arXiv:2302.00160v2 [cs.LG] 8 Jul 2023

从一个数据空间到另一个数据空间的局部迁移学习

H. N. Mhaskar* 和 Ryan O'Dowd†

摘要 流形学习中的一个基本问题是，如何逼近在某个数据上的函数关系；这些数据是从一个概率分布中随机抽取的，该分布的支撑集是高维环境欧氏空间中的低维子流形。流形本质上由数据集自身定义，通常会以某种方式进行设计，使数据在流形上足够稠密。数据空间的概念是对流形的一种抽象，它概括了实现函数逼近所需的基本性质。迁移学习（元学习）的问题，是利用在一个数据集上学习函数的过程，在新的数据集上学习一个类似的函数。从函数逼近的角度来看，这意味着将一个数据空间（基数据空间）上的函数提升到另一个数据空间（目标数据空间）上。这一视角使我们能够将应用数学中的一些逆问题（例如逆 Radon 变换）与迁移学习联系起来。本文考察这样一个提升问题：假定数据仅在基数据空间的一部分上已知，我们需要确定目标数据空间中哪些子集上可以定义这种提升，以及函数及其提升的局部光滑性之间有何关系。

1.1 引言

机器学习中的一个基本问题如下：给定形式为 $\{(x_j, y_j)\}$ 的数据，并假设这些数据是从一个未知概率分布中采样得到的。目标是根据这些数据近似函数 $f(x) = \mathbb{E}(y|x)$。通常，

* 克莱蒙研究大学数学科学研究所，克莱蒙，加利福尼亚州 91711。HNM 的研究部分得到了美国陆军研究办公室资助 W911NF2110218 和美国国家科学基金会 DMS 资助 2012355 的支持。电子邮箱：hrushikesh.mhaskar@cgu.edu.

† 克莱蒙研究大学数学科学研究所，克莱蒙，加利福尼亚州 91711。电子邮箱：ryan.o'dowd@cgu.edu.

点 x_j 属于维数极高的环境欧氏空间，因此会导致所谓的维数灾难。应对这种“灾难”的策略之一，是采用流形假设；也就是说，假设点 x_j 位于环境空间中一个未知的低维子流形上。这方面一些广为人知的技术，尤其是降维技术，包括 Isomap [56], 最大方差展开（MVU）（也称为半定规划（SDP））[58], 局部线性嵌入（LLE） [51], 局部切空间对齐方法（LTSA） [59], 拉普拉斯特征映射（Leigs） [4],Hessian局部线性嵌入（HLLE） [16], 扩散映射（Dmaps） [14], 以及随机各向异性变换 [11]。Chui 和 Wang 在 [12] 中对这些方法进行了近期综述。关于扩散几何的出色入门介绍，见《应用与计算调和分析》2006 年特刊 [8] 。应用领域不胜枚举，例如文档分析 [15], 人脸识别 [29, 35, 11],高光谱成像 [10], 半监督学习 [3, 5], 图像处理 [20,6], 星系编目 [21], 以及社交网络 [57]。

流形学习理论中的大量研究都致力于理解数据定义流形的几何。例如，[31, 30] 表明，未知流形上的图册可以根据该流形上拉普拉斯-贝尔特拉米算子对应的热核来定义。 [9, 53, 52] 还给出了其他构造图册的方法，并将其应用于深度网络的研究。基于散乱数据（即位置未以解析方式预先指定的数据点 x_j ）的流形函数逼近，已在许多论文中得到详细研究，始于 [36], , 例如 [23, 24, 40, 22, 41, 42]。 [43] 成功应用了一种理论，构建了用于根据连续血糖监测设备预测血糖水平的深度网络。

在这一理论中，流形上与适当的椭圆偏微分算子相对应的热核发挥着基础性作用。 [15, 41],利用热核构造了一种多分辨率分析。另一项重要工具是基于热核特征分解的局部化核理论。 [36] 基于对谱函数的某些假设以及波传播有限速度这一性质，引入了这些局部化核。在流形的背景下， [54, 23] 证明，后一性质等价于所谓的热核高斯上界。尽管许多作者在多种背景下研究了此类上界，例如 [27, 28, 17, 33], , 但我们未能找到证明一般光滑流形具有此类上界的参考文献。因此，我们在 [42]中给出了证明。 [39, 定理 4.3], 证明了一种非常一般的方法：在我们称为数据定义空间（或其他一些论文中所称的数据空间）中，该方法可基于热核的高斯上界构造局部化核。

迁移学习（或元学习）的问题涉及基于一个数据集学习近似过程的参数，并利用这些信息快速学习另一个数据集上相应的参数，例如，[48, 37, 38]。在流形学习的背景下，一个数据集（点云）决定一个流形，因此不同的数据集对应不同的流形。因此，在数据空间的背景下，我们可以将迁移学习理解为将

一个函数从一个数据空间（基数据空间）“提升”到另一个数据空间（目标数据空间）。这一视角使我们能够将迁移学习与图像/信号处理中的一些逆问题研究统一起来。例如，合成孔径雷达（SAR）成像问题可以用逆 Radon 变换来描述 [49, 7, 46]。拉东变换的定义域和值域不同，因此该问题相当于根据位于另一个定义域上的拉东变换观测值，近似出某个定义域上的实际图像。另一个应用是分析随时间变化的高光谱图像 [13]。分析随时间拍摄的脑部磁共振成像图像中的阿尔茨海默病进展，也会遇到类似问题：研究者关注的是皮层厚度如何作为脑表面这一随时间变化的流形上的函数而发展 [32]。

受这些应用以及 Coifman 和 Hirn 的论文 [13] 启发，我们在 [39] 中研究了这样一个问题：当一个数据空间中的某些标志点与另一个数据空间中的标志点相对应时，如何将一个函数从一个数据空间提升到另一个数据空间。例如，众所周知， [34] 尽管大脑会发生变化，仍可将每个大脑视为由一个内球面参数化；根据这种参数化，在某些标准点测得的皮层厚度对疾病预后十分重要。在 [39] 中，我们研究了允许将函数从一个数据空间提升到另一个数据空间的两个数据空间所需满足的条件，并分析了函数在提升过程中光滑性的变化。

在许多应用中，关于函数的数据仅在基数据空间的一部分上可用。本文的新意在于探讨以下值得关注的问题：(1) 确定在目标数据空间的哪些子集上可以定义提升；(2) 基数据空间上的局部光滑性如何转化为提升函数的局部光滑性。在有限角度层析成像中，我们只能观测圆柱面有限部分上的拉东变换，并需要根据这些数据将图像重建为球上的函数。Natterer 的著作 [47] 对这一主题作了初步介绍。我们无意解决有限角度层析成像问题本身，而将详细研究一个由拉东变换的奇异值分解所启发的例子；该例涉及区间 $[-1,1]$上的两组不同正交多项式系统。移植定理 [44] 研究的是以下问题：已知函数 f在 $[-1,1]$ 上的展开系数，其中使用的是具有特定参数的雅可比多项式（用我们的术语来说，这是基空间展开），并将这些系数用作另一组参数对应的雅可比多项式展开的系数（用我们的术语来说，这是目标空间）。在什么条件下，关于 f以及两组雅可比多项式系统的参数，目标空间中的展开才能收敛，又会在哪些 L^p 空间中收敛？尽管这一主题已显陈旧，近来似乎又受到关注 [18, 1]。我们将通过给出一个用于一致逼近的局部化移植定理来说明我们的通用理论。

在第 1.2 节中，我们回顾单个数据空间 （这是我们对流形的抽象）背景下的一些重要结果。特别是，我们给出了此类空间上函数局部近似的一种刻画。在第 1.3 节中，我们回顾联合空间的概念（在 [39] 中以另一名称提出）。本文的主要新结果是研究将

函数从一个数据空间的子集（通常是一个球）提升到另一个数据空间。这些结果在第 1.4 节中讨论，证明见第1.5节。我们的构造中一个关键要素是局部化核的概念，而这又依赖于陶伯定理。为方便读者，该定理在附录1.5.1中给出。附录1.5.2列出了一些重要的雅可比多项式性质，这些性质将在我们的示例中用到。

1.2 数据空间

如引言中所述，流形学习的大量研究致力于学习流形的几何这一问题。对于流形上的调和分析和逼近理论，我们不需要流形可微结构的全部性质。我们对研究这些问题所需的正确假设的理解不断演进，由此产生了诸如数据定义流形、容许系统、数据定义空间等大量术语，最终形成了我们目前的认识，并在 [42] 中给出了数据空间的定义。为简便起见，本文将注意力限于紧空间的情形。我们预计将该理论推广到一般情形不会遇到严重问题，所需处理的只是大量技术细节。

因此，设定如下。

我们考虑一个紧度量测度空间 $\mathbb{X}$，其度量为 d，概率测度为 μ^*。我们取 $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为实数的非递减序列，其中$\lambda_0 = 0$，且 $\lambda_k \to \infty$ 为 $k \to \infty$；并取 $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为 $L^2(\mu^*)$ 中的正交归一集。我们假设每个 ϕ_k 都是连续的。空间中的元素

$$\Pi_n = \mathsf{span}\{\phi_k : \lambda_k < n\} \tag{1.1}$$

称为扩散多项式（阶数为 $< n$）。我们记作 $\Pi_\infty = \emptyset\, \Pi_n$。我们引入$n>0$以下记号。

$$\mathbb{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{X} : d(x, y) \le r\}, \qquad x \in \mathbb{X},\ r > 0. \tag{1.2}$$

如果 $A \subseteq \mathbb{X}$ 我们定义

$$\mathbb{B}(A, r) = \bigcup_{x \in A} \mathbb{B}(x, r). \tag{1.3}$$

有了这些设定，紧数据空间的定义如下。

定义 1 若元组 $\Xi = (\mathbb{X}, d, \mu^*, \{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}, \{\phi_k\}_{k=0}^{\infty})$ 满足以下各项条件，则称其为（**紧**）**数据空间**。

1. 对每个 $x \in \mathbb{X}, r > 0, \mathbb{B}(x, r)$ 都是紧致的。2. （**球测度条件**）存在 $q \ge 1$ 和 $\kappa > 0$，满足以下性质：对每个 $x \in \mathbb{X}, r > 0,$

$$\mu^*(\mathbb{B}(x,r)) = \mu^*\left(\{y \in \mathbb{X} : d(x,y) < r\}\right) \le \kappa r^q. \tag{1.4}$$

（特别是， $\mu^*(\{y \in \mathbb{X} : d(x,y) = r\}) = 0$。）

3. **(高斯上界)** 存在 $\kappa_1, \kappa_2 > 0$，使得对所有 $x, y \in \mathbb{X}, 0 < t \le 1$,

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\lambda_k^2 t)\phi_k(x)\phi_k(y)\right| \le \kappa_1 t^{-q/2} \exp\left(-\kappa_2 \frac{d(x,y)^2}{t}\right). \tag{1.5}$$

我们将 q 称为 Ξ的**指数** 。

数据空间的主要例子当然是黎曼流形。

例1 设 $\mathbb{X}$ 是一个光滑、紧致、连通的黎曼流形（无边界）， d 是 $\mathbb{X}$上的测地距离， μ^* 是归一化为概率测度的黎曼体积测度，$\{\lambda_k\}$是 $\mathbb{X}$上的（负）拉普拉斯-贝尔特拉米算子的特征值序列， ϕ_k 是对应于特征值 λ_k的特征函数；特别地， $\phi_0 \equiv 1$。我们已在 [42,附录 A] 中证明，高斯上界成立。因此，若满足方程（1.4）中的条件，则（$\mathbb{X}, d, \mu^*, \{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}, \{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$）是一个数据空间，其指数等于该流形的维数。

注*1* 在 [25], Friedman 和 Tillich 给出了一种在图上构造正交归一系统的方法，该系统具有波传播有限速度的性质。[23] 中证明了这一点进而意味着高斯上界。因此，一个值得探讨的问题是，能否在图上定义适当的测度和距离，使其满足数据空间的假设。

常数约定。 下文中， c、 c_1、 $\cdots$ 表示一般的正数常数，它们仅取决于所讨论的固定量，例如 Ξ、 q、κ、 κ_1、 κ_2、各种光滑性参数以及后文将引入的滤波器。同一常数在不同位置（甚至在同一个公式中）可能取不同的值。记号 $A \lesssim B$ 表示 $A \le cB$， $A \gtrsim B$ 表示 $B \lesssim A$， $A \sim B$ 表示 $A \lesssim B \lesssim A$。

例2 在这个例子中，我们令 $\mathbb{X} = [0, \pi]$，并且对于 θ_1， $\theta_2 \in \mathbb{X}$，我们简单地将距离定义为

$$d(\theta_1, \theta_2) = |\theta_1 - \theta_2|. \tag{1.6}$$

我们将考虑所谓的三角函数 [50]

$$\phi_n^{(\alpha,\beta)}(\theta) = (1-\cos\theta)^{\alpha/2+1/4}(1+\cos\theta)^{\beta/2+1/4} p_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta), \tag{1.7}$$

其中， $p_n^{(\alpha,\beta)}$是按附录1.5.2中的定义正交归一化的雅可比多项式， $\alpha, \beta \ge -1/2$。我们定义

$$d\mu^*(\theta) = \frac{1}{\pi} d\theta. \tag{1.8}$$

我们看到，在公式 (1.96) 中进行变量变换 $x = \cos\theta$ 后，可得到以下正交条件

$$\int_0^\pi \phi_n^{(\alpha,\beta)}(\theta)\phi_m^{(\alpha,\beta)}(\theta)d\theta = \delta_{n,m}. \tag{1.9}$$

因此，关于 μ^* 的函数正交归一集将是 $\{\sqrt{\pi}\phi_n^{(\alpha,\beta)}\}$。已在 [50] 中证明，对于

$$\lambda_n = n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \tag{1.10}$$

我们有

$$\pi\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-\lambda_n^2 t\right)\phi_n^{(\alpha,\beta)}(\theta_1)\phi_n^{(\alpha,\beta)}(\theta_2) \lesssim t^{-1/2}\exp\left(-c\frac{d(\theta_1,\theta_2)^2}{t}\right), \quad \theta_1,\theta_2 \in \mathbb{X}。 \tag{1.11}$$

总之，

$$\Xi = (\mathbb{X}, d, \mu^*, \{\lambda_n\}, \{\sqrt{\pi}\phi_n^{(\alpha,\beta)}\}) \tag{1.12}$$

是一个指数为 1 的数据空间。

下面的例子说明，如何像例1中那样将带边界的流形变换为闭流形。我们将使用附录1.5.2中的记号和事实，但不总是明确提及它们。我们采用记号

$$\mathbb{S}^q = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{q+1} : |\mathbf{x}| = 1\}, \qquad \mathbb{S}_+^q = \{\mathbf{x}\in\mathbb{S}^q : x_{q+1} \geq 0\}. \tag{1.13}$$

例3 令 μ_q^* 表示 $\mathbb{S}^q$的体积测度，并将其归一化为概率测度。令 $\mathbb{H}_n^q$ 表示 $\mathbb{S}^q$ 上次数为 n 、以 $q+1$ 个变量构成的齐次调和多项式的限制所组成的空间，并令 $\{Y_{n,k}\}_k$ 为 $\mathbb{H}_n^q$的一组关于 μ_q^*正交归一的基。这些多项式$Y_{n,k}$ 是流形 $\mathbb{S}^q$ 上拉普拉斯-贝尔特拉米算子的特征函数，其特征值为 $n(n+q-1)$。ξ, $\eta\in\mathbb{S}^q$ 之间的测地距离为 $\arccos(\xi\cdot\eta)$，因此流形的高斯上界形式为

$$\sum_{n,k}\exp(-n(n+q-1)t)Y_{n,k}(\mathbf{x})\overline{Y_{n,k}(\mathbf{y})} \lesssim t^{-q/2}\exp\left(-c\frac{(\arccos(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}))^2}{t}\right). \tag{1.14}$$

因此，$(\mathbb{S}^q,\ \arccos(\circ\cdot\circ),\ \mu_q^*,\ \{\lambda_n\}_n,\ \{Y_{n,\ k}\}_{n,\ k})$ 是一个维数为q的数据空间。

现在我们考虑

$$\mathbb{X} = \mathbb{B}^q = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^q : |\mathbf{x}| \leq 1\}.$$

我们可以如下将 $\mathbb{B}^q$ 与 $\mathbb{S}_+^q$ 对应起来。任意一点 $\mathbf{x}\in\mathbb{B}^q$ 都可写成 $\mathbf{x} = \omega\sin\theta$的形式，其中 $\omega\in\mathbb{S}^{q-1}$, $\theta\in[0,\pi/2]$。我们记 $\hat{}\mathbf{x} = (\omega\sin\ \theta, \cos\ \theta)\ \in\mathbb{S}_+^q$。通过这种对应，$\mathbb{S}_+^q$ 由 $\mathbb{B}^q$ 参数化，我们定义

$$
\begin{aligned}
d\mu^*(\mathbf{x}) = d\mu_q^*(\hat{\mathbf{x}}) =& \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^q)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}_+^q)}(1-|\mathbf{x}|^2)^{-1/2}dm^*(\mathbf{x}) \\
=& \frac{\Gamma((q+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(q/2+1)}(1-|\mathbf{x}|^2)^{-1/2}dm^*(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{1.15}
$$

其中， μ_q^* 是 $\mathbb{S}_+^q$ 上的概率体积测度， m^* 是 $\mathbb{B}^q$ 上的概率体积测度。定义 $\mathbb{B}^q$ 上的距离也很方便，具体如下：

$$
d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \arccos(\hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_2) = \arccos(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 + \sqrt{1-|\mathbf{x}_1|^2}\sqrt{1-|\mathbf{x}_2|^2}). \tag{1.16}
$$

所有次数为 $2n$ 的球谐函数在 $\mathbb{S}^q$ 上都是偶函数。因此，根据上述对测度的等同表示，可以将偶球谐函数表示为 $\mathbb{B}^q$ 上的一个正交归一函数系。也就是说，通过定义

$$
P_{2n,k}(\mathbf{x}) = \sqrt{2}Y_{2n,k}(\hat{\mathbf{x}}), \tag{1.17}
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}^q} P_{2n,k}(\mathbf{x})\overline{P_{2n',k'}(\mathbf{x})}d\mu^*(\mathbf{x}) =& 2\int_{\mathbb{S}_+^q} Y_{2n,k}(\hat{\mathbf{x}})\overline{Y_{2n',k'}(\hat{\mathbf{x}})}d\mu_q^*(\hat{\mathbf{x}}) \\
=& \int_{\mathbb{S}^q} Y_{2n,k}(\xi)\overline{Y_{2n',k'}(\xi)}d\mu_q^*(\xi) \\
=& \delta_{(n,k),(n',k')}.
\end{aligned} \tag{1.18}
$$

为了证明$Y_{2n,\ k}$ 在 $\mathbb{B}^q$ 上的高斯上界，首先注意到，根据加法公式（1.101）和（1.98），我们可推得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\dim(\mathbb{H}_{2n}^q)} P_{2n,k}(\mathbf{x})\overline{P_{2n,k}(\mathbf{y})} \\
=& \sum_{k=1}^{\dim(\mathbb{H}_{2n}^q)} Y_{2n,k}(\hat{\mathbf{x}})\overline{Y_{2n,k}(\hat{\mathbf{y}})} \\
=& \frac{\omega_q}{\omega_{q-1}} p_{2n}^{(q/2-1,q/2-1)}(1)p_{2n}^{(q/2-1,q/2-1)}(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}) \\
=& \frac{\omega_q}{\omega_{q-1}} 2^{(q-1)/2} p_n^{(q/2-1,-1/2)}(1)p_n^{(q/2-1,-1/2)}(\cos(2\arccos(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}))).
\end{aligned} \tag{1.19}
$$

根据方程（1.95），我们定义

$$
\lambda_n = \sqrt{n(n+q/2-1/2)}, \tag{1.20}
$$

这一点恰好不依赖于 k。利用（1.100），我们可以看到，对于 $t>0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\dim(\mathbb{H}_{2n}^{q})}\exp\left(-\lambda_n^2 t\right)P_{2n,k}(\mathbf{x})\overline{P_{2n,k}(\mathbf{y})}$$

$$\sim\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-n(n+q/2-1/2)t)p_n^{(q/2-1,-1/2)}(1)p_n^{(q/2-1,-1/2)}(\cos(2\arccos(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}})))$$

$$\lesssim t^{-q/2}\left(-4c\frac{\arccos(\hat{\mathbf{x}}_1\cdot\hat{\mathbf{x}}_2)^2}{t}\right). \tag{1.21}$$

因此，$(\mathbb{B}^q,\ d,\ \mu^*,\ \{\lambda_n\}_n,\ \{P_{2n,\ k}\}_{n,\ k})$ 是一个指数为 q 的数据空间。

本节中，我们假设 Ξ 是一个固定的数据空间，并在记号中省略对它的提及。为避免混淆，我们会在论文的其他部分再提及它。接下来，我们定义 $\mathbb{X}$ 上函数的光滑性类。在没有可微结构的情况下，我们按照逼近理论中的惯例来定义。首先，我们将函数$f\in L^p(\mu^*)$的逼近阶定义为

$$E_n(p,f)=\min_{P\in\Pi_n}\|f-P\|_{p,\mu^*},\qquad n>0,1\le p\le\infty,\ f\in L^p(\mu^*). \tag{1.22}$$

我们认为，用 X^p 表示空间 $\{f\in L^p(\mu^*):\lim E_n(p,f)=0\}$;$n\to\infty$ 很方便；例如，在流形情形下，若 $1\le p<\infty$，则为 $X^p=L^p(\mu^*)$，且 $X^\infty=C(\mathbb{X})$。在例3中，我们需要将范围限制为偶函数。

定义2 令 $1\le p\le\infty,\gamma>0$。
(a) 对于 $f\in X^p$，我们定义

$$\|f\|_{W_{\gamma,p}}=\|f\|_{p,\mu^*}+\sup_{n>0}n^\gamma E_n(p,f), \tag{1.23}$$

并注意到

$$\|f\|_{W_{\gamma,p}}\sim\|f\|_{p,\mu^*}+\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}2^{n\gamma}E_{2^n}(p,f). \tag{1.24}$$

该空间$W_{\gamma,\ p}$由所有满足 $\mathrm{k}\ f\mathrm{k}_{W_{\gamma,\ p}}<\infty$ 的 f组成。
(b) 我们记作 $C^\infty=\grave{\mathrm{U}}\,W_{\gamma,\ \infty}$。若 B 是$\mathbb{X}$中的一个球，$C^\infty(B)$ 由函数 $f\in C^\infty$ $\gamma>0$组成
which 其支集 d 位于 B 上。
(c) 若 $x_0\in\mathbb{X}$，空间 $W_{\gamma,\ p}(x_0)$ 由函数 f组成，且存在 $r>0$，使得对每个 $\phi\in C^\infty(\mathbb{B}(x_0,\ r))$，$\phi f\in W_{\gamma,\ p}$。若 $A\subset\mathbb{X}$，空间$W_{\gamma,\ p}(A)=\grave{\mathrm{U}}\,W_{\gamma,\ p}(x_0)$；也就是说，$W_{\gamma,\ p}(A)$ 由满足下述条件的函数组成：对每个 $x_0\in A$，该函数都属于 $W_{\gamma,\ p}(x_0)_{x_0\in A}$。

逼近理论的核心主题之一，是根据某些空间中的逼近阶来刻画光滑性空间$W_{\gamma,\ p}$；在我们的情形中，考虑的是 Π_n。

为此，我们定义一些局部化核和算子。

这些核定义如下：

$$\Phi_n(H;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}H\left(\frac{\lambda_m}{n}\right)\phi_m(x)\phi_m(y), \tag{1.25}$$

其中 $H:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个紧支撑函数。

与核 Φ_n 对应的算子定义为

$$\sigma_n(H;f,x)=\int_{\mathbb{X}}\Phi_n(H;x,y)f(y)d\mu^*(y)=\sum_{k:\lambda_k<n}H\left(\frac{\lambda_k}{n}\right)\hat{f}(k)\phi_k(x), \tag{1.26}$$

其中

$$\hat{f}(k)=\int_{\mathbb{X}}f(y)\phi_k(y)d\mu^*(y). \tag{1.27}$$

下面的命题概述了这些核的一个重要性质。命题1在 [36], 中得到证明，后来在更大的一般性下于 [39, 定理4.3]中得到证明。

命题1 设 $S>q+1$ 为一个整数，$H:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为偶函数、S 次连续可微的紧支撑函数。那么对于任意 x、$y\in\mathbb{X}$、$N>0$，

$$|\Phi_N(H;x,y)|\lesssim\frac{N^q}{\max(1,(Nd(x,y))^S)}, \tag{1.28}$$

其中该常数可能取决于 H 和 S，但不依赖于 N、x或 y。

在本文余下部分中，我们固定一个滤波器 h；也就是说，一个无穷次可微函数 $h:\ [0,\infty)\to[0,1]$，满足 $h(t)=1$ for $0\le t\le 1/2$，$h(t)=0$ for $t\ge 1$。通过令 $h(-t)=h(t)$，滤波器 h 的定义域可扩展至 $\mathbb{R}$。由于 h 是固定的，除非我们认为省略它会造成混淆，否则在记号中将不再提及它。下面的定理给出了这些算子的一项关键性质。我们曾在不同背景下于数篇论文中证明过这一性质；近期的一个证明见 [42]。

定理 1 设 $n>0$。若 $P\in\Pi_{n/2}$，则 $\sigma_n(P)=P$。此外，对于任意满足 $1\le p\le\infty$ 的 p，

$$\|\sigma_n(f)\|_p\lesssim\|f\|_p,\qquad f\in L^p. \tag{1.29}$$

若 $1\le p\le\infty$，且 $f\in L^p(\mathbb{X})$，则

$$E_n(p,f)\le\|f-\sigma_n(f)\|_{p,\mu^*}\lesssim E_{n/2}(p,f). \tag{1.30}$$

特别是，定理 1 给出了全局光滑空间$W_{\gamma,\ p}$的刻画，而要刻画局部光滑性，还需要两个假设：单位分解和乘积假设。

定义3（单位分解）我们称集合 X 具有单位分解，若对每个 $r>0$，都存在一个可数族 $\Gamma_r=\{\psi_{k,\ r}\}_{k=0}^{\infty}$，由满足以下性质的 C^∞ 函数构成：

1. 每个 $\psi_{k,\ r} \in \mathrm{F}_r$ 都支撑于某个 $\mathbb{B}(x_k,\ r)$。2. 对每个 $\psi_{k,\ r} \in \mathrm{F}_r$ 以及 $x \in X$, $0 \leq \psi_{k,\ r}(x) \leq 1$。3. 对每个 $x \in X$，都存在一个有限子集 $\mathrm{F}_r(x) \subseteq \mathrm{F}_r$（其基数有一个与 x 无关的上界），使得对所有 $y \in \mathbb{B}(x,\ r)$

$$\sum_{\psi_{k,r} \in \mathcal{F}_r(x)} \psi_{k,r}(y) = 1. \tag{1.31}$$

定义 4（乘积假设）我们称数据空间 Ξ 满足乘积假设，如果存在 $A^* \geq 1$ 以及一个族 $\{R_{j,\ k,\ n} \in \Pi_{A^*n}\}$，使得对于每个$S > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} n^S \left(\max_{\lambda_k, \lambda_j < n} \left\| \phi_k \phi_j - R_{j,k,n} \right\|_{\mathbb{X}} \right) = 0. \tag{1.32}$$

如果对于每个 $n > 0$ 和 $P,\ Q \in \Pi_n$，我们都有 $PQ \in \Pi_{A^*n}$，那么我们称 Ξ满足**强乘积假设**。

在最重要的流形情形中，单位分解假设总是成立的 [19, 第 0 章，定理 5.6]。文献 [26, 24] 证明了，如果 ϕ_k是黎曼流形上某些微分方程的特征函数，而 λ_k是相应的特征值，那么强乘积假设成立。我们不知道有任何不满足此性质的例子，但也无法证明它在一般情况下成立。因此，我们将其列为一个假设。

我们对局部光滑性（[22, 41, 42]）的刻画如下。

定理 2 设 $1 \leq p \leq \infty, \gamma > 0, f \in X^p, x_0 \in \mathbb{X}$。我们假设单位分解和乘积假设成立。则以下条件等价。

(a) $f \in W_{\gamma,p}(x_0)$。(b) 存在一个以 x_0 为中心的球 $\mathbb{B}$，使得

$$\sup_{n\geq 0} 2^{n\gamma} \| f - \sigma_{2^n}(f) \|_{p,\mu^*,\mathbb{B}} < \infty. \tag{1.33}$$

直接推论如下。

推论 1 设 $1 \leq p \leq \infty, \gamma > 0, f \in X^p, A$ 是 $\mathbb{X}$ 的紧子集。我们假设单位分解和乘积假设成立。则以下条件等价。

(a) $f \in W_{\gamma,p}(A)$。(b) 存在 $r > 0$，使得

$$\sup_{n\geq 0} 2^{n\gamma} \| f - \sigma_{2^n}(f) \|_{p,\mu^*,\mathbb{B}(A,r)} < \infty. \tag{1.34}$$

1.3 联合数据空间

为了阐明本节中的定义，我们先来看几个例子。

例4 设 $\Xi_j = (\mathbb{X}_j,\ d_j,\ \mu_j^*,\ \{\lambda_{j,\ k}\}_{k=0}^{\infty},\ \{\phi_{j,\ k}\}_{k=0}^{\infty})$、 $j = 1,\ 2$ 是两个指数为 q 的数据空间。我们分别将它们的热核记为

$$K_{j,t}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\lambda_{j,k}^2 t)\phi_{j,k}(x)\phi_{j,k}(y), \qquad j = 1,2,\ x,y \in \mathbb{X},\ t > 0,$$

在论文 [13], 中，Coifman 和 Hirn 假设 $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}_2 = \mathbb{X}$, $\mu_1^* = \mu_2^* = \mu^*$，并提出点 x_1, x_2 之间的扩散距离为以下表达式的平方根:

$$K_{1,2t}(x_1,x_2) + K_{2,2t}(x_2,x_2) - 2\int_{\mathbb{X}} K_{1,t}(x_1,y)K_{2,t}(y,x_2)d\mu^*(y).$$

仅在此例中，记作

$$A_{j,k} = \int_{\mathbb{X}} \phi_{1,j}(y)\phi_{2,k}(y)d\mu^*(y), \tag{1.35}$$

可得

$$\int_{\mathbb{X}} K_{1,t}(x_1,y)K_{2,t}(y,x_2)d\mu^*(y) = \sum_{j,k} \exp\left(-(\lambda_{1,j}^2 + \lambda_{2,k}^2)t\right) A_{j,k}\phi_{1,j}(x_1)\phi_{2,k}(x_2). \tag{1.36}$$

此外，高斯上界条件意味着

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{X}} K_{1,t}(x_1,y)K_{2,t}(y,x_2)d\mu^*(y) &\lesssim t^{-q}\int_{\mathbb{X}} \exp\left(-c\frac{d_1(x_1,y)^2 + d_2(y,x_2)^2}{t}\right)d\mu^*(y) \\ &\lesssim t^{-q}\exp\left(-c\frac{\left(\min_{y\in\mathbb{X}}\left(d_1(x_1,y) + d_2(y,x_2)\right)\right)^2}{t}\right).\end{aligned} \tag{1.37}$$

仅在此例中，记作

$$d_{1,2}(x_1,x_2) = \min_{y\in\mathbb{X}}\left(d_1(x_1,y) + d_2(y,x_2)\right) = d_{2,1}(x_2,x_1),$$

我们观察到，对于任意 $x_1, x_1', x_2, x_2' \in \mathbb{X}$,

$$\begin{aligned} d_{1,2}(x_1,x_2) &\le d_{1,2}(x_1',x_2) + d_1(x_1,x_1'), \\ d_{1,2}(x_1,x_2) &\le d_{1,2}(x_1,x_2') + d_1(x_2,x_2'). \end{aligned}$$

例5 在本例中，我们令 $\alpha_i,\ \beta_i \ge -1/2$ 对于 $i = 1,\ 2$，并假设 $a = |\alpha_1 - \alpha_2|/2,\ b = |\beta_1 - \beta_2|/2 \in \mathbb{N}$。然后，我们选择如下两个数据空间，其定义见例2

$$\Xi_i = ([0,\pi], d_i, \frac{1}{\pi}d\theta, \{\lambda_{i,n}\}, \{\sqrt{\pi}\phi_n^{(\alpha_i,\beta_i)}\}). \tag{1.38}$$

由于两个空间已经具有相同的距离，我们将相应地为这些系统定义一个联合距离：

$$d_{1,2}(\theta_1,\theta_2)=d_1(\theta_1,\theta_2)=d_2(\theta_1,\theta_2)=|\theta_1-\theta_2|. \tag{1.39}$$

与上面的例4类似，我们考虑具有相同底层空间和测度的两个数据空间。不过，这次我们采用不同的方式。记作

$$\Omega(\theta)=(1-\cos\theta)^a(1+\cos\theta)^b. \tag{1.40}$$

令 $\overline{\alpha}=\max(\alpha_1,\alpha_2)$ 和 $\overline{\beta}=\max(\beta_1,\beta_2)$。于是定义

$$\begin{aligned}A_{m,n}&=\int_0^\pi \phi_m^{(\alpha_1,\beta_1)}(\theta)\phi_n^{(\alpha_2,\beta_2)}(\theta)\Omega(\theta)d\theta\\&=\int_0^\pi p_m^{(\alpha_1,\beta_1)}(\cos\theta)p_n^{(\alpha_2,\beta_2)}(\cos\theta)(1-\cos\theta)^{\overline{\alpha}+1/2}(1+\cos\theta)^{\overline{\beta}+1/2}d\theta.\end{aligned} \tag{1.41}$$

雅可比多项式的正交性告诉我们，$A_{m,n}=0$ 至少当$m>n+2a+2b$ 或 $n>m+2a+2b$时成立。此外，我们还有以下两个和式

$$\sum_n A_{m,n}\phi_n^{(\alpha_2,\beta_2)}(\theta)=\Omega(\theta)\phi_m^{(\alpha_1,\beta_1)}(\theta),\quad \sum_m A_{m,n}\phi_m^{(\alpha_1,\beta_1)}(\theta)=\Omega(\theta)\phi_n^{(\alpha_2,\beta_2)}(\theta). \tag{1.42}$$

我们定义 $l_{m.n}=\mathrm{q}\sqrt{\lambda_{1,m}^2+\lambda_{2,n}^2}$，利用 Ξ_t的高斯上界性质和方程（1.42），按照例4中的方法可推得

$$\begin{aligned}&\left|\pi\sum_{m,n}\exp\left(-\ell_{m,n}^2t\right)A_{m,n}\phi_m^{(\alpha_1,\beta_1)}(\theta_1)\phi_n^{(\alpha_2,\beta_2)}(\theta_2)\right|\\=&\left|\int_0^\pi K_{1,t}(\theta_1,\phi)K_{2,t}(\phi,\theta_2)\Omega(\phi)d\phi\right|\\\lesssim&t^{-1}\exp\left(-c\frac{d_{1,2}(\theta_1,\theta_2)^2}{t}\right).\end{aligned} \tag{1.43}$$

我们注意到（参见 [42, 引理5.2]），

$$\begin{aligned}&\pi\sum_{m,n:\ell_{m,n}<N}\left|A_{m,n}\phi_m^{(\alpha_1,\beta_1)}(\theta_1)\phi_n^{(\alpha_2,\beta_2)}(\theta_2)\right|\\\lesssim&||\Omega||_{[0,\pi]}\sum_{m:\lambda_{1,m}<N}\left|\phi_m^{(\alpha_1,\beta_1)}(\theta_1)\phi_m^{(\alpha_1,\beta_1)}(\theta_2)\right|\\\lesssim&N.\end{aligned} \tag{1.44}$$

受这些例子的启发，我们现在给出一系列定义，最终引出定义 7。首先，我们定义联合距离的概念。

定义 5 设 $\mathbb{X}_1$、 $\mathbb{X}_2$ 是度量空间，且每个 $\mathbb{X}_j$ 都配备一个度量 d_j。若函数 $d_{1,2}$: $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \to [0,\infty)$ 满足以下**广义三角不等式**，则称其为**联合距离**，其中 $x_1, x_1' \in \mathbb{X}_1$ 和 $x_2, x_2' \in \mathbb{X}_2$:

$$\begin{aligned} d_{1,2}(x_1,x_2) &\le d_1(x_1,x_1') + d_{1,2}(x_1',x_2), \\ d_{1,2}(x_1,x_2) &\le d_{1,2}(x_1,x_2') + d_2(x_2',x_2). \end{aligned} \tag{1.45}$$

为方便记号，我们记作 $d_{2,1}(x_2, x_1) = d_{1,2}(x_1, x_2)$。那么，对于 $r > 0, x_1 \in \mathbb{X}_1$, $x_2 \in \mathbb{X}_2, A_1 \subset \mathbb{X}_1, A_2 \subset \mathbb{X}_2$，定义

$$\mathbb{B}_1(x_1,r) = \{z \in \mathbb{X}_1 : d_1(x_1,z) \le r\}, \mathbb{B}_2(x_2,r) = \{z \in \mathbb{X}_2 : d_2(x_2,z) \le r\}, \mathbb{B}_{1,2}(x_1,r) = \{z \in \mathbb{X}_2 : d_{1,2}(x_1,z) \le r\}, \mathbb{B}_{2,1}(x_2,r) = \{z \in \mathbb{X}_1 : d_{2,1}(x_2,z) \le r\},$$

$$\begin{aligned} d_{1,2}(A_1,x_2) &= \inf_{x \in A_1 \subseteq \mathbb{X}_1} d_{1,2}(x,x_2), \\ d_{1,2}(x_1,A_2) &= d_{2,1}(A_2,x_1) = \inf_{y \in A_2 \subseteq \mathbb{X}_2} d_{2,1}(y,x_1). \end{aligned} \tag{1.46}$$

这里提醒一下，空集上的下确界定义为 ∞。

定义 6 令 $\mathbf{A} = (A_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$(**连接系数**) 和 $\mathbf{L} = (l_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$(**联合特征值**) 是双无限矩阵。对于 $x_1 \in \mathbb{X}_1$, $x_2 \in \mathbb{X}_2$, $t > 0$, **联合热核** 形式上定义为

$$\begin{aligned} K_t(\Xi_1,\Xi_2;x_1,x_2) &= K_t(\Xi_1,\Xi_2;\mathbf{A},\mathbf{L};x_1,x_2) \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \exp(-\ell_{j,k}^2 t) A_{j,k} \phi_{1,j}(x_1) \phi_{2,k}(x_2) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j,k:\ell_{j,k}<n} \exp(-\ell_{j,k}^2 t) A_{j,k} \phi_{1,j}(x_1) \phi_{2,k}(x_2). \end{aligned} \tag{1.47}$$

定义 7 对于 $m = 1, 2$，设 $\Xi_m = (\mathbb{X}_m, d_m, \mu_m^*, \{\lambda_{m,k}\}_{k=0}^{\infty}, \{\phi_{m,k}\}_{k=0}^{\infty})$是紧数据空间。使用上述记号，假设每个 $l_{j,k} \ge 0$，并且对于任意 $u > 0$，集合 $\{(j,k) : l_{j,k} < u\}$ 是有限的。称一个**联合（紧）数据空间** Ξ 为一个元组

$$(\Xi_1, \Xi_2, d_{1,2}, \mathbf{A}, \mathbf{L}),$$

其中，以下每个条件都对某个 $Q > 0$ 成立:

1.（**联合正则性**）存在 $q_1, q_2 > 0$，使得

$$\mu_1^*(\mathbb{B}_{2,1}(x_2,r)) \le c r^{q_1}, \quad \mu_2^*(\mathbb{B}_{1,2}(x_1,r)) \le c r^{q_2}, \qquad x_1 \in \mathbb{X}_1,\ x_2 \in \mathbb{X}_2,\ r > 0. \tag{1.48}$$

2.（**变差界**）对于每个 $n > 0$,

$$\sum_{j,k:\ell_{j,k}<n} \left| A_{j,k} \phi_{1,j}(x_1) \phi_{2,k}(x_2) \right| \lesssim n^Q, \qquad x_1 \in \mathbb{X}_1,\ x_2 \in \mathbb{X}_2. \tag{1.49}$$

3.（**联合高斯上界**）对于所有 $x_1 \in \mathbb{X}_1$、$x_2 \in \mathbb{X}_2$，(1.47) 中的极限存在，并且

$$|K_t(\Xi_1, \Xi_2; x_1, x_2)| \le c_1 t^{-c} \exp\left(-c_2 \frac{d_{1,2}(x_1, x_2)^2}{t}\right), \qquad x_1 \in \mathbb{X}_1,\ x_2 \in \mathbb{X}_2. \tag{1.50}$$

我们将（Q，q_1，q_2）称为联合数据空间的**（联合）指数**。

与方程（1.25）中定义的核相对应的核如下，其中 $H\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是一个紧支撑函数。

$$\Phi_n(H, \Xi_1, \Xi_2; x_1, x_2) = \sum_{j,k=0}^{\infty} H\left(\frac{\ell_{j,k}}{n}\right) A_{j,k} \phi_{1,j}(x_1) \phi_{2,k}(x_2). \tag{1.51}$$

对于 $f \in L^1(\mu_2^*) + L^\infty(\mu_2^*)$ 和 $x_1 \in \mathbb{X}_1$，我们还定义

$$\begin{aligned} \sigma_n(H, \Xi_1, \Xi_2; f)(x_1) &= \int_{\mathbb{X}_2} f(x_2) \Phi_n(H, \Xi_1, \Xi_2; x_1, x_2) d\mu_2^*(x_2) \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} H\left(\frac{\ell_{j,k}}{n}\right) A_{j,k} \hat{f}(\Xi_2; k) \phi_{1,j}(x_1). \end{aligned} \tag{1.52}$$

核的局部化性质见以下命题（参见[39, 方程（4.5）]）。

命题 2 设 $S > Q + 1$ 为整数，$H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为偶函数、S 次连续可微且紧支撑的函数。那么对于每个 $x_1 \in \mathbb{X}_1, x_2 \in \mathbb{X}_2, N > 0$,

$$|\Phi_N(H, \Xi_1, \Xi_2; x_1, x_2)| \lesssim \frac{N^Q}{\max(1, (N d_{1,2}(x_1, x_2))^S)}, \tag{1.53}$$

其中涉及的常数可能依赖于 H 和 S，但不依赖于 N, x_1, x_2。

在下文中，我们固定 H 为第 1.2 节中引入的滤波器 h，并在所有记号中省略对它的提及。此外，我们固定 $S > \max(Q, q_1, q_2) + 1$，但也可能根据需要对 S 增加额外条件。和之前一样，所有常数都可能依赖于 h 和 S。

在本文余下部分，我们取 $p = \infty$，只讨论定义在 $\mathbb{X}_1$ 或 $\mathbb{X}_2$ 上的连续函数，并用 $\mathrm{k}\, f \mathrm{k}_K$ 表示 f 在集合 K 上的上确界范数。因此，我们将在光滑性类的记号中省略下标 p；例如，我们将写作 $W_\gamma(\Xi_1; B)$，而不写作 $W_{\gamma,\infty}(\Xi_1; B)$。由于黎斯-托林插值定理，当 $p < \infty$ 时，下文的结果也类似，但这会使记号更加繁琐，却不会带来任何明显的新见解。

我们以方程（1.52）中定义的算子所满足的一个条件结束本节，该条件对我们的目的很有用。

定义 8（多项式保持条件）设 $(\Xi_1,\ \Xi_2,\ d_{1,\ 2}、\ \mathbf{A}、\ \mathbf{L})$ 为一个联合数据空间。若存在某个 $c^* > 0$，使得当 $P_n \in \Pi_n(\Xi_2)$ 时，对于所有 $m \geq c^* n$，都有 $\sigma_m(\Xi_1,\ \Xi_2;\ P_n) = \sigma_{c^* n}(\Xi_1,\ \Xi_2;\ P_n)$，则称满足**多项式保持条件**。

注 *2* 若对任意 $n > 0$，都有以下包含关系，则多项式保持条件成立：

$$\{(i,j) : A_{i,j} \neq 0, \lambda_{2,j} < n\} \subseteq \{(i,j) : \ell_{i,j} \leq c^* n, \lambda_{1,i} < c^* n\}. \tag{1.54}$$

例 6 我们沿用例 2 和例 5 中的相同记号。结合定义 7，我们现在看到，$(\Xi_1,\ \Xi_2,\ d_{1,\ 2},\ \mathbf{A},\ \mathbf{L})$ 是一个指数为 $(1,\ 1,\ 1)$ 的联合数据空间。显然，这些空间都满足单位分解和强乘积假设。还可以回想一下，$A_{m,\ n} = 0$ 至少在 $m > n + 2a + 2b$ 时成立，因此存在 c^*，使得公式（1.54）成立。由此，我们得出多项式保持条件成立。

1.4 联合数据空间中的局部近似

本节中，我们假设一个与第 1.3 节中相同的固定联合数据空间。我们关注以下问题。假设 $f \in C(\mathbb{X}_2)$，并且我们只在紧集 $A \subseteq \mathbb{X}_2$ 的邻域内掌握关于 f 的信息。在 f 和子集 $B \subseteq \mathbb{X}_1$ 满足什么条件时，才能将 f 提升为定义在 B 上的函数 $\mathrm{E}(f)$？此外，$\mathrm{E}(f)$ 在 B 上的局部光滑性如何取决于 f 在 A 上的局部光滑性？现在我们给出 $\mathrm{E}(f),\ A,\ B$ 的定义，并将围绕它们探讨上述问题。

定义 9 给定 $f \in C(\mathbb{X}_2)$，我们将**提升函数** $\mathrm{E}(f)$定义为极限

$$\mathcal{E}(f) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(\Xi_1, \Xi_2; f), \tag{1.55}$$

如果该极限存在。

定义 10 令 $r,\ s > 0$ 和 $A \subseteq \mathbb{X}_2$ 为一个紧子集，并且存在一个紧子集 $B^- \subset \mathbb{X}_1$ 使得

$$B^- \subseteq \{x_1 : d_{1,2}(x_1, \mathbb{X}_2 \setminus A) \geq s + r\} \tag{1.56}$$

对于某个 $r > 0$。随后我们将 A 的**像集** 定义为

$$\mathcal{I}(r, s; A) = \mathbb{B}_1(B^-, s) = \{x_1 : d_1(x_1, B^-) \leq s\}. \tag{1.57}$$

如果集合 B^- 不存在，则我们定义 $\mathrm{I}(r,\ s;\ A) = \emptyset$。

注 *3* 在下文中，我们固定 $r,\ s > 0$ 以及一个紧子集 $A \subseteq \mathbb{X}_2$，使得公式（1.56）中定义的 B^- 非空。我们记 $B = \mathrm{I}(r,\ s;\ A)$。注意，由于广义三角不等式（1.45），我们具有以下重要性质

$$B^{-} \subsetneq B \subseteq \{x_1 : d_{1,2}(x_1, \mathbb{X}_2 \setminus A) \geq r\}. \tag{1.58}$$

现在我们陈述主定理。尽管定理的表述中没有明确提及 B^{-}，但注释 4 和例 7 阐明了采用这种构造的益处。

定理 3 设$(\Xi_1, \Xi_2, d_{1,2}, \mathbf{A}, \mathbf{L})$ 为一个指数为(Q, q_1, q_2)的联合数据空间。假设多项式保持条件以参数 c^* 成立。设 $\mathbb{X}_2$ 具有一个单位分解。

(a) 设 $f \in C(\mathbb{X}_2)$，满足

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m(Q-q_2)} \left|\left|\sigma_{2^{m+1}}(\Xi_2; f) - \sigma_{2^m}(\Xi_2; f)\right|\right|_A < \infty. \tag{1.59}$$

则，按照定义 9 定义的$\mathcal{E}(f)$ 在 B 上存在，并且对于 $c^* r 2^n \geq 1$，有

$$\begin{aligned}\left|\left|\mathcal{E}(f) - \sigma_{c^* 2^n}(\Xi_1, \Xi_2; f)\right|\right|_B \lesssim & 2^{n(Q-q_2)} \left|\left|f - \sigma_{2^n}(\Xi_2; f)\right|\right|_A + \left|\left|f\right|\right|_{\mathbb{X}_2} 2^{n(Q-S)} r^{q_2 - S} \\ & + \sum_{m=n}^{\infty} 2^{m(Q-q_2)} \left|\left|\sigma_{2^{m+1}}(\Xi_2; f) - \sigma_{2^m}(\Xi_2; f)\right|\right|_A .\end{aligned} \tag{1.60}$$

特别地，若 Ξ_1 满足强乘积假设，$\mathbb{X}_1$ 具有一个单位分解，并且给定 $\alpha > 0$，使得对于所有 j、$k \in \mathbb{N}$，$\alpha l_{j,k} \geq \lambda_{1,j}$，则 $\sigma_n(\Xi_1, \Xi_2; f) \in \Pi_{\alpha n}(\Xi_1)$。

(b) 若进一步有 $f \in W_\gamma(\Xi_2; A)$ 且 $Q - q_2 < \gamma < S - q_2$，则$\mathcal{E}(f)$ 在 B 上连续，并且对于 $\phi \in C^\infty(B)$，有 $\phi\mathcal{E}(f) \in W_{\gamma - Q + q_2}(\Xi_1)$。

注释 4 根据定理 3 的假设，$\mathrm{E}(f)$ 不一定在 $\mathbb{X}_1$ 的整个范围内连续（甚至在 B 之外也未必有定义）。因此，在 3(b) 的情形下，我们无法说 $\mathrm{E}(f)$ 属于本文定义的任何光滑性类。不过，我们仍然可以说，例如，

$$\inf_{P \in \Pi_{2^n}(\Xi_1)} \left|\left|\mathcal{E}(f) - P\right|\right|_{B^-} \lesssim 2^{-n(\gamma - Q + q_2)} \tag{1.61}$$

（这一点可以直接看出：取 $\phi \in C^\infty(\Xi_1)$，使得当 $x \in B^-$ 时 $\phi(x) = 1$，而当 $x \in \mathbb{X}_1 \setminus B$ 时 $\phi(x) = 0$。）因此，如果 $\mathrm{E}(f) \in C(\Xi_1)$，那么 $\mathrm{E}(f) \in W_{\gamma - Q + q_2}(\Xi_1; B^-)$。

例 7 现在，我们通过展示如何利用定理 3，来结束贯穿全文的例子 2、5 和 6。我们采用前述各例中给出的记号。首先，在给定某个 $\theta_0 \in [0, \pi]$ 和 $r_0 > 0$ 的情况下，我们求 $A = \mathbb{B}_2(\theta_0, r_0)$ 的像集。按照定义 10，我们令 $r = s = r_0/8$ 对应于，并定义

$$
\begin{aligned}
B^- =& \mathbb{B}_1\left(\theta_0, \frac{3r_0}{4}\right) \\
=& \left\{\theta_1 \in [0,\pi] : d_1(\theta_1, [0,\pi] \setminus \mathbb{B}_1(\theta_0, r_0)) \geq \frac{r_0}{4}\right\} \\
=& \left\{\theta_1 \in [0,\pi] : d_{1,2}(\theta_1, [0,\pi] \setminus A) \geq r + s\right\}.
\end{aligned} \tag{1.62}
$$

然后我们可以令 $B = \mathbb{B}_1\left(\theta_0, \frac{7r_0}{8}\right) = \mathbb{B}_1(B^-,\ r)$。根据定理 3(a)，$f \in C($ $[0,\pi])$ 可以提升到 $\mathbb{B}_1\left(\theta_0, \frac{7r_0}{8}\right)$（注意到，由于 $Q = q_2 = 1$，方程 (1.59) 自动得到满足）。由于 $l_{m,\ n} = \lambda_{1,\ n}$，我们有 $\sigma_n(\Xi_1,\ \Xi_2;\ f) \in \Pi_n(\Xi_1)$。如果我们假设对于某个 $\gamma > 0$（其中选择 h 使得 S 足够大），有 $f \in W_\gamma(\Xi_2;$ $A)$，那么定理 3(b) 告诉我们，对于 $\phi \in C^\infty(B),\ \phi\mathrm{E}(f) \in W_\gamma(\Xi_1)$。最后，根据方程 (1.61)，我们可以得出

$$
\inf_{P \in \Pi_{2^n}(\Xi_1)} ||\mathcal{E}(f) - P||_{\mathbb{B}_1\left(\theta_0, \frac{3r_0}{r}\right)} \lesssim 2^{-n\gamma}. \tag{1.63}
$$

1.5 证明

本节先证明一些预备结果，然后给出定理 3 的证明。假设 $(\Xi_1, \Xi_2, d_1{,}2, \mathbf{A}, \mathbf{L})$ 是一个指数为 Q, q_1, q_2 的联合数据空间。

引理 1 设 $x_1 \in \mathbb{X}_1, r > 0$。我们有

$$
\int_{\mathbb{X}_2 \setminus \mathbb{B}_{1,2}(x_1, r)} |\Phi_n(\Xi_1, \Xi_2; x_1, x_2)|\, d\mu_2^*(x_2) \lesssim n^{Q-q_2}(\max(1, nr))^{q_2 - S}. \tag{1.64}
$$

特别地，

$$
\int_{\mathbb{X}_2} |\Phi_n(\Xi_1, \Xi_2; x_1, x_2)|\, d\mu_2^*(x_2) \lesssim n^{Q-q_2}. \tag{1.65}
$$

证明 仅在此证明中，定义

$$
A_0 = \mathbb{B}_{1,2}(x_1, r), \qquad A_m = \mathbb{B}_{1,2}(x_1, r2^m) \setminus \mathbb{B}_{1,2}(x_1, r2^{m-1}) \text{ for all } m \in \mathbb{N}. \tag{1.66}
$$

那么，联合正则性条件 (1.48) 蕴含 $\mu_2^*(A_m) \,.\, (r2^m)^{q_2}$，对每个 m 都成立。根据定义，我们还可以看出，当 $x \in A_m$ 时，$d_{1,\ 2}(x_1,\ x) > r2^{m-1}$。由于$S > q_2$，我们推得对于 $rn \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{X}_2 \setminus A_0} |\Phi_n(\Xi_1, \Xi_2; x_1, x_2)|\, d\mu_2^*(x_2) \lesssim& \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n^Q \mu_2^*(A_m)}{(rn2^{m-1})^S} \\
\lesssim& r^{q_2 - S} n^{Q-S} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m(q_2 - S)} \\
\lesssim& n^{Q-q_2}(nr)^{q_2 - S}.
\end{aligned} \tag{1.67}
$$

这就完成了 $nr \geq 1$ 时 (1.64) 的证明。联合正则性条件和命题 2 进一步表明

$$\int_{A_0} |\Phi_n(\Xi_1, \Xi_2; x_1, x_2)| \, d\mu_2^*(x_2) \lesssim n^Q \mu_2^*(A_0) \lesssim n^Q r^{q_2} = n^{Q-q_2}(nr)^{q_2}. \quad (1.68)$$

在估计式 (1.67) 和 (1.68) 中使用 $r = 1/n$，并将这些估计相加，得到 (1.65) 以及 (1.64) 的情形 $r \leq 1/n$。□

下一个引理给出了在 (1.52) 中定义的核 σ_n 的局部界。

引理 2 设 A 和 B 如注 *3* 中所定义。对于连续的 $f: \ A \to \mathbb{R}$，有

$$\|\sigma_n(\Xi_1, \Xi_2; f)\|_B \lesssim n^{Q-q_2} \left\{ \|f\|_A + \|f\|_{\mathbb{X}_2} (\max(1, nr))^{q_2 - S} \right\}. \quad (1.69)$$

证明 设 $x_1 \in B$。根据联合三角不等式 (1.45)，有$d_{1,\ 2}(x_1, \ x_2) \geq r$对所有 $x_2 \in \mathbb{X}_2 \setminus A$ 均成立。因此，由引理 1 可知

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(\Xi_1, \Xi_2; f)(x_1)| \leq & \int_{\mathbb{X}_2} |f(x_2)\Phi_n(\Xi_1, \Xi_2; x_1, x_2)| d\mu_2^*(x_2) \\
= & \int_A |f(x_2)\Phi_n(\Xi_1, \Xi_2; x_1, x_2)| d\mu_2^*(x_2) \\
& + \int_{\mathbb{X}_2 \setminus A} |f(x_2)\Phi_n(\Xi_1, \Xi_2; x_1, x_2)| d\mu_2^*(x_2) \\
\lesssim & n^{Q-q_2} \|f\|_A + \|f\|_{\mathbb{X}_2} \int_{\mathbb{X}_2 \setminus \mathbb{B}_{1,2}(x_1, r)} |\Phi_n(\Xi_1, \Xi_2; x_1, x_2)| d\mu_2^*(x_2) \\
\lesssim & n^{Q-q_2} \left\{ \|f\|_A + \|f\|_{\mathbb{X}_2} (\max(1, nr))^{q_2 - S} \right\}.
\end{aligned} \quad (1.70)$$

引理 3 假设满足参数为 c^* 的多项式保持条件。令$f \in C(\mathbb{X}_2)$ 满足 (1.59)。则

$$\mathcal{E}(f) = \lim_{n \to \infty} \sigma_{2^n}(\Xi_1, \Xi_2; f) \quad (1.71)$$

在 B 上存在。此外，当 $c^* 2^n > 1/r$ 时，有

$$\begin{aligned}
& ||\mathcal{E}(f) - \mathcal{E}(\sigma_{2^n}(\Xi_2; f))||_B \\
\lesssim & \sum_{m=n}^{\infty} 2^{m(Q-q_2)} \, ||f - \sigma_{2^m}(\Xi_2; f)||_A + ||f||_{\mathbb{X}_2} \, n^{Q-S} r^{q_2 - S}.
\end{aligned} \quad (1.72)$$

证明 仅在此证明中，我们将 $P_n = \sigma_n(\Xi_2; \ f)$ 记为 $P_n \in \Pi_n(\Xi_2)$。由于 $P_n \in \Pi_n(\Xi_2)$，条件 (1.54) 意味着

$$\mathcal{E}(P_n) = \sigma_{c^* n}(\Xi_1, \Xi_2; P_n) = \lim_{k \to \infty} \sigma_k(\Xi_1, \Xi_2; P_k) \quad (1.73)$$

在 $\mathbb{X}_1$ 上有定义。由定理 1 和引理 2 可知

$$\begin{aligned}
&||\mathcal{E}(P_{2^{m+1}}) - \mathcal{E}(P_{2^m})||_B \\
=&||\sigma_{c^*2^{m+1}}(\Xi_1, \Xi_2; P_{2^{m+1}}) - \sigma_{c^*2^{m+1}}(\Xi_1, \Xi_2; P_{2^m})||_B \\
\lesssim& 2^{m(Q-q_2)}(||P_{2^{m+1}} - P_{2^m}||_A + ||f||_{\mathbb{X}_2}(\max(1, 2^m r))^{q_2-S}).
\end{aligned} \tag{1.74}$$

我们得出

$$\begin{aligned}
&||\mathcal{E}(P_1)||_B + \sum_{m=0}^{\infty} ||\mathcal{E}(P_{2^{m+1}}) - \mathcal{E}(P_{2^m})||_B \\
\lesssim& ||P_1|| + \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m(Q-q_2)} ||P_{2^{m+1}} - P_{2^m}||_A \\
&+ ||f||_{\mathbb{X}_2} \left(\sum_{c^*2^m \le 1/r} 2^{m(Q-q_2)} + r^{q_2-S} \sum_{c^*2^m > 1/r} 2^{m(Q-S)} \right) < \infty.
\end{aligned} \tag{1.75}$$

因此,

$$\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}(P_1) + \sum_{m=0}^{\infty} (\mathcal{E}(P_{2^{m+1}}) - \mathcal{E}(P_{2^m})) \tag{1.76}$$

在 B 上有定义。特别地，当 $c^*2^n \ge 1/r$ 时，可得

$$||\mathcal{E}(f) - \mathcal{E}(P_{2^n})||_B \le \sum_{m=n}^{\infty} 2^{m(Q-q_2)} ||P_{2^{m+1}} - P_{2^m}||_A + ||f||_{\mathbb{X}_2} 2^{n(Q-S)} r^{q_2-S}. \tag{1.77}$$

现在我们给出定理 3 的证明。

证明 在本证明中，仅记 $P_n = \sigma_n(\Xi_2;\ f)$ 为 $\in \Pi_n(\Xi_2)$。由定理 1 和引理 2 可推出，对于 $c^*r2^n \ge 1$,

$$\begin{aligned}
&||\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1, \Xi_2; f) - \sigma_{c^*2^n}(\Xi_1, \Xi_2; P_{2^n})||_B \\
\lesssim& 2^{n(Q-q_2)}(||f - P_{2^n}||_A + ||f - P_{2^n}||_{\mathbb{X}_2} 2^{n(q_2-S)} r^{q_2-S}) \\
\lesssim& 2^{n(Q-q_2)}(||f - P_{2^n}||_A + ||f||_{\mathbb{X}_2} 2^{n(q_2-S)} r^{q_2-S}).
\end{aligned} \tag{1.78}$$

多项式保持条件（定义 8）表明

$$||\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1, \Xi_2; P_{2^n}) - \mathcal{E}(P_{2^n})||_B = 0. \tag{1.79}$$

然后利用公式 (1.78) 和引理 3，我们得到

$$
\begin{aligned}
&||\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1,\Xi_2;f)-\mathcal{E}(f)||_B\\
\le&||\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1,\Xi_2;f)-\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1,\Xi_2;P_{2^n})||_B\\
&+||\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1,\Xi_2;P_{2^n})-\mathcal{E}(P_{2^n})||_B+||\mathcal{E}(P_{2^n})-\mathcal{E}(f)||_B\\
\lesssim&2^{n(Q-q_2)}\,||f-P_{2^n}||_A+\sum_{m=n}^{\infty}2^{m(Q-q_2)}\,||P_{2^{m+1}}-P_{2^m}||_A+||f||_{\mathbb{X}_2}\,2^{n(Q-S)}r^{q_2-S}.
\end{aligned}
\tag{1.80}
$$

这就证明了方程（1.60）。

特别地，当 $\alpha l_{j,\,k}\ge\lambda_{1,\,j}$和 $\alpha>0$时，方程（1.52）中系数非零的唯一$\phi_{1,\,j}(x_1)$是满足 $l_{j,\,k}<n$ 的那些，这意味着 $\lambda_{1,\,j}<\alpha n$，进而有 $\sigma_n(\Xi_1,\ \Xi_2;\ f)\in\Pi_{\alpha n}(\Xi_1)$。这就完成了 (a) 部分的证明。

在 (b) 部分的证明中，不失一般性，我们可以假设 $\mathrm{k}\,f\mathrm{k}_{W_\gamma(\Xi_2;A)}+||f||_{\mathbb{X}_2}=1$。由推论 1 可知，对于每个 m

$$
||P_{2^{m+1}}-P_{2^m}||_A\le||P_{2^{m+1}}-f||_A+||P_{2^m}-f||_A\lesssim2^{-m\gamma},
\tag{1.81}
$$

这意味着，每当 $Q-q_2<\gamma$ 时，我们都有

$$
\sum_{m=n}^{\infty}2^{m(Q-q_2)}\,||P_{2^{m+1}}-P_{2^m}||_A\lesssim2^{n(Q-q_2-\gamma)}.
\tag{1.82}
$$

此外，假设 $\gamma<S-q_2$ 可得

$$
2^{n(Q-S)}\lesssim2^{n(Q-q_2-\gamma)}.
\tag{1.83}
$$

由于 $f\in W_\gamma(\Xi_2;\ A)$，由推论 1 可得

$$
||f-P_{2^n}||_A\lesssim2^{-n\gamma}.
\tag{1.84}
$$

利用 (a) 部分中的方程（1.60），可知

$$
||\mathcal{E}(f)-\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1,\Xi_2;f)||_B\lesssim(1+r^{q_2-S}\,||f||_{\mathbb{X}_2})2^{n(Q-q_2-\gamma)}.
\tag{1.85}
$$

因此，$\{\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1,\ \Xi_2;\ f)\}$ 是一列连续函数，并一致地收敛于 B 上的 E(f)，所以 E (f) 本身在 B 上连续。我们对每个 n 定义 $R_{c^*\alpha2^n}\in\Pi_{c^*\alpha2^n}$，使得 $||R_{c^*\alpha2^n}-\phi||_{\mathbb{X}_1}\lesssim2^{-n\gamma}$。根据定理 1 和强乘积假设（定义 4），可写为

$$
\sigma_{c^*A^*\alpha2^{n+1}}(\Xi_1;R_{c^*\alpha2^n}\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1,\Xi_2;f))=R_{c^*\alpha2^n}\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1,\Xi_2;f).
\tag{1.86}
$$

利用方程（1.65）和（1.86）、定理 1，以及 ϕ 以 B 为支撑这一事实，我们可以推导出

$$
\begin{aligned}
&\left\|\sigma_{c^*A^*\alpha 2^{n+1}}\left(\Xi_1; R_{c^*\alpha 2^n}\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1,\Xi_2; f)-\phi\mathcal{E}(f)\right)\right\|_{\mathbb{X}_1}\\
\lesssim&\left\|R_{c^*\alpha 2^n}\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1,\Xi_2; f)-\phi\mathcal{E}(f)\right\|_{\mathbb{X}_1}\\
\lesssim&\left\|\phi\mathcal{E}(f)-\phi\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1,\Xi_2; f)\right\|_{\mathbb{X}_1}+\left\|R_{c^*\alpha 2^n}-\phi\right\|_{\mathbb{X}_1}\left\|\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1,\Xi_2; f)\right\|_{\mathbb{X}_1}\\
\lesssim&\left\|\mathcal{E}(f)-\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1,\Xi_2; f)\right\|_B+2^{n(Q-q_2-\gamma)}\left\|f\right\|_{\mathbb{X}_2}.
\end{aligned}
\tag{1.87}
$$

鉴于方程（1.85）和（1.87），我们可以得出

$$
\begin{aligned}
&E_{c^*A^*\alpha 2^{n+1}}(\Xi_1,\phi\mathcal{E}(f))\\
\lesssim&\left\|\phi\mathcal{E}(f)-\sigma_{c^*A^*\alpha 2^{n+1}}(\Xi_1,\phi\mathcal{E}(f))\right\|_{\mathbb{X}_1}\\
\le&\left\|\phi\mathcal{E}(f)-R_{c^*\alpha 2^n}\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1,\Xi_2; f)\right\|_{\mathbb{X}_1}\\
&+\left\|\sigma_{c^*A^*\alpha 2^{n+1}}\left(\Xi_1; R_{c^*\alpha 2^n}\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1,\Xi_2; f)-\phi\mathcal{E}(f)\right)\right\|_{\mathbb{X}_1}\\
\lesssim&\left\|\mathcal{E}(f)-\sigma_{c^*2^n}(\Xi_1,\Xi_2; f)\right\|_B+\left\|f\right\|_{\mathbb{X}_2}2^{n(Q-q_2-\gamma)}\\
\lesssim&(1+\left\|f\right\|_{\mathbb{X}_2}(1+r^{q_2-S}))2^{n(Q-q_2-\gamma)}.
\end{aligned}
\tag{1.88}
$$

因此， $\phi\mathrm{E}(f)\in W_{\gamma-Q+q_2}(\Xi_1)$，从而完成了第（b）部分的证明。 □

附录

1.5.1 陶伯定理

为方便读者，我们重述 [39,定理 4.3]中的陶伯定理。

我们回顾一下，若 μ 是 $\mathbb{R}$上的扩展复值博雷尔测度，则其全变差测度对博雷尔集 B 定义为

$$|\mu|(B)=\sup\sum|\mu(B_k)|,$$

其中，求和遍历由博雷尔集组成的 B 的一个划分 $\{B_k\}$，上确界则遍历所有此类划分。

若测度 μ 在 $\mathbb{R}$ 上满足：对所有$u>0$， $\mu((-u,u))=2\mu([0,u))$，且 $\mu(\{0\})=0$，则称其为偶测度。若 μ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的扩展复值测度，且$\mu(\{0\})=0$，则定义 μ_e 在 $\mathbb{R}$ 上的测度为

$$\mu_e(B)=\mu\left(\{|x|:x\in B\}\right),$$

并注意到 μ_e 是一个偶测度，满足 $\mu_e(B)=\mu(B)$，其中 $B\subset[0,\infty)$。下文中，我们假设所有在 $[0,\infty)$ 上且不在点 0 处赋予非零质量的测度均以这种方式扩展，并滥用记号μ 来表示测度 μ_e。下文中，“$\mathbb{R}$上的测度”一词指在 $\mathbb{R}$ 的紧区间上具有有界全变差的扩展复值博雷尔测度； $[0,\infty)$ 上的测度亦同。

我们的主要陶伯定理如下。

定理 4 设 μ 是定义在 $[0,\infty)$上的扩展复值测度，且 $\mu(\{0\})$ =0。我们假设存在 $Q, r > 0$，使得以下每个条件都成立。

1.

$$\|\mu\|_Q := \sup_{u\in[0,\infty)} \frac{|\mu|([0,u))}{(u+2)^Q} < \infty, \tag{1.89}$$

2. 存在常数 $c, C > 0$，使得

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \exp(-u^2 t)\, d\mu(u)\right| \le c_1 t^{-C} \exp(-r^2/t)\|\mu\|_Q, \qquad 0 < t \le 1. \tag{1.90}$$

设 $H:\ [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $S > Q+1$ 为整数，并假设存在测度$H^{[S]}$，使得

$$H(u) = \int_0^\infty (v^2 - u^2)_+^S dH^{[S]}(v), \qquad u \in \mathbb{R}, \tag{1.91}$$

and

$$V_{Q,S}(H) = \max\left(\int_0^\infty (v+2)^Q v^{2S} d|H^{[S]}|(v), \int_0^\infty (v+2)^Q v^S d|H^{[S]}|(v)\right) < \infty. \tag{1.92}$$

那么对于 $n \ge 1$,

$$\left|\int_0^\infty H(u/n)\, d\mu(u)\right| \le c\frac{n^Q}{\max(1,(nr)^S)} V_{Q,S}(H)\|\mu\|_Q. \tag{1.93}$$

利用该定理并取以下条件可证明命题1:

$$\mu(u) = \mu_{x,y}(u) = \sum_{k:\lambda_k<u} \phi_k(x)\phi_k(y).$$

利用该定理并取以下条件可证明命题 2:

$$\mu(u) = \mu_{x_1,x_2}(u) = \sum_{j,k:\ell_{j,k}<u} A_{j,k}\phi_{1,j}(x_1)\phi_{2,k}(x_2).$$

1.5.2 雅可比多项式

对于 $\alpha, \beta > -1, x \in (-1,1)$ 和整数 $l \ge 0$，雅可比多项式 $p^{(\alpha,\beta)}{}_l$由 Rodrigues公式 [55, 公式 (4.3.1)、(4.3.4)]定义

$$
\begin{aligned}
&(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}p_{\ell}^{(\alpha,\beta)}(x)\\
&=\left\{\frac{2\ell+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}}\frac{\ell!(\ell+\alpha+\beta)!}{(\ell+\alpha)!(\ell+\beta)!}\right\}^{1/2}\frac{(-1)^{\ell}}{2^{\ell}\ell!}\frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}}\left((1-x)^{\ell+\alpha}(1+x)^{\ell+\beta}\right),
\end{aligned}
\tag{1.94}
$$

其中 $z!$ 表示 $\Gamma(z+1)$。雅可比多项式满足以下著名的微分方程:

$$
p_n''^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x^2)+(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)p_n'^{(\alpha,\beta)}(x)=-n(n+\alpha+\beta+1)p_n^{(\alpha,\beta)}(x).
\tag{1.95}
$$

每个 $p^{(\alpha,\beta)}l$都是次数为l 且首项系数为正的多项式，满足正交关系

$$
\int_{-1}^{1}p_{\ell}^{(\alpha,\beta)}(x)p_{j}^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}=\delta_{\ell,j},
\tag{1.96}
$$

and

$$
p_{\ell}^{(\alpha,\beta)}(1)=\left\{\frac{2\ell+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}}\frac{\ell!(\ell+\alpha+\beta)!}{(\ell+\alpha)!(\ell+\beta)!}\right\}^{1/2}\frac{(\ell+\alpha)!}{\alpha!\ell!}\sim\ell^{\alpha+1/2}.
\tag{1.97}
$$

由此可得 $p^{(\alpha,\beta)}l(-x) =(-1)^{\ell}p_{(\beta,\alpha)}l(x)$。特别地， $p_{(\alpha,\alpha)}2l$是偶多项式，而 $p_{2\ell+1}^{(\alpha,\alpha)}l$是奇多项式。我们注意到（参见 [55, 定理 4.1]），

$$
\begin{aligned}
p_{2\ell}^{(\alpha,\alpha)}(x) =&2^{\alpha/2+1/4}p_{\ell}^{(\alpha,-1/2)}(2x^2-1)=2^{\alpha/2+1/4}(-1)^{\ell}p_{\ell}^{(-1/2,\alpha)}(1-2x^2)\\
p_{2\ell+1}^{(\alpha,\alpha)}(x) =&2^{\alpha/2+1/2}xp_{\ell}^{(\alpha,1/2)}(2x^2-1)=2^{\alpha/2+1/2}(-1)^{\ell}xp_{\ell}^{(1/2,\alpha)}(1-2x^2).
\end{aligned}
\tag{1.98}
$$

已知 [50] 对于 $\alpha,\beta\geq-1/2$ 和 $\theta,\phi\in[0,\pi]$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty}\exp(-j(j+\alpha+\beta+1)t)p_{j}^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)p_{j}^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi)\\
\lesssim&(t+\theta\phi)^{-\alpha-1/2}(t+(\pi-\theta)(\pi-\phi))^{-\beta-1/2}t^{-1/2}\exp\left(-c\frac{(\theta-\phi)^2}{t}\right).
\end{aligned}
\tag{1.99}
$$

注意，当 $\beta=-1/2$ 时，可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty}\exp(-j(j+\alpha+1/2)t)p_{j}^{(\alpha,-1/2)}(\cos\theta)p_{j}^{(\alpha,-1/2)}(\cos\phi)\\
\lesssim&t^{-\alpha-1}\exp\left(-c\frac{(\theta-\phi)^2}{t}\right).
\end{aligned}
\tag{1.100}
$$

如果$l \geq 0$ 是一个整数，并且$\{Y_{\ell,k}\}$是空间 $\mathbb{H}^q$ l在球面 $\mathbb{S}^q$ 上的限制函数的标准正交基（相对于概率体积测度），其中这些函数属于

$(q+1)$元齐次调和多项式，总次数为l，则有著名的加法公式 [45] 以及第 [2, 章定理 4]，该公式将$Y_{\ell,k}$与(1.94)中定义的雅可比多项式联系起来：

$$\sum_{k=1}^{d_\ell^q} Y_{\ell,k}(\mathbf{x})\overline{Y_{\ell,k}(\mathbf{y})} = \frac{\omega_q}{\omega_{q-1}} p_\ell^{(q/2-1,q/2-1)}(1) p_\ell^{(q/2-1,q/2-1)}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}), \quad \ell = 0, 1, \cdots, \tag{1.101}$$

其中 $\omega_q = \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^q)$ 和 $d^q{}_l = \dim(\mathbb{H}^q{}_l)$。

参考文献

1. A. Arenas、 ´O. Ciaurri 和 E. Labarga。关于 Jacobi 系数的加权移植定理。《逼近理论杂志》，248:105297，2019。2. H. Bateman、A. Erd´elyi、W. Magnus、F. Oberhettinger 和 F. G. Tricomi。高等超越函数，第 2 卷。麦格劳-希尔，纽约，1955。3. M. Belkin、I. Matveeva 和 P. Niyogi。大型图上的正则化与半监督学习。载于学习理论，第 624–638 页。施普林格，2004。4. M. Belkin 和 P. Niyogi。用于降维和数据表示的拉普拉斯特征映射。《神经计算》，15(6):1373–1396，2003。5. M. Belkin 和 P. Niyogi。黎曼流形上的半监督学习。机器学习，56(1-3):209–239，2004。6. A. L. Bertozzi 和 A. Flenner。用于高维数据分类的图弥散界面模型。《多尺度建模与仿真》，10(3):1090–1118，2012。7. M. Cheney 和 B. Borden。雷达成像基础。工业与应用数学学会，2009。8. C. K. Chui 和 D. L. Donoho。专题：扩散映射与小波。《应用与计算调和分析》，21(1)，2006。9. C. K. Chui 和 H. N. Mhaskar。用于局部流形学习的深度网络。《应用数学与统计学前沿》，4:12，2018。10. C. K. Chui 和 J. Wang。高光谱图像数据的降维与特征分类。载于《地数学手册》，第 1005–1047 页。施普林格，2010。11. C. K. Chui 和 J. Wang。用于非线性降维的随机各向异性变换。《*GEM* 地数学国际期刊》，1(1):23–50，2010。12. C. K. Chui 和 J. Wang。非线性降维方法。载于《地数学手册》，第 1–46 页。施普林格，2015。13. R. R. Coifman 和 M. J. Hirn。用于变化数据的扩散映射。《应用与计算调和分析》，36(1):79–107，2014。14. R. R. Coifman 和 S. Lafon。扩散映射。《应用与计算调和分析》，21(1):5–30，2006。15. R. R. Coifman 和 M. Maggioni。扩散小波。《应用与计算调和分析》，21(1):53–94，2006。16. L. D. David 和 G. Carrie。Hessian 特征映射：用于高维数据的新型局部线性嵌入技术，tr2003-08，统计学系，2003。17. E. B. Davies。热核与谱理论，第 92 卷。剑桥大学出版社，1990。18. A. D´ıaz-Gonz´alez、F. Marcell´an、H. Pijeira-Cabrera 和 W. Urbina。离散－连续 Jacobi–Sobolev 空间与傅里叶级数。《马来西亚数学科学学会通报》，44:571–598，2021。19. M. P. do Carmo Valero。黎曼几何。Birkh¨auser，1992。

20. D. L. Donoho 和 C. Grimes. 与欧几里得空间等距的图像流形。数学成像与视觉杂志, 23(1):5–24, 2005. 21. D. L. Donoho、O. Levi、J.-L. Starck 和 V. Martinez. 面向三维目录的多尺度几何分析。载于天文望远镜与仪器, 第101–111页。国际光学与光子学学会, 2002. 22. M. Ehler、F. Filbir 和 H. N. Mhaskar. 使用扩散框架局部学习生物医学数据。计算生物学杂志, 19(11):1251–1264, 2012. 23. F. Filbir 和 H. N. Mhaskar. 对应于广义热核的扩散多项式求积公式。傅里叶分析与应用杂志, 16 657, 2010 5 629( ): – . 24. F. Filbir 和 H. N. Mhaskar. 流形上的Marcinkiewicz–Zygmund测度。复杂性杂志, 27(6):568–596, 2011. 25. J. Friedman 和 J.-P. Tillich. 图的波动方程与基于边的拉普拉斯算子。太平洋数学杂志, 216(2):229–266, 2004. 26. D. Geller 和 I. Z. Pesenson. 紧齐性流形上的带限局部化帕塞瓦尔框架与Besov空间。几何分析杂志, 21(2):334–371, 2011. 27. A. Grigor'yan. 任意完备流形上热核导数的上界。泛函分析杂志, 127(2):363–389, 1995. 28. A. Grigor'yan. 任意流形上热核的高斯上界。*J. Diff. Geom.*, 45:33–52, 1997. 29. X. He、S. Yan、Y. Hu、P. Niyogi 和 H.-J. Zhang. 使用拉普拉斯人脸进行人脸识别。*IEEE* 模式分析与机器智能汇刊, 27(3):328–340, 2005. 30. P. W. Jones、M. Maggioni 和 R. Schul. 通过拉普拉斯算子特征函数和热核对流形进行参数化。美国国家科学院院刊, 105(6):1803–1808, 2008. 31. P. W. Jones、M. Maggioni 和 R. Schul. 通过热核和拉普拉斯算子特征函数实现通用局部参数化。芬兰科学院数学年刊, 35:131–174, 2010. 32. W. H. Kim、V. Singh、M. K. Chung、C. Hinrichs、D. Pachauri、O. C. Okonkwo、S. C. Johnson、A. D. N. Initiative 等. 通过非欧几里得小波提取多分辨率形状特征：在皮层厚度统计分析中的应用。神经影像, 93:107–123, 2014. 33. Y. A. Kordyukov. L^p–有界几何流形上椭圆微分算子的理论。应用数学学报, 23(3):223–260, 1991. 34. J. P. Lerch、J. C. Pruessner、A. Zijdenbos、H. Hampel、S. J. Teipel 和 A. C. Evans. 通过计算神经解剖学识别阿尔茨海默病中的局灶性皮层厚度下降。大脑皮层, 15(7):995–1001, 2005. 35. Z. Li、U. Park 和 A. K. Jain. 年龄不变人脸识别的判别模型。*IEEE*信息取证与安全汇刊, 6(3):1028–1037, 2011. 36. M. Maggioni 和 H. N. Mhaskar. 度量测度空间上的扩散多项式框架。《应用与计算调和分析》, 24(3):329–353, 2008. 37. S. Maskey、R. Levie 和 G. Kutyniok. 图神经网络的可迁移性：扩展的图子方法。《应用与计算调和分析》, 63:48–83, 2023. 38. A. Maurer、M. Pontil 和 B. Romera-Paredes. 多任务学习与迁移学习的稀疏编码。载于国际机器学习会议, 第343–351页。PMLR, 2013. 39. H. Mhaskar. 有向图和变化数据上函数调和分析的统一框架。《应用与计算调和分析》, 44(3):611–644, 2018. 40. H. N. Mhaskar. 用于流形上函数逼近的Eignets。《应用与计算调和分析》, 29(1):63–87, 2010. 41. H. N. Mhaskar. 用于数据定义流形上函数简约表示的广义扩散框架。神经网络, 24(4):345–359, 2011. 42. H. N. Mhaskar. 海量数据的基于核的分析。《应用数学与统计学前沿》, 6:30, 2020. 43. H. N. Mhaskar、S. V. Pereverzyev 和 M. D. van der Walt. 一种用于糖尿病患者血糖预测的深度学习方法。《应用数学与统计学前沿》, 3 14, 2017 : .

44. B. Muckenhoupt. *Jacobi*级数的移植定理和乘子定理。美国数学会，1986. 45. C. M¨uller. 球谐函数, 第17卷。施普林格，2006. 46. D. C. Munson、J. D. O'Brien 和 W. K. Jenkins. 聚束模式合成孔径雷达的断层成像公式。*IEEE*会议录, 71(8):917–925, 1983. 47. F. Natterer. 计算机断层成像的数学。工业与应用数学学会，2001. 48. V. Naumova、L. Nita、J. U. Poulsen 和 S. V. Pereverzyev. 面向糖尿病智能手机应用的元学习血糖预测器，2014. 49. C. J. Nolan 和 M. Cheney. 合成孔径反演。逆问题, 18(1):221, 2002. 50. A. Nowak 和 P. Sj¨ogren. Jacobi热核的精确估计。*arXiv*预印本 *arXiv:1111.3145*, 2011. 51. S. T. Roweis 和 L. K. Saul. 通过局部线性嵌入实现非线性降维。《科学》, 290(5500):2323–2326, 2000. 52. J. Schmidt-Hieber. 深度ReLU网络对流形上函数的逼近。*arXiv*预印本 *arXiv:1908.00695*, 2019. 53. U. Shaham、A. Cloninger 和 R. R. Coifman. 深度神经网络可证明的逼近性质。《应用与计算调和分析》, 44(3):537–557, 2018. 54. A. Sikora. Riesz 变换、高斯界与波动方程方法。《数学杂志》, 247(3):643–662, 2004. 55. G. Szeg¨o. 正交多项式。载于讨论会出版物 / 美国数学会 , 第23卷。普罗维登斯，1975. 56. J. B. Tenenbaum、V. De Silva 和 J. C. Langford. 非线性降维的全局几何框架。《科学》, 290(5500):2319–2323, 2000. 57. Y. van Gennip、B. Hunter、R. Ahn、P. Elliott、K. Luh、M. Halvorson、S. Reid、M. Valasik、J. Wo、G. E. Tita 等. 在稀疏地理社交数据上使用谱聚类进行社群检测。《*SIAM*应用数学杂志》, 73(1):67–83, 2013. 58. K. Q. Weinberger、B. D. Packer 和 L. K. Saul. 通过半定规划和核矩阵分解实现非线性降维。载于第十届国际人工智能与统计学研讨会论文集, 第381–388页。Citeseer，2005. 59. Z.-Y. Zhang 和 H.-Y. Zha. 通过切空间对齐实现主流形与非线性降维。《上海大学学报（英文版）》, 8 424, 2004 4 406( ): – .