{Spin-}Q_{16}}(\text{点})$。Spin-$Q_{16}$ 配边也曾由 Pedrotti [206, 定理 9.0.14] 使用其他方法在维数 4 中进行研究；他证明了 $\Omega_4^{\text{Spin-}Q_{16}}(\text{点})\cong\mathbb{Z}\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，我们将在命题 E.13 的证明过程中重新得到这一结果。

群 Q_{16} 在 S^3上自由作用，其中 Q_{16} 被视为 SU(2) 的一个子群，并作用于 $\mathbb{C}^2$中的单位球面。商 S^3/Q_{16} 称为**棱柱流形**，而商$\mathbb{RP}^3\to S^3/Q_{16}$ 是一个主 D_8-丛。

引理 E.9. *S^3/Q_{16} 带有 D_8-丛 $P:=\mathbb{RP}^3\to S^3/Q_{16}$ 允许一个 Spin-Q_{16} 结构，并且 $\int_{S^3/Q_{16}}w(P)y(P)=1$。*

在证明这一点之前，我们需要更好地理解 S^3/Q_{16} 的模 2 上同调。回想命题 14.100，$H^*(BQ_{16};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\hat{}x,\ \hat{}y,\ p]/(\hat{}x\hat{}y+\hat{}y^2,\ \hat{}x^3)$，其中$|\hat{}x|=|\hat{}y|=1$和 $|p|=4$，以及 $\hat{}x$，分别是 $x,\ y\in H^1(BD_8;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 在$BQ_{16}\to BD_8$下的拉回。

[74]Kirby-Taylor [238, 引理 7]研究了一对类似的史密斯同态，它们交换 Pin^- 与 Pin^+ 配边。[75]或者，也可以只对 $\mathrm{Det}(V)$应用史密斯同态，并应用两次，例如得到一个从 $V\oplus\mathrm{Det}(V)$ 到 $V\oplus 2\mathrm{Det}(V)$ 的长正合列，以及另一个从 $V\oplus 2\mathrm{Det}(V)$ 到 $V\oplus 3\mathrm{Det}(V)$ 的长正合列。在这些情况下，长正合列中的第三项是 $\Omega_k^{\mathrm{Spin}}(B\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$。

引理 *E.10*（*Tomoda-Zvengrowski* [239, 第 2 节和定理 2.2(1)]）。存在一个同构 $H^*(S^3/Q_{16}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\hat{x}, \hat{y}]/(\hat{x}\hat{y} + \hat{y}^2, \hat{x}^3)$，并且若 $f\colon S^3/Q_{16} \to BQ_{16}$ 是主 Q_{16}-丛 $S^3 \to S^3/Q_{16}$ 的分类映射，则 $f^*\colon H^*(BQ_{16}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^*(S^3/Q_{16}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是关于 (p) 的商，即它将 $\hat{x} \mapsto$ 映为 $\hat{x}$，$\hat{y} \mapsto$ 映为 $\hat{y}$，并且 $p \mapsto 0$。

引理 *E.9* 的证明。引理 E.10 中的上同调环关系表明，$\hat{x}^2\hat{y} = \hat{x}\hat{y}^2 = \hat{y}^3$ 是 S^3/Q_{16}的模 2 上同调的最高次数中的非零元素。

回顾扩张

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} Q_{16} \xrightarrow{\beta} D_8 \longrightarrow 1 \tag{E.11}$$

由 $w + x^2 \in H^2(BD_8; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 分类，因此 $\beta^*\colon BD_8 \to BQ_{16}$ 将 $w(ED_8) + x(ED_8)^2 \mapsto 0$发送到。于是，对于 D_8-丛 $\beta^*ED_8 \to BQ_{16}$，$w = \hat{x}^2$。此丛是 α的纤维：$B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to BQ_{16}$ 属于 β，当我们沿 $f\colon S^3/Q_{16} \to BQ_{16}$进一步拉回时，$\beta^*ED_{16}$ 拉回为 $\mathbb{RP}^3 \to Q_{16}$。因此，$w(\mathbb{RP}^3) = \hat{x}^2$。同样地，$y \in H^1(BD_{16}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$拉回为 $\hat{y} \in H^1(S^3/Q_{16}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，所以

$$\int_{S^3/Q_{16}} w(P)y(P) = \int_{S^3/Q_{16}} \hat{x}^2\hat{y} = 1. \tag{E.12}$$

□

我们将在第 14.3.7 节中使用这一结果。

命题 E.13. $[S^3/Q_{16} \times T^2] \neq 0$ 中的 $\Omega_5^{\text{Spin-}Q_{16}}(\text{pt})$。

证明。我们使用 Adams 谱序列。由于我们仍处于次数 8 以下，Spin 配边与ko-同调之间没有区别。与 Spin-D_{16}配边的情形类似，Spin-Q_{16} 结构等价于一个 $(BD_8,\ V \oplus \text{Det}(V))$-扭曲Spin结构这一事实，使我们能够将 $\Omega_k^{\text{Spin-}Q_{16}}(\text{pt}) \cong \Omega_k^{\text{Spin}}\big((BD_8)^{V+\text{Det}(V)-3}\big)$ 识别起来。在 Thom 谱 $(BD_8)^{V+_{\text{Det}(V)}-3}$ 的上同调中，$\text{Sq}^1(U) = 0$ 以及 $\text{Sq}^2(U) = U(w + x^2)$；据此可得一个 $\mathcal{A}(1)$-模同构

$$\begin{aligned} H^*\big((BD_8)^{V+\text{Det}(V)-3}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big) \cong \quad & \oplus \Sigma^3\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \Sigma^4 R_2 \oplus \Sigma^5 J \oplus \\ & \Sigma\mathcal{A}(1) \oplus \Sigma\mathcal{A}(1) \oplus \Sigma^5\mathcal{A}(1) \oplus \Sigma^5\mathcal{A}(1) \oplus P, \end{aligned} \tag{E.14}$$

其中 P 集中在次数 7 及以上。我们将其绘于图 33 左侧。我们已经知道这些直和项各自的 Ext（除了 P，它和往常一样在此证明中无关紧要），因此可以绘出图 33 右侧的 E_2-页 Adams 谱序列。

在图示范围内，大多数微分都因次数原因或 h_i- 等变性而消失。例外是从 4 线上红色塔和蓝色塔到 3 线上绿色塔的微分。与我们在

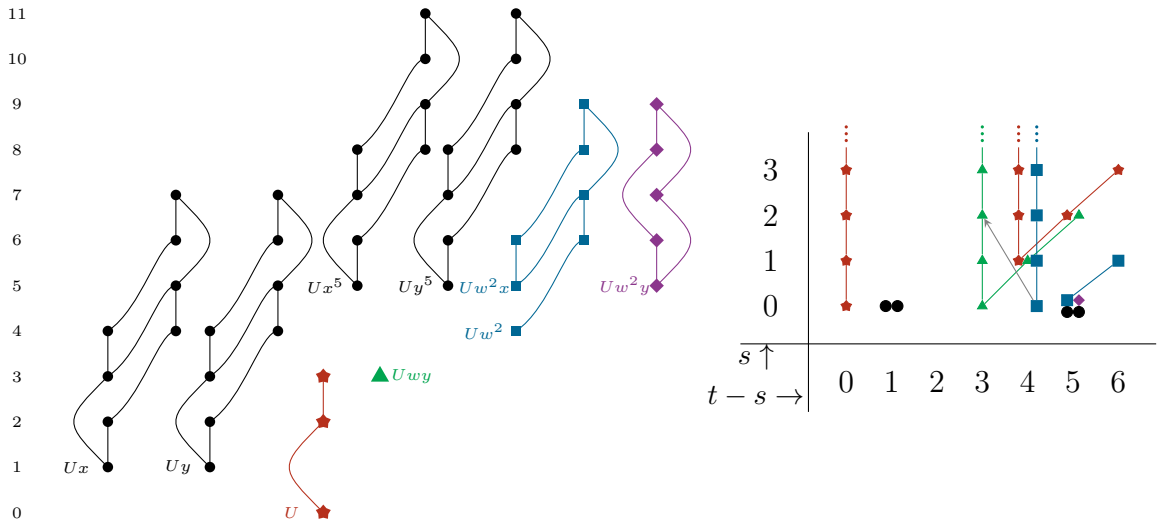


图 33：左：$H^*\big((BD_8)^{V\oplus\mathrm{Det}(V)-3}$ 上的 $\mathcal{A}(1)$-模结构；$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)$ 在低次中。图中所示的子模包含次数 6 及以下的所有元素。右：相应 Adams 谱序列的 E_2 页，该谱序列计算 $ko_*\big((BD_8)^{V\oplus\mathrm{Det}(V)-3}\big)$；在命题 E.13 中，我们利用它研究 Spin-Q_{16} 配边。

第 13.2 节中讨论的 Spin-配边情形一样，May-Milgram 定理表明存在一个从蓝色塔到绿色塔的 d_2。

因此我们了解到，绿色三角形 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项在 $E^{0,3\ 2}$、$E^{1,5\ 2}$ 和 $E^{2,7\ 2}$ 中都存活到 E_∞ 页。它们通过 h_1-作用相互连接，因此得到如下图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \xrightarrow{\ \eta\ } & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\ \eta\ } & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
\downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow \\
\Omega_3^{\text{Spin-}Q_{16}}(\mathrm{pt}) & \xrightarrow{\ \eta\ } & \Omega_4^{\text{Spin-}Q_{16}}(\mathrm{pt}) & \xrightarrow{\ \eta\ } & \Omega_5^{\text{Spin-}Q_{16}}(\mathrm{pt})\,,
\end{array} \tag{E.15}$$

其要点是，η^2：$\Omega_3^{\text{Spin-}Q_{16}}$(点) $\to \Omega_5^{\text{Spin-}Q_{16}}$(点) 恰好在 $\Omega_3^{\text{Spin-}Q_{16}}$(点) $\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$的奇元素上非零。生成元在 E_∞ 页的像位于 Adams 滤子零层，其中对应于模 2 上同调类 Uwy；由此可方便地推出，$\int wy$ 在 $\Omega_3^{\text{Spin-}Q_{16}}$(点) 的奇元素上也恰好非零。因此，如果我们能够证明该积分在 S^3/Q_{16}上非零，那么还可推出 $\eta^2\,[S^3/Q_{16}]$，即$[S^3/Q_{16}\times T_p^2]$非零，这正是我们想要证明的结论。

由引理 E.9，S^3/Q_{16} 是 $\Omega_3^{\text{Spin-}Q_{16}}$(pt) 中的奇元素，因此$[S^3/Q_{16}\times T_p^2]\neq 0$属于 $\Omega_5^{\text{Spin-}Q_{16}}$(pt)，正如我们所需。 □

我们在命题 E.13 的证明中所做的 Adams计算留下了次数为 5 时存在隐藏扩张的可能性。我们将证明并不存在这样的隐藏扩张，因此 $\Omega_5^{\text{Spin-}Q_{16}}$是若干个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的直和；我们在第 14.3.7 节中陈述了这一点，但没有给出证明。

如命题 14.106 所述。

命题 E.16. $\Omega_5^{\text{Spin-}Q_{16}} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 6}$.

证明。为简便起见，我们记 $X_8' := (BD_8)^{V\oplus \mathrm{Det}(V)^{-3}}$。乘以 2 的映射 $2 : ko_k(X) \to ko_k(X)$ 可分解为经过 ku理论的映射；具体来说，正如我们在注 10.40 中讨论的，$2 = R\circ b\circ c$。我们将证明 $b\circ c$: $ko_5(X_8') \to ku_7(X_8')$ 消失，这意味着 $ko_5(X_8')$ 上的乘以 2 映射消失。为此，我们需要用 Adams 谱序列研究 $ku_*(X_8')$。

使得可以在 $\mathcal{A}(1)$ 上处理 ko理论的换环技巧，在 ku理论中也有对应的方法。其关键是 Adams 的计算 [240] ：作为一个 $\mathcal{A}$-模，$H^*(ku;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathcal{A}\otimes_{\mathcal{E}(1)}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，其中 $\mathcal{E}(1)$ 是由 $Q_0 := \mathrm{Sq}^1$ 和$Q_1 := \mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1 + \mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^2$生成的代数。利用换环定理 [115, 第 4.5], 节，$ku_*(X)$ 的 AdamsE_2-页可简化为：

$$\begin{aligned} E_2^{s,t} &= \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}\left(H^*(ku\wedge X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)\\ &\cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}\left(H^*(ku;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}/2}H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)\\ &\cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}\left(\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{E}(1)}\mathbb{Z}/2\otimes_{\mathbb{Z}/2}H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)\\ &\cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}(1)}^{s,t}(H^*\left(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\,. \end{aligned} \tag{E.17}$$

由于 $\mathcal{E}(1)$ 是由两个生成元生成的外代数，因此这种对 E_2-页的改写要容易计算得多。这种技巧也见于 [232, 130]。

引理 E.18. 存在 $\mathcal{E}(1)$-模的同构

1. $R_2 \cong \quad \oplus\,\Sigma\mathcal{E}(1)$，2. $J \cong \mathcal{E}(1)\oplus\Sigma^2\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，以及 3. $\mathcal{A}(1)\cong\mathcal{E}(1)\oplus\Sigma^2\mathcal{E}(1)$。

可以通过直接检查 Q_0 和 Q_1 在这些 $\mathcal{A}(1)$-模上的作用来证明这一点，不过 [130, 第 4.4 节中也有此内容。（3]具体来说，见定理 4.53 的证明。）据此，存在 $\mathcal{E}(1)$-模的同构

$$\begin{aligned} H^*(X_8';\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \quad &\oplus\,\Sigma^3\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\Sigma^4 \quad \oplus\Sigma\mathcal{E}(1)\oplus\Sigma\mathcal{E}(1)\oplus\Sigma^3\mathcal{E}(1)\oplus\Sigma^3\mathcal{E}(1)\oplus\\ &\Sigma^5\mathcal{E}(1)\oplus\Sigma^5\mathcal{E}(1)\oplus\Sigma^5\mathcal{E}(1)\oplus\Sigma^5\mathcal{E}(1)\oplus P', \end{aligned} \tag{E.19}$$

其中 P' 集中在次数 7 及以上（因此与我们的计算无关）。我们在图 34 中画出这一分解：实线表示 Q_0 的作用，虚曲线表示 Q_1 的作用。

为了确定 Adams 谱序列的 E_2 页，我们需要计算 (E.19) 中各直和项作为 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{E}(1)}($ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上的模时的 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{E}(1)}$；论证的形式结构

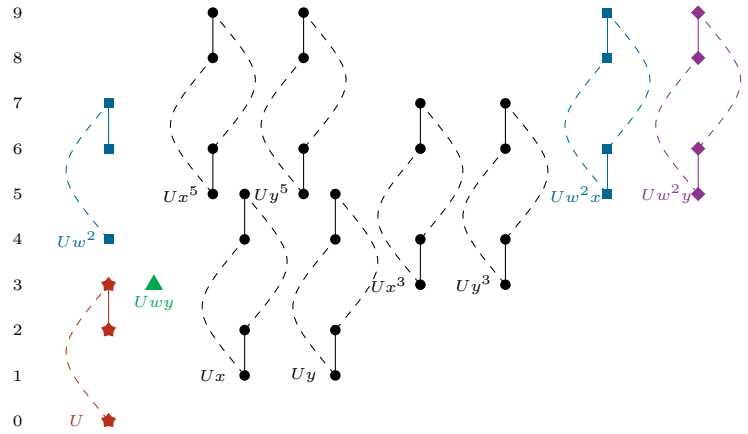


图 34：低次时 $\mathcal{E}(1)$-模 $H^*(X_8'; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的模结构。图中所示的子模包含次数为 6 及以下的所有元素。更多信息请参见命题 E.16 的证明。

与在 $\mathcal{A}(1)$ 上相同，但具体计算有所不同，因此得到的是 ku-同调，而不是 ko-同调。

因此，存在一个同构

$$\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{E}(1)}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[h_0, v_1] \tag{E.20}$$

其中 $|h_0| = (1, 1)$ 和 $|v_1| = (1, 3)$ [115, 示例 4.5.6],，且此代数典范地作用于 $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{E}(1)}\big(H^*(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)$，从而提供有关 ku_* 对 $ku_*(X)$ 的作用的信息。具体而言，在 E_∞页上的 h_0-作用可提升为乘以 2，而在E_∞页上的 v_1-作用可提升为 Bott 元素 $b \in ku_2$的作用。与 $\mathcal{A}(1)$ 的情形相同，可能存在“隐藏扩张”：2 或 b 在 $ku_*(X)$ 上的作用非平凡，但这种作用无法通过 h_0 或 v_1 在 E_∞页上的作用检测出来。

我们想知道该代数上的模和 $\mathcal{E}(1)$ 的 Ext 群。这些结果已知：$\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{E}(1)}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 见 [153, Section 3],，而 $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{E}(1)}(\mathcal{E}(1), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 仅包含一个$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，位于双次数 $(0,0)$，因为 $\mathcal{E}(1)$ 是一个自由 $\mathcal{E}(1)$-模。现在我们可以画出 $ku_*(X_8')$ 的 Adams 谱序列的 E_2-页，如图 35 左图所示。与 $\mathcal{A}(1)$ 上的情形类似，h_0-作用用竖线表示； v_1-作用则用较浅的斜线表示。

可能存在微分，事实上确实如此。它们要么都被 Margolis 定理消去，要么可由 4 线到 3 线的微分确定，因为 $\mathrm{Ext}^{\mathcal{E}(1)}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的作用与微分可交换。此外，4 线与 3 线上的 h_0 塔之间存在一个微分，我们可从相应的 ko-同调 Adams 谱序列中的微分（右侧图 33）推导出这一点；或者，也可以通过与 Atiyah-Hirzebruch 谱序列比较得出。取这个微分后，范围内便不可能再有其他微分；我们在图 35 右侧展示了 E_∞ 页。从这个 E_∞ 页可以看出，$ku_5\big((BD_8)^{V \oplus \mathrm{Det}(V)^{-3}}\big) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 5}$，其中有一个四维子空间 $\mathcal{S}$

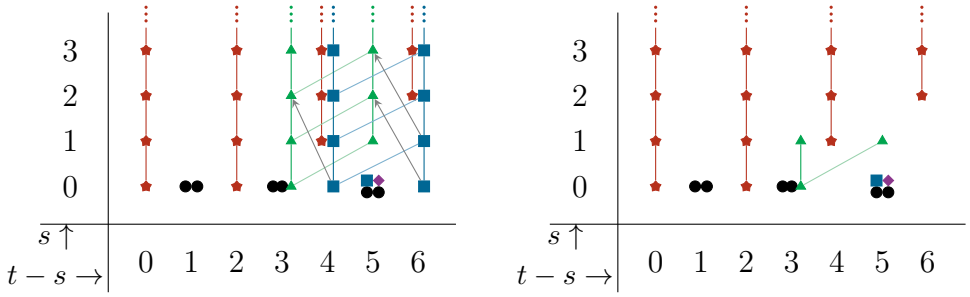


图 35：计算 $ku_*(X_8')$ 的 Adams 谱序列。为便于阅读，省略了部分 v_1-作用。左： E_2-页。右： $E_3 = E_\infty$-页。Margolis 定理将 $E^{0,\infty}{}^5 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 4}$ 提升为 $ku_5(X_8')$ 的一个 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 4}$ 子空间 $\mathcal{S}$。

来自 $H^*\big((BD_8)^{V\oplus \mathrm{Det}(V)^{-3}}$ 中的 $\big(\Sigma^5\mathcal{E}(1)\big)^{\oplus 4}$ 直和项； $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)$ 以及 Margolis 定理。

引理 E.21. $\mathcal{S}$ 恰好是下列映射的核

$$R\colon ku_5\big((BD_8)^{V\oplus \mathrm{Det}(V)-3}\big) \longrightarrow ko_3\big((BD_8)^{V\oplus \mathrm{Det}(V)-3}\big)\,. \tag{E.22}$$

证明。回忆 $\mathrm{ko}_3(X_8') \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，并设 x 为一个生成元。那么 $\eta(kx) \neq 0$ 当且仅当 k 为奇数，这一点我们在命题 E.13 的证明中发现（具体参见 (E.15)）。回忆引理 13.22 的证明，映射 η、c 和 R 构成一个长正合列；因此，若$R(z) \neq 0$，则 $R(z) \notin \mathrm{Im}(\eta)$，所以 $R(z) = 2x$。

连通覆盖映射 ku $\to$KU 诱导映射 $i_c\colon \mathrm{ku}_*(X) \to \mathrm{KU}_*(X)$，它是将 ku_*-模 $\mathrm{ku}_*(X)$ 关于由 Bott 元素b生成的理想局部化所得。也就是说，对于每个 $x \in \mathrm{ku}_*(X)$，若 $b^m x = 0$ 对某个 m 成立，则 $i_c(x) = 0$；若 $b^m x$ 永不为零，则 $i_c(x) \neq 0$，且 $i_c(x)$ 可被任意高次幂的 b 整除。在前一种情况下， x称为 b-挠元；在后一种情况下， x 称为 b-周期的。将 $i_r\colon \mathrm{ko}_*(X) \to \mathrm{KO}_*(X)$ 代替 i_c，也有类似的结论；ko_* 中的 Bott 元素 w 是 Bott 流形 B 在 Atiyah-Bott-Shapiro 映射 MTSpin $\to$ko 下的像。

类 $2x \in ko_3(X_8')$ 是 w-周期的。一种理解方式是将其提升到 Spin 配边中的原像，该原像由 $2S^3/Q_{16}$ 表示，正如我们在命题 E.13 的证明中所展示的。这个流形可由某种扭曲的 η-不变量检测。该类的 w-周期性等价于对所有 m， $B^m \times (2S^3/Q_{16})$ 都是非配边的；这可以通过在该类上计算相同的 η-不变量，并在 m 为 4ℓ 维时利用分解 $\eta(M\times N) = \mathrm{Index}(M)\eta(N)$ 来证明。因此 $i_r(2x) \neq 0$。如果 $z \in \mathcal{S}$, $bz = 0$ ，根据 Margolis 定理， [76] 所以

[76]这里有一个微妙之处，我们需要谨慎处理。Margolis 证明， $H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中的自由 $\mathcal{A}$-模直和项会提升为谱 X 上 $H\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的分裂副本；这尤其意味着，在 Adams 谱序列中，不会有涉及这些 $H\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 因子的非平凡微分或隐藏扩张。特别是， $\pi_*(\mathbb{S})^\wedge_2$ 在 $H\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项所产生的 $\pi_*(X)$ 中的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 副本上作用平凡。利用换环定理可知， $H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中的自由 $\mathcal{E}(1)$-模直和项对应于 $ku \wedge X$ 中的 $H\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项，但先验而言，我们并不知道这种分裂是作为 ku-模的分裂，只知道它是谱的分裂；原则上， $b \in ku_2$ 可能会有非平凡作用。

$i_c(z) = 0$。

假设 $z \in \mathcal{S}$ 满足 $R(z) \neq 0$；那么 $R(z) = 2x$。映射 R 是实化映射 $R\colon KU \simeq \Sigma^2 KU \to KO$ 的连通覆盖，这意味着存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} ku_5(X_8') & \xrightarrow{R} & ko_3(X_8') \\ {\scriptstyle i_c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_r} \\ KU_5(X_8') & \xrightarrow{R} & KO_3(X_8'). \end{array} \tag{E.23}$$

沿右上方移动，$i_r(R(z)) = i_r(2x) \neq 0$，但沿左下方移动，$R(i_c(z)) = 0$，这就产生了矛盾，因此 $\mathcal{S} \subset \ker(R)$。为了将其转化为等式，使用 η、c、R 长正合列，证明 $\ker(R)$ 是一个四维 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-向量空间。 □

由 η、c、R 序列的正合性，我们得到 $\mathrm{Im}(c\colon ko_5(X_8') \to ku_5(X_8')) = \mathcal{S}$。最后，Margolis 定理（或者如我们在脚注 76 中讨论的一个略强的版本）表明，b 对上同调中来自自由 $\mathcal{E}(1)$-模直和项的 $ku_*(X_8')$ 中的类作用平凡。因此，正如所承诺的，$b \circ c = 0$ 在 $ko_5(X_8')$ 上作用平凡，所以乘以 2 是 $ko_5(X_8')$ 上的零映射。

□

这个证明虽然复杂，却是我们找到的最简单论证。我们很想了解是否有更简单的方法来处理这个扩张问题。

不过，幸运的是，这个问题并不会出现：b 在$ku_*(X)$中那些来自 $H^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$的自由 $\mathcal{E}(1)$-子模的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项上作用平凡。相关参考文献见 Bruner-Greenlees [234, 第 2.1] 节。

参考文献

[1] C. Vafa, 《弦景观与沼泽地》, arXiv:hep-th/0509212.[2] H. Ooguri 和 C. Vafa, 《弦景观与沼泽地的几何》, 《核物理*B*》**766** (2007) 21–33, arXiv:hep-th/0605264.[3] E. Palti, 《沼泽地：引言与综述》, 《物理进展》**67** 第 6 期, (2019) 1900037, arXiv:1903.06239 [hep-th].[4] M. van Beest, J. Calder´on-Infante, D. Mirfendereski, and I. Valenzuela, 《关于……的讲座

n

弦紧化中的沼泽地计划, ” arXiv:2102.01111[hep-th].[5] N. B. Agmon、A. Bedroya、M. J. Kang 和 C. Vafa, “弦景观与沼泽地讲座, ” arXiv:2212.06187 [hep-th].[6] T. Banks 和 L. J. Dixon, “具有时空超对称性的弦真空的约束, ”《核物理*B*》**307** (1988) 93–108.[7] T. Banks 和 N. Seiberg, “场论与引力中的对称性和弦, ”《物理评论*D*》**83** (2011) 084019, arXiv:1011.5120 [hep-th].[8] D. Harlow 和 H. Ooguri, “量子场论与量子引力中的对称性, ”《数学物理通讯》**383** 第 3 期, (2021年) 1669–1804, arXiv:1810.05338[hep-th].[9] J. McNamara 和 C. Vafa, “配边类与沼泽地, ”arXiv:1909.10355 [hep-th].[10] H. Ooguri 和 T. Takayanagi, “反德西特空间中的配边猜想, ” arXiv:2006.13953[hep-th].[11] M. Montero 和 C. Vafa, “配边猜想、反常与弦路灯原理, ”《高能物理学杂志》**01** (2021年) 063, arXiv:2008.11729 [hep-th].[12] M. Dierigl 和 J. J. Heckman, “沼泽地配边猜想与非阿贝尔对偶群, ”《物理评论*D*》**103** 第 6 期, (2021年) 066006, arXiv:2012.00013[hep-th].[13] G. Buratti、M. Delgado 和 A. M. Uranga, “动力学蝌蚪、弦论配边

m,

以及通过自发紧致化得到的标准模型, ”《高能物理学杂志》**06** (2021) 170,arXiv:2104.02091 [hep-th].[14] G. Buratti、J. Calder´on-Infante、M. Delgado 和 A. M. Uranga, 《动力学配边与沼泽地距离猜想》, 《高能物理学杂志》**10** (2021) 037,arXiv:2107.09098 [hep-th]。

[15] R. Blumenhagen 和 N. Cribiori, 《K理论与配边的开闭对应》, JHEP 08 (2022) 037, arXiv:2112.07678 [hep-th].[16] R. Blumenhagen、N. Cribiori、C. Kneißl 和 A. Makridou, 《畴壁的动力学配边及其伴随缺陷7膜》, JHEP 08 (2022) 204, arXiv:2205.09782 [hep-th].[17] D. Andriot、N. Carqueville 和 N. Cribiori, 《探寻配边猜想中的结构》, SciPost Phys. 13 no. 3, (2022) 071, arXiv:2204.00021 [hep-th].[18] R. Angius、J. Calder´on-Infante、M. Delgado、J. Huertas 和 A. M. Uranga, 《世界尽头：局部动力学配边》, JHEP 06 (2022) 142, arXiv:2203.11240 [hep-th].[19] R. Blumenhagen、N. Cribiori、C. Kneissl 和 A. Makridou, 《配边与K理论的维数约化》, arXiv:2208.01656 [hep-th].[20] R. Angius、M. Delgado 和 A. M. Uranga, 《动力学配边与时间起点：超临界弦和快子凝聚》, JHEP 08 (2022) 285, arXiv:2207.13108 [hep-th].[21] D. M. Vel´azquez、D. De Biasio 和 D. L¨ust, 《配边、奇点与Ricci流猜想》, JHEP 01 (2023) 126, arXiv:2209.10297 [hep-th].[22] J. McNamara 和 M. Reece, 《关于宇称破缺的思考》, arXiv:2212.00039[hep-th].[23] M. Dierigl、J. J. Heckman、M. Montero 和 E. Torres, 《探索IIB：反射7膜》, arXiv:2212.05077 [hep-th].[24] J. McNamara, 《引力孤子与完备性》, arXiv:2108.02228[hep-th].[25] C. Vafa, 《F理论的证据》, 《核物理B》469 (1996) 403–418,arXiv:hep-th/9602022.[26] D. R. Morrison 和 C. Vafa, 《卡拉比-丘三维复流形上的F理论紧化。1》, 《核物理B》473 (1996) 74–92, arXiv:hep-th/9602114.[27] D. R. Morrison 和 C. Vafa, 《卡拉比-丘三维复流形上的F理论紧化。2》, 《核物理B》476 (1996) 437–469, arXiv:hep-th/9603161.[28] T. Pantev 和 E. Sharpe, 《对偶群在费米子上的作用》, JHEP 11 (2016) 171, arXiv:1609.00011 [hep-th]。

[29] Y. Tachikawa 和 K. Yonekura，“为什么定向反演面的分数电荷与狄拉克量子化相容？”，*SciPost Phys.* **7** 第 5 期，（2019）058，arXiv:1805.02772 [hep-th].[30] N. Seiberg、Y. Tachikawa 和 K. Yonekura，“对偶群的反常与扩展共形流形”，*PTEP* **2018** 第 7 期，（2018）073B04，arXiv:1803.07366 [hep-th].[31] C.-T. Hsieh、Y. Tachikawa 和 K. Yonekura，“麦克斯韦理论电磁对偶的反常”，*Phys. Rev. Lett.* **123** 第 16 期，（2019）161601，arXiv:1905.08943 [hep-th].[32] C.-T. Hsieh、Y. Tachikawa 和 K. Yonekura，“反常流入与 p-形式规范理论”，《数学物理通讯》**391** 第 2 期，（2022年）495–608，arXiv:2003.11550[hep-th].[33] A. Debray、M. Dierigl、J. J. Heckman 和 M. Montero，“那个反常是 n

ot

意指 IIB，”《物理进展》**70** 第 1 期，（7，2022年）论文编号 2100168，31，arXiv:2107.14227 [hep-th].[34] C. C´ordova、D. S. Freed、H. T. Lam 和 N. Seiberg，“耦合常数空间中的反常及其动力学应用 I”，*SciPost Phys.* **8** 第 1 期，（2020）001，arXiv:1905.09315 [hep-th].[35] C. C´ordova、D. S. Freed、H. T. Lam 和 N. Seiberg，“耦合常数空间中的反常及其动力学应用 II”，*SciPost Phys.* **8** 第 1 期，（2020）002，arXiv:1905.13361 [hep-th].[36] R. Stong，《配边理论札记》。普林斯顿经典图书馆。普林斯顿大学出版社，2015年。[37] I. Garc´ıa Etxebarria 和 M. Montero，“粒子物理学中的 Dai-Freed 反常”，《高能物理学杂志》**08** （2019）003，arXiv:1808.00009 [hep-th].[38] M. F. Atiyah，“配边与配边”，《剑桥数学学会会报》

dge

哲学学会**57** 第2期，（1961）200–208。[39] E. Witten，《费米子路径积分与拓扑相》，《现代物理评论》**88**第3期，（2016）035001，arXiv:1508.04715 [cond-mat.mes-hall]。[40] D. S. Freed 和 M. J. Hopkins，《不可定向流形上的 M 理论的一致性》，《牛津数学季刊》**72** 第1–2期，（2021）603–671，arXiv:1908.09916 [hep-th]。[41] D. Joyce，《构造具有 Spin(7) 整体单值化的紧致八维流形的新方法》，*J. Diff. Geom.* **53** 第1期，（1999）89–130，arXiv:math/9910002。

[42] J. W. Milnor, 《关于 Spin 流形的评述》, 载于《微分与组合拓扑（纪念 *Marston Morse* 的专题研讨会）, 第55–62页。普林斯顿大学出版社, 美国新泽西州普林斯顿, 1965年。[43] J. J. Heckman, 《F理论的粒子物理学含义》, 《核与粒子科学年度评论》**60** （2010年）237–265, arXiv:1001.0577 [hep-th]。[44] W. Taylor, 《关于不同维度下超引力与弦真空的 TASI讲座》, arXiv:1104.2051 [hep-th]。[45] T. Weigand, 《F理论》, *PoS* **TASI2017** （2018）016, arXiv:1806.01854 [hep-th]。[46] M. Montero 和 H. P. De Freitas, 《由离散

e

θ 角, ”《高能物理学杂志》1（2023年9月）, 论文编号 91, arXiv:2209.03361 [hep-th].[47] E. Witten, 《M理论中的通量量子化与有效作用量》, 《几何与物理杂志》22（1997年）1–13, arXiv:hep-th/9609122.[48] D. R. Morrison 和 W. Taylor, 《六维F理论模型底空间的分类》, 《中欧物理学杂志》10（2012年）1072–1088, arXiv:1201.1943 [hep-th].[49] J. J. Heckman、D. R. Morrison 和 C. Vafa, 《六维超共形场论与广义ADE轨形的分类》, 《高能物理学杂志》05（2014年）028, arXiv:1312.5746[hep-th]. [勘误: 《高能物理学杂志》06，017（2015年）].[50] I. Garc´ıa Etxebarria 和 D. Regalado, 《$\mathcal{N} = 3$ 四维场论》, 《高能物理学杂志》03（2016年）083, arXiv:1512.06434 [hep-th].[51] O. Aharony 和 Y. Tachikawa, 《S 折叠与四维超共形场论》, 《高能物理学杂志》06（2016年）044, arXiv:1602.08638 [hep-th].[52] F. Apruzzi、S. Giacomelli 和 S. Sch¨afer-Nameki, 《四维S 折叠》, 《物理评论D》101第10期（2020）106008, arXiv:2001.00533 [hep-th].[53] J. J. Heckman、C. Lawrie、T. B. Rochais、H. Y. Zhang 和 G. Zoccarato, 《S折叠、弦交汇与 $\mathcal{N} = 2$ 超共形场论》, 《物理评论D》103第8期（2021年）086013, arXiv:2009.10090 [hep-th].[54] S. Giacomelli、M. Martone、Y. Tachikawa 和 G. Zafrir, 《关于 $\mathcal{N} = 2$ S 折叠的更多讨论》, 《高能物理学杂志》01（2021年）054, arXiv:2010.03943 [hep-th].[55] E. Witten, 《整体引力反常》, 《数学物理通讯》100第2期（1985年）197–229。[56] D.-E. Diaconescu、G. W. Moore 和 E. Witten, 《E_8 规范理论与一种推导

n

源自 M-理论的 K-理论, ”《高级理论与数学物理》**6** （2003）1031–1134, arXiv:hep-th/0005090。

[57] D.-E. Diaconescu、G. W. Moore 和 E. Witten，《从M理论推导K理论》，arXiv:hep-th/0005091.[58] A. Debray 和 M. Yu，《配边理论的反常抵消对U能做什么》，arXiv:2210.04911 [hep-th].[59] M. Dierigl、J. J. Heckman、T. B. Rochais 和 E. Torres，《强耦合下三维界面的几何方法》，《物理评论D》102（2020年11月）106011，arXiv:2005.05983 [hep-th].[60] M. Levine 和 F. Morel，《代数配边 I》，巴黎科学院院报，第一辑，数学，332卷第8期（2001）723–728。[61] M. Levine 和 F. Morel，《代数配边 II》，巴黎科学院院报，第一辑，数学，332卷第9期（2001）815–820。[62] M. Levine 和 F. Morel，《代数配边 I》，https://conf.math.illinois.edu/K-theory/0547/AlgebraicCobordism.pdf.[63] M. Levine，《代数配边 II》，https://conf.math.illinois.edu/K-theory/0577/CobordismII.pdf.[64] M. Levine 和 F. Morel，《代数配边》。Springer数学专著。Springer柏林海德堡，2007年。[65] M. Levine 和 R. Pandharipande，《重访代数配边》，《数学发明》176（2009年）63–130，arXiv:math/0605196.[66] J. Morava，《复配边与代数拓扑》，arXiv:0707.3216[math.HO].[67] M. Hill 和 T. Lawson，《具有层结构的拓扑模形式》，《数学发明》203卷第2期（2016年）359–416，arXiv:1312.7394 [math.AT].[68] I. Kriz 和 H. Sati，《IIB弦理论、S对偶与广义上同调》，《核物理B》715（2005）639–664，arXiv:hep-th/0410293.[69] I. Kriz 和 H. Sati，《II型弦理论与模性》，《高能物理学杂志》08（2005）038，arXiv:hep-th/0501060.[70] H. Sati，《与M膜相关的几何和拓扑结构》，《纯数学专题讨论会论文集》81（2010）181–236，arXiv:1001.5020 [math.DG].[71] Y. Tachikawa 和 M. Yamashita，《拓扑模形式与所有杂化弦全局反常的消失》，arXiv:2108.13542 [hep-th]。

[72] Y. Tachikawa, 《拓扑模形式与杂化弦全局反常的缺失》, PTEP 2022 no. 4, (2022) 04A107, arXiv:2103.12211 [hep-th].[73] K. Yonekura, 《杂化弦全局反常与挠 Witten 指数》, 《高能物理学杂志》10 (2022) 114, arXiv:2207.13858 [hep-th].[74] K. Dasgupta 和 S. Mukhi, 《耦合常数固定时的 F 理论》, 《物理快报 B》385 (1996) 125–131, arXiv:hep-th/9606044.[75] I. Garc´ıa Etxebarria、M. Montero、K. Sousa 和 I. Valenzuela, 《弦紧化中没有什么是确定的》, 《高能物理学杂志》12 (2020) 032, arXiv:2005.06494 [hep-th].[76] E. Witten, 《M 理论与 F 理论中的相变》, 《核物理B》471 (1996) 195–216, arXiv:hep-th/9603150.[77] D. R. Morrison 和 C. Vafa, 《四维中的 F 理论与 N=1 超共形场论》, JHEP 08 (2016) 070, arXiv:1604.03560 [hep-th].[78] M. Del Zotto、J. J. Heckman 和 D. R. Morrison, 《六维超共形场论与五维理论的相》, 《高能物理学杂志》09 (2017) 147, arXiv:1703.02981 [hep-th].[79] J. J. Heckman 和 T. Rudelius, 《六维超共形场论的自上而下方法》, 《物理学杂志 A》52 no. 9, (2019) 093001, arXiv:1805.06467 [hep-th].[80] P. C. Argyres、J. J. Heckman、K. Intriligator 和 M. Martone, 《超共形场论 Snowmass 白皮书》, arXiv:2202.07683 [hep-th].[81] T. W. Grimm, 《IIB 型紧化中的非微扰修正与模性》, 《高能物理学杂志》10 (2007) 004, arXiv:0705.3253 [hep-th].[82] S. Ferrara 和 D. L¨ust, 《自旋四 $\mathcal{N}=7$ W-超引力：S 折叠与双拷贝构造》, 《高能物理学杂志》07 (2018) 114, arXiv:1805.10022 [hep-th].[83] A. Debray、M. Dierigl、J. J. Heckman 和 M. Montero, 《超共形场论衍生研究》。即将出版。[84] D. R. Morrison 和 G. Stevens, 《三维和四维中的终端商奇点》, 《美国数学会会刊》90 no. 1, (1984) 15–20.[85] R. Anno, 《四维终端 Gorenstein 商奇点》, 《数学札记》73 (2003) 769–776.[86] A. Strominger、S.-T. Yau 和 E. Zaslow, 《镜像对称即 T 对偶》, 《核物理B》479 (1996) 243–259, arXiv:hep-th/9606040.[87] E. Witten, 《拓扑量子场论》, 《数学物理通讯》117 (1988) 353。

[88] I. Florakis、I. Garc´ıa Etxebarria、D. L¨ust 和 D. Regalado, 《具有外生 tic
超对称性, ”《高能物理学杂志》 02 (2018) 146, arXiv:1712.04318 [hep-th].
[89] C. Vafa 和 E. Witten, 《强耦合对 S-对偶的检验》, 《核物理*B*》 431(1994) 3–
77, arXiv:hep-th/9408074.[90] M. Bershadsky、C. Vafa 和 V. Sadov, 《D-膜与拓
扑场论》, 《核物理*B*》 463 (1996) 420–434, arXiv:hep-th/9511222.[91] M.
Bershadsky、K.A. Intriligator、S. Kachru、D. R.Morrison、V. Sadov 和 C. Va
fa,
《几何奇点与增强规范对称性》, 《核物理*B*》 481 (199 6)
215–252, arXiv:hep-th/9605200.[92] C. Beasley、J. J. Heckman 和 C. Vafa,
《F理论中的大统一理论与例外膜》
ry
- I”, 《高能物理学杂志》01 （2009年）058, arXiv:0802.3391 [hep-th].[93]
R. Donagi 和 M. Wijnholt, 《F理论模型构建》, 《高级理论与数学物理》15 第 5
期, （2011年）1237–1317, arXiv:0802.2969 [hep-th].[94] F. Apruzzi、F.
Hassler、J. J. Heckman 和 I. V. Melnikov, 《非临界弦的紫外完备化》, 《高能物
理学杂志》07 （2016年）045, arXiv:1602.04221 [hep-th].[95] S. Sch¨
afer-Nameki 和 T. Weigand, 《F理论与二维 (0，2) 理论》, 《高能物理学杂志》
05（2016年）059, arXiv:1601.02015 [hep-th].[96] B. S. Acharya, 《在 M 理论
中实现 N=1 超杨-米尔斯理论》, arXiv:hep-th/0011089.[97] T. Pantev 和 M.
Wijnholt, 《Hitchin 方程与 M 理论现象学》,
J.
几何物理61 (2011) 1223–1247, arXiv:0905.1968 [hep-th].[98] J. J. Heckman,
C. Lawrie, L. Lin,and G. Zoccarato, “F理论与暗能量,”《物理进展》67 no. 10,
(2019) 1900057, arXiv:1811.01959 [hep-th].[99] D. Gepner and E. Witten, “群流形
上的弦理论,”《核物理*B*》27(1986) 493–549.[100] M. R. Gaberdiel and B.
Zwiebach, “开弦中的例外群,”《核物理*B*》518 (1998) 151–172, 8
arXiv:hep-th/9709013.[101] M. R. Gaberdiel, T. Hauer, and B. Zwiebach, “开弦-弦
交汇跃迁,”《核物理*B*》525 (1998) 117–145, arXiv:hep-th/9801205.[102] O.
DeWolfe and B. Zwiebach, “任意李代数表示的弦交汇,”《核物理*B*》541 (1999)
509–565, arXiv:hep-th/9804210.

[103] A. Hanany and B. Kol, "关于定向反演面、离散扭曲、膜与M理论," 《高能物理学杂志》06 (2000) 013, arXiv:hep-th/0003025.[104] O. Bergman, D. Rodr´ıguez-G´omez, and G. Zafrir, "离散 θ 与五维超共形指标," 《高能物理学杂志》01 (2014) 079, arXiv:1310.2150 [hep-th].[105] D. S. Freed and M. J. Hopkins, "反射正性与可逆拓扑相," Geom. Topol. 25 (2021) 1165–1330, arXiv:1604.06527 [hep-th].[106] I. Garc´ıa Etxebarria, H. Hayashi, K. Ohmori, Y. Tachikawa, and K. Yonekura, "八维规范反常与拓扑Green–Schwarz机制," 《高能物理学杂志》11 (2017) 177, arXiv:1710.04218 [hep-th].[107] J. Polchinski, "磁单极子、对偶与弦理论," Int. J. Mod. Phys. A 19S1 (2004) 145–156, arXiv:hep-th/0304042.[108] M. Dierigl, P.-K. Oehlmann, and T. Schimannek, "六维F理论中的离散Green–Schwarz机制与非临界弦的椭圆亏格,"arXiv:2212.04503 [hep-th].[109] J. A. Campbell, "对称性保护相的同伦论分类,"arXiv:1708.04264 [math.AT].[110] C.-T. Hsieh, "重新审视离散规范反常," arXiv:1808.02881 [hep-th].[111] J. Davighi and N. Lohitsiri, "反常相互作用代数," SciPost Phys. 10 no. 3, (2021) 074, arXiv:2011.10102 [hep-th].[112] R. Lashof, "庞加莱对偶与配边," Trans. Amer. Math. Soc. 109 (1963) 257–277.[113] C. J. Schommer-Pries, "环面可检测拓扑场论的可逆性," Geom. Topol. 22 no. 5, (2018) 2713–2756, arXiv:1511.01772 [math.AT].[114] D. S. Freed, M. J. Hopkins, and C. Teleman, "模空间的相容定向," 收录于《几何的诸多面向》, 第395–419页。牛津大学出版社, 牛津, 2010年。 arXiv:0711.1909 [math.AT].[115] A. Beaudry and J. A. Campbell, "计算稳定同伦群指南," 收录于《拓扑与量子理论的相互作用》, Contemp. Math. 第718卷, 第89–136页。Amer. Math. Soc., [Providence], RI, [2018] ©2018。 arXiv:1801.07530 [math.AT].[116] S. Schwede, "对称谱。" http://www.math.uni-bonn.de/people/schwede/SymSpec-v3.pdf.

[117] L. Moser、V. Ozornova、S. Paoli、M. Sarazola 和 P. Verdugo，“Tamsamani 模型中的稳定同伦假设”，Topology Appl. 316（2022）第 108106 号论文，40, arXiv:2001.05577 [math.AT]。[118] D. S. Freed 和 C. Teleman，“伊辛模型中的拓扑对偶”，Geom. Topol. 26 第 5 期，（2022）1907–1984, arXiv:1806.00008 [math.AT]。[119] Y. L. Liu，“拓扑场论中的阿贝尔对偶”，arXiv:2112.02199[math-ph]。[120] E. L. Lima，“新同伦范畴中的 Spanier-Whitehead 对偶”，Summa Brasil. Math. 4（1959）91–148（1959）。[121] E. L. Lima，“稳定 Postnikov 不变量及其对偶”，Summa Brasil. Math. 4（1960）193–251。[122] R. Thom，《可微流形的若干整体性质》。博士论文，巴黎大学，1954。[123] L. S. Pontrjagin，“复形到球面的连续变换的分类 I、II”，Doklady Akad. Nauk SSSR（N.S.）XIX（1938）147–150 和 361–363。[124] L. S. Pontrjagin，“一个（$n+2$）维球面到一个 n维球面的映射的同伦分类”，Doklady Akad. Nauk SSSR（N.S.）70（1950）957–959。[125] L. S. Pontrjagin，Gladkie mnogoobraziya i ih primeneniya v teorii gomotopi˘ı。Trudy Mat. Inst. im. Steklov. 第 45 号。Izdat. Akad. Nauk SSSR，莫斯科，1955。[126] Z. Wan、J. Wang 和 Y. Zheng，“量子 4d 杨-米尔斯理论与时间反演对称的 5d 高规范拓扑场论”，《物理评论D》100 第 8 期，（2019）085012, arXiv:1904.00994 [hep-th]。[127] J. Davighi 和 N. Lohitsiri，“ U(2)规范理论中的反常交互”，《高能物理学杂志》05（2020）098, arXiv:2001.07731 [hep-th]。[128] Z. Wan 和 J. Wang，“超越标准模型与大统一：通过配边研究反常、拓扑项与动力学约束”，《高能物理学杂志》07（2020）062, arXiv:1910.14668 [hep-th]。[129] Z. Wan、J. Wang 和 Y. Zheng，“高阶反常、高阶对称性与配边 II：洛伦兹对称性扩展与富化玻色/费米量子规范理论”，《数学科学与应用年刊》05 第 2 期，（2020）171–257,arXiv:1912.13504 [hep-th]。

[130] A. Debray，“混合空间对称性的可逆相与费米子晶体等价原理”，arXiv:2102.02941 [math-ph]。[131] L. Stehouwer，“相互作用SPT相不是 Morita不变量”，Lett. Math. Phys. 112 第 3 期，（2022）64, arXiv:2110.07408 [hep-th]。[132] J. Beardsley，“通过运算子Kan延拓构造相对Thom谱”，Algebr. Geom. Topol. 17 第 2 期，（2017）1151–1162, arXiv:1601.04123 [math.AT]。[133] J.-P. Serre，“同伦群与阿贝尔群类”，Annals of Mathematics 58 第 2 期，（1953）258–294。[134] E. H. Brown Jr. 和 F. P. Peterson，“其 Z_p 上同调是约化 p^{th} 幂代数的一个谱”，Topology 5（1966）149–154。[135] B. G. Averbuh，“配边群的代数结构”，Dokl. Akad. Nauk SSSR 125（1959）11–14。[136] J. Milnor，“关于配边环 Ω^* 及其复类比 I”，《美国数学杂志》82（1960）505–521。[137] D. W. Anderson、E. H. Brown Jr. 和 F. P. Peterson，“Spin配边环的结构”，Ann. of Math.（2）86（1967）271–298。[138] A. Bahri 和 P. Gilkey，“循环2群的 eta不变量、Pin^c 配边与等变 Spin^{c}配边”，Pacific J. Math. 128 第 1 期，（1987）1–24。[139] A. Bahri 和 P. Gilkey，“循环2群的 Pin^c 配边与等变 Spin^c 配边”，Proceedings of the American Mathematical Society 99 第 2 期，（1987）380–382。[140] R. R. Bruner，“关于实连通 K 理论与复连通K理论的 Postnikov塔”，arXiv:1208.2232 [math.AT]。[141] R. Bott，《关于 K（X）的讲义》。Mathematics Lecture Note Series。W. A. Benjamin, Inc

纽约-阿姆斯特丹，1969年。[142] R. Bruner 和 J. Greenlees，连通实 K-有限群理论。《数学调查与专著》。美国数学会，2010年。[143] J. M. Maldacena、G. W. Moore 和 N. Seiberg，“D膜瞬子与K理论荷”，《高能物理学杂志》11 (2001) 062, arXiv:hep-th/0108100。[144] J. Carlson、L. Townsley、L. Valero-Elizondo 和 M. Zhang，《有限群的上同调环》，《代数与应用》第3卷。施普林格荷兰，2003年。

[145] M. Mahowald 和 R. J. Milgram，“在连通K理论中检测 Sq4 的运算及其应用”，《牛津数学季刊》（第*2*辑）**27** 第108期，（1976 ）

415–432.[146] Stacks 项目作者，《Stacks 项目》。https://stacks.math.columbia.edu，2023年。[147] S. Mac Lane，《同调》。数学科学基础丛书，柏

d

114. Academic Press, Inc.,出版社，纽约；Springer-Verlag，柏林-哥廷根-海德堡，1963年。[148] N. Yoneda，《关于模的同调理论》，东京大学理学部学报 I 辑**7**(1954) 193–227.[149] A. L. Liulevicius，《Steenrod 代数子代数的上同调》，*Trans.Amer. Math. Soc.* **104** (1962) 443–449.[150] S. Gitler、M. Mahowald 和 R. J. Milgram，《RP^n及高阶上同调运算的不可浸入问题》，《美国国家科学院院刊》**60** (1968) 432–437.[151] V. Giambalvo，《带关系的线丛配边》，*Illinois J. Math.* **17**(1973) 442–449.[152] D. Davis，《广义同调与广义向量场问题》，《牛津数学季刊》（第*2*辑）**25** (1974) 169–193.[153] J. F. Adams 和 S. B. Priddy，《 B特殊正交群的唯一性》，剑桥哲学会数学学报

.

协会 **80** 第 3 期，（1976）475–509。[154] V. Giambalvo，《具有对合的自旋流形的配边》，《牛津数学季刊》（第 *2* 辑）**27** 第 106 期，（1976）241–252。[155] B. Botvinnik 和 P. Gilkey，《Gromov-Lawson-Rosenberg 猜想：扭曲的

d

情形”，《休斯敦数学杂志》**23** 第1期，（1997年）143–160。[156] Z. Wan 和 J. Wang，《高阶反常、高阶对称性与配边 I：通过广义配边理论对高阶对称性保护拓扑态及其边界费米子/玻色子反常进行分类》，《数学科学与应用年刊》**4** 第2期，（2019年）107–311，arXiv:1812.11967 [hep-th]。[157] A. Baker，《交换 S-代数上的模的同伦理论：一些工具与实例》，arXiv:2003.12003 [math.AT]。[158] R. Bruner，《Ext（计算机软件）》，2018年。http://www.rrb.wayne.edu/papers/index.html#code。

[159] H. Chatham 和 D. Chua，《Spectralsequences（计算机软件）》，2021年。https://github.com/spectralsequences/sseq/。[160] R. Bruner，《Adams 谱序列中的一个新微分》，Topology 23 第3期，（1984）271–276。[161] D. C. Isaksen 和 Z. Xu，《动机稳定同伦与稳定第51和第52茎》，Topology Appl. 190（2015年）31–34，arXiv:1411.3447 [math.AT]。[162] G. Wang 和 Z. Xu，《球面的稳定同伦群中的第61茎平凡》，Ann. of Math. (2) 186 第2期，（2017）501–580。[163] H. R. Margolis，《Eilenberg-Mac Lane 谱》，Proc. Amer. Math. Soc. 43（1974年）409–415。[164] M. Mahowald 和 M. Tangora，《Adams 谱序列中的一些微分》，Topology 6（1967年）349–369。[165] M. Mahowald，《关于 Adams 谱序列》，Canadian J. Math. 20（1968年）252–256。[166] D. M. Davis 和 M. Mahowald，《稳定同伦论中的 v_1-周期性与 v_2-周期性》，《美国数学杂志》103 第4期，（1981年）615–659。[167] W.-H. Lin 和 M. Mahowald，《Minami定理的 Adams 谱序列》，载于《通过代数几何与群表示研究同伦论》（美国伊利诺伊州埃文斯顿，1997年），Contemp. Math. 第220卷，第143–177页。Amer. Math. Soc.，美国罗得岛州普罗维登斯，1998年。[168] M. A. Hill，《 BE_8 与 $BE_8 \times BE_8$ 的 String 配边：截至14维》，Illinois J. Math. 53 第1期，（2009年）183–196。[169] J. Francis，《Spin 流形上的积分与 K(ℤ, 4) 的 K理论》，https://sites.math.northwestern.edu/~jnkf/writ/bspin2011.pdf。[170] D. C. Isaksen，《稳定茎》，Mem. Amer. Math. Soc. 262 第1269号，（2019）viii+159。[171] R. R. Bruner 和 J. Rognes，《像J谱的 Adams 谱序列》，Trans. Amer. Math. Soc. 375 第8期，（2022年）5803–5827，arXiv:2105.02601 [math.AT]。[172] R. R. Bruner 和 J. Rognes，《拓扑模形式的 Adams 谱序列》，数学调查与专著第253卷。美国数学会，美国罗得岛州普罗维登斯，[2021] ©2021。

[173] D. Culver, 《3-局部 tmf 的 Adams 谱序列》, J. Homotopy Relat. Struct. 16 no. 1, (2021) 1–40, arXiv:1902.04230 [math.AT].[174] J. P. May 和 R. J. Milgram, 《Bockstein 与 Adams 谱序列》, Proc. Amer. Math. Soc. 83 no. 1, (1981) 128–130. [175] H. Toda, 《球面同伦群中的合成方法》。数学年刊研究丛书，第 49 号。普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿，1962.[176] R. M. F. Moss, 《二次合成与 Adams 谱序列》, Math. Z. 115 (1970) 283–310.[177] D. C. Isaksen、G. Wang 和 Z. Xu, 《球面的稳定同伦群：从 0 维到 90 维》, arXiv:2001.04511 [math.AT].[178] B. Gheorghe、G. Wang 和 Z. Xu, 《稳定同伦范畴动机变形的特殊纤维是代数的》, Acta Math. 226 no. 2, (2021) 319–407,arXiv:1809.09290 [math.AT].[179] J. Kaidi、J. Parra-Martinez 和 Tachikawa, 《超弦世界面上的拓扑超导体》, SciPost Phys. 9 (2020) 10, arXiv:1911.11780 [hep-th]。数学附录由 A. Debray 撰写。[180] M. Kontsevich, 《镜像对称的同调代数》, arXiv:alg-geom/9411018.[181] M. R. Douglas, 《D-膜、范畴与 $\mathcal{N}=1$ 超对称性》, J. Math. Phys. 42 (2001) 2818–2843, arXiv:hep-th/0011017.[182] P. S. Aspinwall 和 A. E. Lawrence, 《导出范畴与零膜稳定性》, JHEP 08 (2001) 004, arXiv:hep-th/0104147.[183] P. S. Aspinwall, 《Calabi–Yau流形上的 D-膜》, 载于《理论高等粒子物理研究所（TASI 2003）：弦理论新趋势》, 第 1–152 页。2004 年 3 月。 arXiv:hep-th/0403166.[184] R. Burklund, 《54维 Adams 谱序列中的一个扩张》, Bull. Lond. Math. Soc. 53 no. 2, (2021) 404–407, arXiv:2005.08910 [math.AT].[185] D. E. Chua, 《Adams 谱序列的 E3页》。ProQuest LLC，美国密歇根州安娜堡，2022。 arXiv:2105.07628 [math.AT].[186] P. Marek, 《$H\mathbb{F}_2$-合成拓扑模形式的同伦群》, arXiv:2202.11305 [math.AT].[187] K. S. Brown, 《群上同调》, 数学研究生教材第 87 卷。Springer-Verlag，纽约-柏林，1982。

[188] A. Bahri、M. Bendersky、D. M. Davis 和 P. B. Gilkey，《具有周期上同调的群的复配边》，Trans. Amer. Math. Soc. 316 no. 2, (1989) 673–687.[189] J. F. Adams，《广义上同调讲义》，载于《范畴论、同调论及其应用，III》（巴特尔研究所会议，华盛顿州西雅图，1968年，第三卷），第 1–138 页。施普林格，柏林，1969 年。[190] D. C. Johnson 和 W. S. Wilson，《投射维数与布朗-彼得森同调》，Topology 12 (1973) 327–353.[191] S. Hashimoto，《关于分类空间$B\mathbb{Z}/p^r$的连通 K-同调群》，数理科学研究所刊物 19 no. 2, (1983) 765–771。[192] J. Rosenberg，《C^*-代数、正标量曲率与诺维科夫猜想 II》，载于《算子代数中的几何方法》（京都，1983），皮特曼数学研究札记丛书第 123 卷，第 341–374 页。朗文科学技术出版社，哈洛，1986 年。[193] B. Botvinnik、P. Gilkey 和 S. Stolz，《具有周期上同调的群的 Gromov-Lawson-Rosenberg 猜想》，微分几何杂志 46 no. 3, (1997) 374–405。[194] E. Barrera-Yanez，《基本群为循环2群的偶维流形扭积的 eta不变量》，《微分几何及其应用》11 no. 3, (1999) 221–235。[195] A. Dold，《半正合同伦函子》，数学讲义第 12 卷。Springer-Verlag，柏林-纽约，1966 年。[196] M. F. Atiyah、V. K. Patodi 和 I. M. Singer，《谱不对称性与黎曼几何 II》，《剑桥哲学学会数学会刊》78 no. 3, (1975) 405–432。[197] H. Donnelly，《 G-空间的 eta不变量》，印第安纳大学数学杂志 27 no. 6, (1978) 889–918。[198] M. Atiyah、R. Bott 和 A. Shapiro，《克利福德模》，Topology 3 no. Supplement 1, (1964) 3–38。[199] M. Joachim，《等变 K理论的高阶相干性》，载于《结构化环谱》，伦敦数学会讲义系列第 315 卷，第 87–114 页。剑桥大学出版社，剑桥，2004 年。[200] P. E. Conner 和 E. E. Floyd，《配边与 K理论的关系》。数学讲义，第 28 号。Springer-Verlag，柏林-纽约，1966 年。[201] G. Laures，《Spin 配边的一种 E_∞ 分裂》，《美国数学杂志》125 no. 5, (2003) 977–1027。

[202] D. W. Anderson、E. H. Brown Jr. 和 F. P. Peterson，《SU-配边、KO-示性数与 Kervaire 不变量》，Ann. of Math. (2) 83 (1966) 54–67。[203] D. Handel，《二面体群上同调中的乘积》，《东北数学杂志》(2) 45 no. 1, (1993) 13–42。[204] M. Kamata 和 H. Minami，《二面体群的配边群》，《日本数学会杂志》25 (1973) 334–341。[205] M. Kamata，《二面体群分类空间的复配边群》，《大阪数学杂志》11 (1974) 367–378。[206] R. Pedrotti，《某些四维流形族的稳定分类》，硕士论文，马克斯·普朗克数学研究所，2017。[207] L. Guillou 和 A. Marin，《关于 Rohlin 特征定理的一个推广》，载于《实代数几何研讨会》（巴黎，1977/1978 年及巴黎，1978/1979 年），《巴黎第七大学数学出版物》第 9 卷，第 69–80 页。巴黎第七大学，巴黎，1980。[208] R. C. Kirby 和 L. R. Taylor，《低维流形上的 Pin结构》，载于《低维流形几何》2（达勒姆，1989），《伦敦数学会讲义系列》第 151 卷，第 177–242 页。剑桥大学出版社，剑桥，1990。[209] F. Han、R. Huang、K. Liu 和 W. Zhang，《三次型、反常抵消与模性》，《数学进展》394 (2022) 108023，arXiv:2005.02344 [math.DG].[210] C. Lazaroiu 和 C. S. Shahbazi，《复型实旋量丛上的 Dirac 算子》，《微分几何及其应用》80 (2022) 论文编号 101849，53，arXiv:1809.09084[math.DG]。[211] M. Barkeshli、Y.-A. Chen、P.-S. Hsin 和 N. Manjunath，《具有对称性的 (2+1)D 可逆费米子拓扑相的分类》，《物理评论B辑》105 no. 23, (2022) 235143，arXiv:2109.11039 [cond-mat.str-el].[212] S.-Q. Ning、Y. Qi、Z.-C. Gu 和 C. Wang，《可逆拓扑序导致的强制对称性破缺》，arXiv:2109.15307 [cond-mat.str-el].[213] N. Manjunath、V. Calvera 和 M. Barkeshli，《对称性与手征性对 (2+1)D 中马约拉纳零模和缺陷量子数的非微扰约束》，arXiv:2210.02452 [cond-mat.str-el].[214] A. Nath 和 P. Sankaran，《关于广义多尔德流形》，《大阪数学杂志》56 no. 1, (2019) 75–90，arXiv:1708.02418 [math.AT]。

[215] S. Sarkar 和 P. Zvengrowski, 《关于广义射影乘积空间与多尔德流形》, 《同调与同伦应用》24 no. 2, (2022) 265–289, arXiv:2010.1149[math.AT].[216] R. H. Szczarba, 《关于纤维空间与商空间的切丛》, 《美国数学杂志》86 (1964) 685–697。[217] T. Kambe, 《透镜空间的 K_Λ-环结构及其应用》, 《日本数学会杂志》18 (1966) 135–146。[218] J. Gray、A. S. Haupt 和 A. Lukas, 《所有完全交Calabi-Yau四维流形》, 《高能物理学杂志》no. 7, (2013) 070, 前置部分+17。[219] H. Osborn, 《高于二维的共形场论讲义》, https://www.damtp.cam.ac.uk/user/ho/CFTNotes.pdf.[220] T. Fujino, 《二面体群 D_p作用于 $S^{2l+1}\times S^m$ 的轨道流形 $D_p(l,m)$的浸入与嵌入》, 《大阪数学杂志》12 no. 2, (1975) 299–304。[221] A. Dold, 《Thom 代数 $\mathfrak{N}$的生成元》, Math. Z. 65 (1956) 25–35。[222] P. Teichner, 《具有有限基本群的拓扑四维流形》。博士论文, 美因茨大学, 1992。https://math.berkeley.edu/~teichner/Papers/phd.pdf.[223] V. P. Snaith, 《伽罗瓦表示论中的拓扑方法》。多佛数学丛书。多佛出版社, 纽约州米尼奥拉, 2013。[224] G. Laures, 《$K(1)$-局部拓扑模形式》, 《数学发明》157 no. 2, (2004) 371–403。[225] J.-M. Bismut 和 J. Cheeger, 《η不变量及其绝热极限》, 《美国数学会杂志》2 no. 1, (1989) 33–70。[226] S. Goette, 《齐性空间的 eta不变量》, 《纯粹与应用数学季刊》5 no. 3, 专刊：纪念 Friedrich Hirzebruch（第二部分）, (2009) 915–946, arXiv:math/0203269 [math.DG].[227] S. Goette, 《等变 η不变量与 η形式》, 《纯粹与应用数学杂志》526 (2000) 181–236。[228] S. Goette, 《η 不变量的计算与应用》, 载于《整体微分几何》, 施普林格数学会议录第 17 卷, 第 401–433 页。施普林格, 海德堡, 2012。arXiv:1011.4766 [math.DG].[229] M. F. Atiyah、V. K. Patodi 和 I. M. Singer, 《谱不对称性与黎曼几何 I》, 《剑桥哲学会数学会刊》77 (1975) 43。

[230] M. F. Atiyah、V. K. Patodi 和 I. M. Singer，《谱不对称性与黎曼几何 III》，《剑桥哲学会数学会刊》**79** (1976) 71–99。[231] J. P. May 和 K. Ponto，《更简明的代数拓扑》。芝加哥数学讲义。芝加哥大学出版社，伊利诺伊州芝加哥，2012年。局部化、完备化和模型范畴。[232] D. K. Bayen，《有限群的连通实K-同调》。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，1994年。博士论文——韦恩州立大学。[233] D. C. Ravenel，《复配边与球面的稳定同伦群》，第121卷，纯粹与应用数学。Academic Press, Inc.，佛罗里达州奥兰多，1986年。[234] R. R. Bruner 和 J. P. C. Greenlees，《有限群的连通 K理论》，*Mem. Amer. Math. Soc.* **165** 第785号，(2003) viii+127。[235] C. C´ordova、K. Ohmori、S.-H. Shao 和 F. Yan，《带装饰的 $\mathbb{Z}_2$ 对称性缺陷及其时间反演反常》，《物理评论D》**102** 第4号，(2020) 045019，arXiv:1910.14046 [hep-th]。[236] I. Hason、Z. Komargodski 和 R. Thorngren，《对称性破缺相中的反常匹配：畴壁、CPT与Smith同构》，*SciPost Phys.* **8**第4号，(2020) 062，arXiv:1910.14039 [hep-th]。[237] A. Debray、S. Devalapurkar、C. Krulewski、Y. L. Liu、N. Pacheco-Tallaj 和 R. Thorngren，《对称性破缺中的长正合列：序参量约束、缺陷反常匹配与高阶贝里相位》。即将发表。[238] R. C. Kirby 和 L. R. Taylor，《Pin$^+$ 配边群的计算》，*Comment.Math. Helv.* **65** 第3号，(1990) 434–447。[239] S. Tomoda 和 P. Zvengrowski，《关于三维流形有限基本群的上同调的评论》，载于《*Zieschang*纪念文集》，第14卷，几何与拓扑专著系列，第519–556页。Geom. Topol. Publ.，英国考文垂，2008年。arXiv:0904.1876[math.AT]。[240] J. F. Adams，《论陈特征与酉群的结构》，*Proc.Cambridge Philos. Soc.* **57** (1961) 189–199。