arXiv:2302.00050v1 [math.GN] 31 Jan 2023

拓扑学中的小性

Jiˇr´ı Ad´amek*、Miroslav Huˇsek、Jiˇr´ı Rosick´y*、
Walter Tholen†谨以此文纪念我们的朋友 Horst Herrlich

摘要

Quillen 的小对象概念，以及 Gabriel-Ulmer 的有限可表示对象或有限生成对象概念，是同伦论和范畴代数中的基本概念。这些概念是否总是会在空间范畴中导出相当无趣的对象类，例如所有有限离散空间，或仅仅是空空间，正如现有文献中的例子和评论可能暗示的那样?

本文表明，在许多熟悉的空间范畴中，对这些概念（以及由此产生的一些自然变体）建立完整刻画可能颇具挑战性，并且可能带来意想不到的惊喜。事实上，我们展示了这一点在由标准分离公理定义的范畴之间甚至存在显著差异，其中 T_1-分离条件尤为突出。关于这些特定范畴的研究结果，在我们考察所有拓扑空间所成范畴的相当任意的全反射子范畴时，也为我们提供了新的洞见。

关键词：有限可表示对象、有限生成对象、有限小对象、有向余极限、豪斯多夫空间、T_0-空间、T_1-空间、紧空间。

数学主题分类：54B99、18B30、54D10。

*第一位和第三位作者感谢捷克共和国资助机构通过资助项目 22-02964S 提供的支持。

†第四位作者感谢加拿大自然科学与工程研究委员会通过探索基金计划提供的部分经费资助，项目编号为 501260。

1 引言

范畴中的小对象 $\mathcal{C}$ 由 Quillen[22]在同伦论中引入。给定一类 $\mathcal{M}$ 态射，若对象 X 相对于 $\mathcal{M}$是有限小（亦称 $\aleph_0$-小）的，则其同态函子 $\mathcal{C}(X, –) : \mathcal{C} \to$ 集合范畴保持从 $\mathcal{M}$出发的态射连续链的余极限。连续性是指，该链 D 由极限序数 α （所有序数$i < \alpha$构成的线性有序集）索引，并且对于每个极限序数 $j < \alpha$ ，链的第 j 步由所有 $i < j$索引的子链的余极限给出；换句话说，给定的函子 $D : \alpha \to \mathcal{C}$ 保持余极限。更一般地，若同态函子保持共尾度至少为 λ的所有序数所对应的上述余极限，则称 X 相对于 $\mathcal{M}$是 λ-小。

不久之后，Gabriel 和 Ulmer [10]引入了有限可表示对象和有限生成对象的概念：分别要求同态函子保留所有有向余极限，或所有单态射的有向余极限。一般而言，有向余极限可以化归为连续链的余极限，见定理 3.1。因此，当 $\mathcal{M}$ 由所有态射组成时，有限可表示对象恰好就是有限小对象。对于其他类 $\mathcal{M}$，情况如何？本文研究拓扑空间范畴 Top 及其子范畴中的（有限）小性，例如豪斯多夫空间范畴 Haus、T_1-空间范畴 Top_1 和 T_0-空间范畴 Top_0 。于是，有限生成空间或有限小空间的概念从根本上取决于所讨论的范畴。

除了由所有单态射（单射连续映射）组成的类 $\mathcal{M}$ ，我们还考虑由所有子空间嵌入以及所有开嵌入组成的类。在一般范畴中，若对象的同态函子保留连接映射属于 $\mathcal{M}$ 的有向图表的余极限，我们就称该对象相对于 $\mathcal{M}$ 是有限生成的。

我们将看到，除一个令人意外的例外之外，对于几乎所有结果，使用有向余极限与使用连续链的余极限并无区别。事实上，如果 $\mathcal{M}$ 由所有单态射或所有开嵌入组成，那么有向余极限总能化归为链的余极限（推论 3.3）。因此，对于我们研究的这些类，有限小性可能不同于有限生成的唯一情形，就是嵌入。

我们还研究了 Top 的全子范畴，尤其是其中一些重要的反射子范畴；Horst Herrlich 在其早期的里程碑式专著中曾从范畴论角度对这些子范畴进行了介绍 [12]。我们刻画了它们的有限生成对象和有限小对象。第 7 节和第 8 节讨论了

相当一般的全子范畴，而我们首先将重点放在 Haus、Top_1 和 Top_0 上。下面更详细地介绍这些结果。

1.1 小拓扑空间

众所周知，拓扑空间范畴 Top 中的有限生成对象恰好是有限离散空间，而且它们甚至都是有限可表示的。Gabriel 和 Ulmer 的原始证明 [10],6.4 存在一个缺陷——这是本文作者所知的，他们那部专著中唯一的数学错误。不过，幸运的是，正如我们在第 2 节中详细展示的那样，他们的论证可以加以修正，从而得到正确的证明，同时又不损害原作的优雅性和一般性。

一种看似合理、但已知有误的论证简化版本，曾作为例 1.2(10) 出现在 [3] 一书中。此外，Hovey 的专著 [15]，在第 2.4 节开头给出的论证，旨在证明一个范围窄得多的论断——非离散二点空间不是有限可表示的——也已知有误；参见 nLab 中的相关条目 [19] 以及讨论博客 [18]。

我们证明，关于开嵌入的有限生成对象恰好是紧致空间，而关于嵌入的有限可表示对象恰好是有限空间（定理 3.8）。

在 Top 中，对于上述所有结果，使用连续链或有向图表并无区别。

1.2 小 Hausdorff 空间和 Tychonoff 空间

我们来考察 Haus 和 Tych 中的小性，它们分别是 Top 中由豪斯多夫空间和蒂科诺夫空间构成的全子范畴。Herrlich 的例子 [14] 极有助益：其中，一个非 Hausdorff 空间是一个 ω-链的闭 Tychonoff 子空间的并集。这个例子构思精妙，风格简约，正是 Herrlich 许多作品的典型特点；我们将在 4.1 和 4.2 中给出该例的详细证明。借助这个例子，我们可以得出结论：在 Haus 和 Tych 中，关于闭嵌入有限生成的对象只有空空间（推论 3.15）。相比之下，关于开嵌入有限生成的对象仍然是紧空间（推论 3.9）。

1.3 小 T_1-空间

论及小性，范畴 $\mathbf{Top}_1$ 是我们所考察的 Top 全子范畴中最丰富多彩的一个。一方面，没有非空空间是有限可表示的（定理 3.15）。为证明这一点，我们给出一个单位区间商空间的有向族，其在 Top 中的余极限是一个两点不可分空间。（Dugundji [7], 在第 422 页给出了一个此类的更复杂例子。）

另一方面，$\mathbf{Top}_1$ 的有限生成对象是有限（因而离散）空间（定理 6.2），而相对于开嵌入而言，有限生成空间恰好就是紧空间（推论 3.9）。在这四个结果中，有向余极限再次发挥着与连续链的余极限相同的作用。

相比之下，对于所有嵌入这一类 $\mathcal{M}$，我们得到两个不同的小性结果（见定理 6.4）：范畴 $\mathbf{Top}_1$ 中的空间

(1) 相对于嵌入而言是有限生成的，当且仅当它是有限的。

(2) 相对于嵌入而言是有限小的，当且仅当它是可数且紧致的。

这使 $\mathbf{Top}_1$ 成为前面提到的唯一例外。

1.4 小 T_0 空间

事实证明，在分离条件较弱的空间范畴中，（按我们所考虑的变体定义的）有限可表示对象和有限生成对象的刻画并没有变得更容易。在 5.2 节中，我们给出了一个 T_0 空间之间的 ω-单态射链的例子，其在 Top 中的余极限却包含一个两点不可分子空间。利用这个例子，我们可以证明，空空间是 $\mathbf{Top}_0$ 中唯一的有限生成对象（定理 5.3）。

我们还证明，有限 T_0 空间恰好是关于嵌入而言有限生成的对象。证明并不容易，其中实质性地用到了拉姆齐定理。

下面简要概述本文证明的主要结果：

cat.	有限保持	有限生成	有限生成嵌入	有限小嵌入	有限生成开嵌入
Top	有限离散	有限离散	有限	有限	紧致
Top_0	空	空	有限	有限	紧致
Top_1	空	有限离散	有限离散	可数且完备	紧致
Haus	空	空	空	空	紧致

2 修正后的 Gabriel-Ulmer 证明

现在，我们详细证明：有限可表示（或有限生成）的拓扑空间恰好是有限离散空间。在下一节中，我们将证明，关于嵌入，所有有限拓扑空间都是有限生成的。下面回顾相关定义。有向偏序集是指所有有限子集都有上界的偏序集。

定义 2.1 (1) 范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 X 是有限可表示的，当且仅当其同态函子保持有向余极限。具体而言：设 $D=(Z_i)_{i\in I}$ 是一个有向图表（由有向偏序集 I 索引），其余极限为 $c_i\colon Z_i\to Z$ 属于 $\mathcal{C}$。那么每个态射 $f\colon X\to Z$ 都能通过某个 c_i 本质上唯一地分解，其中 $i\in I$：

(i) 存在一个态射 $g\colon X\to Z_i$，使得 $f=c_i\cdot g$；并且

(ii) 如果 $g'\colon X\to Z_i$ 也满足 $f=c_i\cdot g'$，那么存在某个连接态射 $z_{i,j}\colon Z_i\to Z_j$，使得 g 与 g' 合并。

(2) 如果上述条件仅要求对单态射的有向图表成立，也就是说，对那些 D 的连接态射都是单态的图表成立，那么对象 X 就称为有限生成的。

(3) 给定一类单态射 $\mathcal{M}$，如果上述条件只要求对来自 $\mathcal{M}$ 的单态射有向图表成立（或只要求对来自 $\mathcal{M}$ 的单态射连续链成立），则称 X 关于 $\mathcal{M}$ 有限生成（或关于 $\mathcal{M}$ 有限小）。

注 2.2 条件 (ii) 可以加强如下：

(iii) 对于每个 $k\geq i$ 以及任意一对满足 $f=c_k\cdot h=c_k\cdot h'$ 的态射 $h,h'\colon X\to Z_k$，都存在某个连接态射 $z_{k,j}\colon Z_k\to Z_j$，将 h 和 h' 合并。

事实上，以 k 的上集为指标的 D 的有向子图 D_k，其余极限 Z 与所有满足 $l \geq k$ 的 c_l 的余极限余锥具有相同的余极限。对于每个 l，我们有 $c_l = c_k \cdot z_{k,l}$，由此可得等式

$$c_l \cdot (z_{k,l} \cdot h) = c_l \cdot (z_{k,l} \cdot h').$$

将 (i) 和 (ii) 应用于 D_k，我们得出存在 $l \geq k$，使得最后一个等式意味着某个连接态射 $z_{l,j}$ 将 $z_{k,l} \cdot h$ 与 $z_{k,l} \cdot h'$合并。所需的连接映射为 $z_{k,j}$：由于 $z_{k,j} = z_{l,j} \cdot z_{k,l}$，我们得到

$$z_{k,j} \cdot h = z_{l,j} \cdot z_{k,l} \cdot h = z_{l,j} \cdot z_{k,l} \cdot h' = z_{k,j} \cdot h'.$$

命题 2.3 拓扑空间范畴 Top 中的有限生成空间恰好是有限离散空间，并且它们都是有限可表示的。

证明 显然，若 $X \in$ Top 是有限离散的，则 X 是有限可表示的。事实上，给定映射 $f\colon X \to Z \cong$ 到有向系统 Z_i 中空间的余极限 ${}_{i\in I}Z_i$，有限多个元素 $f(x)$ $x \in X$ 均属于某个 $i \in I$ 的 $Z_i \to Z$ 的像，因此也属于某个共同的 $i \in I$ 的像。由此得到的 f 经由 Z_i 的分解，在集合层面上已经本质唯一。

同样显而易见，有限生成空间 X 必定是有限的，理由如下。对于由其有限子集 E（视为不可分空间）组成、并由包含映射连接的滤过系统，其在 Top 中的余极限 Z 可以取为与空间 X 具有相同的底集，但其开集是所有满足以下条件的 $V \subseteq X$：对于每个有限子集 $E \subseteq X$，$V \cap E = \emptyset$ 或 $E \subseteq V$。然而，对于任意非空真子集 $W \subseteq X$，都可以找到一个二点集合 $D \subseteq X$，使得 $W \cap D \neq \emptyset$ 且 $D \nsubseteq W$，因此 Z 的拓扑是不可分拓扑。这使恒等映射 $X \to Z$ 连续，从而可通过 X 的某个有限子集分解。

较不显然的是，为了证明 X 必为离散的，假设我们有 X中的一个非开子集 S。对于自然数的有序集 ω 以及每个有限子集 $F \subseteq \omega$，我们构造拓扑空间 Y_F；其底集是不交并 $X + \omega$，除了 $\emptyset$ 和 $X + \omega$之外，其开集是 $X + \omega$ 的那些子集 U：它们与 X 恰好交于 S，并且与 ω 交于 ω 中某个非空的尾段，该尾段与 F不交；也就是说：

1. $U \cap X = S$, 2. $U \cap F = \emptyset$, 3. $U \cap \omega = \{n \in \omega \mid n \geq m\}$ for some $m \in \omega$.

这在 $X+\omega$上定义了一种拓扑，并且如上所述，余极限$Y=\operatorname{colim}_F Y_F$的底集可取为 $X+\omega$，并赋予不可分拓扑；事实上，为了对所有 F满足条件 2， Y 中的一个非平凡开集 U 必须包含于 X，这与条件 3 矛盾。因此，恒等映射 $X \to Y$ 是连续的，但它无法连续地经过任何空间 Y_F进行分解，因为 Y_F 包含一个形如 $S+\{n \mid n \geq m\}$的开集，而该开集与 X 的交集不是开集——这就产生了矛盾。□

注 2.4 上述证明中非平凡的部分遵循了 [10], 第 65 页给出的论证，但存在一个重要差异：当我们将 Gabriel-Ulmer 证明转写到上述背景和记号中时，它遗漏了 Y_F中非平凡开集所需的条件 3。然而，这一遗漏会使集合 S 在每个空间 Y_F 中都成为开集，从而也会在它们的余极限 Y中成为开集，进而使论证的其余部分崩溃。

在该命题的证明中，现在将可数集 ω 替换为任意无限正则基数 λ，并赋予其作为序数的序；同时将“有限”理解为“基数小于 λ”。于是证明仍然成立，并且我们确实验证了原 Gabriel-Ulmer 断言：

定理 2.5 对于每个无限正则基数 λ，Top 中的 λ-生成对象恰好是基数小于 λ的离散空间，并且它们都是 λ-可呈示的。

3 拓扑空间范畴中的小性

我们刻画拓扑空间范畴 Top 中对象相对于嵌入和开嵌入的小性。我们还介绍了关于 Top 的全子范畴的一些结果。

我们先来看一个定理，它表明在每个具有有向余极限的范畴 $\mathcal{C}$ 中，有向余极限和连续链往往具有同等的“强度”。

设 $\mathcal{M}$ 是一个包含所有同构且对复合封闭的态射类。那么 $\mathcal{M}$ 可以视为 $\mathcal{C}$ 的一个通常非满的子范畴，并且具有相同的对象。称子范畴 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{C}$ 中对有向余极限封闭，是指对于每个有向图表 $D=(Z_i)_{i\in I}$，若其所有连接态射都属于 $\mathcal{M}$，则 $\mathcal{C}$ 中的余极限余锥$c_i: Z_i \to \operatorname{colim} D$ $(i \in I)$具有以下性质。

(1) 所有态射 c_i 都属于 $\mathcal{M}$。

(2) 对于范畴 $\mathcal{M}$ 中任意由态射组成的余锥 $f_i: Z_i \to A(i \in I)$，唯一的分解态射 colim $D \to A$ 也属于 $\mathcal{M}$。

对于 $\mathcal{M}$ 在连续链的余极限下闭，也可作类似论证。

定理 3.1 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有向余极限的范畴， $\mathcal{M}$ 是一个在复合下闭且包含所有同构的态射类。那么，如果 $\mathcal{M}$ 在连续链的余极限下闭， $\mathcal{M}$ 在所有有向余极限下闭。

证明 根据 [3], 引理 1.6，对于每个基数为 λ 的有向偏序集，都存在一个由有向子偏序集组成的连续链 $I_k \subseteq I$ （对于 $k < \lambda$），其基数为 $|I_k| < \lambda$，且其并集是整个 I; 连续性是指，对于每个极限序数 $k < \lambda$，偏序集 I_k 是所有满足 $j < k$ 的 I_j 的并集。

给定一个由范畴 $\mathcal{M}$ 中的态射组成的有向图表 D，其余极限为 $c_i : Z_i \to Z$ $(i \in I)$，我们证明上述性质 (1) 和 (2)。我们对 I 的基数 λ 作归纳。

如果 I 是有限的，那么 I 有最大元，因此该命题显然成立。

否则，假设该命题对基数小于 λ 的所有图表都成立，我们来证明它对 D 也成立。设 $I_k \subseteq I$ 是如上所述的连续链。

对每个 $k < \lambda$，我们构造 D 的子图表 $D_k = (Z_i)_{i \in I_k}$ 及其余极限

$$c_{i,k} : Z_i \to Q_k$$

对于 $i \in I_k$，根据归纳假设，这些态射属于 $\mathcal{M}$。此外，给定 $k < l < \lambda$，我们有唯一的分解 $q_{k,\ l} : Q_k \to Q_l$，其中

$$c_{i,l} = q_{k,l} \cdot c_{i.k}$$

对于 $i \in I_k$，根据归纳假设，它也属于 $\mathcal{M}$。我们得到一条由对象 Q_k 和态射 $q_{k,\ l}$: $Q_k \to Q_l (k \leq l \leq \lambda)$ 组成的链。由于所有 I_k的集合是连续的，这条链也是连续的。

此外，对每个 $k < \lambda$，我们都有唯一的态射 $q_k : Q_k \to Z$，满足

$$c_i = q_k \cdot c_{i,k}$$

对 $i \in I_k$ 而言。这些态射显然构成链 $Q_k (k < \lambda)$ 的余极限。因此，根据该类对连续链的余极限封闭这一性质，它们属于 $\mathcal{M}$,

这证明了上文的结论 (1)： c_i 属于 $\mathcal{M}$ ，因为该类在复合下封闭。

现在验证第 (2) 项。每个由 $\mathcal{M}$ 中元素组成的余锥 $f_i : Z_i \to X$ of D ，都会导出子图表 D_k 的余锥，而唯一的分解 $h_k : Q_k \to X$ 满足

$$h_k \cdot c_{i,k} = f_i \quad (i < k)$$

根据归纳假设，属于 $\mathcal{M}$ 。这些态射（对所有 $k < \lambda$）构成了所有 Q_k 所成链的一个余锥。事实上，给定 $l < k < \lambda$，等式$h_k = h_l \cdot q_{k,\ l}$ 成立，因为余锥 $c_{i,\ k}(i < k)$ 是整体满的，并且我们有

$$h_k \cdot c_{i,k} = f_i = f_l \cdot c_{i,l} = h_l \cdot q_k \cdot c_{i,k}.$$

因此存在唯一态射 $h : Z \to X$ ，使得对所有 $k < \lambda$ 都有 $h \cdot q_k = h_k$ 。由于 $\mathcal{M}$ 对连续链的余极限封闭， h 属于 $\mathcal{M}$。这就是所需的分解：

$$h \cdot c_i = h \cdot q_k \cdot c_{i,k} = h_k \cdot c_{i,k} = f_i.$$

□

现在我们转而讨论 Top 中的态射类。所谓嵌入，是指 Top 中的单态射 $m : X \to Y$ ，使得 X 赋予始拓扑： X 的每个开集都具有 $m^{-1}(U)$ 的形式，其中 U 是 Y 的某个开集。这些恰好是表示 Y 子空间的单态射。从范畴论角度看，嵌入恰好是 Top 中的正则单态射。

我们证明，单态射和开嵌入这两类都在有向余极限下封闭，但嵌入不是。

回顾一下，集合范畴中单态射的有向余极限可以由相应子集的有向并给出。

命题 3.2 在 Top 中，所有单态射构成的类和所有开嵌入构成的类都在有向余极限下封闭。

证明 (1) 单态射：只需利用 Top 的遗忘函子保持余极限（因为它有一个右伴随），并且保持和反映单态射这一点。

(2) 开嵌入：设 $D = (Z_i)_{i \in I}$ 是一个由开嵌入组成的有向图表。不失一般性，我们假设，如果 $i \leq j$，那么 Z_i 是

Z_j 的子空间，且连接映射为包含映射。那么，余极限就是并集 Z，其开集为满足以下条件的子集 U：对于每个 i，$U \cap Z_i$ 在 Z_i 中是开集。因此，每个 c_i 都是开映射：Z_i 中的每个开集对于所有 $j > i$，在 Z_j 中也都是开集，因而在 Z 中也开。

给定一个开嵌入的余锥 $f_i : Z_i \to X$，分解映射 $f : Z \to X$ 显然是单态且连续的。对于 Z 中的每个开集 $U = \bigcup_{i \in I} U_i$，每个集合 $f_i[U_i]$ 都是 X 中的开集。这些集合的并集是 $f[U]$，因此也是开集。这证明了 f 是开映射。□

推论 3.3 设 $\mathcal{C}$ 是 Top 的一个全子范畴。

(1) 如果 $\mathcal{C}$ 在 Top 中对单态射及单态射的有向余极限封闭，那么 $\mathcal{C}$ 中相对于单态射而言的每个有限小对象都是有限生成的。

(2) 如果 $\mathcal{C}$ 在 Top 中对开子空间及开嵌入的余极限封闭，那么 $\mathcal{C}$ 中相对于开嵌入而言的每个有限小对象都是相对于开嵌入有限生成的。

事实上，在 (1) 中我们得出，$\mathcal{C}$ 上的单态射构成一个对有向余极限封闭的类。只要对象 $C \in \mathcal{C}$ 的同态函子保持 $\mathcal{C}$ 中单态射的连续链的余极限，它就保持链的有向余极限。这是因为，正如我们在定理 3.1 的证明中所见，后者的余极限可以约化为连续链的余极限。

对于开嵌入，论证相同。

命题 3.4 Top 中每个由嵌入构成的有向图表，都存在由嵌入构成的余极限余锥。

证明 设 $D = (Z_i)_{i \in I}$ 是由嵌入构成的有向图表，其余极限余锥为 $c_i : Z_i \to Z$。我们证明，若 I 有最小元 0，则 c_0 是嵌入。一般情形随即得证：每个 c_i 都是嵌入，因为我们的图表与由 I 中 i 的上集所索引的子图表具有相同的余极限。

我们的任务是，给定一个开集 $V \subseteq Z_0$，找出一个满足 $V = U \cap Z_0$ 的开集 $U \subseteq Z$。空间 Z_0 是每个 Z_i 的子空间，因此在 Z_i 中存在一个开集，它与 Z_0 的交集为 V。将这样的最大开集记为 $U_i \subseteq Z_i$（即所有具有所需性质的开集的并集）。于是，对于 I 中的所有 $i \leq j$，都有 $U_j \cap Z_i \subseteq U_i$，因为 $U_j \cap Z_i$ 在 Z_i 中是开集，并且还与 Z_0 的交集为 V。

这意味着集合 $U = \bigcup_{j\in I} U_j$ 对所有 i 都满足 $U \cap Z_i = U_i$：

$$U \cap Z_i = \bigcup_{j\in I}(U_j \cap Z_j) \subseteq U_i$$

而反向包含关系可由选取 $j := i$ 得出。因此， U 在 Z 中是开集，这就是所需的子集，且满足 $V = U \cap Z_0$。□

对于每个无限集 X，余有限拓扑中的非空开集恰好是补集有限的那些集合。我们将相应的空间记为 X_{cof}。

例3.5 与前一个命题相反，给定 Top 中一个 ω-链的嵌入以及由嵌入构成的该链的余锥，从余极限出发的因子化态射不一定是嵌入。

对于每个自然数 n，考虑集合 $\{0, ..., n-1\} \times \mathbb{N}$ 上带有余有限拓扑的空间 A_n。将 $n < \omega$ 时 A_n 的嵌入所构成的 ω-链的余极限记为 A。这是一个以集合 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 为底集的空间，其中集合 $\mathbb{N} \times \{0\}$ 是闭集（因为它与每个 A_n 的交集都是有限集）。

所有 A_n 到空间 $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})_{\text{cof}}$ 的包含映射构成一个由嵌入组成的余锥。但因子化映射 $\text{id} : A \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N})_{\text{cof}}$ 并不是嵌入。事实上，集合 $\mathbb{N} \times \{0\}$ 在 $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})_{\text{cof}}$ 中不是闭集。

推论 3.6 在 Top、Haus、Top_1 和 Top_0，范畴中，相对于单态射而言，有限生成等价于有限小性。相对于开嵌入而言，有限生成等价于有限小性。

因此，在我们研究的单态射类中（在 Top 的主要子范畴示例中），只有嵌入这一类可能使这两种“小性概念”有所不同。

备注3.7 每个基数为 λ 的无限自然数集 X，都是由基数小于 λ 的子集构成的连续链的并集。事实上，我们可以将 X 表示为 $\{x_i \mid i < \lambda\}$。对于每个 $j < \lambda$，集合 $X_j = \{x_i \mid i < j\}$ 的基数都更小，并且 X 是连续链 $(X_j)_{j<\lambda}$ 的并集。

定理 3.8 在拓扑空间范畴中，空间是

（1）当且仅当它是有限空间时，它关于嵌入是有限生成的。

(2) 当且仅当它相对于开嵌入是有限生成的，它才是紧致的。

证明 （1）设 X 是一个有限空间。假设 Z 是如命题 3.4 中所示的嵌入的有向图表的余极限，则每个连续映射 $f:\ X \to Z$ 显然都可通过某个余极限映射 c_i 在集合范畴中进行分解，并且由于 c_i 是一个嵌入，该分解是连续的。

反过来，如果 X 相对于嵌入是有限生成的，那么 X 是有限的。事实上，假设 X 是无限的，就会导出矛盾。令 X' 为定义在同一集合上的不可分空间。将它表示为由较小基数的子空间组成的连续链的余极限（使用上面的注记）。那么从 X 到 X' 的恒等映射无法通过链中的任何一个成员分解。

(2) 设 X 是紧致的，并考虑一个由开嵌入构成的有向图表 $(Z_i)_{i\in I}$，我们假设它由子空间包含映射给出。那么它的余极限 Z 是这些子空间的并集，其中每个 Z_i 都是一个开子空间。因此，任意连续映射 $f\colon X \to Z$ 都给出 X 的一个开覆盖 $(f^{-1}(Z_i))_{i\in I}$。我们可以选取一个有限子覆盖 $(f^{-1}(Z_i))_{i\in F}$。选取 $F \subseteq I$ 的一个上界 j，即可得到 f 通过 Z_j 的一个（必然唯一的）分解。

反之，对于关于开嵌入的 X 有限生成对象，设（U_k）$_{k\in K}$是 X的一个开覆盖。那么，对于任意有限集合 $F \subseteq K$，令 $U_F = \bigcup_{k\in F} U_k$，并考虑所有 U_F构成的有向系统。其余极限为 X：集合 $U \subseteq X$在 X 中是开的，当且仅当它与每个 U_F 的交集都是开的（因为 U是所有这些交集的并集）。因此， X上的恒等映射必定经过某个 U_F分解。这说明 X 是紧致的。□

在条目（1）中，我们只使用了连续链，因此同样的结论刻画了 Top 中的有限空间：它们恰好是关于嵌入的有限小对象。

推论 3.9 在 Haus、$\mathbf{Top}_1$ 和 $\mathbf{Top}_0$ 中的每一个范畴里，一个空间关于开嵌入是有限生成的，当且仅当它是紧致的。

事实上，这些子范畴在 Top 中对取子空间以及嵌入的有向余极限运算是闭的。因此，上述定理的证明在这些子范畴中同样成立。

现在我们考虑 Top 的全反射子范畴中的任意单态射所构成的有向系统。

命题 3.10 设 $\mathcal{C}$ 是 Top 的一个全反射子范畴，且包含一个非空的有限生成空间。对于 $\mathcal{C}$ 中每个以 Z 为 Top 中余极限的单态射有向图表，反射映射 $r_Z: Z \to RZ$ 是双射的。

证明 令 X 为非空的有限生成空间。记 $c_i : Z_i \to Z$ 为 Top 中某个有向图表的余极限；它在 $\mathcal{C}$ 中的余极限由 $r_Z \cdot c_i: Z_i \to RZ$给出。为证明 r_Z 必为双射的，我们取 RZ 中的一个元素 y，并令 $f: X \to RZ$ 为取值为 y的常值映射。由于它可经由某个 $r_Z \cdot c_i$分解，我们看到 y 属于 r_Z的像。此外，由于余极限映射 c_i 是单态，分解的（本质）唯一性迫使 y 在 Z 中的原像唯一。□

注 3.11 对于由（开）嵌入构成的有向图表，以及关于（开）嵌入的有限生成对象，也有一个完全类似的命题。

Gabriel 和 Ulmer 在 [10] 中证明，紧豪斯多夫空间范畴中唯一的 λ-生成对象是空空间。下面沿着相同思路，给出上述注释的一个简要说明:

例 3.12 在紧豪斯多夫空间范畴中，空空间是关于开嵌入的唯一有限生成对象。事实上，将上述备注应用于离散空间的 ω-链 $\{0, ..., n-1\}$ for $n < \omega$，其在 Top 中的极限为 $\mathbb{N}$（离散空间）：到 Stone-ˇCech 紧化 $\beta(\mathbb{N})$ 的反射映射不是双射的。

接下来，我们给出 Top 的若干反射子范畴，其中空空间是唯一有限可表示对象。以下例子是我们论证的关键。

例 3.13 我们构造一个由紧致、可度量化空间组成的有向图表 D，其在 Top 中的余极限是二元不可分空间。D 所对应的底层有向偏序集，其元素是所有形如 (A, B) 的有序对，其中 A 是单位区间 $[0, 1]$, 中非空的有限有理数集， B 是 $[0, 1]$ 中非空的有限无理数集。该偏序集按各分量上的包含关系排序，因此是一个有向偏序集。相应的 D 对象为

空间 $S_{A,\ B}$，它是将单位区间（带有欧几里得拓扑）中 A 的所有点等同起来所得的商空间；对 B 也同样处理；我们可以写作

$$S_{A,B} = \{A, B\} \cup ([0,1] \setminus (A \cup B)).$$

我们有商映射 $q_{A,\ B} : [0,1] \to S_{A,\ B}$，使得$S_{A,\ B}$的开集由满足 $A \subseteq U$ 或 $A \cap U = \emptyset$ 的开集 $U \subseteq [0,1]$ 给出；对于 B，情况类似。图表中的连接映射是与映射$q_{A,\ B}$相交换的商映射。

显然，$S_{A,\ B}$ 是紧致的；又由于 $A \cup B$ 有限，它也是豪斯多夫的。事实上，空间 $S_{A,\ B}$ 甚至是可度量化的，它们有一个可数开集基；按上述描述，该基由 $[0,1]$ 中端点为有理数且与 $A \cup B$ 不相交的开区间的有限并集构成。

该图表的余极限是一个二点空间 $C = \{\text{rat}, \text{irr}\}$。余极限映射 $s_{A,\ B} : S_{A,\ B} \to C$ 是显然的分解，其中，在映射 $s_{A,\ B} \cdot q_{A,\ B}$ 下，rat 的原像是 $[0,1]$ 中的有理数集合（与 (A, B) 无关）。由于该集合在 $[0,1]$, 中既不是开集也不是闭集，因此集合 $s^{-1}_{A\ B,}$ (rat) 在任何 $S_{A,\ B}$ 中都不是开集或闭集，所以点 rat 在 C 中也既不开又不闭。因此，C 是不可分拓扑。

备注 3.14 一个比上述例子更复杂、但出于类似原因而设计的例子，可见 Dugundji 的著作 [7], 第 422 页。他给出了圆 S^1 的一组“良好”商空间构成的有向系统，但其余极限却是一个无限的不可分空间。我们注意到，在 Top 中，“良好”空间的有向系统可能产生性质糟糕的余极限，这也促使人们寻找能够确保余极限具有更好分离性质的充分条件；例如，参见 [11]。

定理 3.15 设 $\mathcal{C}$ 是 Top 的一个全反射子范畴，包含于范畴 $\mathbf{Top}_0$ 中，且包含所有紧致可度量空间。那么空空间是唯一的有限可表示对象。

证明 上述例子的有向图表仅涉及紧致可度量空间。它在 $\mathcal{C}$ 中的余极限由不可分空间 C的反射给出。由于 T_0-反射已经将 C的两个点合并，因此 $\mathcal{C}$ 中的余极限必定是一个单点空间。由命题 3.10 即得结论。□

例 3.16 在 Top、Top、Haus 和 Tych（Tychonoff 空间范畴）中，唯一的有限可表示对象是空空间。

4 Haus 中的小性

我们已经看到一个简单的论证，表明空空间是 Haus 中唯一的有限可表示对象。现在，我们借助 Horst Herrlich 在 [14], 多年前发表的 [10], 一个优美而高效的例子，证明在 Haus（以及其他一些重要的反射子范畴）中，空空间也是关于嵌入而言唯一的有限生成对象。这纠正了 [1] 中例 II.13(3) 的一个错误说法。

我们先表述 Herrlich 的结果。由于 [14] 没有给出其证明，我们附上自己的证明。

例 4.1 Herrlich 给出了一个拓扑空间 X，它是一个由闭子空间组成的 ω-链的余极限，其中每个闭子空间都是蒂科诺夫空间；然而， X却不是豪斯多夫空间。

我们从一个非正规拓扑空间 C 开始。因此，我们可以选取一对 A、B 不相交的非空闭集，它们无法通过开邻域分离。考虑给定的三个空间 C、A、B的可数多个互不相交的副本C_n、A_n、B_n（$n \in \mathbb{N}$）。令

$$A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n,\ B^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \ \text{ and } C^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n.$$

然后，加入新点 a、b，在集合

$$X := \{a, b\} \cup C^*$$

b将 $U \subseteq X$ 称为开集，当且仅当它满足以下条件 s:

1. 对所有 n， $U \cap C_n$ 在 C_n 中是开集；2. 如果 $a \in U$，那么存在某个 m，使得对所有 $n \geq m$ 都有 $A_n \subseteq U$；3. 如果 $b \in U$，那么存在某个 m，使得对所有 $n \geq m$ 都有 $B_n \subseteq U$。

引理 4.2 上述空间 X 是其闭子空间的 ω-链的余极限

$$X_m := \{a, b\} \cup A^* \cup B^* \cup \bigcup_{n=0}^{m} C_n \quad (m < \omega).$$

它们每一个都是蒂科诺夫空间，而 X 却不是豪斯多夫空间。

证明 很容易验证， X 是一个 T_1-空间，并且对于所有 n，以下集合在 X 中都是闭集：

$$C_n,\ A_n,\ B_n,\ \{a\}\cup\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i,\ \{b\}\cup\bigcup_{i=n}^{\infty}B_i.$$

但是， X 不是豪斯多夫的：如果在 X 中有互不相交的开集 $U\ni a$ 和 $V\ni b$，那么对于某个 n， $A_n\subseteq U$ 且 $B_n\subseteq V$，因此 $U\cap C_n$ 和 $V\cap C_n$ 将分别是 A_n 和 B_n 在 C_n中的互不相交的开邻域。

容易验证，每个 X_m 都是 X 的闭子空间，并且 X 是由这些子空间的嵌入构成的 ω-链的余极限。与空间 X 不同，对于每个 m，以下集合在空间 X_m 中既是闭集也是开集：

$$C_n,\ \text{if } n\le m;\ A_n,\ B_n,\ \{a\}\cup\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i,\ \text{and } \{b\}\cup\bigcup_{i=n}^{\infty}B_i,\ \text{if } n>m.$$

由此可知，每个 X_m 都是蒂科诺夫空间。事实上，考虑 X_m 中的一个闭集 D 和一个点 $x\in X_m\setminus D$。为了证明存在连续映射 $g\colon X_m\to[0,1]$，使得 $g(x)=0$ 且 $D\subseteq g^{-1}(1)$，我们区分以下几种情况：

情况 1： $x\in C_n$，对于某个（因而唯一的） $n\le m$：集合 $C_n\cap D$ 在 X_m 中是闭的，因此在闭子空间 C_n 中也闭。我们得到一个连续映射 f: $C_n\to[0,1]$，满足 $f(x)=0$ 且 $C_n\cap D\subseteq f^{-1}(1)$，并将 f 延拓为映射 g: $X_m\to[0,1]$，使其将 $X_m\setminus C_n$ 恒等地映射到 1。于是，对于任意闭集 $Z\subseteq[0,1]$，根据 $1\notin Z$ 或 $1\in Z$ 是否成立，集合 $g^{-1}(Z)$ 等于 $f^{-1}(Z)$ 或 $f^{-1}(Z)\cup(X_m\setminus C_n)$，因此在这两种情况下都在 X_m 中闭。

情况 2： $x\in A_n$（或者对称地， $x\in B_n$），对于某个 $n>m$：集合 $A_n\cap D$ 在 X 中是闭的，因此在 C_n 中也闭。利用一个连续映射 $f\colon C_n\to[0,1]$，它将 x 映射到 0，将 $A_n\cap D$ 映射到 1，我们定义 $g\colon X_m\to[0,1]$，使其在 A_n 上与 f 一致，并将 $X_m\setminus A_n$ 映射到 1。对于在 $[0,1]$, 中闭的 Z，如情况 1 中那样，可得 $g^{-1}(Z)$ 与 $f^{-1}(Z)\cap A_n$ 或 $(f^{-1}(Z)\cap A_n)\cup(X_m\setminus A_n)$ 一致，这两个集合都在 X_m 中闭。

情形 3： $x=a$（或对称地， $x=b$）：对于 X 中的开集（$X\setminus D$）$\ni a$，存在某个 $n>m$ 满足 $E:=\{a\}\cup\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i\subseteq X_m\setminus D$。由于 E 在 X_m 中既闭又开，我们得到一个连续映射 $g\colon X_m\to[0,1]$，它将 E 映到 0，将 $X_m\setminus E$ 映到 1。□

推论 4.3 在 Top 的每个包含于 Haus 且包含 Tych 的全反射子范畴 $\mathcal{C}$ 中，空空间是唯一关于嵌入有限生成的对象。

事实上，将备注 3.11 应用于上述空间 X，其在 Haus 中的反射不是双射的：它合并了不具有不交开邻域的元素对 a、b。因此，在 $\mathcal{C}$ 中的反射也会合并这一对元素。

注记 4.4 由于上述例子只使用了一个 ω-链，因此对于有限小性，同样的推论也成立：关于嵌入而言，唯一有限小的豪斯多夫空间是空空间。

5 Top 中的小性$_0$

我们知道，在 Top$_0$，中，紧空间正是关于开嵌入而言有限生成的对象（推论 3.9）。现在我们证明，有限 T_0-空间恰好是关于嵌入而言有限生成的对象。这里给出的证明并不容易，它实质上使用了拉姆齐定理。随后我们证明，空空间是 Top$_0$ 中唯一的有限生成对象。

下面我们将使用：Top$_0$ 在嵌入所构成的有向图表的余极限下对 Top 闭。参见推论 3.6。

定理 5.1 在 Top 中，空间相对于嵌入有限生成，当且仅当它是有限的。

证明 (1) 根据上面的引理可知，与 Top 中的情形（命题 2.3）一样，有限的 T_0-空间在 Top$_0$ 中相对于嵌入有限生成。反过来，我们将证明，无限的 T_0-空间 X 在 Top$_0$ 中相对于嵌入不是有限生成的。

(2) 首先，假设 X 含有一条严格递增的 ω-链

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots X_n \subset \dots$$

由闭集组成。令 $X_{-1} = \emptyset$，并考虑映射

$$f : X \to Y := \omega + \{\infty\},\ x \mapsto \left\{ \begin{array}{cc} n & \text{if } x \in X_n \setminus X_{n-1}, \\ \infty & \text{otherwise} \end{array} \right\};$$

通过将 Y 的下截段作为闭集来赋予其拓扑后，它就变成连续的。注意，Y 是其子空间的 ω-链的余极限

$Y_n := \{0, \dots, n\} + \{\infty\}$。但映射 f 不通过其中任何一个分解。因此， X 相对于 $\mathbf{Top}_0$ 中的嵌入而言不是有限生成的。

同样，在 Y 中将下截段作为开集，可得X 包含一条严格递增的链

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots X_n \subset \dots$$

个开集不能在 $\mathbf{Top}_0$ 中关于嵌入有限生成。

（3）因此，只需证明每个无限 T_0-空间都包含开集的严格递增链或闭集的严格递增链。

令 $\leq$ 为 X 上的特化序，即当且仅当每个包含 x 的开集都包含 y 时，$x \leq y$ 。将 X 的所有二元素子集构成的集合 $[X]^2$ 分解为不可比对集合 Z_0 和可比对集合 Z_1。根据拉姆齐定理（例如，参见 [5, 3.3.7]），存在一个无限子集 $H \subseteq X$，使得 $[H]^2 \subseteq Z_0$ 或 $[H]^2 \subseteq Z_1$。

（4）假设 $[H]^2 \subseteq Z_0$。那么存在一个可数集 $S = \{x_0, x_1, \dots\}$，使得子空间 S 是 T_1。因此

$$\{x_0\} \subset \{x_0, x_1\} \subset \dots$$

是 S 的严格递增闭子集链。因此，存在一个闭集 $X_0 \subseteq X$，使得 $X_0 \cap S = \{x_0\}$。还存在一个闭集 $X_1' \subseteq X$，使得 $X_1' \cap S = \{x_0, x_1\}$。令 $X_1 = X_0 \cup X_1'$；则 $X_0 \subsetneq X_1$ 且 $X_1 \cap S = \{x_0, x_1\}$。继续这一过程，我们得到 X 中闭集 $X_0 \subset X_1 \subset \dots$ 的严格递增链。

(5) 最后，假设 $[H]^2 \subseteq Z_1$。那么 H 是一条链，子空间 $H \subseteq X$ 的拓扑由作为开集的上段给出。于是， H 要么包含一条严格递增链 $x_0 < x_1 < \dots$ ，要么包含一条严格递减链 $x_0 > x_1 > \dots$。令 $S = \{x_0, x_1 \dots\}$。在第一种情况下，我们在 S 中得到闭子集的严格递增链 $\{x_0\} \subset \{x_0, x_1\} \subset \dots$；与上面相同，我们得到 X 的闭子集严格递增链。在第二种情况下，我们在 S 中得到开子集的严格递增链 $\{x_0\} \subset \{x_0, x_1\} \subset \dots$；类似地，我们得到 X 的开子集严格递增链。□

由于证明只使用 ω-链，上述结果给出了关于有限小性的相同断言：$\mathbf{Top}_0$ 中的空间关于嵌入是有限小的，当且仅当它是有限的。

借助下面的例子，我们将能够刻画范畴 $\mathbf{Top}_0$ 的有限生成对象。

例 5.2 我们构造一个由 T_0-空间 $Z_n, n \in \mathbb{N}$ 组成的有向系统，它们都具有相同的底集 Z，并由恒等映射连接，使得其在 $\mathbf{Top}$ 中的余极限 Z_∞ 不满足 T_0。更具体地说： Z_∞ 有两个点构成一个不可分子空间（而所有其他点都是闭的）。

取两个互不相交的有序集 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 的副本作为公共底集 Z，记作

$$Z = \{x_i \mid i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\} \cup \{y_i \mid i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}.$$

以下子集系统构成集合 Z 上拓扑 τ_n 的一个基:

1. $\{x_k\}, \{y_k\}$，对所有满足 $n \leq k < \infty$ 的 k；2. U_m:
$= \{x_m, x_{m+1}, \ldots, x_\infty\}$; $V_m := \{y_m, y_{m+1}, \ldots, y_\infty\}$，对所有满足$n \leq m < \infty$ 的 m；3. $\{x_k\} \cup V_m$, $\{y_k\} \cup U_m$，对所有满足 $k < n < m < \infty$ 的 k, m。

为了验证这确实是一个基，我们证明：给定该系统中的集合 A, B 和 $z \in A \cap B$，可以在系统中找到某个 $C \ni z$，使得 $C \subseteq A \cap B$。假设 $z = x_k$（对于 $z = y_k$，证明过程对称），若 $n \leq k < \infty$，则取 $C = \{z\}$；若 $k < n$，从而 $A = \{z\} \cup V_{m_1}$ 且 $B = \{z\} \cup V_{m_2}$，则令 $C = \{z\} \cup V_m$，其中 $m = \max\{m_1, m_2\}$；若 $k = \infty$，则类似地，对于某个充分大的 $m < \infty$，可取 $C = U_m$。

我们证明空间 $Z_n = (Z, \tau_n)$ 是 T_0。对于 Z 中的 $z \neq w$，我们仍可假设 $z = x_k$。若 $n \leq k < \infty$，则点 z 是孤立的；由对称性，接下来还可不再考虑 $w = x_\ell$ 或 $w = y_\ell$ 且 $n \leq \ell < \infty$ 的情形。若 $k = \infty$，则有 $w \notin U_n \ni z$；若 $k < n$ 且 $w = x_\ell$，或 $w = y_\ell$ 且 $\ell < n$，则有 $w \notin \{z\} \cup V_{n+1}$。

接下来我们证明，拓扑 τ_{n+1} 比 τ_n更粗。设 A 是 τ_{n+1}中的一个基本开集。若 A 属于类型 1 或 2，则显然 A在 τ_n中也是开集。若A 属于类型 3，从而由对称性可假设 $A = \{x_k\} \cup V_m$ 且$k < n + 1 < m$，那么只需注意到集合 $\{x_k\}$ 和 V_m 都是 τ_n中的基本开集，因此它们的并集在 τ_n 中也为开集。

ω链 Z_n 的余极限是空间 $Z_\infty = (Z, \tau_\infty)$，其拓扑 τ_∞ 是比每个 τ_n都粗的最细拓扑。其子空间 $\{x_\infty, y_\infty\}$ 是不可分拓扑。事实上，只需证明每个包含 x_∞ 的 τ_∞-开集 A 也包含 y_∞。对于 $n = 0$，作为 x_∞的 τ_0-开邻域， A 必须包含某个

集合 U_m，其中有 $m > 0$，因此包含点 x_m。事实上，由于它在 τ_{m+1} 中也是开集，作为 x_m的邻域，A 随后必须包含某个基本的 τ_{m+1}-开集 $\{x_m\} \cup V_\ell$，因此包含点 y_∞。

我们可以留给读者验证，所有点 x_k, y_k $(k < \infty)$ 在 Z_∞中都是闭的，因为在下文中不会用到空间的这一性质。

推论 5.3 空空间是拓扑空间范畴 $\mathbf{Top}_0$中唯一的有限生成对象。

事实上，在上述例子中，余极限 Z_∞in Top 的 $\mathbf{Top}_0$-反射映射将 x_∞ 与 y_∞合并了。因此我们可以应用命题 3.10。

6 拓扑空间范畴 $\mathbf{Top}_1$中的小性

现在我们转而讨论拓扑空间范畴 $\mathbf{Top}_1$，，并证明，相对于嵌入，有限生成对象恰好是有限空间，而有限小对象恰好是可数紧空间。因此，在这个范畴中，考虑子空间链与考虑子空间的有向系统，二者之间差异巨大。

注 6.1 (1) 我们首先注意一个显而易见但重要的事实：$\mathbf{Top}_1$在单态射有向图表的余极限下是 Top 中的闭子范畴。特别地，余极限映射是单态射。

(2) 接下来回顾：给定集合 X 中的一个元素 x，以及定义在 X 上的一个自由超滤子 $\mathcal{U}$（即不包含有限集），集合 X 上对应的超空间中，除 x 外的所有元素都是孤立点，而 x 的邻域恰好是 $\mathcal{U}$ 中各成员 U 所对应的集合 $U \cup \{x\}$。非主超滤子（不包含有限集）对应的超空间，恰好是 X 上所有 T_1-拓扑构成的格中的余原子：唯一严格更细的拓扑是离散拓扑。每个 T_1-拓扑都是余原子的下确界（参见 [9] 或 [24],1.1）。

T定理 6.2 $\mathbf{Top}_1$ 中的一个空间是有限生成的，当且仅当它是有限的。

证明 设 T_1-空间 (X, τ) 是有限的，因此是离散的。由于它在 Top 中是有限生成的，根据上述闭包性质，它在 $\mathbf{Top}_1$，中也是有限生成的。

反过来，设 (X,τ) 是 Top_1 中的有限生成对象。那么 τ 是集合 X 上所有 T_1-拓扑所构成的格中的一个成员，我们将利用该格的性质证明 X 是有限的。

我们将一个具有下确界 τ 的超空间集合记为 $\mathbf{M}\,X$ （见注 6.1）。令 $\mathbf{M}'$ 表示在所有 T_1-拓扑的格中对有限下确界运算封闭的 M。我们得到一个由 $\mathbf{M}'$ 给出的所有空间组成的有向图表，其连接映射为恒等映射 $_X$。其余极限为（X，τ）。由于该空间是有限生成的，$\mathbf{M}'$ 是有限的，且 τ 是 $\mathbf{M}'$ 的成员。因此，（X，τ）只有有限个非孤立点。

假设 X 是无限的，我们将导出矛盾。$(X,\ \tau)$ 中所有孤立点的集合 Y 是余有限的。存在一个无限集 $A\subseteq Y$，它不属于 $\mathbf{M}'$ 中的任何超滤子。事实上，如果 $\mathbf{M}'$ 由 n 个超空间组成，我们可以对 n 使用归纳法验证这一点。对于 $n=1$，我们有一个超滤子 $\mathcal{U}$。将 X 分解为两个无限子集；其中一个不属于 $\mathcal{U}$。在归纳步骤中，设 A 相对于 $\mathbf{M}'$ 中除一个成员外的所有成员都具有所需性质，该成员记为 $\mathcal{U}_0$；然后将 A 分解为两个无限集，并选择不属于 $\mathcal{U}_0$ 的那个子集。

集合 A 在 (X,τ) 中是闭的。因此，对于每个有限集合 $Z\subseteq A$，我们都有开子空间 $Z^*=(X\setminus A)\cup Z$，它是 (X,τ) 的开子空间。构造所有这些子空间组成的有向图表（其中 Z 遍历 A 的有限子集）；其余极限为 (X,τ)，而恒等映射无法通过任何 Z^*进行分解。因此 (X,τ) 不是有限生成的，矛盾。□

为了刻画关于嵌入而言有限生成的 T_1-空间，我们应用下面的例子。

例6.3 对于每个无限集 X，我们给出一个由空间 X_{cof} 的真子空间组成的有向图表 D，其中该空间带有余有限拓扑，其余极限为 X_{cof} （以嵌入作为余极限注入）。

设 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个不交分解，将其分解为无限多个无限子集。我们从 [6] 回顾，若一个由 $\mathcal{A}$ 中无限子集组成的集合族 X 满足其中任意两个不同成员的交集都是有限的，则称其为几乎不交的。根据佐恩引理，我们可以选择一个包含 $\mathcal{B}$的极大几乎不交集合族 $\mathcal{A}$。不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{A}$ 覆盖 X（否则，我们将 X 替换为 $\mathcal{A}$ 中与 X具有相同基数的成员之并）。

我们的图表 D 以所有空间 Y_{cof}为对象，其中 Y 是 $\mathcal{A}$中有限多个成员的并集。连接态射是这些空间之间的所有嵌入。每个这样的 $Y=A_1\cup\ldots\cup A_n$ 都是 X的真子集：事实上，我们

可以为 $i = 1$选择一个不同于 A_i的成员 $B \in \mathcal{B}$，.....， n。假设$Y = X$，由于每个交集 $B \cap A_i$ 都是有限的，我们得出 B 是有限的，这就产生了矛盾。

要证明 X_{cof} 是 D 的余极限，意味着要验证：若某个真子集 $P \subset X$ 与 D 中每个 Y 的交集都是闭集（即交集要么有限，要么 $Y \subseteq P$），则 $P \subset X$ 是有限的。

假设 P 是无限的。那么，根据 $\mathcal{A}$ 的极大性，对于某个 $A \in \mathcal{A}$，集合 $P \cap A$ 是无限的，因此 P 包含 A。取 $x \in X \setminus P$。存在某个包含 x 的 $B \in \mathcal{A}$。于是， $P \cap (A \cup B)$ 在 $(A \cup B)_{\text{cof}}$ 中不是闭集，而它是 D 的一个对象，这就产生了矛盾。

令人惊讶的是，$\mathbf{Top}_1$ 确实包含一些无限空间 X，它们相对于嵌入是有限小的。回想一下，这意味着从 X 到连续链的子空间余极限的每个态射，都可经由其中一个子空间分解。事实上，本质唯一性是自动成立的，因为（如上文所述）余极限映射是单态。

定理 6.4 $\mathbf{Top}_1$ 中的空间

(1) 关于嵌入有限生成，当且仅当它是有限的。(2) 关于嵌入有限小，当且仅当它是可数且紧致的。

证明 (1) 若一个空间是有限的，则由定理 6.2 可知，它关于嵌入有限生成。反之，若 X 关于嵌入有限生成，则它是有限的，这可由上面的例子得出。事实上，假设 X 是无限的，令 X_{cof} 为底集与 X相同、带有余有限拓扑的空间。那么恒等映射 $X \to X_{\text{cof}}$ 无法经由 X_{cof}的任何真子空间分解。

(2a) 充分性：每个关于嵌入有限小的空间都是可数且紧致的。事实上，不可数的 T_1-空间 X 关于嵌入并非小，因为空间 X_{cof} 是由真子空间构成的连续链的并集（备注3.7）。而连续映射 $\mathrm{id} : X \to X_{\text{cof}}$ 无法经由其中任何子空间分解。紧致性由定理 3.8 得出。

(2b) 必要性：设 X 可数且紧致。我们证明它关于嵌入是有限小的。设 α 是一个极限序数，且 $c_i : Z_i \to Z$ $(i < \alpha)$ 是一个子空间连续链的余极限。给定一个连续

映射 $f\colon X \to Z$，我们验证它可经由某个 c_i 分解。（本质唯一性自然成立，因为根据命题 3.4，所有 c_i 都是嵌入。）

(i) 如果 α 的共尾度不可数，这一点显然：由于 X 可数，在集合范畴 Set 中，存在一个分解 $f = c_i \cdot f'$，其中某个 i。由于 $c_i \cdot f'$连续且 c_i 是嵌入，因此 f' 也连续。

(ii) 若 α 的共尾度可数，则我们的链有一个由 ω索引的共尾子链。因此，我们只需证明该结论对$\alpha = \omega$成立。令 $Z = \mathrm{colim} Z_n$。假设对任意 $n \in \omega$， f 都不能经由 Z_n分解，我们便导出矛盾。由于 f 不能经由Z_0分解，因此存在某个 $x_0 \in X$ 和 $n_0 > 0$，使得 $a_0 := f(x_0) \in Z_{n_0} \setminus Z_0$。接下来， f不能经由 Z_{n_0}分解，因此我们得到某个 $x_1 \in X$ 和 $n_1 > n_0$，使得 $a_1 := f(x_1) \in Z_{n_1} \setminus Z_{n_0}$，等等。如此归纳下去，我们得到 Z的一个无限子集 $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$，其中有 $a_i \in Z_{n_{i+1}} \setminus Z_{n_i}$, $n_{i+1} > n_i$, $i = 0, 1, \ldots$。根据构造，所有集合 $A \cap Z_n$ 都是有限的，因此在 T_1-空间Z_n中是闭集。这证明 A 在余极限 Z中是闭集。出于同样的理由，每个子集 $B \subseteq A$ 都是闭集。因此 A 是离散空间。集合 $f^{-1}(A)$在 X中是闭集，因此它是紧致的。然而，这意味着 A 是紧致的（紧致集的连续像），这与其无限且离散相矛盾。□

7 Top 的全反射子范畴中的小性

前几节的结果在一定程度上可用于刻画 Top 的诸多子范畴 $\mathcal{C}$ 中的小性，而不仅限于 Top 或 Top_i $(i = 0, 1, 2)$。本节中，我们始终假设

> $\mathcal{C}$ 是 Top 的一个全反射子范畴，在同构下封闭，且两点离散空间 D 属于 $\mathcal{C}$。

当然，作为一个全反射子范畴， $\mathcal{C}$ 在 Top 中对收缩和乘积封闭；特别地，单点空间 1 属于 $\mathcal{C}$。在假设 $D \cong 1 + 1 \in \mathcal{C}$ 下，实际上每个有限离散空间都属于 $\mathcal{C}$。我们不假设 $\mathcal{C}$ 具有遗传性（即对子空间封闭）。正如我们所回顾的，这一性质成立当且仅当对于所有拓扑空间X， $\mathcal{C}$-反射映射 $r_X\colon X \to RX$ 都是满射；也就是说， $\mathcal{C}$ 在 Top 中是满反射的。

我们对 $\mathcal{C}$ 中小性的讨论现在分成两种互斥情形来考虑： $\mathcal{C}$ 是否包含两点不可分空间 T。

容易看出， $\mathcal{C}$ 包含 T 等价于所有反射映射都是双射的（因为反射均为单态的反射子范畴会使这些映射自动成为满射），此时 $\mathcal{C}$ 实际上包含所有不可分空间。因此， $\mathcal{C}$ 不包含 T 等价于存在反射映射不是双射的空间。我们先讨论后一种情形，再转向前一种情形。

7.1 具有一些非双射反射的反射子范畴

如上所述，属于这一类的 Top 的反射子范畴 $\mathcal{C}$ 虽然包含 D，却不会包含 T。如果 $\mathcal{C}$ 是满反射的，且 Sierpi´nski 空间 S （即一个不同胚于 D 或 T的二点空间）属于 $\mathcal{C}$，那么 $\mathcal{C}$ =$\mathbf{Top}_0$；事实上，每个 T_0 空间都嵌入某个 S的幂中，而每个非 T_0 空间都具有一个不可分拓扑的二元素子空间。（不过，我们注意到一个已知事实：存在 Top 的真子范畴 $_0$，包含 S，且在 $\mathbf{Top}_0$ 中是满反射的；见 [23]。）如果 $S \notin \mathcal{C}$，那么 $\mathcal{C}$ 必包含于范畴 $\mathbf{Top}_1$，中，因为任意非 T_1 空间都包含一个子空间，该子空间同胚于空间 T 或 S之一，而这两个空间都是任意更大空间的收缩。

我们的目标是将推论 5.3——断言空空间是 $\mathbf{Top}_0$，中唯一的有限生成对象——从该范畴推广到 Top 的大量反射子范畴 $\mathcal{C}$ 。由于必然性，这样的集合必须排除范畴 $\mathbf{Top}_1$，，因为我们已经确定其有限生成对象是有限离散空间（定理 6.2）。在下文中，我们将注意力限制在 $\mathbf{Top}_1$，的子范畴上，排除包含 S的 $\mathbf{Top}_0$ 的非遗传子范畴。

定理7.1 设 $\mathcal{C}$ 是 Top 的一个反射子范畴，且真包含于 $\mathbf{Top}_1$。那么， $\mathcal{C}$ 中唯一的有限生成对象是空空间，前提是 $\mathcal{C}$ 包含其拓扑为底集上的超滤子拓扑有限下确界的每个空间。

证明 根据命题 3.10，我们需要找到一个 T_1-空间 X ，使其 $\mathcal{C}$-反射 r_X 不是双射的；这样一来， X 就不可能是有限多个超空间拓扑的下确界。事实上，正如定理 6.2 的证明所示，X 是一个有向空间系统的余极限，其中各空间的拓扑都是超空间拓扑的下确界；根据假设，这些空间都必须属于 $\mathcal{C}$。

如果存在任何一个粗糙的 T_1-空间 X （即一个 X 带有余有限拓扑的空间），不属于 $\mathcal{C}$，那么这样的 X 就能满足要求。事实上， r_X 不可能

是双射的，因为集合 X上不存在严格更粗的 T_1-拓扑。反之，如果所有粗糙的 T_1-空间都属于 $\mathcal{C}$，那么 $\mathcal{C}$ 就不可能是遗传的。事实上，每个 T_1-空间都嵌入到粗糙 T_1-空间的乘积中，因此存在一个满足 $X \subseteq Y$的空间 $Y \in \mathcal{C}$，但 $X \notin \mathcal{C}$。因此，作为一个非同胚的嵌入，反射 r_X不是满射的。□

若 $\mathcal{C} \subseteq$ Haus，则定理中关于下确界的要求可以弱化为条件 $\mathcal{C}$ 包含所有超空间（因为，比豪斯多夫空间更精细的有限多个超空间的下确界是豪斯多夫空间，而且事实上是有限多个超空间的余积）。然而，在条件 $\mathcal{C} \subseteq$ Haus 下，我们现在要证明一个比上述定理更强的断言，即空空间是关于嵌入的唯一有限生成空间。我们的证明基于一种类似于 Herrlich 的例4.1 的构造，并由此得到推论 4.3 的推广。我们先介绍一些初步观察，再给出这一结果。

引理7.2 (1) 如果存在一个不属于 $\mathcal{C}$ 的离散空间，那么空空间就是 $\mathcal{C}$ 中关于嵌入的唯一有限生成对象。

(2) 如果反射子范畴 $\mathcal{C}$ 包含所有离散空间，那么它就包含具有有限个聚点的所有豪斯多夫空间。

证明 (1) 考虑一个基数最小（必然是无限）的离散空间 X，它位于 $\mathcal{C}$ 之外。这样的空间 X 是 Top 中其基数更小的子空间的余极限，而 r_X：$X \to RX$ 不可能是双射。因此，命题 3.10 适用。

（2）首先，设 X 是一个具有唯一聚点 x 的豪斯多夫空间。$\mathcal{C}$-反射 $r_X : X \to RX$ 必须是嵌入，因为 X 是零维的。假设 r_X 不是双射的，则存在某个 $z \in RX \setminus X$。存在一个 G 的开邻域 z，它与 U 的某个邻域 x 不相交。考虑映射 $f : X \to X$，将 $X \setminus U$ 恒等映射，并将 U 恒等映射为常值 x。f 的值域是离散的，并且存在唯一的连续映射 Rf: $RX \to f(X)$ 延拓 f。点 z 在 Rf 下被映射到点 $y \neq x$，而 y 的原像是 V 在 z 中的一个开闭邻域，并且与 RX 交于点 X y。现在考虑映射 h：$RX \to RX$，将 $RX \setminus V$ 恒等映射，并将 V 恒等映射为常值 y。由于 h 是保持 X 不变的收缩，像 $h(RX)$ 是 $\mathcal{C}$- 反射 X 的。因此，恒等映射 $X \to X$ 唯一延拓为同胚 $RX \to h(RX)$。所以， h 必须是同胚，这意味着 $V = \{y\}$ 和 $z = y$，与 z 的选取矛盾。因此， $X \in \mathcal{C}$。

现在，设豪斯多夫空间 X 具有有限个聚点 x_1、.....、 x_n。于是存在包含 x_i 的不相交开集 G_i。因此， X 是其子空间 G_i （每个子空间都具有唯一的聚点）与一个离散空间 $X \setminus \bigcup G_i$ 在 Top 中的余积。□

我们将 $\beta(\mathbb{N})$ 的点视为 $\mathbb{N}$ 上的超滤子，并令 $\mathbb{N}^* = \beta(\mathbb{N})\setminus\mathbb{N}$。点 $\mathcal{F} \in \mathbb{N}^*$ 在 $\beta(\mathbb{N}^*)$ 中的邻域系的迹就是滤子 $\mathcal{F}$。

引理 7.3 (1) 如果 P 是 $\mathbb{N}^*$ 的稠密子空间，并且对每个超滤子 $p \in P$ 都有 $U_p \in p$ ，那么 $\mathbb{N} \setminus (\bigcup_{p\in P} U_p)$ 是有限集。

(2) 在 $\mathbb{N}^*$ 中存在两个不可数不相交稠密集 P、 Q 。

证明 (1) 假设 $A = \mathbb{N} \setminus (\bigcup_{p\in P} U_p)$ 是无限集。那么， $\overline{A}$ 在 $\beta(\mathbb{N})$ 中的闭包是一个既开又闭集，它与 $\mathbb{N}^*$ 相交于一个非空开集，且该开集与 P 不相交，这与 P 的稠密性矛盾。

(2) $\mathbb{N}^*$ 的开集基由集合 $A^* = \overline{A} \setminus \mathbb{N}$ 构成，其中 A 是 $\mathbb{N}$ 的无限子集。每个这样的集合的基数都是 2^{2^ω}，我们可以将它们良序排列为 $\{A^*_\alpha \mid \alpha \in 2^\omega\}$。先任取 A^*_1 中两个不同的点 p_1、 q_1。如果对所有 $\beta < \alpha$，我们已经有点 p_β、$q_\beta \in A^*_\beta$，使得集合 $P_\alpha = \{p_\beta \mid \beta < \alpha\}$、 $Q_\alpha = \{q_\beta \mid \beta < \alpha\}$ 不相交，那么由于 $|P_\alpha \cup Q_\alpha| < 2^\omega$，我们可以在 $A^*_\alpha \setminus (P_\alpha \cup Q_\alpha)$ 中找到两个不同的点 p_α、q_α。集合 $\{p_\alpha \mid \alpha \in 2^\omega\}$、 $Q = \{q_\alpha \mid \alpha \in 2^\omega\}$ 就是所需的不相交稠密集。□

我们已经可以陈述结果了。证明时，我们将在集合 $\beta(\mathbb{N})$ 上使用更细拓扑：规定 $\mathbb{N}^* = \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$ 中的每个点都是孤立点，并保留其在 $\mathbb{N}$中的通常邻域。我们将具有相同底集 $\beta(\mathbb{N})$ 且赋予该拓扑的新空间记为 $\delta(\mathbb{N})$；这就是 $\mathbb{N}$ 的 Katˇetov H-闭扩张。

定理 7.4 设 Top 的全反射子范畴 $\mathcal{C}$ 包含于 Haus，且包含一个两点离散空间。那么，关于 $\mathcal{C}$ 中的嵌入有限生成的唯一空间是空空间。

证明：引理7.2使我们可以只考虑所有离散空间都属于 $\mathcal{C}$的情形。由引理7.3可知， $\mathbb{N}^*$有两个不相交的稠密子集 P、 Q。将 $S := \mathbb{N} \cup P \cup Q$ 视为 $\delta(\mathbb{N})$ 的子空间，我们看到 P、 Q 是 S的离散子空间。现在我们在集合

$$X = (\mathbb{N} \times S) \cup \{p, q\},$$

上定义一个拓扑，其中 p、$q \notin \mathbb{N} \times S$ 互不相同，定义如下：

- 集合 $\{n\} \times S$ 是开集。
- 对于所有 $n \in \mathbb{N}$，集合 $U_n = \{p\} \cup \bigcup_{k>n}(\{k\} \times (P \cup \mathbb{N}))$ 都是p的基本邻域。
- 对于所有 $n \in \mathbb{N}$，集合 $V_n = \{q\} \cup \bigcup_{k>n}(\{k\} \times (Q \cup \mathbb{N}))$ 都是q的基本邻域。

所得空间 (X, t) 不是豪斯多夫空间，但它的子空间

$$X_k := X \setminus (\{k+1, k+2, ...\} \times \mathbb{N})$$

构成一个递增序列，且都是覆盖 X 的 X 的闭豪斯多夫子空间。

我们接下来证明，集合 X 上由系统 $\{X_k\}_{\mathbb{N}}$ 最终生成的拓扑 τ，等于 X 的拓扑 t。显然，对于 X 中任何不同于 p、q 的点，其邻域系在两种情况下都一致，t 和 τ 亦然。由于其余两点的情形是对称的，只需证明 τ 中包含点 p 的每个开集 G 也是它在 t 中的邻域。

事实上，由于 $G \cap X_1$ 是 X_1 中 p 的一个邻域，它包含某个 $k \in \mathbb{N}$ 对应的集合 $\bigcup_{n \geq k}\{n\} \times P$。由于 S 中每个包含 P 的开集，除去一个有限集后都包含 $\mathbb{N}$，因此，含有 $m > k$ 的 $G \cap X_m$ 必须包含 $\bigcup\{\{n\} \times \mathbb{N}, n = k+1, ..., m$。由此可见，$G$ 包含 t 邻域 U_n。

现在我们证明，空间 X_k 最终由那些仅有有限个聚点的子空间生成。空间 X_k 是 $\{p, q\}$（可数个离散空间的余积）与有限个 S 的副本的并集。点 p、q 有可数邻域基。空间 S 最终由超空间子空间生成。

我们用 $\mathcal{P}$（或 $\mathcal{Q}$）表示从 $\bigcup_{\mathbb{N}}\{n\} \times P$（或从 $\bigcup_{\mathbb{N}}\{n\} \times Q$）到 p（或分别到 q）收敛的所有序列组成的集合。由 S 的所有聚点个数有限的子空间构成的系统 $\mathcal{S}$ 最终生成 S，并且我们可以假设 $\mathcal{S}$ 覆盖 S。系统 $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \cup \bigcup_{\mathbb{N}}$（$\{n\} \times \mathcal{S}$）$\cup \bigcup_{n \leq k}$（$\{n\} \times \mathbb{N}$）最终生成 X_k；由 $\mathcal{S}_k$ 中有限多个成员组成的并集构成的系统也如此。对于 $k \leq m$，我们有 $\mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{S}_m$。因此，集合 G 在 X 中是开集，当且仅当它与每个 X_k 的交都是开集；等价地，当且仅当它与 $\mathcal{S}_k$ 的每个成员的交都是开集。

我们展示了一个由 $\mathcal{C}$ 中的空间嵌入构成的有向系统，其余极限为（X, t）。由于反射映射 $X \to RX$ 不是双射的，我们得出结论：在 $\mathcal{C}$中，关于嵌入而言，只有空空间是有限生成的。□

7.2 所有反射均为双射的反射子范畴

现在，我们所考虑的 Top 的反射子范畴 $\mathcal{C}$ 包含两点不可分空间 T （因此也包含所有不可分空间）；等价地，对于所有 $X \in$ Top，反射映射 r_X : $X \to RX$ 都是双射的。当然，这样的最大子范畴 $\mathcal{C}$ 就是 Top 本身；我们已在命题 2.3 中确定，其有限生成对象是有限离散空间。这样的最小子范畴 $\mathcal{C}$ 恰好包含所有不可分空间，它与 Set 同构，因此其中的有限生成对象显然就是该范畴中的所有有限对象。接下来我们将证明，对于其他任何 $\mathcal{C}$, 有限生成对象的刻画都是 $\mathcal{C}$ =Top 中情形的推广。

容易证明， $\mathcal{C}$由于具有双射的反射映射，必然包含每个作为某个始源 f_i 的定义域的空间 X ： $X \to Y_i$ 在 Top 中满足所有 $Y_i \in \mathcal{C}$、 $i \in I$。特别地，对于任意空间 X ，考虑所有连续映射 $X \to S$的始源，可以看出，只要 Sierpi´nski 空间 S 属于 $\mathcal{C}$，就必有 $\mathcal{C}$ 等于 Top。因此，如果 $S \notin \mathcal{C}$, 那么 $\mathcal{C}$ 中的每个空间 X 都必须是对称的，也就是说： X 的特化序必须是对称的，从而对于所有 x、 $y \in X$，$x \in \overline{\{y\}}$ 蕴含 $y \in \overline{\{x\}}$ 。换言之，在本小节所考察的 Top 的所有真子范畴 $\mathcal{C}$ 中，对称空间的子范畴是最大的。

在所考察的所有子范畴 $\mathcal{C}$ 中，还存在一个最小成员，它不仅包含不可分空间。事实上，任何包含 T 和至少一个非不可分空间的满反射$\mathcal{C}$ 都必须包含所有零维空间。

定理 7.5 如果 Top 的反射子范畴 $\mathcal{C}$ 包含所有不可分空间，并且至少包含一个非不可分空间，那么它的有限生成对象恰好是有限离散空间。

证明 经过最小限度的修改，我们可以将针对 Top 给出的同一论证用于 $\mathcal{C}$, 从而得到所有有限离散空间都是 $\mathcal{C}$中的有限生成对象；反过来， $\mathcal{C}$ 的所有有限生成对象都必须是有限的。因此，我们唯一剩下要证明的是，这些空间必须是离散的。由于 T和 S 都是任意更大空间的收缩，且有限生成空间在收缩下封闭，因此必须证明 T 和S 都不是有限生成的。

取区间 $[0,1]$ 中两个互不相交的可数稠密子集 X_0、 X_1，其中 $0 \in X_0$、$1 \in X_1$。对于每个 $n \geq 1$，我们赋予集合 X 如下拓扑 $= X_0 \cup X_1$:

如下拓扑 τ_n:

- $X_0 \cap [0, 1-1/n]$ 中任意一点的基本邻域都是集合 $(X_0 \cap [0, 1-1/n]) \cup (X \cap [0, 1/k))$ $k \in \mathbb{N}$;
- $X_1 \cap [1/n, 1)$ 中任意一点的基本邻域都是集合 $(X_1 \cap [1/n, 1]) \cup (X \cap (1-1/k, 1], k \in \mathbb{N}$;
- 其余各点的邻域是通常的欧几里得邻域限制在 X 上所得的集合。

拓扑 τ_n 是零维的，因此，$(X, \tau_n) \in \mathcal{C}$。在比所有 τ_n 都更粗的最细拓扑 τ 中，子空间 $\{0, 1\}$ 是不可分拓扑，而在所有 τ_n 中则是离散的。因此， T 和 S 在 $\mathcal{C}$ 中都不是有限生成的。□

为了刻画我们子范畴 $\mathcal{C}$ 中关于嵌入的有限生成空间，我们只需注意到定理 3.3 的证明依然成立；因此:

推论 7.6 如果 Top 的反射子范畴 $\mathcal{C}$ 包含所有不可分空间，那么 $\mathcal{C}$ 中关于嵌入的有限生成对象恰好是 $\mathcal{C}$ 中的有限空间。

注 7.7 本节考察了 Top 中包含一个两点离散空间的反射范畴。这是一个自然的假设。然而，Top 中也存在一些反射范畴，它们包含一个多于一点的空间，但没有这样的离散空间。Horst Herrlich 在 [13] 中构造了这样一个子范畴的绝妙例子。该范畴由一个具有多于一点的强刚性空间的所有幂组成。一个自然的问题是，该范畴中的有限生成空间是什么。我们可以如下证明，即使相对于嵌入，有限生成空间也只有空空间。

设 X 是一个强刚性的豪斯多夫空间， $\mathcal{C}$ 是 Top 中由 X的所有幂构成的全子范畴。对于一个基数 λ，设 Z_λ 是基数为 λ的离散空间 D_λ 向 $\mathcal{C}$ 中的反射。通过归纳法，定义 $\mu_1 = |X|$, $\mu_{n+1} = 2^{\mu_n}$, $n \in \mathbb{N}$和 $\mu = \sup \mu_n$。对于 $\lambda < \nu$，集合 D_λ是 D_ν的一个收缩，这意味着 Z_λ 是 Z_ν的一个收缩，因而同胚于 Z_ν的一个闭子空间。因此，$(Z_{\mu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{C}$中的一个递增空间序列，其中每个 Z_{μ_n} 都可视为 Z_μ的一个闭子空间。令

赋予 $Z = \bigcup Z_{\mu_n}$ 由 (Z_{μ_n})生成的终拓扑，使得 Z 是 Top 中 $\mathcal{C}$内嵌入的一个有向极限的余极限。

我们证明 $Z \notin \mathcal{C}$。 X^λ of $\mathcal{C}$ 的每个成员的基数要么等于 2^λ（前提是 $\lambda \geq |X|$），要么至多为 $2^{|X|}$。由于 $|Z| = \mu > 2^{|X|}$，任何满足 $X^\lambda \cong Z$ 的可能的 λ 都必须大于 $|X|$。如果 $\lambda < \mu$，那么$\lambda < \mu_n$ 对某个 n 成立，因此$|X|^\lambda \leq 2^{\mu_n} < \mu = |Z|$。如果 $\lambda \geq \mu$，那么$|X|^\lambda \geq 2^\mu > \mu = |Z|$。因此，空间 Z 不可能同胚于某个 λ的 X^λ。由此可得 $|RZ| > |Z|$，进而反射 $Z \to RZ$ 不是双射的，所以相对于 $\mathcal{C}$ 中的嵌入，没有非空空间是有限生成的。

8 Top 的子范畴的进一步性质

8.1 “有限生成”在何处仅仅意味着“有限”?

我们已经看到，“有限生成”的含义可能会因所考虑的范畴而发生巨大变化：在 Top 中，它表示“有限且离散”；而在 $\mathbf{Top}_0$ 中，它只表示“空”。下面给出一个 Top 的余反射子范畴，其中包含的不仅是离散空间；正如我们在反射子范畴 $\mathbf{Top}_1$ 中看到的那样，在这里，“有限生成”显然表示底集有限。

命题 8.1 在 Alex 范畴（即 Alexandroff 离散空间范畴，其中任意多个开集的交仍为开集）中，有限拓扑空间就是有限生成对象。有限 T_0 空间是 $\mathbf{Alex}_0$ 范畴（即 Alexandroff 离散 T_0 空间范畴）中的有限生成对象。

证明 Alex 范畴是满余反射嵌入A Ord $\to$ Top 的像；该嵌入将预序集赋予以向下闭集为开集的拓扑。其右伴随则将拓扑空间赋予所谓专化预序的对偶。将 A 限制到偏序集范畴 Pos 后所得的像就是 $\mathbf{Alex}_0$。在 Pos 中，有限生成对象恰好是有限偏序集（见 [3], 1.2(3)）。这个事实的直接证明对预序集也同样成立。□

8.2 Top 中是否存在非平凡的局部可呈子范畴?

简短的回答是肯定的： [8] 的定理 3.4证实了一个非平凡的局部可呈现（见 [10, 17, 4, 3]）全子范畴的存在，而且不只

在拓扑空间范畴 Top 中如此，在任何纤维小具体拓扑范畴$\mathcal{K}$中也如此；作者运用模型论方法证明，对于此类范畴中任意一个（小）对象集合 $\mathcal{G}$，由那些作为源自 $\mathcal{G}$的箭头的 $\mathcal{K}$-终汇的目标的对象 X所构成的全子范畴，不仅是余反射的（见 [2]），而且是局部可呈现的。例如，在 Top 中，取所有（在同胚意义下）有限空间作为 $\mathcal{G}$ 时，就会得到 Alexandroff 离散空间。

然而，对于本文所讨论的熟悉空间范畴，既然已经刻画了它们的 λ-可呈示对象（或至少有限可表示对象），那么显然可以推出，它们不可能是局部 λ-可呈现的（或分别不可能是有限可表示的）。不过，通常还有更简单的论证方法，无需援引此类刻画。事实上，范畴的局部可呈性蕴含强生成元的存在（因此，每个对象都必须是一个强满射的陪域，该强满射的定义域是生成元中对象的余积），所以很容易看出，Top 的许多熟悉子范畴都不是局部可呈现的，甚至不满足 [21] 意义下的近乎局部可呈现性。下面给出一个（可能是已知的）证明，说明本文讨论的某些范畴不存在强生成元。

命题 8.2 Top 或 Top$_i$ （对于 $i = 0$、1、2）均不存在强生成元。

证明 在 Top 中，对象的集合 $\mathcal{G}$ 是强生成元，当且仅当对于每个对象 Y，以 $\mathcal{G}$ 中对象为定义域、以 Y 为陪域的态射汇是终的；也就是说：Y 的一个子集是开集，当且仅当它在每个满足 $X \in \mathcal{G}$ 的连续映射 $X \to Y$ 下的原像都是 X 中的开集。

假设这样一个集合 $\mathcal{G}$ 存在，我们给出一个违反终性条件的空间 Y^*：对于一个基数大于 $\mathcal{G}$ 中每个空间的基数的离散空间 Y，在 $Y^* = Y \cup \{t\}$ 上定义拓扑 $t \notin Y$，使得 t 的开邻域恰好是满足 $Z \subseteq Y$ 且 $\mathrm{card}Z < \mathrm{card}Y$ 的集合 $\{t\} \cup (Y \setminus Z)$。于是，对于每个满足 $X \in \mathcal{G}$ 的连续映射 $f\colon X \to Y^*$，t 的原像都是开集：它要么为空，要么等于开集 $\{t\} \cup (Y \setminus (f[X] \setminus \{t\}))$ 的原像，因此在这两种情况下都是 X 中的开集，尽管 $\{t\}$ 在 Y^* 中不是开集。

至此，便完成了拓扑空间范畴 Top 中不存在强生成元的证明。关于其子范畴 Top$_i$, $i = 0, 1, 2$，只需注意到空间 Y^* 是一个正则 T_1 空间，实际上属于范畴 Top$_i$；该范畴中的单态射与 Top 中的一样有相同的刻画，因此可以仿照 Top 中的情形，论证强生成元不存在。□

请注意，单点空间是紧豪斯多夫空间在集合范畴 Set 上的单子范畴的强生成元；然而，由于该范畴不是有秩的，它仍不是局部可呈现的（见 [10]）。这一失败更一般的原因在于其对偶范畴是局部可呈现的，而该对偶范畴等价于交换 C^*-代数范畴（关于其普适代数描述，见 [20]）；事实上，局部可呈现范畴的对偶范畴绝不会局部可呈现，除非它等价于一个预序（[10],Satz 7.13）。

这一事实促使人们寻找 Top 中更多的反射子范畴，使其对偶范畴局部可呈现，或至少近乎局部可呈现。例如，在假设 Vopěnka 原理（VP）成立的情况下，Hušek 和 Rosický ´y [16]证明，实紧空间范畴的对偶范畴是局部可呈现的；即使没有这一非常强的集合论假设（VP），他们也证明了：当且仅当可测基数存在时，该对偶范畴才是近乎局部可表示的。

局部分级范畴这一概念（如 [1] 中为证明 Quillen 的“小对象论证”的一个广义版本所用）并不要求存在强生成元，因此，全子范畴 Topto 更容易纳入局部可呈现范畴这一概念的推广之中。

参考文献

[1] J. Ad´amek、H. Herrlich、J. Rosick´y 和 W. Tholen：《关于内射子范畴问题的一种广义小对象论证》，《拓扑与范畴微分几何笔记》43(2):83–106，2002.[2] J. Ad´amek、H. Herrlich 和 G.E. Strecker：《抽象与具体范畴》，John Wiley，1990.[3] J. Ad´amek 和 J. Rosick´y：《局部可呈现与可达范畴》，剑桥大学出版社，1994.[4] F. Borceux：《范畴代数手册 2：范畴与结构》，剑桥大学出版社，1994.[5] C.C. Chang 和 H.J. Keisler：《模型论》，North Holland，1973.[6] W.W. Comfort 和 S. Negrepontis：《超滤子理论》，Springer-Verlag，纽约，2011。

[7] J. Dugundji：《拓扑学》，Allyn and Bacon，1966。

[8] L. Fajstrup 和 J. Rosick´y：《有向同伦的一个便利范畴》，Theory and Applications of Categories 21:7–20，2008。[9]G. Fr¨ohlich：《集合上拓扑空间的半序系统》，《数学年刊》156（1964），79-95。[10] P. Gabriel 和 F. Ulmer：《局部可呈现范畴》，数学讲义 221，施普林格出版社，1971。[11] D.W. Hajek 和 G.E. Strecker：直极限与豪斯多夫空间。载于：J. Nov´ak（编）：《一般拓扑学及其与现代分析和代数的关系》，第三届布拉格拓扑学研讨会论文集，1971。捷克斯洛伐克科学院，1972，第165–169页。[12] H. Herrlich：《拓扑反射与余反射》，数学讲义 78，施普林格出版社，1968。[13] H. Herrlich：一般拓扑学中的反射概念。载于：L. Flachsmeyer（编）：《拓扑结构扩张理论论文集》，1967年8月14日至19日在柏林举行的研讨会论文集，学术出版社，1969，第105-114页。[14] H. Herrlich：分离公理与直极限，《加拿大数学通报》12(3):337–338，1969。[15] M. Hovey：《模型范畴》，数学调查与专著 63，美国数学会，1999。[16] M. Hu˘sek 和 J. Rosick´y：拓扑空间和一致空间中的分解与局部可呈性，《拓扑学及其应用》259:251–266，2019。[17] M. Makkai 和 R. Par´e：《可达范畴：范畴模型论基础》，美国数学会，1989。[18]mathoverflow:
m
a
t
h
o
v
e
r
f
l
o
w.
n
et/questions/288648/what-are-co
mpact-objects-in-the-category-of-topological-spaces[19] nLab:
ncatlab.org/nlab/show/compact+object#CompactObjectsInTop

[20]J. Wick Pelletier 和 J. Rosick´y：《C*-代数的等式理论》，Algebra Universalis 30:275–284，1993。[21] L. Positselski 和 J. Rosick´y：《近局部可呈范畴》，Theory and Applications of Categories 33:253–264，2018。[22] D.G. Quillen：《同伦代数》，数学讲义 43，施普林格出版社，1967。[23] L. Skula：《所有拓扑空间范畴的一个反射子范畴》，美国数学会汇刊 142: 37–41，1969。[24] A. K. Steiner：《拓扑格：结构与补》，美国数学会汇刊 122:379–398，1966。

J. Ad´amek 捷克理工大学，
布拉格，捷克共和国；布伦瑞克
工业大学，布伦瑞克，德国
j.adamek@tu-bs.de

M. Hu˘sek 查理大学数学与物理学
院，布拉格，捷克共和国
mhusek@karlin.mff.cuni.cz

J. Rosick´y 马萨里克大学数学与统计学系、
理学院，Kotlářská 2，611 37 布尔诺，
捷克共和国 rosicky@math.muni.cz

W. Tholen 约克大学数学与统计学系，多
伦多，安大略省 M3J 1P3，加拿大
tholen@yorku.ca