arXiv:2302.00167v1 [cond-mat.quant-gas] 1 Feb 2023

量子物质与测量诱导动力学

Santiago F. Caballero-Benítez[a]物理研究所，*LSCSC-LANMAC*，墨西哥国立自治大学，邮政信箱 *20-364*，墨西哥城 *01000*，墨西哥。（日期：2023年2月2日）

本文讨论了2022年在墨西哥国立自治大学举办的第二十九届物理暑期学校中所开设的“量子物质与测量诱导动力学”课程的一些细节。讲义介绍了研究光子损失所诱导的动力学时会用到的一些概念，概述了模拟方法（量子轨迹），并介绍了光学晶格和高品质因数腔中的模型细节。讲义为西班牙语。

本文讨论了2022年在墨西哥国立自治大学举办的第二十九届物理暑期学校中“量子物质与测量诱导动力学”课程的一些细节。讲义介绍了研究光子测量效应所产生的涌现动力学时会用到的一些概念，概述了模拟方法（量子轨迹），并介绍了量子物质和高反射率腔模型的细节。

课程讲义介绍了所采用的量子轨迹方法，用于研究光学晶格和高反射率腔中的系统所受的诱导动力学。研究的是光子损失率（κ）远大于泵浦与腔频率之间的腔失谐（$\Delta = \omega_c - \omega_p$）的情形， $\kappa \gg |\Delta|$:

- 量子物质、哈伯德模型与光学晶格
- 通过光子损失反馈实现具有关联的量子态工程
- 反馈与临界性控制
- 结论

I. 量子物质、哈伯德模型与光学晶格

近年来，原子系统控制技术的进步使新一代量子模拟器得以问世 [1, 2]。超冷量子物质在光学晶格中的典型多体相互作用，最简单的模型是费米子哈伯德模型（$\mathcal{H}^f$）：

$$\mathcal{H}^f = -J \sum_{\sigma} \sum_{\langle i,j \rangle} \left(\hat{f}^{\dagger}_{i\sigma} \hat{f}_{i\sigma} + \text{H.c.} \right) + U \sum_i \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i,\downarrow} \tag{1}$$

以及玻色-哈伯德模型（$\mathcal{H}^b$）：

$$\mathcal{H}^b = -J \sum_{\langle i,j \rangle} (\hat{b}^{\dagger}_i \hat{b}_j + \text{H.c.}) + \frac{U}{2} \sum_i \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) \tag{2}$$

J 的项表示动能（$J \sim$kHz），而包含 U 的项表示多体相互作用能，它可能超出微扰理论的范围，并可能引发量子相变 [5]。这些模型通过第二量子化描述具有不同统计性质（玻色子/费米子）的原子，其适用范围是低能过程占主导的极限。为了实现这些系统，需要经过多个冷却阶段 [6]，直至温度达到 10^{-9} 至 10^{-6} K，随后用激光器进行囚禁，激光器会形成可通过外部参数进行控制的晶格结构（光学晶格） [7, 8]。系统参数由激光器的振幅和低能碰撞控制，后者通常是通过散射长度 a调控的s波碰撞。根据实验中所用原子的不同，这一散射长度

[a] 通讯作者：scaballero@fisica.unam.mx



图 1：测量诱导动力学的总体示意图。左：无结构系统。中：弱测量。右：诱导的涌现结构，即方格晶格中的两个空间模。

甚至可以通过恒定外部磁场以及由此产生的费什巴赫共振 [9], $a = a(B)$进行外部控制。模型参数之间的关系如下：

$$J = \int \mathrm{d}\mathrm{x}^D w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^* \left(\frac{\nabla^2}{2m} - V_{\mathrm{OL}}(\mathbf{x}) \right) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \tag{3}$$

$$U = \frac{4\pi\hbar a}{m} \int \mathrm{d}\mathrm{x}^D |w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)|^4 \tag{4}$$

其中 i, j 为最近邻， $w(\mathbf{x})$ 为局域化的 Wannier函数 [3]， m 为费米子原子（ ^{6}Li [10]， ^{40}K [11]）或玻色子原子（ ^{7}Li [12]， ^{23}Na [13]， ^{87}Rb [14]）的质量， D 为空间维数。对于费米子，考虑不同原子磁态之间的碰撞（由于泡利阻塞），其 s 波散射长度为$a = a_{s,\uparrow\downarrow}$；对于玻色子，考虑处于相同状态的原子， $a = a_s$。关于紧束缚近似下与电子系统的类比，以及光学晶格的其他相关细节，可参见 [3, 15]。通常，对于维数为 D 的超立方晶格，光学晶格势为，

$$V_{\mathrm{OL}}(\mathbf{x}) = \sum_{\eta=1}^{D} V_0 \sin^2(k_\eta x_\eta) \tag{5}$$

其中， k_η 是入射激光形成沿$\hat{e}_\eta$方向驻波的波矢， x_η 是坐标（即 x、 y、 z、...）。对于每个“维度” η，我们都有单位向量$\hat{e}_\eta$。

II. 通过光子损失的反作用工程制备具有关联的量子态

A. 测量动力学的一般示意

近期，研究人员已在高反射率腔 [16–18]中实现了光学晶格内超冷原子的实验。这类装置通常采用驻波腔，但也可以考虑采用行波腔的装置 [19]。此外，还有不含光学晶格、由多个腔构成的系统实现方案 [20, 21]，以及多模腔实现方案 [22]。原则上，可以将探测逃离腔的光子的探测器放置在任意位置。通常，探测器置于腔轴线上，位于腔镜后方，此处输出信号的振幅最大。在这些系统中，可以研究光子损失相对于系统中其他能量尺度（具体而言是失谐 Δ）较大的极限。在这种条件下，一个值得研究的问题是：改变系统态的光子损失能否诱导出具有有用结构的状态。所谓有用结构，是指系统在低能量下通常不支持的状态，例如具有诱导的对称性破缺或其他类型涌现序的状态，见图1。为研究这一可能性，我们利用量子轨迹方法 [23]，有效地研究光子损失所导致的系统条件时间演化。为此，构造如下非厄米哈密顿量，

$$\mathcal{H}_{\mathrm{NH}} = \mathcal{H} - i\hat{c}^\dagger\hat{c} \tag{6}$$

其中

$$\hat{c} \approx \frac{\sqrt{2\kappa} g \hat{F}}{\Delta + i\kappa} \tag{7}$$

是轨迹的量子跃迁算符， κ 是腔的光子损失率， g 是光与物质的耦合， Δ 是失谐， F 是对光泵浦在物质和腔中的系统诱导的空间投影进行编码的算符。算符 F 由泵浦模与腔内模之间重叠的投影给出，其空间分量为 [24–30]，并进一步考虑内部自由度（即自旋） [31–34],

$$\hat{F} = \sum_{\sigma,p,c} (\hat{D}_{\sigma pc} + \hat{B}_{\sigma pc}) \tag{8}$$

密度模,

$$\hat{D}_{\sigma pc} = \sum_{i} J_{ii}^{\sigma pc} \hat{m}_{\sigma i}^{\dagger} \hat{m}_{\sigma i} \tag{9}$$

以及键合模,

$$\hat{B}_{pc\sigma} = \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij}^{\sigma pc} (\hat{m}_{\sigma i}^{\dagger} \hat{m}_{\sigma j} + \text{H.c.}) \tag{10}$$

与结构常数,

$$J_{lm}^{\sigma pc} = \int \mathrm{d}\mathrm{x}^{D} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l)^* u_{\sigma,c}(\mathbf{x})^* u_{\sigma,p}(\mathbf{x}) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m) \tag{11}$$

量子跃迁算符$\hat{c}$ 的具体形式与光的绝热消除直接相关，因此，光被束缚于物质 [35, 36]。

此外，还要求在发生量子跃迁（单光子测量）后，系统态应重新归一化为：

$$|\Psi'\rangle \to \frac{\hat{c}|\Psi\rangle}{\langle \hat{c}^{\dagger}\hat{c} \rangle} \tag{12}$$

实际上，非厄米哈密顿量可以写作 [31]:

$$\mathcal{H}_{\text{NH}} \approx \mathcal{H}^{f/b} - i\frac{\kappa g_{\text{eff}}}{\Delta} \left(\hat{F}^{\dagger}\hat{F} + \hat{F}\hat{F}^{\dagger} \right) \tag{13}$$

在其中， $g_{\text{eff}} = \Delta|g|^2 / \Delta^2 + \kappa^2$ $\kappa \gg \Delta$ $N_{ph} = ()$，且处于.....的极限下。从腔中逃逸的光子数为 $\langle a^{\dagger}a \rangle \propto \langle c^{\dagger}c \rangle$ ^ ^ ^ ^。

为研究测量诱导动力学的效应，采用以下模拟方案。

B. 轨迹方法方案

1. 将系统初始化为基态或其他任意状态。

2. 生成一个区间 t ，并在区间 [0,1]内生成一个随机数 r

3. 用非厄米哈密顿量传播系统，直到态的范数等于 r。

4. 应用量子跃迁算符（单光子损失），并针对新的时间间隔，将状态归一化；重复步骤 2 至 4 t'

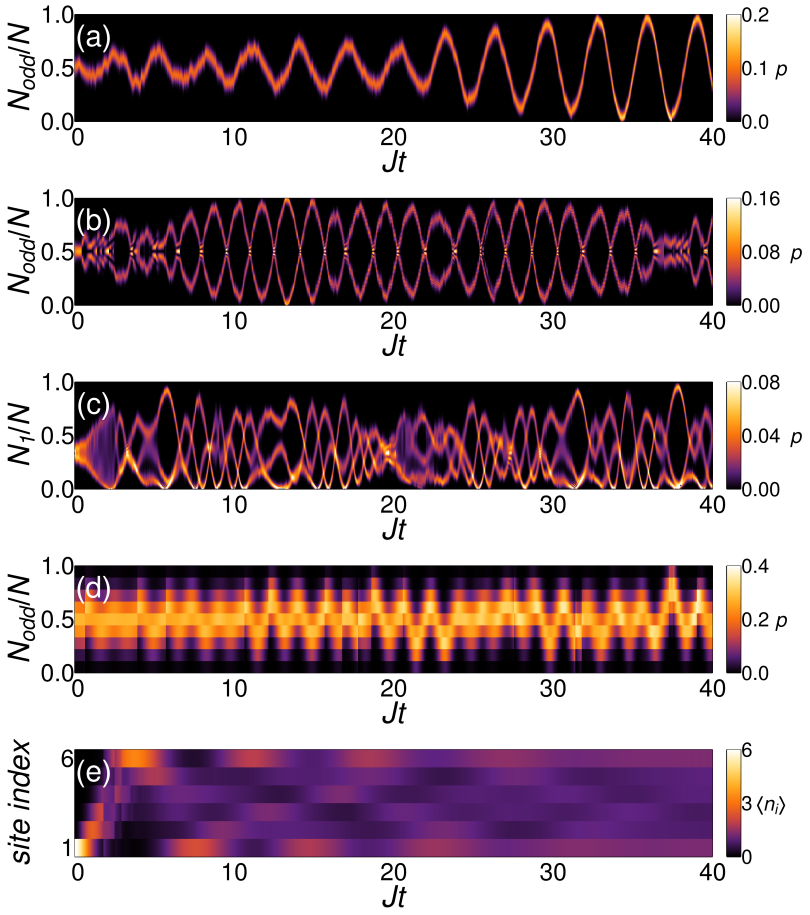


图2：弱测量诱导空间密度中的巨振荡。初始态为均匀态。玻色子系统（a、b、d），费米子系统（c）。（a）诱导出一个光模。（b）诱导出两个光模。（c）诱导出三个光模。（c）费米子中诱导出的光模。（d）玻色子中诱导出的键模。图片取自 [31]。

C. 测量诱导动力学的一些结果图集

一般而言，弱测量的一个效应是诱导动态空间对称性破缺，这取决于诱导光模在系统中的空间耦合方式，见 [30, 31]。它可以诱导出数量不同的空间模，原则上可通过逐格点占据数测量来探测 [31]；还可以利用键合模产生具有更复杂相干性的其他结构 [29]。这是光的几何排列所致，见 [27]。测量会与系统的典型动力学相竞争；隧穿过程和原子动力学通常以均匀方式起作用。在存在相互作用的情况下，其他量子物质相的行为也可能发生改变，例如绝缘体的存在会改变玻色-哈伯德系统中超流体出现的临界值；此外，在费米子（哈伯德）系统中，配对的存在也可能因测量方案不同而被破坏或保护，见 [31]。此外，还可以稳定系统中的有序态，甚至在没有相互作用的情况下诱导有序态（$U = 0$），例如在具有自旋的费米子系统中出现时间晶格式磁化，图 2 和 3，[32]。在 [30]，中发现，弱测量诱导的巨振荡等效于施加在系统上的准周期随机力。理解这一现象的另一种方式，是通过随机系统的有效模型稳定性分析及其李雅普诺夫指数来呈现；显然，系统存在一个竞争区间，超过临界阈值后便会产生不稳定性，进而使密度中的巨振荡稳定地随机出现在各条轨迹中 [30]。需要强调的是，在轨迹层面观察到的行为

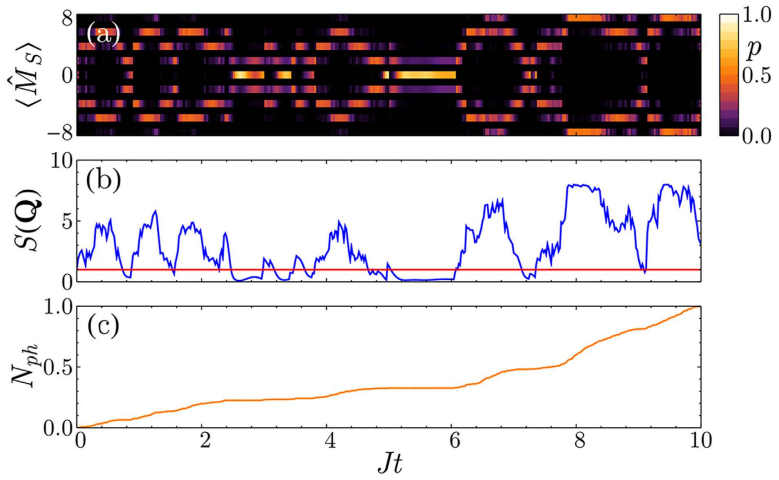


图 3：通过随时间进行的弱测量，轨迹中涌现出反铁磁序。 (a) 费米子系统中每个格点的交错磁化分布。(b) 交错磁化的结构因子。(c) 从系统中逸出的累积光子数。图片引自 [32]。

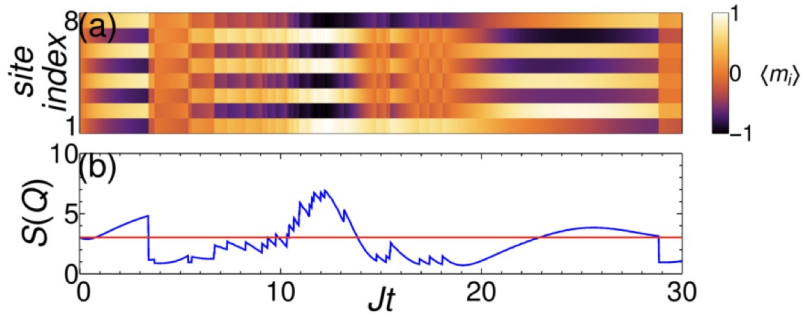


图 4：通过 $U > 0$ 随时间进行弱测量优化反铁磁序。（a）费米子系统中各格点磁化强度的分布。（b）交错磁化强度的结构因子。图取自 [32]。

对单条轨迹的分析提供的信息表明，这些振荡可以被稳定下来。有趣的是，对所有轨迹取平均会得到平凡结果，因为这些振荡具有随机性且相位不相干，但代表性轨迹群的平均结果并非如此。检测效率低下的影响并不会完全消除测量诱导动力学：效率低至 10% 时，系统仍无显著变化；即使效率只有 1%，在玻色子和费米子情形下，也能观察到轨迹中的效应 [30, 32]。此外，还可以通过设计来分析稳定性并控制暗态的涌现，方法是改变非厄米动力学 [28, 29]。要计算系统的可观测量，可以对算符 $\hat{} O$ [32] 使用以下有效轨迹运动方程，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \hat{O} \rangle = -i\langle [\hat{\mathcal{H}}^{f/b}, \hat{O}] \rangle - \langle \{\hat{c}^\dagger \hat{c}, \hat{O}\} \rangle + 2\langle \hat{O} \rangle \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle \tag{14}$$

对于非厄米演化以及由下式给出的跃迁，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \Psi | \Psi \rangle = -\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle \tag{15}$$

其中，跳跃后的算符会发生变化，使得，

$$\langle \hat{O} \rangle \to \frac{\langle \hat{c}^\dagger \hat{O} \hat{c} \rangle}{\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle} \tag{16}$$

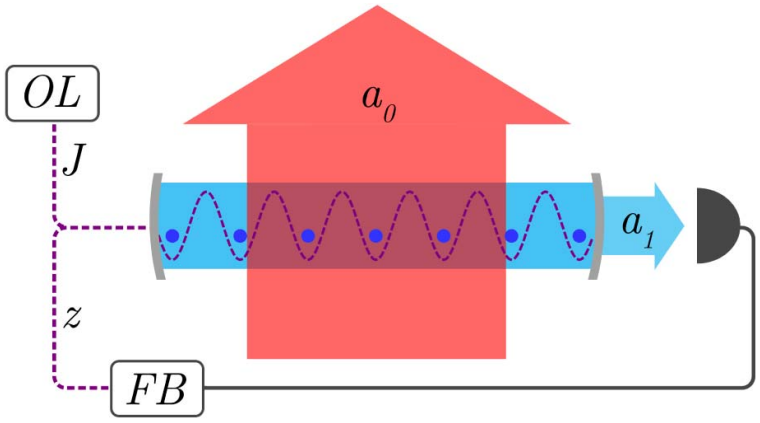


图5：反馈示意图。测量从包含光学晶格中原子的腔内逸出的光子。逸出光子的信号由电子元件处理，并反馈至腔内系统，以改变将原子囚禁在光学晶格中的激光器强度。图片取自 [37]。

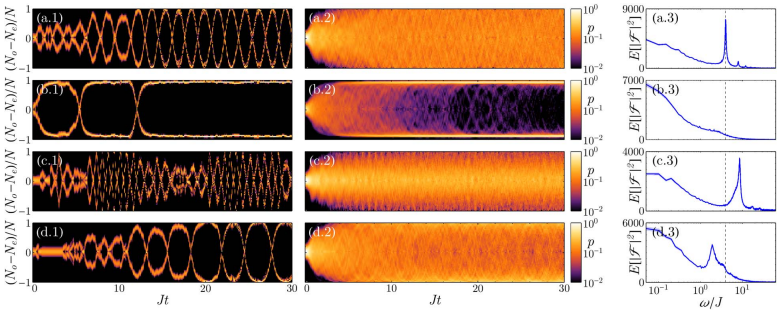


图6：振荡频率控制与任意布居失衡的冻结。(a 1, 2,3) 无反馈系统。(b,1,2,3) 系统处于冻结失衡所需反馈阈值之上。(c,1,2,3) 通过原子动力学将振荡频率控制在自然振荡频率之上。(d,1,2,3) 通过原子动力学将振荡频率控制在自然振荡频率之下。图片取自 [37]。

III. 临界性的反馈与控制

除了测量从系统中逃逸的光子并影响系统内部量子态之外，还可以考虑对系统进行经典反馈。这可以通过处理输出信息（光电探测结果），并根据测得的信号实时修改系统参数来实现（即捕获光学晶格中原子的激光器强度）。图 5 [37] 展示了一个示意图。这之所以可行，是因为这些系统中各个组件的响应频率范围不同：电子响应通常处于 GHz 范围，腔的响应处于 MHz 范围，而原子过程的响应处于 kHz 范围。实际上，在信息处理和参数修改之后，原子所经历的变化是瞬时的。

利用这种系统，首先可以稳定系统中出现的失衡（上一节中的巨振荡），并且可以控制光子损失所诱发的系统振荡频率，见图6。此外，也可以稳定费米子系统中反铁磁序的出现 [37]。

此外，在考虑态的稳定与控制时，可以提出这样一个问题：是否能够控制系统的临界性，改变临界指数及其位置？这将开启一种新的情境，其中的量子系统超越了耗散范式。最近，

理论研究 [38–40] 表明这是可能的。考虑腔内玻色-爱因斯坦凝聚体（BEC）中的两个模式，使得

$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{L}} c_0 + \sqrt{\frac{2}{L}} c_1 \cos(k_1 x) \tag{17}$$

其中， c_0 对应于 $k = 0$ ，而 c_1 对应于 $k = k_1$。经过代数运算，可得到以下有效模型 [38, 39],

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} \approx \Delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_R \hat{S}_z + \frac{2}{\sqrt{N}} \hat{S}_x [g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + GI(t)] \tag{18}$$

为简便起见，这里忽略了原子之间的短程相互作用。这实际上是一个非马尔可夫迪克模型，其中反馈由 $GI(t)$表示，且

$$I(t) \sim \int_0^t h(t-z) \mathcal{F}[x_\theta^{\text{out}}(z)] dz \tag{19}$$

$$= \int h(t-z)(\hat{a} e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}) dz \tag{20}$$

$I(t)$是控制信号，其中 G 为反馈系数。核函数 $h(x) \sim 1/(t_0 + x)^{s+1}$ 除可根据其函数形式改变相变的临界值外，还可改变系统的临界性，使其成为 s的函数。对于发生在物质算符期望值振荡（即 $S_x \approx X$ ）与一个稳态之间的相变，可得到任意数值的临界指数，同时时间模 [38]也会软化。临界性可由以下方式提取:

$$\lim_{G \to G_c} \langle \hat{X}^2 \rangle = \frac{A}{|1 - G/G_{\text{crit}}|^\alpha} + B \tag{21}$$

其中 $\alpha = \alpha(s)$。

已有研究表明，即使在 [39] 中不需要腔，也可以采用反馈方案来改变临界点。

近期已有实验采用类似的反馈方案 [41]。在这些实验中，与不含反馈的系统相比，超辐射超固态的寿命得以延长一个数量级以上。

IV. 结论

通过操控对从系统中逸出的光子的测量方式，可以生成通常不会出现的量子态。动态涌现的态具有有趣的性质和对称性破缺。利用测量效应进行态工程，可以改变、稳定并生成集体行为，从而有望实现具有实用性质的量子模拟。此外，采用带反馈的复合系统，在工程化这些量子物质系统的性质方面提供了更大的灵活性。除了动态制备态之外，还可以在临界点附近任意控制抵达特定物质相的路径，改变其位置和幂律。将量子物质系统与量子光学相结合，为控制这些系统的基本性质提供了新工具，并有望应用于量子模拟和高级量子控制。

V. 致谢

感谢 G. Mazzucchi、W. Kozlowski、D.A. Ivanov、T. Ivanova 和 I. B. Mekhov 对这些笔记所述工作作出的重要贡献。

---

[1] F. Schäfer, T. Fukuhara, S. Sugawa 等: 《利用光学晶格中的超冷原子进行量子模拟的工具》。*Nature Reviews Physics* **2**, 411–425 (2020)。

[2] E. Altman 等。《量子模拟器：架构与机遇》。Phys. Rev. X Quantum 2, 017003 (2021) [3] M. Lewenstein、A. Sampera 和 V. Ahufinger。《光学晶格中的超冷原子：模拟量子多体系统》。牛津大学出版社 (2012)。[4] Jaksch, D., Bruder, C., Cirac, J. I., Gardiner, C. W. 和 Zoller, P.《光学晶格中的冷玻色原子》。Phys. Rev. Lett. 81, 3108 (1998)。[5] S. Sachdev。《量子相变》第二版。剑桥大学出版社 (2011)。[6] C. Foot。《原子物理学》。牛津大学出版社 (2005)。[7] F. Schäfer、T. Fukuhara、S. Sugawa、Y. Takasu 和 Y. Takahashi。《利用光学晶格中的超冷原子进行量子模拟的工具》。Nature Reviews Physics 2, 411 (2020)。[8] I. Bloch、J. Dalibard 和 W. Zwerger，《超冷气体的多体物理学》。《现代物理评论》8 885 (2008)。[9] C. Chin、R. Grimm、P. Julienne 和 E. Tiesinga，《超冷气体中的费什巴赫共振》。《现代物理评论》82, 1225-1286 (2010)。[10] A. Omran、M. Boll、T. A. Hilker、K. Kleinlein、G. Salomon、I. Bloch 和 C. Groß，《简并费米晶格气体中泡利阻塞的显微观测》。Phys. Rev. Lett. 115, 263001 (2015)。[11] E. Cocchi、L. A. Miller、J. H. Drewes、M. Koschorreck、D. Pertot、F. Brennecke 和 M. Köhl，《二维哈伯德模型的状态方程》。Phys. Rev. Lett. 116, 175301 (2016) [12] K. Kwon、Kyungtae K. J. Hur、S. J. Huh 和 J. Choi，《位点分辨成像： ^{7}Li 原子的玻色莫特绝缘体》。Phys. Rev. A 105, 033323 (2022) [13] K. Xu、Y. Liu、J. R. Abo-Shaeer、T. Mukaiyama、J. K. Chin、D. E. Miller、W. Ketterle、Kevin M. Jones 和 E. Tiesinga，《光学晶格中的钠玻色–爱因斯坦凝聚体》。Phys. Rev. A 72, 043604 (2005)。[14] M. Greiner、O. Mandel、T. Esslinger、T. W. Hänsch 和 I. Bloch，《超冷原子气体中从超流体到莫特绝缘体的量子相变》。Nature 415, 39–44 (2002)。[15] S. F. Caballero-Benitez，《高反射率腔中的量子物质（多体腔量子电动力学）》。第二十八届物理学暑期学校论文集 2021；ISSN: 2594-2697，墨西哥国立自治大学 (2022)，arXiv:2201.06641 (2022)。[16] J. Klinder、H. Keßler、M. Reza Bakhtiari、M. Thorwart 和 A. Hemmerich，《迪克–哈伯德模型中超辐射莫特绝缘体的观测》。Phys. Rev. Lett. 115, 230403 (2015)。[17] R. Landig 等，《光学晶格中短程与长程相互作用竞争所产生的量子相》。Nature 532, 476 2016( )。[18] L. Hrubya、N. Dogra、M. Landini、T. Donner 和 T. Esslinger，《长程相互作用强关联气体中的亚稳性与雪崩动力学》，《美国国家科学院院刊》115 (13) 3279-3284 (2018)。[19] I. B. Mekhov 和 H. Ritsch，《量子气体的量子光学》。《激光物理》19, 610 (2009)。[20] J. Léonard、A. Morales、P. Zupancic、T. Esslinger 和 T. Donner。《量子气体中打破连续平移对称性的超固体形成》。Nature 543, 87 (2017)。[21] A. Morales、P. Zupancic、J. Léonard、T. Esslinger 和 T. Donner。《耦合量子气体中的两个序参量》。《自然·材料》17, 686 (2018)。[22] A. J. Kollár、A. T. Papageorge、K. Baumann、M. A. Armen 和 B. L. Lev，《用于多模腔量子电动力学的可调长度腔与玻色–爱因斯坦凝聚体装置》。New J. Phys. 17, 043012 (2015)。[23] H. M. Wiseman 和 G. J. Milburn，《量子测量与控制》（剑桥大学出版社，剑桥，2010）。[24] S. F. Caballero-Benitez 和 I. B. Mekhov，《用于超冷原子涌现多体相的量子光学晶格》。Phys. Rev. Lett. 115, 243604 (2015)。[25] S. F. Caballero-Benitez、G. Mazzucchi 和 I. B. Mekhov，《基于全局集体光–物质相互作用的量子模拟器》。Phys. Rev. A 93, 063632 (2016)。[26] S. F. Caballero-Benitez 和 I. B. Mekhov，《光诱导合成多体相互作用在光学晶格超冷原子中产生的键序》。New J. Phys. 18, 113010 (2016)。[27] W. Kozlowski、S. F. Caballero-Benitez 和 I. B. Mekhov，《通过全局无损寻址探测光学晶格中的物质–场关联与原子数关联》。Phys. Rev. A 92, 013613 (2015)。[28] W. Kozlowski、S. F. Caballero-Benitez 和 I. B. Mekhov。《量子芝诺极限下的非厄米动力学》。Phys. Rev. A 94, 012123 (2016) [29] W. Kozlowski、S. F. Caballero-Benitez 和 I. B. Mekhov。《光学晶格中由物质相位相关测量引起的量子态约化》。Sci. Rep. 7, 42597 (2017)。[30] G. Mazzucchi、W. Kozlowski、S. F. Caballero-Benitez 和 I. B. Mekhov。《弱量子测量诱导的多模玻色系统集体动力学》。New J. Phys. 18, 73017 (2016)。[31] G. Mazzucchi、W. Kozlowski、S. F. Caballero-Benitez、T. J. Elliott 和 I. B. Mekhov，《光学晶格中玻色与费米超冷多体系统的量子测量诱导动力学》。Phys. Rev. A 93, 023632 (2016)。[32] G. Mazzucchi、S. F. Caballero-Benitez 和 I. B. Mekhov，《量子测量诱导的超冷费米气体反铁磁序与密度调制》。Sci. Rep. 6, 31196 (2016)。[33] A. Camacho-Guardian、R. Paredes 和 S. F. Caballero-Benitez，《量子光学晶格中费米子的竞争序量子模拟》。Phys. Rev. A 96, 051602(R) (2017) [34] K. Lozano-Mendez、A. H. Casares 和 S. F. Caballero-Benitez。《自旋or量子光学晶格中由长程相互作用引起的自旋纠缠与磁竞争》。Phys. Rev. Lett. 128, 080601 (2022)。[35] C. Maschler、I. B. Mekhov 和 H. Ritsch，《量子化光场产生的光学晶格中的超冷原子》。《欧洲物理学杂志D》46, 545-560 (2008)。

[36] S. F. Caballero-Benitez 和 I. B. Mekhov，量子光学晶格中超冷原子结构化多体相散射光的量子性质。*New J. Phys.* **17** 123023（2015）。[37] G. Mazzucchi、S. F. Caballero-Benitez、D. A. Ivanov 和 I. B. Mekhov。量子光学反馈控制：在多体系统中建立强关联。*Optica* **3**(11)，1213（2016）。[38] D. A. Ivanov、T. Yu. Ivanova、S. F. Caballero-Benitez 和 I. B. Mekhov，利用弱测量实现反馈诱导量子相变。*Phys. Rev. Lett.* **124**，010603（2020）[39] D. A. Ivanov、T. Yu. Ivanova、S. F. Caballero-Benitez 和 I. B. Mekhov，反馈诱导相变导致的超冷原子无腔自组织。*Sci. Rep.* **10**，10550（2020）。[40] D. A. Ivanov、T. Yu. Ivanova、S. F. Caballero-Benitez 和 I. B. Mekhov，通过反馈调控相变的普适类：超越耗散的开放量子系统。*Phys. Rev. A* **104**，033719（2021）。[41] K. Kroeger、N. Dogra、R. Rosa-Medina、M. Paluch、F. Ferri、T. Donner 和 T. Esslinger，与光学腔耦合的量子气体的连续反馈。*New J. Phys* **22**，033020（2020）。