arXiv:2302.00035v1 [math.AC] 31 Jan 2023

关于 Auslander深度公式

SHASHI RANJAN SINHA 和 AMIT TRIPATHI

摘要。我们证明，若 Auslander深度公式对维数 1 的 Cohen-Macaulay 局部环上的非零 Tor-独立模成立，那么它对任意 Cohen-Macaulay 局部环上的这类模也成立。更一般地，我们证明，对于深度为 1 的局部环上具有有限 Cohen-Macaulay 维数的非零 Tor-独立模，若深度公式成立，则该公式对任意正深度局部环上的这类模也成立。

假设所有环均为交换 Noether 局部环，所有模均为有限生成模。若一对 (M, N) 个 R-模满足 Auslander深度公式（或简称深度公式），则称

$$\operatorname{depth} M + \operatorname{depth} N = \operatorname{depth} R + \operatorname{depth} M \otimes_R N.$$

若 M和 N在 R上 Tor-独立，即对所有 $i \geqslant 1$.都有 $\operatorname{Tor}_i^R(M, N) = 0$，则称它们在 R上 Tor-独立

Auslander [2] 在假设 R-模 M 和N 相互 Tor-独立且 M 的投射维数有限的条件下，证明了深度公式。Huneke 和 Wiegand [12]证明，该公式对完全交局部环上的 Tor-独立模也成立。Araya 和 Yoshino [1], 以及 Iyengar [13]独立地将他们的结果推广到了任意局部环上的 Tor-独立模，此外还假设其中一个模具有有限的完全交维数。Gheibi、Jorgensen 和 Takahashi [11] 证明，对于其中一个模具有有限准投射维数的 Tor-独立模，深度公式成立。

更一般地，我们可以考察：若 (M, N) 是一对满足某种 Tor 消失条件的 R-模（绝对、相对或 Tate Tor，参见 Avramov 和 Martsinkovsky[6]），且其中一个或两个模具有有限同调维数，那么这对模 (M, N) 是否满足深度公式。关于这一问题，已有多种形式的结果——例如，参见 Bergh 和 Jorgensen[7], 、Celikbas、Liang 和 Sadeghi [8], ，以及 Christensen 和 Jorgensen [9], 。

在本文中，我们只讨论深度公式的“经典”版本，其中 Tor 消失条件针对绝对Tor。对于这种形式，即使在 Gorenstein局部环中，深度公式是否成立也仍然未知。最一般的结果似乎是 [9]，其证明了 AB-环上的深度公式。

在 [1, 例 2.9] 中，Araya 和 Yoshino 构造了 R-模 M 和 N，其中 R 是域 k上的 5 个变量的形式幂级数环，使得对于 $i \geqslant 2$，有 $\operatorname{pd}_R(N) = 1$和 $\operatorname{Tor}_i(M, N) = 0$，但 $\operatorname{depth} M + \operatorname{depth} N \neq \operatorname{depth} R + \operatorname{depth} M \otimes_R N.$。这表明 Tor独立条件不能放宽。

我们证明，

定理 1. 如果深度公式对维数 1 的 Cohen-Macaulay 局部环上的非零 Tor-独立模成立，那么它对任意 Cohen-Macaulay 局部环上的此类模也成立。

日期：2023年2月2日。2010年数学主题分类：13D07、13C14、13C15。关键词和短语：Auslander、深度公式、张量积。

这一结果是下面陈述的更一般结果的一个推论。

定理2. 若深度公式对深度为 1 的局部环上具有有限 Cohen-Macaulay 维数的非零 Tor-独立模成立，则该公式对任意正深度局部环上的此类模也成立。

注 1. 若假设底环为 Gorenstein 环，定理 1 的证明仍然成立。若将“Cohen-Macaulay 维数”替换为其他同调维数，例如 Gorenstein 维数 $\text{G-dim}_R(M)$、上 Gorenstein 维数 $\text{G}^*\text{-dim}_R(M)$、下完全交维数 $\text{CI}_*\text{-dim}_R(M)$，或任何满足某些标准性质的其他同调维数（见定理 3），定理 2 的证明仍然成立。我们以 Cohen-Macaulay 维数为例阐述主要思路，因为在上述列表中，它是最一般的同调维数（见定理 4）。

致谢。作者感谢 Jishnu Biswas 和 Suresh Nayak 提供有益的意见和建议。第一作者获得了 CSIR 高级研究奖学金的部分资助，资助编号为 09/1001(0097)/2021-EMR-I。第二作者获得了科学与工程研究委员会（SERB）项目 MTR/2020/000164 的部分资助。

1. 预备知识

全文中， R 表示一个局部环， $(R, \mathfrak{m}, k)$ 且所有 R-模均为有限生成。对于任意 R-模 W 和一个元素 $x \in \mathfrak{m}$，我们定义$\overline{W}_x := W \otimes_R R/xR$. 。当 x 的含义由上下文明确时，我们将简写为 $\overline{W}$.

我们假设 M 和 N 是具有如下极小自由分解的 R-模 s

$$\cdots \xrightarrow{f_3} P_2 \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0 \tag{1}$$

$$\cdots \xrightarrow{g_3} Q_2 \xrightarrow{g_2} Q_1 \xrightarrow{g_1} Q_0 \xrightarrow{g_0} N \to 0 \tag{2}$$

令 $\Omega_i(M)$ 为 M. 的第 i个叠次模。特别地， $\Omega_1(M) = \text{Ker}(P_0 \to M)$. 。令 $\Omega_i(N)$ 为 N.的第 i 个叠次模

对于任意 R-模 M，其可能具有若干种同调维数，例如投射维数 $\text{pd}_R(M)$、Gorenstein 维数 $\text{G-dim}_R(M)$ [3] 、完全交维数 $\text{CI-dim}_R(M)$ [5]、下完全交维数 $\text{CI}_*\text{-dim}_R(M)$ [10] 、上 Gorenstein 维数 $\text{G}^*\text{-dim}_R(M)$ [15] 或 Cohen-Macaulay 维数 $\text{CM-dim}_R(M)$[10]。这些同调维数具有一些共同性质，下面将对此进行总结。

定理 3。 [4, 定理 8。7]设 $M \neq 0$ 是一个 R-模。设 $\text{H-dim}_R(M)$ 是 M 的一种同调维数，其中 H-dim 可以是 G-dim、 CM-dim、 CI-dim、 CI_*-dim或 G^*-dim.

(a) 若 $\text{H-dim}_R(M) < \infty$，则 $\operatorname{depth} M + \text{H-dim}_R(M) = \operatorname{depth} R$. 特别地，$\text{H-dim}_R(M) \leqslant \operatorname{depth} R$.(b) $\text{H-dim}_R(\Omega_n(M)) = \max\{\text{H-dim}_R(M) - n, 0\}$.(c) 若 $x \in \mathfrak{m}$ 是 R 上的一个正则元素且 M，则 (a) $\text{H-dim}_R(\overline{M}) = \text{H-dim}_R(M) + 1$.(b) 若 $\text{H-dim}_R(M) < \infty$，则 $\text{H-dim}_{\overline{R}}(\overline{M}) = \text{H-dim}_R(M)$.

证明。 $\text{H} = \text{G}$ 的断言见 [3] （修正后的 (a) 的证明见 [14] ）。 $\text{H} = \text{CI}$、 G^*和 CM/CI_* 的证明分别见 [5], [15], 和 [10], 。□

注 2. 若 $\text{H-dim}_R(M)$、 $\text{H-dim}_R(N)$ 和 $\text{H-dim}_R(M\otimes_R N)$ 均为有限，则根据定理 3 (a)，我们也可以将深度公式表述为

$$\text{H-dim}_R(M)+\text{H-dim}_R(N)=\text{H-dim}_R(M\otimes N).$$

这些同调维数满足以下不等式

定理 4. [4, 定理 8.8] 根据上述记号，我们有

(1) $\text{CM-dim}_R(M)\leqslant \text{G-dim}_R(M)\leqslant \text{G}^*\text{-dim}_R(M)\leqslant \text{CI-dim}_R(M)$.(2) $\text{CM-dim}_R(M)\leqslant \text{G-dim}_R(M)\leqslant \text{CI}_*\text{-dim}_R(M)\leqslant \text{CI-dim}_R(M)$.

其中，任一点处的有限性都意味着其左侧的所有不等式均为等式。

证明。除 $\text{G}^*\text{-dim}_R(M)$ 的下界来自 [15], 以及 $\text{CI}_*\text{-dim}_R(M)$ 的上界来自 [5] 外，这些不等式均由相应维数的定义得出。□

1.1. Cohen-Macaulay 维数。为完整起见，我们讨论 Cohen-Macaulay 维数的定义，并请读者参阅 Gerko [10] 了解详情。

回顾一下， R-模 M的级数（记作 $\text{grade}(M)$）定义为满足 $\text{Ext}^i_R(M,R)\neq 0$的最小整数 i。容易看出， $\text{grade}(M)\leqslant \text{G-dim}_R(M)$. 。若 $\text{grade}(M)=\text{G-dim}_R(M)$, 则称 M 为 G-完美的。若理想 I 在 R 上满足 R/I 是一个 G-完美的 R-模，则称理想 I 在 R 上是 G-完美的。

定义 1. 环 R 的一个 G-quasi-deformation是一个局部同态图式$R\to R'\leftarrow Q$，其中 $R\to R'$ 是平坦扩张，且 $Q\to R'$ 是一个 G-deformation，也就是说，是一个核为 G-完美理想的满同态。

定义 2。 R-模 M 的 Cohen-Macaulay 维数定义为

$$\begin{aligned}\text{CM-dim}_R(M)=&\inf\{\text{G-dim}_Q(M\otimes_R R')-\text{G-dim}_Q(R'):\\ &R\to R'\leftarrow Q \text{ is a G-quasi-deformation}\}.\end{aligned}$$

Cohen-Macaulay 局部环的特征是具有有限 Cohen-Macaulay 维数的模类。这是下述更具体断言的一个形式推论。

定理 5。 [10, 定理 3。9] 对于任意局部环 R, 以下陈述等价：

(1) R 是 Cohen-Macaulay。（2） $\text{CM-dim}_R(M)<\infty$ for all R-modules M.（3） $\text{CM-dim}_R(k)<\infty$.

2. 主要结果的证明

考虑以下陈述：

P：设 R 是一个深度为 1 的局部环。若 (M,N) 是任意一对非零的 Tor-独立 R-模，且其 CM 维数有限，则 $\operatorname{depth}M+\operatorname{depth}N=\operatorname{depth}R+\operatorname{depth}M\otimes_R N$, 即这对 (M,N) 满足深度公式。

Q：设 R 是一个深度为 $\geqslant 1$. 的局部环。若 (M,N) 是任意一对非零的 Tor-独立R-模，且其 CM 维数有限，则 $\operatorname{depth}M+\operatorname{depth}N=\operatorname{depth}R+\operatorname{depth}M\otimes_R N$, 即这对 (M,N) 满足深度公式。

要证明定理2，只需证明 $P\implies Q$。为简便起见，我们将 P 分成关于深度为 1 的局部环的 3 个较简单的陈述：

- P0：不存在一对 (M,N) Tor-独立的 R模，其 CM 维数均有限，且 $\operatorname{depth}M=\operatorname{depth}N=0$.

• P1：如果 (M, N) 是一对 Tor-独立的 R模，且 CM 维数均为 0，那么 $\operatorname{depth} M \otimes_R N = 1$.

• P2：若 (M, N) 是一个 Tor-独立的 R-模对，其中 $\text{CM-dim}(M) = 0$，且 $\text{CM-dim}(N) = 1$，则 $\operatorname{depth} M \otimes_R N = 0$.

一个简单的论证（见注 3）表明 **P0** $\implies$ P2。因此，我们只假设 P0 和 P1。

P $\implies$ Q 的证明是归纳性的，作为中间步骤，我们将证明以下两个特殊情形。

• **P1** $\implies$ Q1，其中 Q1 的表述为：设 R 是一个正深度的局部环，且(M, N) 是一对 Tor-独立的 R-模，其维数均为 0。则

$$\operatorname{depth} R = \operatorname{depth} M \otimes_R N.$$

• **P1 + P2** $\implies$ Q2，其中 Q2 的表述为：设 R 是一个正深度的局部环，且 (M, N) 是一对非零的 Tor-独立 R-模，其中 $\text{CM-dim}(M) = 0$，且 $\text{CM-dim}(N) < \infty$. 。则

$$\operatorname{depth} N = \operatorname{depth} M \otimes_R N.$$

引理 6. 设 M 是一个具有正深度的 R-模。设 N 是任意一个 R-模，使得 $\operatorname{Tor}_1^R(M, N) = 0$.。那么 $\operatorname{depth} M \otimes N > 0$ 当且仅当 $\operatorname{Tor}_1^R(\overline{M}, N) = 0$，其中某个 x 是一个 M-正则元素。

证明。若 $\operatorname{depth} M \otimes N > 0$，我们可以找到一个在 M 上正则的 $x \in \mathfrak{m}$，并且 $M \otimes_R N$. 。将序列 $0 \to M \xrightarrow{x} M \to \overline{M} \to 0$ 与 N 张量起来，得到

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^R(\overline{M}, N) \to M \otimes N \xrightarrow{x} M \otimes N.$$

这证明了一个方向。反之，若 $\operatorname{Tor}_1^R(\overline{M}, N) = 0$，则上述序列表明 x 是 $M \otimes_R N$-正则的。
□

注 3. 我们证明 **P0** $\implies$ P2。设 (M, N) 是深度为 1 的局部环 R 上一对 Tor-独立的 R-模，且 $\text{CM-dim}(M) = 0$， $\text{CM-dim}(N) = 1$.。若 $\operatorname{depth} M \otimes N > 0$，则由引理 6，存在某个 x，它是 M-正则的，使得 $\operatorname{Tor}_1^R(\overline{M}, N) = 0$.。因此，$(\overline{M}, N)$ 是深度为 0 且具有有限 CM 维数的 Tor-独立 R-模（由定理 3），这与 P0 矛盾。

引理 7. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个具有正深度的局部环，且 M 和 N 是非零的 R-模。

(1) 若存在一个在 R 和 N 上正则的元素 $x \in \mathfrak{m}$，则有同构

$$\operatorname{Tor}_p^{\overline{R}}(\overline{M}, \overline{N}) \cong \operatorname{Tor}_p^R(\overline{M}, N), \quad p \geqslant 1.$$

(2) 若存在一个在 R 上正则的元素 $x \in \mathfrak{m}$，则存在一个长正合序列

$$\begin{aligned} \cdots \to \operatorname{Tor}_{p+1}^R(N, \overline{M}) \to \operatorname{Tor}_{p+1}^{\overline{R}}(\overline{N}, \overline{M}) \to \operatorname{Tor}_{p-1}^{\overline{R}}(\operatorname{Tor}_1^R(N, \overline{R}), \overline{M}) \\ \to \operatorname{Tor}_p^R(N, \overline{M}) \to \operatorname{Tor}_p^{\overline{R}}(\overline{N}, \overline{M}) \to \cdots. \end{aligned}$$

证明。存在一个谱序列 [16, 定理 5.6。6]

$$\operatorname{Tor}_p^{\overline{R}}(\operatorname{Tor}_q^R(N, \overline{R}), \overline{M}) \implies \operatorname{Tor}_{p+q}^R(N, \overline{M}).$$

(1) 根据我们的假设可得 $\mathrm{Tor}_q^R(N,\overline{R})=0$ 对于 $q\geqslant 1$. 因此，该谱序列在 $r=2$ 处退化为单行，从而得到所述的同构。
(2) 根据我们的假设可得，对于 $q\geqslant 2.$，有 $\mathrm{Tor}_q^R(N,\overline{R})=0$。因此，谱序列在 $r=2$ 处退化为第 $q=0$、1 行，从而得到所述的长正合序列。

□

推论 8. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是一个正深度局部环，且 M 和 N 是非零的 Tor-独立 R-模。

(1) 若存在一个在 R、M 和 N 上正则的元素 $x\in\mathfrak{m}$，则

$$\mathrm{Tor}_p^{\overline{R}}(\overline{M},\overline{N})=0,\ p\geqslant 2,$$
$$\mathrm{Tor}_1^{\overline{R}}(\overline{M},\overline{N})\cong\mathrm{Tor}_1^R(\overline{M},N).$$

(2) 若存在一个在 R 和 M 上正则的元素 $x\in\mathfrak{m}$，则有一个正合列

$$0\to\mathrm{Tor}_2^{\overline{R}}(\overline{N},\overline{M})\to\mathrm{Tor}_1^R(N,\overline{R})\otimes\overline{M}\to\mathrm{Tor}_1^R(N,\overline{M})\to\mathrm{Tor}_1^{\overline{R}}(\overline{N},\overline{M})\to 0$$

以及同构

$$\mathrm{Tor}_p^{\overline{R}}(\overline{N},\overline{M})\cong\mathrm{Tor}_{p-2}^{\overline{R}}(\mathrm{Tor}_1^R(N,\overline{R}),\overline{M}),\ p\geqslant 3.$$

证明。两个结论均由 $\mathrm{Tor}_p^R(\overline{M},N)$ 对 $p\geqslant 2.$ 的消失得到 □

引理 9。设 M 和 N 是 Tor-独立的 R-模，且 $x\in\mathfrak{m}$ 是在 R、M、N 和 $M\otimes_R N.$ 上正则的元素。那么 $\overline{M}$ 和 $\overline{N}$ 在 $R.$ 上是 Tor-独立的

证明。由引理 6，并将 $0\to M\xrightarrow{x}M\to\overline{M}\to 0$ 与 N 张量，可得 $\overline{M}$ 和 N 在 $R.$ 上是 Tor-独立的。应用推论 8 即完成证明。

□

引理 10。若存在一个在 R、M、N 和 $M\otimes_R N.$ 上正则的元素 $x\in\mathfrak{m}$，则以下条件等价

(1) M 和 N 是 Tor-独立的 R-模，且具有 $\operatorname{depth}M=e$、$\operatorname{depth}N=f$ 和 $\operatorname{depth}M\otimes_R N=g$.(2) M 和 N 是 Tor-独立的 R-模，且具有 $\operatorname{depth}\overline{M}=e-1$、$\operatorname{depth}\overline{N}=f-1$ 和 $\operatorname{depth}\overline{M}\otimes_{\overline{R}}\overline{N}=g-1.$

证明。 $1\implies 2$ 由引理 9 得出。对于逆向蕴含，关于深度的结论显然。由引理 7，$\mathrm{Tor}_p^R(\overline{M},N)=0$ 对所有 $p\geqslant 1.$ 成立。因此，根据中山引理，M 且 N 是 Tor-独立的。□

为方便记号，在引理 11 的证明和 **P1** $\implies$ Q1 的证明中，我们使用下标 d（例如 M_d 或 N_d）表示深度为 d 的环 R_d 上的模。

引理 11. 设 R_d 是深度为 $d\geqslant 1.$ 的局部环。设 (M_d,N_d) 是由 $\text{CM-dim}(M_d)=\text{CM-dim}(N_d)=0.$ 组成的一对 Tor-独立的 R_d-模。那么

$$\mathbf{P1}\implies\operatorname{depth}M_d\otimes_{R_d}N_d>0.$$

证明。由 P1 可知，我们不妨假设 $d\geqslant 2.$ 令 $\Omega_i(M_d)$ 为由极小自由分解定义的 M_d 的第 i 个叠次模

$$\cdots\to P_{i,d}\to\cdots\to P_{1,d}\to P_{0,d}\to M_d\to 0.$$

显然， $\operatorname{depth}\Omega_i(M_d)\otimes_{R_d}N_d \geqslant i$ 对于 $i\in\{1,2,\cdots,d\}$. 我们研究这一对 $(\Omega_{d-1}(M_d),N_d)$ Tor-独立的 R_d-模（见定理 3）

$$\text{CM-dim}(\Omega_{d-1}(M_d))=\text{CM-dim}(N_d)=0$$

且 $\operatorname{depth}\Omega_{d-1}(M_d)\otimes_{R_d}N_d\geqslant d-1\geqslant 1$. 设 $x_d\in\mathfrak{m}$ 是有限个 R_d 模 $\{R_d,M_d,N_d,\Omega_i(M_d),\{\Omega_i(M_d)\otimes_{R_d}N_d\}_{i\in\{1,2,\cdots,d-1\}}\}$. 上的非零因子。对于任意R-模 T_d，定义 $T_{d-1}:=T_d/x_dT_d$.。由此，根据定理 3， R_{d-1}-模 M_{d-1}、 N_{d-1}和 $\{\Omega_i(M_{d-1})\}_{i\in\{1,2,\cdots,d-1\}}$ 的 Cohen-Macaulay 维数均为零。根据引理 10,

$$\operatorname{depth}\Omega_{d-1}(M_{d-1})\otimes_{R_{d-1}}N_{d-1}\geqslant d-2.$$

以此类推，对后续的每一对 $(\Omega_{d-1}(M_i),N_i)$，反复应用引理 10 于 $i\in\{d-1,d-2,\cdots,1\}$，我们得出，$(\Omega_{d-1}(M_1),N_1)$ 这一对 R_1-模是 Tor-独立的，且 Cohen-Macaulay 维数为零，其中 $\operatorname{depth}R_1=1$.

由 P1， $\operatorname{depth}\Omega_{d-1}(M_1)\otimes_{R_1}N_1=1$. 向上推导，对 $(\Omega_{d-1}(M_i),N_i)$ 应用引理 10 的逆命题，可得 $\operatorname{depth}\Omega_{d-1}(M_d)\otimes_{R_d}N_d=d$. 正合列

$$0\to\Omega_{d-1}(M_d)\otimes_{R_d}N_d\to P_{d-1,\,d}\otimes_{R_d}N_d\to\cdots\to P_{0,\,d}\otimes_{R_d}N_d\to M_d\otimes_{R_d}N_d\to 0,$$

表明 $\operatorname{depth}M_d\otimes_{R_d}N_d>0$.

□

P1 $\Longrightarrow$ Q1 的证明。不失一般性，我们可以假设 $d=\operatorname{depth}R_d\geqslant 2$.。应用引理 11，可得 $\operatorname{depth}M_d\otimes_{R_d}N_d$ 为正。因此，由引理 10 可知，M_{d-1}、 N_{d-1} 是 Tor-独立的 R_{d-1}-模，且 Cohen-Macaulay 维数为零。对 R_{d-1}-模对 (M_{d-1},N_{d-1}) 应用引理 11，可得 $\operatorname{depth}M_{d-1}\otimes_{R_{d-1}}N_{d-1}$ 为正。继续如此推导，可得 (M_1,N_1) 是一对 Tor-独立的 R_1-模，其 Cohen-Macaulay 维数为零，且满足 $\operatorname{depth}M_1\otimes_{R_1}N_1=1$，其中 $\operatorname{depth}R_1=1$.。应用引理 10 的逆命题，逐步向上推导，可得 $\operatorname{depth}M_d\otimes_{R_d}N_d=d$. □

P1 + P2 $\Longrightarrow$ Q2 的证明。根据假设 $\text{CM-dim}(M)=0$. 我们对 N. 的深度作递减归纳。由于 $\text{CM-dim}(N)<\infty$ 因此，根据定理 3， $\operatorname{depth}N\leqslant\operatorname{depth}R$. 若 $\operatorname{depth}N=\operatorname{depth}R$，则由上文已证明的 Q1 可知结论成立，因为此时 M 和 N 都将是 Cohen-Macaulay 维数为零的模。假设 $\operatorname{depth}N<\operatorname{depth}R$.令 $\Omega_1(N)$ 为 N 的第一叠次模，令 $0\to\Omega_1(N)\to Q_0\to N\to 0$ 为相应的正合列，其中 Q_0 是一个自由的 R-模。与 M张量，得到

$$0\to M\otimes\Omega_1(N)\to M\otimes Q_0\to M\otimes N\to 0.$$

由于 M 和 $\Omega_1(N)$ 是 Tor-独立的，且 $\operatorname{depth}\Omega_1(N)=\operatorname{depth}N+1$，根据归纳假设，数对 $(M,\Omega_1(N))$ 满足深度公式。有两种可能：

(1) $\operatorname{depth}M\otimes N<\operatorname{depth}M\otimes Q_0=\operatorname{depth}R=d$. 那么必有 $\operatorname{depth}M\otimes N=\operatorname{depth}M\otimes\Omega_1(N)-1$，结论得证。(2) $\operatorname{depth}M\otimes N\geqslant\operatorname{depth}M\otimes Q_0=d$. 那么必有 $\operatorname{depth}M\otimes\Omega_1(N)\geqslant d$.因此，根据归纳假设，

$$\begin{aligned}d>&\operatorname{depth}N=\operatorname{depth}\Omega_1(N)-1\\=&\operatorname{depth}M\otimes\Omega_1(N)+\operatorname{depth}R-\operatorname{depth}M-1\geqslant d-1.\end{aligned}$$

若 $d\geqslant 2$，反复应用引理 10 后，我们可以假设 $\operatorname{depth}M=\operatorname{depth}M\otimes N=\operatorname{depth}R=1$ 且 $\operatorname{depth}N=0$. 这与假设 P2 矛盾。

□

引理 12. 设 M 和 N 是 R-模，且满足 $\mathrm{Tor}_1^R(M,N)=0$. 则以下两种情况之一成立

(1) $\operatorname{depth} M \leqslant \operatorname{depth} M\otimes N$.(2)
$\operatorname{depth} M\otimes \Omega_1(N)=\operatorname{depth} M\otimes N+1$.

证明。假设 $\operatorname{depth} M > \operatorname{depth} M\otimes N$. 将正合列 (2) 与M张量，并利用 Tor 的消失性，可得短正合列 $0\to M\otimes\Omega_1(N)\to M\otimes Q_0\to M\otimes N\to 0$. 根据深度引理，$\operatorname{depth} M\otimes\Omega_1(N)=\operatorname{depth} M\otimes N+1$ 从而完成证明。□

定理 13。设 R 为一个具有正深度的局部环。设 M 和 N 为 Tor-独立的 R-模，使得 $\text{CM-dim}_R M$ 和 $\text{CM-dim}_R N$ 有限。假设命题 P 成立。那么

$$\operatorname{depth} R+\operatorname{depth} M\otimes N\geqslant \operatorname{depth} M+\operatorname{depth} N.$$

证明。我们对 $\operatorname{depth} N$. 进行递减归纳。如果 M 或 N 的 Cohen-Macaulay 维数为零，则由 Q2 可得该等式成立，而 Q2 已经证明。因此，不失一般性，我们可以假设 $\max\{\operatorname{depth} M,\operatorname{depth} N\}<\operatorname{depth} R$. 考虑以下序列

$$0\to\Omega_1(N)\to Q_0\to N\to 0.$$

由深度引理 $\operatorname{depth}\Omega_1(N)=\operatorname{depth} N+1$. 此外， M和 $\Omega_1(N)$ 是非零的 Tor-独立 R-模。归纳地，数对 $(M,\Omega_1(N))$ 满足上述不等式。若$\operatorname{depth} M > \operatorname{depth} M\otimes N$，则由引理 12，$\operatorname{depth} M\otimes\Omega_1(N)=\operatorname{depth} M\otimes N+1$，因此数对 (M,N) 也满足该不等式。

若 $\operatorname{depth} M\leqslant\operatorname{depth} M\otimes N$，则利用 $\operatorname{depth} N<\operatorname{depth} R$这一事实，可得严格不等式

$$\operatorname{depth} M\otimes N+\operatorname{depth} R>\operatorname{depth} M+\operatorname{depth} N.$$

因此，无论哪种情况，不等式都成立。

□

推论 14. 设 R 是一个正深度局部环。设 M 和 N 是 Tor-独立的 R-模，且满足 $\operatorname{depth} R>\max\{\operatorname{depth} M,\operatorname{depth} N\}$. 那么存在一个元素 x，它在 R 和 R-模 X 上是正则的，并且存在 Y，使得它们是 Tor-独立的，且满足 $\operatorname{depth} M=\operatorname{depth} X$ 和 $\operatorname{depth} N=\operatorname{depth} Y$.

证明。我们选取一个在 R、$\Omega_1(M)$ 和 $\Omega_1(N)$. 上正则的元素 x 。定义 X =、$\Omega_1(M)$ 和 $Y=\overline{\Omega_1(N)}$. 。由于 $\overline{\operatorname{depth}}\,\Omega_1(M)\otimes\Omega_1(N)>0$，我们可以对 Tor-独立对 $(\Omega_1(M),\Omega_1(N))$ 应用引理 10，从而得出 (X,Y) 与 $\operatorname{depth} X=\operatorname{depth} M$ 和 $\operatorname{depth} Y=\operatorname{depth} N$. □是 Tor-独立的。

引理 15。假设 P0 成立。设 R 是一个正深度局部环。设 M、 N 是深度为 0 R 且 Cohen-Macaulay 维数有限的模。那么 M、 N 不具 Tor-独立性。

证明。反复应用推论 14 和定理 3 后，我们将问题归约到情形 $\operatorname{depth} R=1$，而这与 P0 矛盾。□

引理 16. 假设 P 成立。设 R 是正深度的局部环。设 M 和 N 是 Tor-独立的 R-模，且具有有限的 Cohen-Macaulay 维数。那么

$$\operatorname{depth} M+\operatorname{depth} N-\operatorname{depth} R\geqslant 0.$$

证明。我们对 $\operatorname{depth} R$. 进行归纳。当 $\operatorname{depth} R = 1$. 时，所述不等式由 P 成立。由于 P $\implies$ Q2，当 $\operatorname{depth} R = \max\{\operatorname{depth} M, \operatorname{depth} N\}$. 时，不等式成立。因此，不失一般性，我们可以假设 $\operatorname{depth} R > \operatorname{depth} M \geqslant \operatorname{depth} N$. 。根据引理 15，我们还可以假设 $\operatorname{depth} M > 0$. 。于是 M 和 $\Omega_1(N)$ 是具有正深度的 Tor-独立 R-模。包含关系 $M \otimes \Omega_1(N) \subset M \otimes Q_0$ 表明 $\operatorname{depth} M \otimes \Omega_1(N)$ 为正。设 x 是一个在 R、M、$\Omega_1(N)$ 和 $M \otimes \Omega_1(N)$. 上正则的元素。根据引理 9，~~$\overline{M}$ 和 $\Omega_1(N)$~~ 是 Tor-独立的 ~~R~~-模。模掉 x 后，得到

$$\begin{aligned}\operatorname{depth} \overline{M} + \operatorname{depth} \overline{\Omega_1(N)} - \operatorname{depth} \overline{R} =& \operatorname{depth} \overline{M} + \operatorname{depth} N - \operatorname{depth} R + 1 \\ =& \operatorname{depth} M + \operatorname{depth} N - \operatorname{depth} R < 0.\end{aligned}$$

这与归纳假设矛盾。 □

定理2的证明。设 $d \geqslant 2$ 是存在反例的最小整数，其中反例定义在一个深度为 d 的环 R. 上。由 Q2 可知，我们可以假设 $\operatorname{depth} R > \max\{\operatorname{depth} M, \operatorname{depth} N\}$. 。若定理 13 中的不等式严格成立，则由引理 16 可得

$$\operatorname{depth} M \otimes N > \operatorname{depth} M + \operatorname{depth} N - \operatorname{depth} R \geqslant 0.$$

由引理 10，我们可以降低深度，从而得到一个深度更低的反例，这与 d. 的极小性矛盾。

□

定理 1 的证明。维数为 0 的情形显然。对于更高维数的情形，我们利用定理 5 证明所涉及的模的 Cohen-Macaulay 维数有限，然后应用定理 2。□

参考文献

[1] Araya, Tokuji；Yoshino, Yuji. 关于深度公式、级不等式及 Auslander 猜想的评注。《通信代数》26 (1998)，第 11 期，3793–3806。[2] Auslander, Maurice. 非分歧正则局部环上的模。《伊利诺伊数学杂志》5 (1961)，631–647。[3] Auslander, Maurice；Bridger, Mark. 稳定模理论。美国数学会回忆录，第 94 号，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（1969），146 页。[4] Avramov, Luchezar L. 局部环上模的同调维数及相关不变量。《代数表示论》，第 I、II 卷，1–39，北京师范大学出版社，北京，2002。[5] Avramov, Luchezar L.；Gasharov, Vesselin N.；Peeva, Irena V. 完全交维数。高等科学研究所数学出版物第 86 号（1997），67–114（1998）。´高等科学研究所数学出版物第 86 号（1997），67–114（1998）。[6] Avramov, Luchezar L.；Martsinkovsky, Alex. 有限 Gorenstein 维数模的绝对、相对与 Tate 上同调。《伦敦数学会会刊》（第 3 辑）85 (2002)，第 2 期，393–440。[7] Bergh, Petter Andreas；Jorgensen, David A. 具有可约复杂度的模的深度公式。《伊利诺伊数学杂志》55 (2011)，第 2 期，465–478（2012）。[8] Celikbas, Olgur；Liang, Li；Sadeghi, Arash. 相对同调的消失与张量积的深度。《代数杂志》478 (2017)，382–396。[9] Christensen, Lars Winther；Jorgensen, David A. 局部环上 Tate 同调的消失与深度公式。《纯粹与应用代数杂志》219 (2015)，第 3 期，464–481。[10] Gerko, A. A. 关于同调维数。（俄文）；译自《数学文集》192 (2001)，第 8 期，79–94。《数学文集》192 (2001)，第 7–8 期，1165–1179。[11] Gheibi, Mohsen；Jorgensen, David A.；Takahashi, Ryo. 准投射维数。《太平洋数学杂志》312 (2021)，第 1 期，113–147。[12] Huneke, Craig；Wiegand, Roger. 模的张量积与 Tor 刚性。《数学年刊》299 (1994)，第 3 期，449–476。[13] Iyengar, S. 复形的深度与交叉定理。《数学杂志》230 (1999)，第 3 期，545–567。[14] Mas˙ek, Vladimir. 交换诺特环上模的 Gorenstein 维数与挠。Robin Hartshorne 荣誉专辑。《通信代数》28 (2000)，第 12 期，5783–5811。

[15] Veliche, Oana. 有限同调维数模的构造。《代数杂志》250 (2002)，第 2 期，427–449。[16] Weibel, Charles A. 同调代数导论。剑桥高等数学研究丛书，第 38 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1994。数学系，印度理工学院海得拉巴分校，502285，印度。电子邮箱：ma20resch11005@iith.ac.in 数学系，印度理工学院海得拉巴分校，502285，印度。电子邮箱：amittr@gmail.com