arXiv:2302.00175v1 [math.DG] 1 Feb 2023

渐近平坦半空间的倍增与黎曼彭罗斯不等式

MICHAEL EICHMAIR 和 THOMAS KOERBER

摘要。基于 H. L. Bray、P. Miao 以及 S. Almaraz、E. Barbosa 和 L. L. de Lima 先前的工作，我们为带有视界边界 $\Sigma \subset M$ 且质量为 $m \in \mathbb{R}$ 的渐近平坦半空间 (M, g) 建立了一种倍化过程。若 $3 \leq \dim(M) \leq 7$，(M, g) 具有非负标量曲率，且边界 ∂M 是平均凸的，我们便可推得黎曼彭罗斯型不等式

$$m \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}$$

作为推论。此外，在 ∂M 不是全测地的情形下，我们展示如何对 (M, g) 作局部扰动，使其标量曲率增大。因此，我们证明上述不等式取等号，当且仅当 (M, g) 的外部区域等距于一个施瓦西半空间。此前，这些结果仅在 $\dim(M) = 3$ 且 Σ 是连通自由边界超曲面的情形下为人所知。

1. 引言

设 (M, g) 是一个连通、完备的 $3 \leq n \leq 7$ 维黎曼流形，其标量曲率 $R(g)$ 可积，且非紧边界 ∂M 的平均曲率 $H(\partial M, g)$ 可积。这里，$H(\partial M, g)$ 是沿 ∂M 对指向 M 外部的法向量 $-\nu(\partial M, g)$ 求散度得到的。

若存在一个数 $\tau > (n-2)/2$，以及 M 的一个非空紧子集，使得其补集与 $\{x \in \mathbb{R}^n_+$ 微分同胚：$|x|_{\bar{g}} > 1\}$，并且在这个所谓的渐近平坦坐标图中，当 $x \to \infty$ 时，(M, g) 就称为渐近平坦半空间。

$$|g - \bar{g}|_{\bar{g}} + |x|_{\bar{g}} \, |D(\bar{g})g|_{\bar{g}} + |x|^2_{\bar{g}} \, |D^2(\bar{g})g|_{\bar{g}} = O(|x|^{-\tau}_{\bar{g}}). \tag{1}$$

这里，$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}$ 是上半空间，$\bar{g}$ 是欧几里得度量。

J. Escobar 在紧致带边界黎曼流形的 Yamabe 问题背景下研究了渐近平坦半空间；参见 [17]，以及 S. Brendle [9]和 S. Brendle 与 S.-Y. S. Chen [10]的相关工作。S. Almaraz [1, 第 2628-2629] 页以及 S. Almaraz、E. Barbosa 和 L. L. de Lima [2, 第 674] 页对渐近平坦半空间进行了详细研究，并为其关联了一个称为质量的全局几何不变量。这个质量的定义归功于

日期：2023年2月2日。

F. C. Marques 在 [2, 第 677], 页给出，其表达式为

$$m(g) = \frac{1}{2\,(n-1)\,\omega_{n-1}} \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} \Bigg(\sum_{i,\,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap S^{n-1}_\lambda(0)} x^i \left[(\partial_j g)(e_i, e_j) - (\partial_i g)(e_j, e_j) \right] \mathrm{d}\mu(\bar{g}) \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}) \cap S^{n-1}_\lambda(0)} x^i \, g(e_i, e_n) \, \mathrm{d}l(\bar{g}) \Bigg) \tag{2}$$

其中，积分是在渐近平坦坐标图中计算的。这里， $\omega_{n-1} = |\{x \in \mathbb{R}^n : |x|_{\bar{g}} = 1\}|_{\bar{g}}$ 表示（$n-1$）维单位球面的欧几里得面积，而 e_1，……， e_n 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基。与 R. Schoen 关于闭流形的工作 [34] 相类似，J. Escobar 建立了带边界的紧流形的 Yamabe 不变量的大小与 [17] 中某个相关渐近平坦半空间的质量 (2) 的符号之间的联系。S. Almaraz、E. Barbosa 和 L. L. de Lima 证明，只要（M， g）满足适当的能量条件，质量 (2) 就是一个几何不变量，而且实际上非负。正如[2, 第 675], 页所指出的，J. Escobar [17, 附录] 和 S. Raulot [33,定理 23]此前已取得这一方向的相关成果。

定理 *1*（[2, 定理 *1*.3]）。设（M, g）是一个维数为 $3 \leq n \leq 7$ 的渐近平坦半空间，满足 R（g）≥ 0 且 H（∂M, g）≥ 0。则 m（g）≥ 0。此外， m（g）$= 0$ 当且仅当（M, g）与（$\mathbb{R}^n_+$, $\bar{g}$）等距。

注 2。如 [31, §2], 中所述，假设 $H(\partial M, g) \geq 0$ 可且应被视为标量曲率 $R(g)$ 在 ∂M 上以分布意义非负的条件；另见 [7, 第 207] 页。我们指出，这一条件也有自然的物理解释； [3, 注 2。7]。

定理 1 仿照爱因斯坦场方程渐近平坦初始数据的正质量定理提出；该定理由 R. Schoen 和 S.-T. Yau [36] 采用极小曲面技术证明，也由 E. Witten [40] 利用狄拉克方程的某些解证明。在初始数据集中存在所谓最外层极小曲面的情况下，R. Penrose [32] 提出的启发式论证暗示，正质量定理存在一个更强的定量版本，即所谓黎曼彭罗斯不等式。G. Huisken 和 T. Ilmanen 在 [21] 中证明了该不等式在维数为 $n = 3$ 且最外层极小曲面连通时成立；H. L. Bray 在 [7] 中证明了最外层极小曲面可能不连通时的情形；H. L. Bray 和 D. Lee 在 [8] 中证明了 $3 \leq n \leq 7$ 且最外层极小曲面可能不连通时的情形。附录 A 中将进一步介绍无边界渐近平坦流形、正质量定理和黎曼彭罗斯不等式。

S. Almaraz、L. De Lima 和 L. Mari [3] 在时空背景下研究了具有非紧边界的初始数据集的质量（2）；另请参阅 L. De Lima 最近的综述 [15]。此外，他们认为，在存在最外层极小曲面的情况下，渐近平坦半空间也应满足黎曼彭罗斯型不等式；参见 [3, 注 56]。

为介绍这一方向的近期成果，我们回顾 [23]中的以下定义；参见图1。设 $\Sigma \subset M$ 是一个满足 $\Sigma \cap \partial M = \partial\Sigma$ 的紧致分离超曲面，其法向量ν(Σ， g)指向 $M \setminus \Sigma$的非紧分支的闭包 M(Σ)。我们称

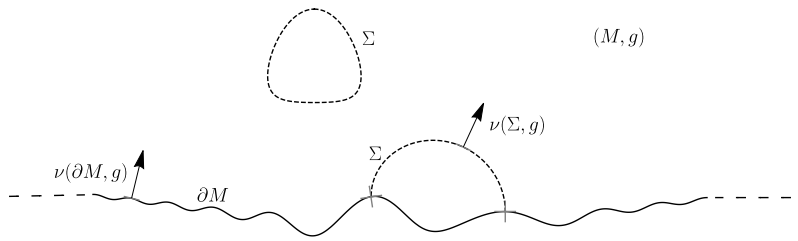


图1. 渐近平坦半空间（M， g）及其视界边界示意图。 ∂M 由黑色实线表示。视界边界 Σ由两条虚线表示，它由一个自由边界超曲面和一个闭超曲面组成。单位法向量 ν（M， g）和 ν（Σ， g）由两个箭头表示。

Σ 的一个分支 Σ^0 为自由边界超曲面，若 $\partial\Sigma^0 \neq \emptyset$ 且对每个$x \in \partial\Sigma^0$都有 $\nu(\Sigma)(x) \in T_x\partial M$ 。若 $\partial\Sigma^0 = \emptyset$，则称 Σ^0 为闭超曲面。

若渐近平坦半空间（M， g）的视界边界为 $\Sigma \subset M$ ，且 Σ 是一个非空紧致极小超曲面并满足以下性质，则称其具有视界边界。

- Σ 的连通分支要么是自由边界超曲面，要么是闭超曲面。
- M（Σ）中的每个极小自由边界超曲面或极小闭超曲面都是 Σ的一个分支。

注3. [23, 引理2.3] 的证明表明，任意维数为 $3 \leq n \leq 7$ 且具有 $H(\partial M, g) \geq 0$ 的渐近平坦半空间 (M, g) 要么具有唯一的视界边界 $\Sigma \subset M$ ，要么不含紧致极小超曲面。

视界边界外的区域 $M(\Sigma)$ 称为外部区域。视界 Σ 也称为最外层极小曲面。具有视界边界的外部区域的一个例子是质量为 $m > 0$ 、维数为 $n \geq 3$的施瓦西半空间，其定义如下：

$$(M(\Sigma), g) = \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : |x|_{\bar{g}} \geq m^{\frac{1}{n-2}} \right\}, \left(1 + m\,|x|_{\bar{g}}^{2-n}\right)^{\frac{4}{n-2}}\ \bar{g} \right) \tag{3}$$

其中 $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ |x|_{\bar{g}} = m^{\frac{1}{n-2}}\}$；参见 [2, 注3。10] 以及 [23, §2]。

第二位作者最近证明了以下关于渐近平坦半空间的黎曼彭罗斯型不等式，其中视界边界是一个连通的自由边界超曲面。

定理 4 ([23, 定理 1。2])。 设(M, g) 是一个维数为 $n = 3$、具有视界边界 $\Sigma \subset M$ 的渐近平坦半空间，并满足以下三个条件。

- $R(g) \geq 0$ 在 $M(\Sigma)$。
- $H(\partial M, g) \geq 0$关于 $M(\Sigma) \cap \partial M$。
- Σ 是一个连通的自由边界超曲面。

Then

$$m(g) \geq \sqrt{\frac{|\Sigma|_g}{32\,\pi}}$$

当且仅当$(M(\Sigma)\ g)$与一个施瓦西半空间(3)等距时，等号成立。

注 5。 关于渐近平坦半空间中定理 *4* 方向上的先前结果——这类半空间由欧几里得空间中的某些图形超曲面产生——已由 *E. Barbosa* 和 *A. Meira*[5]获得。

注 6。 在 [23] 中用于证明定理 *4* 的弱自由边界逆平均曲率流方法，此前已由 *T. Marquardt* 在 [27] 中进行研究。本文作者认为，该方法的适用范围基本上局限于 $n = 3$ 和 Σ 为连通自由边界超曲面的情形；参见 [23,第 16]。

注 7。 定理 *4* 与所谓渐近平坦支撑曲面的彭罗斯型不等式有关。该不等式由 *G. Huisken* 提出猜想，并由 *A. Volkmann* 进行研究；参见 [39, 第 38] 以及 [23,引理 2。1]。

我们的结果概述。将定理 4 与此处表述为定理 41 的渐近平坦流形上的黎曼彭罗斯不等式进行比较，可以看出，定理 4 中关于$n = 3$ 以及 Σ 是连通的自由边界超曲面的假设并非必要。本文旨在采用不同于 [23]的方法来解决这一猜想。事实上，我们将展示如何运用 P. Miao 在 [31], 中提出、并进一步发展了 H. L. Bray 的一个想法 [7], 的粘合方法，构造一种针对渐近平坦半空间的倍化过程，从而将渐近平坦半空间上的黎曼彭罗斯不等式归结为渐近平坦流形上的黎曼彭罗斯不等式。

关于定理 8 的表述，请回顾附录 A 中渐近平坦流形（M，$\tilde{g}$）、其质量 $\tilde{m}$、视界边界 Σ以及外部区域 M（Σ）的定义。

定理 8. 设 (M, g) 是一个维数为 $3 \leq n \leq 7$、具有视界边界 $\Sigma \subset M$ 的渐近平坦半空间，并满足以下两个条件。

- $R(g) \geq 0$ 在 $M(\Sigma)$。
- $H(\partial M,\ g) \geq 0$在 $M(\Sigma) \cap \partial M$。

设 $\varepsilon > 0$。存在一个具有视界边界 $\Sigma \subset M$ 的渐近平坦流形$(M, \tilde{g})$，使得

- $R(\tilde{g}) \geq 0$ 在 $M(\Sigma)$,
- $|\tilde{m}(\tilde{g}) - 2\, m(g)| < \varepsilon$，并且
- $||\Sigma|_{\tilde{g}} - 2\,|\Sigma|_g| < \varepsilon$。

注9。 与定理 *8* 的证明中所用方法相关的拼接构造，也由 *P. Miao* 和 *S. McCormick* 在 [28]中，以及 *S. Lu* 和 *P. Miao* 在 [26]中进行了研究。

结合定理 8 和定理 41，我们得以将渐近平坦半空间的黎曼 Penrose 不等式推广到维数小于 8 的情形，并适用于可能不连通的视界边界。

推论 10. 设 (M, g) 是一个维数为 $3 \leq n \leq 7$、视界边界为 $\Sigma \subset M$ 的渐近平坦半空间，并满足以下两个条件。

- $R(g) \geq 0$ 在 $M(\Sigma)$。
- $H(\partial M, g) \geq 0$在 $M(\Sigma) \cap \partial M$。

Then

$$m(g) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{|\Sigma|_g}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}. \tag{4}$$

注 11. *A. Carlotto* 和 *R. Schoen* 已在 $[12, 定理2.3]$ 中证明，存在大量具有非负标量曲率、且等距包含一个欧几里得半空间的渐近平坦黎曼流形。注意，推论 *10* 表明，表述为定理 *41* 的黎曼彭罗斯不等式，可以局部化到这类初始数据中几何上非平凡的部分。

用于证明推论 10 的逼近论证无法直接用于刻画（4）中的等号成立情形。然而，我们观察到，可以对（M, g）进行局部扰动，从而增大边界 ∂M 的非脐点附近的标量曲率。结合 R. Schoen 和 S.-T. Yau $[36]$ 为刻画正质量定理中的等号成立情形所采用的变分论证，我们能够证明以下刚性结果。

定理 12。 设(M, g) 是一个维数为 $3 \leq n \leq 7$ 、具有视界边界 $\Sigma \subset M$ 的渐近平坦半空间，并满足以下两个条件。

- $R(g) \geq 0$ 在 $M(\Sigma)$。
- $H(\partial M, g) \geq 0$在 $M(\Sigma) \cap \partial M$上。

假设

$$m(g) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{|\Sigma|_g}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

那么$(M(\Sigma)\ g)$ 与施瓦西半空间(3)等距。

注 13。 *H. L. Bray* 和 *D. A. Lee* $[8]$ 证明了维数为 $3 \leq n \leq 7$ 的渐近平坦流形$(M, \tilde{g})$ 上的黎曼 *Penrose* 不等式的刚性，另需假设$(M, \tilde{g})$ 具有自旋结构；参见定理 *41*。基于 *D. McFeron* 和 *G. Székelyhidi* 先前的工作，*S. Lu* 和 *P. Miao* $[26, 定理 1。1]$ 证明了可以去除自旋假设。利用本文发展的技术，我们得以对此给出一个简短的替代证明；参见定理 *39*。

注 14. 我们综述附录 *F* 中定理 *12* 之前有关标量曲率刚性的若干重要成果。

注 15. 对于定理 *8*、推论 *10* 和定理 *12* 的证明，只需要求度量 g 属于 $C^{2,\alpha}$类。为便于阅读，我们在全文中均假设 g 是光滑的。

证明概要。设 (M, g) 是一个具有视界边界$\Sigma \subset M$的渐近平坦半空间，并假设 $R(g) \geq 0$在 $M(\Sigma)$ 中，且 $H(\partial M, g) \geq 0$于 $M(\Sigma) \cap \partial M$上。证明定理 8 的基本˜思路是考虑通过反射得到的 (M, g) 的双倍流形 $(M, \tilde{g})$，反射所在之处为

∂M。度量 $\tilde{g}$仅在 ∂M处 C^0。条件 $H(\partial M, g) \geq 0$表明 $\tilde{g}$ 的标量曲率在分布意义下非负；参见注 2。此外，由于 $\Sigma \subset M$ 是˜ ˜一个与 ∂M 正交相交的最外层极小曲面，其双倍流形 $\Sigma \subset M$ 是一个无边界的最外层极小曲面。

˜要使这一启发式论证严谨化，难点在于，必须以一种能够同时追踪质量、视界边界以及相关能量条件的方式，对（M, $\tilde{g}$）进行平滑处理。为此，我们首先改造 S. Almaraz、E. Barbosa 和 L. L. de Lima 在 [2, 命题 4.1] 中提出的逼近方法， g 使其标量平坦且在无穷远处共形平坦，并使 ∂M 在无穷远处全测地；参见命题 16。特别地，反射后的度量 $\tilde{g}$ 在有界开集 $W \subset M$之外是 C^2 的。此外，通过对度量作局部共形扰动，我们可以使 Σ 严格平均凸；参见引理 20。

接下来，我们使用 P. Miao 在 [31]中提出的技术，在 $W \cap \partial M$ 附近对 $\tilde{g}$ 进行平滑处理。在这一步中， ∂M 的平均凸性确保平滑后度量的标量曲率在 ∂M附近仍有一致的下界；参见引理 24。此外，我们证明，这一过程不会影响 Σ 的严格平均凸性˜；参见引理 25。

通过一种类似于 P. Miao 在 [31, §4], 中提出的方法的共形变换（该方法又以 [36, 引理 3.3], 为基础），我们消除了逼近过程中可能在 ∂M 附近产生的少量负标量曲率。这种共形变换只会使平滑后流形的˜质量发生微小变化；见命题 31。最后，以 Σ 为屏障可知，平滑后的度量具有视界边界。由于 $\Sigma \subset M$ 是面积极小的，˜因此新视界边界的面积至少与 Σ 一样大；见引理 32。这就是我们得到定理 8 的方法。

为证明定理 12，我们首先对 $(M(\Sigma) g)$ 构造一种整体共形扰动，该扰动保持条件 $R(g) \geq 0$ 和 $H(\partial M, g) \geq 0$，除非 $R(g) = 0$，否则严格减小 $m(g)$，并且只会轻微改变 Σ 的面积。其次，若∂M的第二基本形式 $h(\partial M, g)$ 不为零，我们就对 $(M(\Sigma) g)$ 构造一种局部扰动，使 $R(g)$ 增大，同时保持条件 $H(\partial M, g) \geq 0$，并且既不改变 $m(g)$，也不改变 $|\Sigma|_g$。我们注意到，具有这些性质的扰动不可能是共形的；它必须针对∂M的几何进行精细调整。因此，若等式 (4) 成立，则 ∂M 是全测地的，且双倍流形 $(M, \tilde{g})$ 是C^2-渐近平坦的。由此定理 12 可由定理 41 得证。

致谢。 作者感谢奥地利科学基金 START 项目 Y963 的支持。第二作者感谢奥地利科学基金 Lise-Meitner 项目 M3184 的支持。作者感谢 Pengzi Miao 就定理 39 的表述提供有益反馈，并提醒他们注意到 [26] 中的结果。作者感谢匿名审稿人的反馈，这些反馈改进了本文的阐述。

谨以此文缅怀 Robert Bartnik。

2. 化归为共形平坦端

在本节中，我们假设 (M, g) 是一个维数为 $3 \le n \le 7$、衰减率为 $\tau > (n-2)/2$ 的渐近平坦半空间。我们还假设 (M, g) 具有视界边界 $\Sigma \subset M$，并且 $R(g) \ge 0$ 属于 $M(\Sigma)$，而 $H(\partial M, g) \ge 0$ 位于 $M(\Sigma) \cap \partial M$ 上。

本节的目标是用一列定义在 M 上的黎曼度量 g_i 来逼近黎曼度量 g：这些度量是标量平坦、共形平坦的，并且在某个紧集之外满足 $h(\partial M, g_i) = 0$。

此处及下文中，Σ 和 ∂M 分别由指向 $M(\Sigma)$ 的单位法向量 $\nu(\Sigma, g)$ 和 $\nu(\partial M, g)$ 定向。$H(\Sigma, g)$ 和 $H(\partial M, g)$ 分别计算为 $-\nu(\Sigma, g)$ 沿 Σ 的散度，以及 $-\nu(\partial M, g)$ 沿 ∂M 的散度。

命题 16. 设 $\tau' \in \mathbb{R}$ 满足 $(n-2)/2 < \tau' < \tau$。存在黎曼度量序列 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$，它们定义在 M 上；并存在紧集序列 $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$，满足 (M, g_i) 是一个具有视界边界 $\Sigma_i \subset M(\Sigma)$ 的渐近平坦半空间，且具有以下性质。

- (M, g_i) 在 $M \setminus K_i$ 中是共形平坦的。
- $R(g_i) = 0$ 在 $M \setminus K_i$ 中。
- $h(\partial M, g_i) = 0$ 在 $\partial M \setminus K_i$ 上。
- $R(g_i) \ge 0$ 在 $M(\Sigma)$。
- $H(\partial M, g_i) \ge 0$ 在 $M(\Sigma) \cap \partial M$。
- $m(g_i) = m(g) + o(1)$ 作为 $i \to \infty$。
- $|\Sigma_i|_{g_i} = |\Sigma|_g + o(1)$ 作为 $i \to \infty$。
- $g_i \to g$ 在 $C^0(M)$ 时为 $i \to \infty$。

此外，

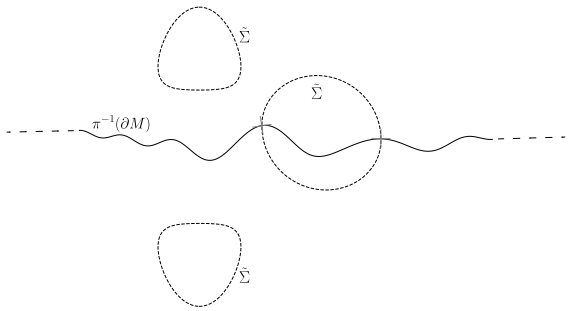
$$\sup_{i \ge 1} \limsup_{x \to \infty} \left[|x|_{\bar{g}}^{\tau} |g_i - \bar{g}|_{\bar{g}} + |x|_{\bar{g}}^{\tau+1} |D(\bar{g}) g_i|_{\bar{g}} + |x|_{\bar{g}}^{\tau+2} |D^2(\bar{g}) g_i|_{\bar{g}} \right] < \infty. \tag{5}$$

证明。按照 [2, 命题 4.1] 的证明中的论证，但用命题 46 代替 [2,命题 3.3]，，我们得到一列 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 定义在 M 上的黎曼度量 g_i 以及一列$\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ 紧集 $K_i \subset M$，其穷尽 M，并且满足以下性质。

- g_i 在 $M \setminus K_i$中是共形平坦的。
- $R(g_i) = 0$ 在 $M \setminus K_i$中。
- $h(\partial M, g_i) = 0$ 在 $\partial M \setminus K_i$ 上。
- $R(g_i) \ge 0$ 在 $M(\Sigma)$ 中。
- $H(\partial M, g_i) \ge 0$ 在 $M(\Sigma)$ 上 $\cap \partial M$。
- $H(\Sigma, g_i) = 0$ 在 Σ 上。
- $m(g_i) = m(g) + o(1)$ 作为 $i \to \infty$。

此外，$g_i \to g$ 在 $C^0(M)$ 中，$g_i \to g$ 在 $C^2_{loc}(M)$ 中，并且 (5) 成立。

根据 (5)，存在 $\lambda_0 > 1$，使得半球 $\mathbb{R}^n_+ \cap S_\lambda(-1/2\,\lambda\, e_n)$ 关于 g_i 具有负平均曲率，并且在满足 $\lambda \ge \lambda_0$且 i 充分大时，与 ∂M 以相对于 g_i 的锐角相交。我们考虑 $M(\Sigma)$ 中所有满足以下条件的嵌入超曲面：



~ ~图 2. 双倍流形（M，$\tilde{g}$）与（M，g）的示意图。（M，$\tilde{g}$）通过关于 ∂M 的反射得到，图中以黑色实线表示。这里，Σ 有两个~分支，而 Σ 有三个分支，以虚线表示。

它们在 M(Σ) 中与 Σ 同调，边界包含于 ∂M，且在 M(Σ) $\cap \partial M$ 中与 $\partial\Sigma$同伦等价。由于 H(Σ，g_i) $= 0$，由 [30, 定理 1]可知，存在一个最外层极小超曲面 $\Sigma_i \subset M$(Σ)，它在 M(Σ) 中与 Σ同调，边界在 M(Σ) $\cap \partial M$ 中与 $\partial\Sigma$同伦等价，且其各个分支要么是自由边界超曲面，要么是闭超曲面。此外，

$$\sup_{i\geq 1} |\Sigma_i|_{g_i} < \infty. \tag{6}$$

回顾 [23, 引理 2.3]，Σ 在 M（Σ）中相对于 g 是面积极小的。因此，当 $i \to \infty$时，

$$|\Sigma|_g \leq |\Sigma_i|_g \leq (1 + o(1))|\Sigma_i|_{g_i}.$$

最后，利用 (6)、曲率估计 [23, 引理 3.3], 以及标准椭圆理论可知，必要时再取一个子列后，$\{\Sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$ 收敛到一个极小曲面 $\Sigma_0 \subset M$（Σ），该曲面在 $C^{1,\,\alpha}$（M）中相对于 g，并且在 ∂M之外光滑收敛，且可能具有有限重数。由于 M（Σ）是一个外部区域，因此可得 $\Sigma_0 = \Sigma$。由于 Σ_i 在 M（Σ_i）中相对于 g_i是面积极小的，我们得到，当 $i \to \infty$时，

$$|\Sigma_i|_{g_i} \leq (1 + o(1))|\Sigma|_{g_i} \leq (1 + o(1))\,|\Sigma|_g.$$

该断言由此得出。 □

3. 渐近平坦半空间的拼接

本节假设 (M，g) 是一个维数为 $3 \leq n \leq 7$、具有视界边界 $\Sigma \subset M$ 的渐近平坦半空间，并满足以下性质。

- (M，g) 在某个紧集之外是共形平坦的。
- R(g) 在某个紧集之外 $= 0$。
- h(∂M，g) 在某个紧集之外 $= 0$。
- H(∂M，g) ≥ 0于 M(Σ) $\cap \partial M$。

本节的目标是通过关于 ∂M 的反射将 (M，g) 构造成双倍流形，并适当地光滑化双倍流形的度量。

引理 17。 存在 $\delta_0 > 0$ ，具有以下性质。映射

$$\Phi : \partial M \times [0, \delta_0) \to \{x \in M : \operatorname{dist}(x, \partial M, g) < \delta_0\}$$

由.....给出

$$\Phi(y, t) = \exp(g)_y(t\,\nu(\partial M, g)(y))$$

是一个微分同胚。

证明。 显然， Φ 是局部微分同胚且为满射。此外，根据紧性和引理 45，并利用 g 是渐近平坦的这一事实 (1)，可知 Φ 是单射。□

注 18。 由引理 *17* 可知，存在一个黎曼度量的光滑族 $\{\gamma(g)_t : t \in [0, \delta_0)\}$ ，定义在 ∂M 上，满足

$$\Phi^* g = \gamma(g)_t + dt^2.$$

Let

$$\tilde{M} = (M \times \{-1, 1\})/\sim \tag{7}$$

其中

- $(x_1, \pm 1) \sim (x_2, \pm 1)$ 当且仅当 $x_1 = x_2$ 且
- $(x_1, \pm 1) \sim (x_2, \mp 1)$ 当且仅当 $x_1, x_2 \in \partial M$ 且 $x_1 = x_2$.

Let

$$\pi : \tilde{M} \to M \qquad \text{be given by} \qquad \pi([(x, \pm 1)]) = x \tag{8}$$

and

$$\tilde{\Sigma} = \pi^{-1}(\Sigma);$$

见图 2。

我们考虑映射

$$\tilde{\Phi} : \partial M \times (-\delta_0, \delta_0) \to \{\tilde{x} \in \tilde{M} : \operatorname{dist}(\pi(\tilde{x}), \partial M, g) < \delta_0\}$$

定义为

$$\tilde{\Phi}(y, t) = [(\Phi(y, |t|), \operatorname{sign}(t))].$$

~ ~通过要求映射 Φ 为光滑映射，我们在 M 上得到一个光滑结构。此外，给定$t \in (-\delta_0, 0]$，我们定义 $\gamma(g)_t = \gamma(g)_{-t}$。注意， $\gamma(g)_t + dt^2$ 在 $\partial M \times (-\delta_0, \delta_0)$ 上连续。因此， M 上的黎曼度量 $\tilde{g}$ 定义为

$$\tilde{g} = \pi^* g$$

在 ∂M 上连续。

对于下面的引理，请回顾附录 A 中渐近平坦度量的定义 (29)，以及无边界渐近平坦流形质量的定义 (30)。

引理 19. $\tilde{g}$ 属于 C^0 类，且是 C^2-渐近平坦的。此外，以下性质成立。

- $\tilde{m}(\tilde{g}) = 2\,m(g)$。~
- $|\Sigma|_{\tilde{g}} = 2\,|\Sigma|_g$.

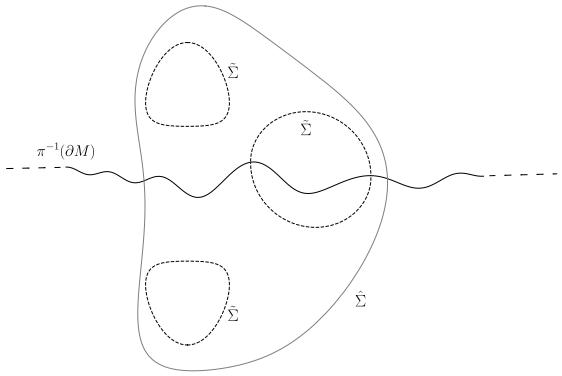


图3. 引理 19 证明的示意图。 $\pi^{-1}(\partial M)$由˜ ˆ ˜ ˜黑色实线表示， Σ 由虚线表示。另一超曲面 $\Sigma \subset M(\Sigma)$˜ ˆ与 Σ同调，由灰色实线表示。 $\pi(\Sigma \setminus \partial M)$的每个分支都与 Σ 同调，且与 Σ属于相同的边界同伦类。

- $\tilde{\Sigma} \subset M$ 属于 C^1 类，1。˜ ˜ ˜
- Σ 在 $M(\Sigma)$ 中相对于 $\tilde{g}$在其同调类内是面积极小的。

证明。 这些断言由上述构造得出，因为(M, g)在无穷远处共形平坦， ∂M 在无穷远处全测地， Σ 与 ∂M 正交相交，并且 Σ 在 $M(\Sigma)$中于其同调类和边界同伦类内是面积极小的；见图3。□

引理 20。 存在一列黎曼度量 $\{g^i\}_{i=1}^{\infty}$ ，定义在 M 上，以及 Σ 的一个邻域$W \Subset M$ ，使得 g^i 与 g 共形等价，且在 W之外 $g^i = g$ ，并在C^2（M）中 $g^i \to g$ 。此外，

- H（Σ， g^i） > 0 且
- H（∂M， g^i） ≥ 0。

证明。 令 $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为引理 48 中的序列，并令 $g^i = (1 + \psi_i)^{\frac{4}{n-2}} g$。结论由引理 48 和引理44得出。□

引理21。 记号同引理 *20*。对于所有充分小的 $\delta_0 > 0$ ，映射

$$\Phi_i : \partial M \times [0, \delta_0) \to \{x \in M : \mathrm{dist}(x, \partial M, g^i) < \delta_0\}$$

由下式给出

$$\Phi_i(y, t) = \exp(g^i)_y(t\, \nu(\partial M, g^i)(y))$$

对所有 i 都是微分同胚。此外，还存在光滑族 $\{\gamma(g^i)_t : t \in [0, \delta_0)\}$ 的黎曼度量 $\gamma(g^i)_t$ ，定义在 ∂M 上，满足

$$\Phi_i^* g^i = \gamma(g^i)_t + dt^2.$$

证明。 这与引理 17 中的推导相同，同时还用到了 $g^i = g$ 在 W 之外以及 $g^i \to g$ 在 $C^2(M)$中；见引理 20。□

和之前一样，我们考虑这些映射

$$\tilde{\Phi}_i : \partial M \times (-\delta_0, \delta_0) \to \{\tilde{x} \in \tilde{M} : \operatorname{dist}(\pi(\tilde{x}), \partial M, g^i) < \delta_0\}$$

由下式给出

$$\tilde{\Phi}_i(y,t) = [(\Phi_i(y,|t|), \operatorname{sign}(t))].$$

由于 g 和 g^i 共形等价，映射 $\tilde{\Phi}_i$ 属于 C^2类。与之前一样，给定 $t \in （-\delta_0，0]$，我们定义 $\gamma（g^i）_t = \gamma（g^i）_{-t}$，并得到由下式给出的连续度量 $\tilde{g}^i$

$$\tilde{g}^i = \pi^* g^i.$$

为了光滑化度量 $\tilde{g}^i$，我们回顾一下 [31, §3]中的构造步骤。为此，令 $\varphi \in C^\infty（\mathbb{R}）$，其中

- $\operatorname{spt}(\varphi) \subset (0,1)$,
- $0 \le \varphi \le 1$, and
- $\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

此外，令 $\eta \in C^\infty（\mathbb{R}）$，其中

- $\operatorname{spt}(\eta) \subset (-1/2, 1/2)$,
- $\eta(t) = 1/100$ if $|t| < 1/4$, and
- $0 \le \eta(t) \le 1/100$ if $1/4 < |t| < 1/2$.

令 $\delta \in （0，\delta_0）$。我们定义 $\eta_\delta \in C^\infty（\mathbb{R}）$ 如下

$$\eta_\delta(t) = \delta^2\, \eta(\delta^{-1} t).$$

给定整数 $i \ge 1$ 和 $t \in (-\delta_0，\delta_0)$，我们定义黎曼度量

$$\gamma(\tilde{g}^i)^\delta_t = \int_0^1 \gamma(\tilde{g}^i)_{t - t\,\eta_\delta(s)}\, \varphi(s)\,\mathrm{d}s \tag{9}$$

于 ∂M 上。

引理 22 （[31, 引理 3。2]）。度量 $\gamma（\tilde{g}^i）^\delta_t + dt^2$ 在 $\partial M \times （-\delta_0, \delta_0）$ 中为 C^2，并且在 $\partial M \times （-\delta/2, \delta/2）$ 之外与 $\gamma（\tilde{g}^i）_t + dt^2$ 一致。

我们在 $\tilde{M}$ 上得到一个由下式给出的 C^2 类黎曼度量 $\tilde{g}^i_\delta$

$$\tilde{g}^i_\delta(\tilde{x}) = \begin{cases} \tilde{g}^i(\tilde{x}) & \text{if } \operatorname{dist}(\pi(\tilde{x}), \partial M, \tilde{g}^i) \ge \delta_0, \\ (\tilde{\Phi}_i)_*(\gamma(\tilde{g}^i)^\delta_t + dt^2)(\tilde{x}) & \text{else.} \end{cases} \tag{10}$$

以下引理可由直接计算得到，使用引理 20；参见 [31, 第 1168-1170] 页。˜对于该陈述，我们选取 M 上一个光滑的参考度量 ˇg，它在一个紧集之外与 $\tilde{g}$ 一致。

引理 23. 成立

$$\limsup_{\delta \searrow 0} \sup_{i \ge 1} \left(\delta^{-1} |\tilde{g}^i_\delta - \tilde{g}^i|_{\check{g}} + |D(\check{g})\tilde{g}^i_\delta|_{\check{g}} + \delta\, |D^2(\check{g})\tilde{g}^i_\delta|_{\check{g}}\right) < \infty.$$

在下一个引理中，用到了假设 $H(\partial M, g^i) \geq 0$。

引理 24 ([31, 命题 3。1])。 当 $\delta \searrow 0$ 时，对所有 i, R均一致成立：$\tilde{g}^i_\delta \geq -O(1)$.

引理 25。 设 $i \geq 1$。有 $H(\tilde{\Sigma}, \tilde{g}^i_\delta) > 0$于 $\tilde{\Sigma} \setminus \pi^{-1}(\partial\Sigma)$，前提是 $\delta > 0$充分小。

证明。 不失一般性，我们可以假设 Σ 是一个连通的自由边界超曲面。由此可知， $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{M}$ 是一个连通的、无边界的紧超曲面，属于 $C^{1,1}$ 类，且在 $\pi^{-1}(\partial\Sigma)$ 之外光滑。

设 $x_0 \in \partial\Sigma$。给定 $0 < \delta < \delta_0$，令 $U_\delta = \{\tilde{x} \in \tilde{M} : \mathrm{dist}(\pi(\tilde{x}), x_0, g^i) < \delta\}$。我们选取以 x_0为中心的 $(\partial M, g^i|_{\partial M})$ 的法坐标，并取诱导标架 $\partial_1, \ldots, \partial_{n-1}$，使得$\partial_{n-1} = \nu(\Sigma, g^i)$ 在 x_0 处成立。以下误差估计与 x_0的选取无关。注意

$$\tilde{g}^i = \sum_{\ell=1}^{n-1} d_\ell^2 + dt^2 + O(\delta) \qquad \text{and} \qquad \nu(\tilde{\Sigma}, \tilde{g}^i) = \partial_{n-1} + O(\delta)$$

在 U_δ 中。利用引理 23，我们得到

$$\tilde{g}^i_\delta = \sum_{\ell=1}^{n-1} d_\ell^2 + dt^2 + O(\delta) \qquad \text{and} \qquad \nu(\tilde{\Sigma}, \tilde{g}^i_\delta) = \partial_{n-1} + O(\delta).$$

再次利用引理 23，我们得出，在 $U_\delta \cap \tilde{\Sigma} \setminus \pi^{-1}(\partial\Sigma)$ 上，

$$H(\tilde{\Sigma}, \tilde{g}^i_\delta) = H(\tilde{\Sigma}, \tilde{g}^i) + \Gamma(\tilde{g}^i_\delta)^{n-1}_{tt} + \sum_{\ell=1}^{n-2} \Gamma(\tilde{g}^i_\delta)^{n-1}_{\ell\ell} - \Gamma(\tilde{g}^i)^{n-1}_{tt} - \sum_{\ell=1}^{n-2} \Gamma(\tilde{g}^i)^{n-1}_{\ell\ell} + O(\delta).$$

这里， Γ 表示一个克里斯托费尔符号。再次利用引理 23，我们有

$$\begin{aligned} 2\,\Gamma(\tilde{g}^i_\delta)^{n-1}_{\ell\ell} &= 2\,(\partial_\ell\, \tilde{g}^i_\delta)(\partial_{n-1}, \partial_\ell) - (\partial_{n-1}\, \tilde{g}^i_\delta)(\partial_\ell, \partial_\ell) + O(\delta), \\ 2\,\Gamma(\tilde{g}^i)^{n-1}_{\ell\ell} &= 2\,(\partial_\ell\, \tilde{g}^i)(\partial_{n-1}, \partial_\ell) - (\partial_{n-1}\, \tilde{g}^i)(\partial_\ell, \partial_\ell) + O(\delta), \end{aligned}$$

对所有 $1 \leq \ell \leq n-2$ 都成立。再利用 (9) 和 (10)，我们看到

$$\begin{aligned} 2\,\Gamma(\tilde{g}^i_\delta)^{n-1}_{tt} &= 2\,(\partial_t\, \tilde{g}^i_\delta)(\partial_{n-1}, \partial_t) - (\partial_{n-1}\, \tilde{g}^i_\delta)(\partial_t, \partial_t) + O(\delta) = O(\delta), \\ 2\,\Gamma(\tilde{g}^i)^{n-1}_{tt} &= 2\,(\partial_t\, \tilde{g}^i)(\partial_{n-1}, \partial_t) - (\partial_{n-1}\, \tilde{g}^i)(\partial_t, \partial_t) + O(\delta) = O(\delta). \end{aligned}$$

M此外，利用 (9) 和 (10)，导致引理 23 的同一论证表明 at

$$(\partial_\ell\, \tilde{g}^i_\delta)(\partial_{n-1}, \partial_\ell) = (\partial_\ell\, \tilde{g}^i)(\partial_{n-1}, \partial_\ell) + O(\delta) \qquad \text{and} \qquad (\partial_{n-1}\, \tilde{g}^i_\delta)(\partial_\ell, \partial_\ell) = (\partial_{n-1}\, \tilde{g}^i)(\partial_\ell, \partial_\ell) + O(\delta)$$

对所有 $1 \leq \ell \leq n-2$。

由于在 $\{\tilde{x} \in \tilde{\Sigma}$ 外部， $H(\tilde{\Sigma}, \tilde{g}^i_\delta) = H(\tilde{\Sigma}, \tilde{g}^i)$: $\mathrm{dist}(\pi(\tilde{x}), \partial\Sigma, g^i) < \delta\}$，故断言成立。 □

引理 26. 设 $i \geq 1$。对于每个 $\delta > 0$ 充分小的情形，都存在一个由 $\{\tilde{\Sigma}^i_{\delta,j}\}_{j=1}^\infty$ 个闭超曲面 $\tilde{\Sigma}^i_{\delta,j} \subset M \setminus M_{(\Sigma)}$ 组成的序列，其属于 C^2 类，并满足

- $H(\tilde{\Sigma}^i_{\delta,j}, \tilde{g}^i_\delta) > 0$ *for every* j *and*
- $\tilde{\Sigma}^\delta_{i,j} \to \tilde{\Sigma}$ *in* C^1.

证明。 </style>这可通过类似于 [21, 引理5.6]证明中的方法，利用平均曲率流进行逼近，并同时应用引理 25 得到。□

回顾引理 20 中的开集 $W \Subset M$。我们选择开集 $W_1 \Subset W_2 \Subset M$，使得

- $W \Subset W_1$ 和
- $\tilde{g}$ 在 $M \setminus W_1$中为 C^2。

接着，我们选取一个函数 $\chi \in C^\infty(M)$，使得

- $0 \leq \chi \leq 1$,
- $\chi = 1$ in $M \setminus W_2$, and
- $\chi = 0$ in W_1.

我们在 $\tilde{M}$ 上定义黎曼度量$\hat{g}^i_\delta$ 如下：

$$\hat{g}^i_\delta = \chi\, \tilde{g}^i + (1-\chi)\, \tilde{g}^i_\delta.$$

注意，对于所有满足 $\mathrm{dist}(\tilde{x},\ \pi^{-1}(\partial M),\ \tilde{g}^i) \geq \delta$ 的 $\tilde{x} \in \tilde{M}$，都有 $\hat{g}^i_\delta(\tilde{x}) = \tilde{g}^i(\tilde{x})$。

引理 27. 当 $\delta \searrow 0$ 时，且关于 i一致地成立，

$$|\hat{g}^i_\delta - \tilde{g}^i|_{\tilde{g}^i} = o(1).$$

此外，在 $\tilde{M}$的一个紧子集之外，对于所有 i，$\hat{g}^i_\delta = \tilde{g}^i = \tilde{g}$ 。

证明。 这由利用引理 20 和引理 23 的构造得出。 □

引理 28. 当 $\delta \searrow 0$ 时，且关于 i一致地成立，

$$\int_{\tilde{M}(\tilde{\Sigma})} (\max\{-R(\hat{g}^i_\delta), 0\})^{\frac{n}{2}}\, \mathrm{d}v(\hat{g}^i_\delta) = 2 \int_{M(\Sigma)} (\max\{-R(g^i), 0\})^{\frac{n}{2}}\, \mathrm{d}v(g^i) + o(1).$$

证明。 一方面，若 $\tilde{x} \in \tilde{M} \setminus W_2$ 或 $\mathrm{dist}(\tilde{x}, \pi^{-1}(\partial M)\ \tilde{g}^i) \geq \delta$，则有 $\hat{g}^i_\delta(\tilde{x}) = \tilde{g}^i(\tilde{x})$。因此，

$$R(\hat{g}^i_\delta)(\tilde{x}) = R(\tilde{g}^i)(\tilde{x}) = R(g^i)(\pi(\tilde{x})).$$

另一方面，注意到，当 $\delta \searrow 0$时，

$$|\{\tilde{x} \in W_2 : \mathrm{dist}(\tilde{x}, \pi^{-1}(\partial M), \tilde{g}^i) < \delta\}|_{\hat{g}^i_\delta} = o(1).$$

此外，回想一下，在局部坐标中，

$$R(\hat{g}^i_\delta) = \sum_{a,b,k=1}^{n} (\hat{g}^i_\delta)^{ab} \Bigg(\partial_k \Gamma^k_{ab}(\hat{g}^i_\delta) - \partial_a \Gamma^k_{kb}(\hat{g}^i_\delta) + \sum_{\ell=1}^{n} \left[\Gamma^k_{k\ell}(\hat{g}^i_\delta)\, \Gamma^\ell_{ab}(\hat{g}^i_\delta) - \Gamma^k_{a\ell}(\hat{g}^i_\delta)\, \Gamma^\ell_{kb}(\hat{g}^i_\delta) \right] \Bigg).$$

利用引理 23、引理 24 和引理 27，我们得出，当 $\delta \searrow 0$ 时，

$$R(\hat{g}^i_\delta) = \chi\, R(\tilde{g}^i) + (1-\chi)\, R(\tilde{g}^i_\delta) + O(1) \geq -O(1)$$

对 $\{\tilde{x} \in W_2$ 一致成立：$\mathrm{dist}(\tilde{x}, \pi^{-1}(\partial M)\ \tilde{g}^i) < \delta\}$。

由这些估计即可得出该断言。 □

引理 29。 设 $i \geq 1$。对每个充分小的 $\delta > 0$，$(\tilde{M}, \hat{g}^i_\delta)$ 具有视界边界 $\tilde{\Sigma}^i_\delta \subset \tilde{M}(\Sigma)$，且该边界与 Σ 同调。

证明。 取充分小的 $\delta > 0$，使得存在一个整数 $j_0 \geq 1$，满足对每个 $j \geq j_0$，均有 $H(\tilde{\Sigma}^i_{\delta,\ j},\ \tilde{g}^\delta_i) > 0$；参见引理 26。由此可知，存在一个最外侧闭极小超曲面

$\tilde{\Sigma}^i_\delta \subset \tilde{M}(\tilde{\Sigma}^i_{\delta,\, j_0})$ 与 $\tilde{\Sigma}^i_{\delta,\, j_0}$ 同调。由于对每个 $j \geq j_0$，均有 $H(\tilde{\Sigma}^i_{\delta,\, j},\ \tilde{g}^\delta_i) > 0$，根据最大值原理，$\tilde{\Sigma}^i_\delta$ 对任何 $j \geq j_0$ 都不能接触 $\tilde{\Sigma}^i_{\delta,\, j}$。利用引理 26，可得 $\tilde{\Sigma}^i_\delta \subset \tilde{M}(\tilde{\Sigma})$。□

命题 30。存在一列 $\{\tilde{g}_i\}_{i=1}^\infty$ 类 C^2 的 C^2-渐近平坦度量，定义在 $\tilde{M}$ 上，具有视界边界 $\Sigma_i \subset M(\Sigma)$，使得

- $\tilde{m}(\tilde{g}_i) = 2m(g)$，
- $|\Sigma_i|_{\tilde{g}_i} = 2|\Sigma|_g + o(1)$ 当 $i \to \infty$，
- $\tilde{g}_i = \tilde{g}$ 在某个紧集之外，并且
- $\tilde{g}_i \to \tilde{g}$ 在 $C^0(\tilde{M})$ 中，当 $i \to \infty$时。

此外，当 $i \to \infty$ 时，有

$$\int_{\tilde{M}(\tilde{\Sigma})} (\max\{-R(\tilde{g}_i), 0\})^{\frac{n}{2}}\, \mathrm{d}v(\tilde{g}_i) = 2 \int_{M(\Sigma)} (\max\{-R(g), 0\})^{\frac{n}{2}}\, \mathrm{d}v(g) + o(1).$$

对于每个 $\alpha \in (0,1)$，$\tilde{\Sigma}_i \to \tilde{\Sigma}$ 属于 $C^{1,\,\alpha}$，且重数为1。

证明。由引理 20，

$$\int_{M(\Sigma)} (\max\{-R(g^i), 0\})^{\frac{n}{2}}\, \mathrm{d}v(g^i) = \int_{M(\Sigma)} (\max\{-R(g), 0\})^{\frac{n}{2}}\, \mathrm{d}v(g) + o(1).$$

利用引理 28、引理 23 和引理 27，我们可知，取一个对角子列后，存在一个序列 $\{\delta_i\}_{i=1}^\infty$，使得 $\delta_i \searrow 0$，并且度量 $\tilde{g}_i = \hat{}g^i_{\delta_i}$ 在某个紧集之外满足 $\tilde{g}_i = \tilde{g}$ 、 $|\tilde{g}_i - \tilde{g}|_{\tilde{g}} = o(1)$，以及

$$\int_{\tilde{M}(\tilde{\Sigma})} (\max\{-R(\tilde{g}_i), 0\})^{\frac{n}{2}}\, \mathrm{d}v(\tilde{g}_i) = 2 \int_{M(\Sigma)} (\max\{-R(g), 0\})^{\frac{n}{2}}\, \mathrm{d}v(g) + o(1).$$

此外，由引理 19 和引理 27，$\tilde{m}(\tilde{g}_i) = 2m(g)$。

由引理 29，$(\tilde{M},\ \tilde{g}_i)$ 的视界边界为 $\tilde{\Sigma}_i = \tilde{\Sigma}^i_{\delta_i} \subset \tilde{M}(\tilde{\Sigma})$。通过与一个较大的坐标半球比较，我们可知

$$\limsup_{i\to\infty} |\tilde{\Sigma}_i|_{\tilde{g}_i} < \infty.$$

此外，我们有 $\pi^{-1}(\pi(\tilde{\Sigma}_i)) = \tilde{\Sigma}_i$。事实上，根据面积极小化，存在一个闭嵌入极小超曲面包围 $\pi^{-1}(\pi(\tilde{\Sigma}_i))$。由于 $\tilde{\Sigma}_i$ 是最外层的，这个极小曲面与 Σ_i重合。

固定 $\alpha \in (0,1)$。由 [21, 正则性定理 1.3 (ii)], 引理 23 以及紧性可知，必要时取另一个子列后，Σ_i 收敛到一个属于 C^1类的嵌入超曲面$\tilde{\Sigma}_0 \subset \tilde{M}(\tilde{\Sigma})$，该超曲面位于 $C^{1,\alpha}$中，且可能带有重数。根据标准椭圆估计，这一收敛在 $\pi^{-1}(\partial M)$之外是光滑的，并且在 $\tilde{\Sigma}_0 \setminus \pi^{-1}(\partial M)$上有 $H(\tilde{\Sigma}_0, \tilde{g}) = 0$。由于$\pi^{-1}(\pi(\tilde{\Sigma}_i)) = \tilde{\Sigma}_i$，因此有 $\tilde{\Sigma}_i \setminus \pi^{-1}(\partial M) = \tilde{\Sigma}_i^+ \cup \tilde{\Sigma}_i^-$，其中 $\pi(\tilde{\Sigma}_i^\pm) = \pi(\tilde{\Sigma}_i)$，且 $\tilde{\Sigma}_i^+ \cap \tilde{\Sigma}_i^- = \emptyset$。令 $\Sigma_i = \pi(\tilde{\Sigma}_i^+)$。根据引理 29，$\Sigma_i$在 $M(\Sigma)$中与 Σ同调，并且 $\partial\Sigma_i$在 $M(\Sigma) \cap \partial M$ 中与 $\partial\Sigma$ 同伦等价。由于 Σ 在 $M(\Sigma)$ 中是面积极小的，我们还利用引理 19，得到

$$\liminf_{i\to\infty} |\tilde{\Sigma}_i|_{\tilde{g}_i} \geq 2 \liminf_{i\to\infty} |\Sigma_i|_g \geq 2|\Sigma|_g = |\tilde{\Sigma}|_{\tilde{g}}. \tag{11}$$

如有必要，进一步取一个子列，我们有 $\Sigma_i \to \Sigma_0 \subset M(\Sigma)$ 属于 $C^{1,\,\alpha}$，可能带有重数，其中 Σ_0 满足 $H(\Sigma_0,\ g) = 0$ 于 $\Sigma_0 \setminus \partial\Sigma_0$。由于 $M(\Sigma)$ 是一个外部区域，它

~ ~ ~ ~可知 $\Sigma_0 = \Sigma$ 和 $\Sigma_0 = \Sigma_\circ$ 由于 Σ_i 在 $M(\Sigma_i)$ 中是面积极小的，我们得出

$$\limsup_{i\to\infty} |\tilde{\Sigma}_i|_{\tilde{g}_i} \le |\tilde{\Sigma}|_{\tilde{g}}.$$

~ ~特别地，结合（11），我们看到 Σ_i 以重数一收敛到 Σ 。

结论由此得出。 □

4. 共形变换至非负标量曲率

~本节中，我们假设 M 是一个维数为 $3 \le n \le 7$ 的光滑流形，且 $\tilde{g}$ 是定义在 M 上的 C^0 类黎曼度量。我们还假设 $\tilde{g}$ 是 C^2-渐近平坦的，并且存在一个 C^1类闭分离超曲面 $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{M}$,1。此外，我们假设 $\{\tilde{g}_i\}_{i=1}^{\infty}$是定义在 $\tilde{M}$ 上的 C^2 类黎曼度量 $\tilde{g}_i$ 序列，且满足以下性质。

- $(\tilde{M}, \tilde{g}_i)$ 是具有视界边界 $\tilde{\Sigma}_i \subset \tilde{M}(\tilde{\Sigma})$ 的 C^2-渐近平坦空间。
- $\tilde{m}(\tilde{g}_i) = \tilde{m}(\tilde{g}) + o(1)$作为 $i \to \infty$.~ ~
- $|\Sigma_i|_{\tilde{g}_i} = |\Sigma|_{\tilde{g}} + o(1)$，当 $i \to \infty$。
在 $C^0(M)$ 中，$\tilde{g}_i \to \tilde{g}$ 如 $i \to \infty$。
对于每个 $\alpha \in (0,\ 1)$，$\tilde{\Sigma}_i \to \tilde{\Sigma}$ 在 $C^{1,\ \alpha}$ 如 $i \to \infty$。

最后，我们假设，当 $i \to \infty$,

$$\int_{\tilde{M}(\tilde{\Sigma}_i)} (\max\{0, -R(\tilde{g}_i)\})^{\frac{n}{2}}\, \mathrm{d}v(\tilde{g}_i) = o(1) \tag{12}$$

并且，对于某个 $\tau > (n-2)/2$,

$$\sup_{i\ge 1} \limsup_{\tilde{x}\to\infty} \left[|\tilde{x}|_{\bar{g}}^{\tau} |\tilde{g}_i - \bar{g}|_{\bar{g}} + |\tilde{x}|_{\bar{g}}^{\tau+1} |D(\bar{g})\tilde{g}_i|_{\bar{g}} + |\tilde{x}|_{\bar{g}}^{\tau+2} |D^2(\bar{g})\tilde{g}_i|_{\bar{g}} \right] < \infty.$$

本节中，我们构造与 $\tilde{g}_i$ 共形相关的黎曼度量 $\hat{}g_i$ ，其标量曲率非负。

~ ~**命题 31.** 对于每个足够大的 i ，存在一个函数 $\tilde{u}_i \in C^\infty(M(\Sigma_i))$ ，使得黎曼度量

$$\hat{g}_i = \tilde{u}_i^{\frac{4}{n-2}}\, \tilde{g}_i$$

具有以下性质。

- $R(\hat{}g_i) \ge 0$ 在 $M(\tilde{\Sigma}_i)$。~
- $H(\Sigma_i, \hat{}g_i) = 0.$
- $(\tilde{M}, \hat{}g_i)$ 是 C^2-渐近平坦的，且 $\tilde{m}(\hat{}g_i) = \tilde{m}(\tilde{g}) + o(1)$ 当 $i \to \infty$ 时。
- $\hat{}g_i \to \tilde{g}$在 $C^0(\tilde{M}(\tilde{\Sigma}))$ 作为 $i \to \infty$。
- 对于每个 $\alpha \in (0, 1)$ $\tilde{u}_i \to 1$属于 $C^1_{,loc}{}^{\alpha}(\tilde{M}(\tilde{\Sigma}))$ 当 $i \to \infty$。

˜ ˜证明。 </style}这已在 [31, 第 4 节.1]的特殊情形下得到证明，其中 $\Sigma_i = \Sigma = \emptyset$。与˜ ˛[31, (35)], 相比，我们取 $\tilde{u}_i \in C^\infty(M(\Sigma))$ 为方程的唯一解

$$(13)\qquad \begin{cases} -\dfrac{4\,(n-1)}{n-2}\Delta(\tilde{g}_i)\,\tilde{u}_i - \max\{-R(\tilde{g}_i),0\}\,\tilde{u}_i = 0 & \text{in } \tilde{M}(\tilde{\Sigma}_i), \\ D(\tilde{g}_i)_{\nu(\tilde{\Sigma}_i,\tilde{g}_i)}\tilde{u}_i = 0 & \text{on } \tilde{\Sigma}_i, \text{ and} \\ \lim\limits_{\tilde{x}\to\infty} \tilde{u}_i = 1. \end{cases}$$

如 [36, 引理 3.2], 所示，这种解的存在性可由（12）以及以下事实推出：对于每个 $\alpha \in (0,1)$， $\tilde{\Sigma}_i$ 属于 $C^{1,\alpha}$类。现在我们可以重复 [31, 引理 4.1、命题 4.1 和引理 4.2]的证明；唯一的区别在于，函数 $\tilde{u}_i$ 的椭圆估计现在还依赖于 $\tilde{\Sigma}_i$的 $C^{1,\alpha}$正则性估计，而根据假设，这些估计关于 i是一致的。根据˜引理44，我们有 $H(\Sigma_i, \hat{}g_i) = 0$。□

˜ ˆ ˜ ˜ ˆ ˜**引理 32.** $(M, \hat{}g_i)$ 具有视界边界 $\Sigma_i \subset M(\Sigma_i)$，并且有 $|\Sigma_i|_{\hat{g}_i} \geq |\Sigma_i|_{\tilde{g}_i} - o(1)$ 成立。

证明。 利用 $H(\tilde{\Sigma}_i, \hat{}g_i) = 0$，可得 $(\tilde{M}, \hat{}g_i)$ 的视界边界为 $\hat{}\Sigma_i \subset \tilde{M}(\tilde{\Sigma}_i)$。˜ ˜根据命题 31，即可得出这一断言；其中用到 Σ_i 相对于 $\tilde{g}_i$在 $M(\Sigma_i)$ 中是面积极小的。□

Lem ˜ ˜ ˜**引理 33**。 假设存在一个映射 $F\colon M \to M$，满足以下性质。

- $\tilde{F}$ 对于每个 i，它关于 $\tilde{g}_i$ 都是等距变换。
- $\tilde{S} = \{\tilde{x} \in \tilde{M}\colon \tilde{F}(\tilde{x}) = \tilde{x}\}$ 是一个分离超曲面，且 $\tilde{M} \setminus \tilde{S} = M^+ \cup M^-$ 满足$M^+ \cap M^- = \emptyset$。
- $\tilde{g}$在 $M^\pm$中是 C^2，且 $M^\pm \cap \tilde{\Sigma} \subset M^\pm$是一个最外层极小超曲面。

ˆ ˜那么 $|\Sigma_i|_{\hat{g}_i} \leq |\Sigma_i|_{\tilde{g}_i} + o(1)$。

证明。 这可由命题 30 的证明同理得出。 □

˜ ˜ ˜**注 34**。 在第 *3* 节的情形下，我们可以取 $F\colon M \to M$ 为满足˜ ˜ $\pi \circ F = \pi$ 且 $F \neq$ 恒等映射的唯一映射。

5. 定理 8 的证明

设 (M, g) 是一个维数为 $3 \leq n \leq 7$、具有视界边界$\Sigma \subset M$的渐近平坦半空间，并且 $R(g) \geq 0$在 $M(\Sigma)$ 中，且 $H(\partial M, g) \geq 0$在 $M(\Sigma)$ 上 $\cap \partial M$。

定理 *8* 的证明。 利用命题 16 对 (M, g) 作共形平坦近似，利用命题 30 将该近似加倍，并利用命题 31、引理 32 和引理 33 将双倍流形共形变换为非负标量曲率，我们可知存在一个˜ ˜维数为 n 的光滑流形 M，以及黎曼度量序列 $\{\hat{}g_i\}_{i=1}^\infty$，其度量 $\hat{}g_i$ 定义在 M 上，并具有以下性质。˜ ˆ˜

- $(M, \hat{}g_i)$ 是具有视界边界 $\Sigma_i \subset M$˜ ˆ 的渐近平坦
- $R(\hat{}g_i) \geq 0$ 属于 $M(\Sigma_i)$
- $\tilde{m}(\hat{}g_i) = 2\,m(g) + o(1)$ 作为 $i \to \infty$

- $|\hat{\Sigma}_i|_{\hat{g}_i} = 2\,|\Sigma|_g + o(1)$ as $i \to \infty$

断言由此得出。 □

6. 质量递减变分与刚性

设 $(M,\ g)$ 是一个维数为 $3 \le n \le 7$、具有视界边界 $\Sigma \subset M$ 的渐近平坦半空间，使得 $R(g) \ge 0$ 在 $M(\Sigma)$ 中，且 $H(\partial M,\ g) \ge 0$ 在 $M(\Sigma) \cap \partial M$ 上。我们还假设等式 (4) 中取等号，即

$$m(g) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{|\Sigma|_g}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

本节的目标是证明 $(M(\Sigma)\ g)$ 与施瓦西半空间 (3) 的外部区域等距。

下面引理 35 中的论证仿照了 $[36,$ 推论 3.1$],$ 中的证明；R. Schoen 和 S.-T. Yau 在该证明中研究了正质量定理的等号情形。

引理 35 (参见 $[36,$ 推论 3.1$]$)。 有 $R(g) = 0$ 在 $M(\Sigma)$中。

证明。 反设 $R(g) \ne 0$。回顾加权 Hölder 空间 $C^{2}{}_{,\tau}{}^{\alpha}(M(\Sigma))$ 的定义（34）。根据命题 47，方程有唯一解 $v \in C^{2}{}_{,\tau}{}^{\alpha}(M(\Sigma))$：

$$\begin{cases} -\dfrac{4\,(n-1)}{(n-2)}\Delta_g\, v + R(g)\,(1+v) = 0 & \text{in } \operatorname{int}(M(\Sigma)), \\ D(g)_{\nu(\partial M, g)} v = 0 & \text{on } M(\Sigma) \cap \partial M, \text{ and} \\ v = 0 & \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

由于 $R(g) \ne 0$, v 不是常数。由最大值原理可知，$-1 < v < 0$ 在 $M(\Sigma) \setminus \Sigma$且 $D(g)_{\nu(\Sigma,g)} v < 0$ 于 Σ。我们定义黎曼度量族 $\{g_t\}_{t\in[0,1)}$

$$g_t = (1 + t\,v)^{\frac{4}{n-2}}\, g$$

于 $M(\Sigma)$。注意，对每个 $t \in [0, 1)$， g_t 都是渐近平坦的。此外，根据引理44，对每个 $t \in$ (0,1),

- $R(g_t) \ge 0$ 在 $M(\Sigma)$,
- $H(\partial M,\ g_t) \ge 0$在 $M(\Sigma) \cap \partial M$，且
- $H(\Sigma,\ g_t) > 0$。

按照命题 16 的证明进行推理，我们发现 $(M,\ g_t)$ 的视界边界为 $\Sigma_t \subset M(\Sigma)$，并且当 $t \searrow 0$ 时， $\Sigma_t \to \Sigma$ 光滑。利用 $v = 0$ 在 Σ 上成立，以及 $H(\Sigma,\ g) = 0$，我们得出

$$\lim_{t\searrow 0} t^{-1}\left(|\Sigma_t|_{g_t} - |\Sigma|_g\right) = 0.$$

接下来，我们在 $(M,\ g)$ 的渐近平坦坐标图中计算 $m(g_t)$。根据 (2),

$$\begin{aligned}
&2\,(n-1)\,\omega_{n-1}\,m(g_t)\\
&\quad=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}\Bigg(\sum_{i,\,j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n_+\cap S^{n-1}_\lambda(0)}(1+t\,v)^{\frac{4}{n-2}}\,x^i\,\big[(\partial_j g)(e_i,e_j)-(\partial_i g)(e_j,e_j)\big]\,\mathrm{d}\mu(\bar g)\\
&\qquad\qquad+\sum_{i=1}^{n-1}\int_{(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})\cap S^{n-1}_\lambda(0)}(1+t\,v)^{\frac{4}{n-2}}\,x^i\,g(e_i,e_n)\,\mathrm{d}l(\bar g)\Bigg)\\
&\qquad+\frac{4}{n-2}\,t\,\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}\sum_{i,\,j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n_+\cap S^{n-1}_\lambda(0)}(1+t\,v)^{\frac{6-n}{n-2}}\,x^i\,\big[\partial_j v\,g(e_i,e_j)-\partial_i v\,g(e_j,e_j)\big]\,\mathrm{d}\mu(\bar g).
\end{aligned}$$

利用 g 是渐近平坦的 (1)，且 $v\in C^{2,\,\tau\,\alpha}(M(\Sigma))$，我们得到

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}\sum_{i,\,j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n_+\cap S^{n-1}_\lambda(0)}v\,x^i\,\big[(\partial_j g)(e_i,e_j)-(\partial_i g)(e_j,e_j)\big]\,\mathrm{d}\mu(\bar g)=0$$

and

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})\cap S^{n-1}_\lambda(0)}v\,x^i\,g(e_i,e_n)\,\mathrm{d}l(\bar g)=0.$$

由此可得

$$\lim_{t\searrow 0}t^{-1}\,\big(m(g_t)-m(g)\big)=-\frac{2}{(n-2)\,\omega_{n-1}}\,\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n_+\cap S^{n-1}_\lambda(0)}x^i\,\partial_i v\,\mathrm{d}\mu(\bar g).$$

结合引理 51，我们得出

$$\lim_{t\searrow 0}t^{-1}\,\big(m(g_t)-m(g)\big)<0$$

并且，特别是

$$\lim_{t\searrow 0}t^{-1}\left[m(g_t)-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}}\,\left(\frac{|\Sigma_t|_{g_t}}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}-m(g)+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}}\,\left(\frac{|\Sigma|_g}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}\right]<0.$$

由于这与推论 10 不相容，故断言成立。

□

引理 36. $H(\partial M,g)=0$ 在 $M(\Sigma)\cap\partial M$ 上成立。

证明。 假设存在 $U\Subset M(\Sigma)\setminus\Sigma$ 开集，且 $U\cap\partial M\neq\emptyset$，使得 $H(\partial M,g)>0$ 在 $U\cap\partial M$ 上成立，从而导出矛盾。

根据引理 49，存在 $\psi\in C^\infty(M)$，具有以下性质。

- ψ 在 $U\cap\partial M$ 中具有紧支撑。
- $\Delta_g\psi\geq 0$ 在 $M(\Sigma)$ 中，并在某一点处 $\Delta_g\psi>0$。

令 $0<t_0<\sup_{x\in M}|\psi|$。我们定义黎曼度量族 $\{g_t\}_{t\in[0,t_0)}$

$$g_t=(1-t\,\psi)^{\frac{4}{n-2}}\,g.$$

根据引理44和引理 35，对于每个 $t\in(0,t_0)$，都有 $R(g_t)\geq 0$ 在 $M(\Sigma)$ 中，并且 $R(g_t)>0$ 在某一点处成立。如有必要减小 $t_0>0$，我们还可得到 $H(\partial M,g_t)\geq 0$ 在 $M(\Sigma)\cap\partial M$ 上，对于

每个 $t \in (0, t_0)$。

一方面，按照命题 16 的证明，$(M,\ g_t)$ 具有视界边界$\Sigma_t \subset M(\Sigma)$，并且随 $t \searrow 0$光滑地 $\Sigma_t \to \Sigma$。利用 $g_t = g$在 Σ附近以及 $M(\Sigma)$ 是一个外部区域这一事实，我们得出，对于每个充分小的 $t \in (0,\ t_0)$，$\Sigma_t = \Sigma$。另一方面，显然，对于每个 $t \in (0,\ t_0)$，$m(g_t) = m(g)$。因此

$$m(g_t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{|\Sigma_t|_{g_t}}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}$$

对于每个充分小的 $t \in (0,\ t_0)$，。由于这与引理 35 不相容，断言得证。

□

下面的引理是定理 12 证明中的关键技术步骤。

引理 37。假设存在 $U \Subset M(\Sigma) \setminus \Sigma$开集，其中 $U \cap \partial M \neq \emptyset$，使得 $h(\partial M, g) \neq 0$在 $U \cap \partial M$ 上。则存在黎曼度量的光滑族 $\{g_t\}_{t\in[0,t_0)}$ g_t 在 M上，使得

- $g_t = g$ 在 U 和 $g_0 = g$之外，
- $\lim_{t\searrow 0} t^{-1}(|U \cap \partial M|_{g_t} - |U \cap \partial M|_g) = 0$，且
- $\lim_{t\searrow 0} t^{-1} H(\partial M,\ g_t) = 0$在 $M(\Sigma) \cap \partial M$。

此外，

$$\lim_{t\searrow 0} t^{-1} R(g_t) \geq 0$$

且在某一点处为严格不等式。

证明。令 $x_0 \in \partial M \setminus \Sigma$满足 $h(\partial M,\ g)(x_0) \neq 0$。利用 $H(\partial M,\ g) = 0$在 $M(\Sigma) \cap \partial M$上成立这一点，参见引理 36，可知存在$T_{x_0}(\partial M)$的一组标准正交基 $e_1,\ e_2,\ \ldots\ldots,\ e_{n-1}$，它们是 $h(\partial M,\ g)$的主方向，并且

$$\begin{aligned} &h(\partial M, g)(x_0)(e_1, e_1) \geq \max\{|h(\partial M, g)(x_0)(e_2, e_2)|, \ldots, |h(\partial M, g)(x_0)(e_{n-1}, e_{n-1})|\}, \\ &h(\partial M, g)(x_0)(e_1, e_1) > 0, \qquad \text{and} \qquad -h(\partial M, g)(x_0)(e_2, e_2) > 0. \end{aligned} \tag{14}$$

给定充分小的 $\varepsilon > 0$，我们定义一个局部参数化

$$\Psi_\varepsilon : \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : |y|_{\bar{g}} < \varepsilon\} \to \partial M \qquad \text{given by} \qquad \Psi_\varepsilon(y) = \exp(g|_{\partial M})_{x_0}\left(\sum_{\ell=1}^{n-1} y^\ell\, e_\ell\right)$$

在 x_0附近对 ∂M 进行局部参数化。必要时减小 $\varepsilon > 0$，我们得到一个局部参数化

$$\Phi_\varepsilon : \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : |y|_{\bar{g}} < \varepsilon\} \times \{s \in \mathbb{R} : 0 \leq s < \varepsilon\} \to M$$

在 x_0 附近对 M 进行局部参数化，其定义为

$$\Phi_\varepsilon(y, s) = \exp(g)_{\Psi_\varepsilon(y)}(s\,\nu(\partial M, g)(\Psi_\varepsilon(y))).$$

根据构造，

$$\Phi_\varepsilon^* g = \gamma_s + ds^2 \tag{15}$$

其中，对每个 $s \in [0,\varepsilon)$ ， γ_s 是 $\{y \in \mathbb{R}^{n-1}$ 上的黎曼度量： $|y|_{\bar g} < \varepsilon\}$。注意，对所有 $s \in [0,\varepsilon]$，当 $\varepsilon \searrow 0$ 时，

$$\begin{aligned} &\circ \quad \gamma_s = \bar g|_{\mathbb{R}^{n-1}} + o(1), \\ &\circ \quad D(\bar g)\gamma_s = O(1), \text{ and} \\ &\circ \quad D^2(\bar g)\gamma_s = O(1). \end{aligned} \tag{16}$$

此外 ，在坐标图 Φ_ε 中计算 g 的克里斯托费尔符号，我们看到，当 $\varepsilon \searrow 0$，

$$\sup_{s\in[0,\varepsilon)} \sup_{|y|_{\bar g}<\varepsilon} \left| \frac{1}{2} (D(\bar g)_{e_n}\gamma_s)(y) + h(\partial M, g)(\Psi_\varepsilon(y)) \right|_{\bar g} = o(1). \tag{17}$$

特别地，

$$\sup_{s\in[0,\varepsilon)} \sup_{|y|_{\bar g}<\varepsilon} \operatorname{tr}_{\bar g|_{\mathbb{R}^{n-1}}} (D(\bar g)_{e_n}\gamma_s)(y) = o(1). \tag{18}$$

由 (14)，对所有 $1 \le i,\ j \le n-1$ ，当 $\varepsilon \searrow 0$ 时，在 $\Phi(\mathbb{R}^n_+ \cap B^n_\varepsilon(0))$ 上有 $i \neq j$，

$$\begin{aligned} h(\partial M, g)(e_1, e_1) &\ge |h(\partial M, g)(e_i, e_i)| + o(1), \\ |h(\partial M, g)(e_i, e_j)| &= o(1), \\ h(\partial M, g)(e_1, e_1) &\ge h(\partial M, g)(x_0)(e_1, e_1) - o(1), \text{ and} \\ -h(\partial M, g)(e_2, e_2) &\ge 0. \end{aligned} \tag{19}$$

令 $K > 1$ 为一个稍后选定的大常数， $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ 为引理 50 中的函数，并令 $\delta \in (0,\ \varepsilon)$。我们通过 $\rho_\varepsilon(y) = \rho(\varepsilon^{-1} y)$ 定义 $\rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$，并且

$$\eta_\delta : [0,\infty) \to \mathbb{R} \qquad \text{by} \qquad \eta_\delta(s) = \begin{cases} \exp^{-(1-\delta^{-1}s)^{-1}} & \text{if} \quad 0 \le s < \delta, \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \tag{20}$$

Let

$$f_{\varepsilon,\delta}(y,s) = \eta_\delta(s)\,\rho_\varepsilon(y).$$

根据格拉姆–施密特正交化过程，给定 $(y,s) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$，其中 $|y|_{\bar g} < \varepsilon$ 且 $0 \le s < \varepsilon$，存在一个可逆的 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵 $A = A(y,s)$，它随 (y,s) 平滑变化，使得 $\gamma_s = A^t A$。此外，当 $\varepsilon \searrow 0$ 时，

$$A = \mathrm{Id} + o(1), \qquad D(\bar g)A = O(1), \qquad \text{and} \qquad D^2(\bar g)A = O(1). \tag{21}$$

设 $E\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ 为由 $E(e_1) = -e_1$、 $E(e_2) = e_2$ 以及 $E(e_i) = 0$ （当 $3 \le i \le n-1$ 时）给出的线性映射。我们在 $\mathbb{R}^n_+ \cap B^n_\varepsilon(0)$ 上定义一个对称的 $(0,2)$ 阶张量 $\sigma^{\varepsilon,\delta}$：

$$\begin{aligned} &\sigma^{\varepsilon,\delta}|_{\mathbb{R}^{n-1}} = f_{\varepsilon,\delta}\, A^t\, E\, A, \\ &\sigma^{\varepsilon,\delta}(e_n, e_i) = \sigma^{\varepsilon,\delta}(e_i, e_n) = 0 \text{ for } i = 1, 2, \ldots, n-1, \text{ and} \\ &\sigma^{\varepsilon,\delta}(e_n, e_n) = -K\, f_{\varepsilon,\delta}. \end{aligned}$$

注意，

$$\operatorname{tr}_{\Phi^*_\varepsilon g}\, \sigma^{\varepsilon,\delta} = -K\, f_{\varepsilon,\delta} \tag{22}$$

并且，对于每个 $s \in [0, \varepsilon)$ ，

$$\mathrm{tr}_{\gamma_s}(\sigma^{\varepsilon,\delta}|_{\mathbb{R}^{n-1}}) = 0. \tag{23}$$

当 $t_0 > 0$ 充分小时，我们得到一族黎曼度量 $\{g_t^{\varepsilon,\delta}\}_{t\in[0,t_0)}$ $g^{\varepsilon,\delta}$ 定义在 M上，其中

$$g_t^{\varepsilon,\delta}(x) = \begin{cases} g(x) + t\,((\Phi_\varepsilon)_*\sigma^{\varepsilon,\delta})(x) & \text{if } x \in \mathrm{Im}(\Phi_\varepsilon), \\ g(x) & \text{else.} \end{cases}$$

注意到

$$\Phi_\varepsilon^* g_t^{\varepsilon,\delta} = \gamma_s + ds^2 + t\,\sigma^{\varepsilon,\delta}.$$

此外，由 (23) 可得，

$$\lim_{t\searrow 0} t^{-1}(|U \cap \partial M|_{g_t^{\varepsilon,\delta}} - |U \cap \partial M|_g) = 0.$$

我们估计 $R(g^{\varepsilon,\delta})$ 在 $t = 0$ 处的线性化。下面所有几何表达式均在坐标图 Φ_ε 中计算。回顾 [22,(6.7)]，可得

$$\lim_{t\searrow 0} t^{-1}\,R(g_t^{\varepsilon,\delta}) = \mathrm{div}_g\,\mathrm{div}_g\,\sigma^{\varepsilon,\delta} - \Delta_g\,\mathrm{tr}_g\,\sigma^{\varepsilon,\delta} - g(\mathrm{Ric}(g), \sigma^{\varepsilon,\delta}). \tag{24}$$

由 (22)、(15) 和 (18)，当 $\varepsilon \searrow 0$ 时，我们有，

$$\begin{aligned}\Delta_g\,\mathrm{tr}_g\,\sigma^{\varepsilon,\delta} &= -K\,\eta_\delta''\,\rho_\varepsilon + K\,\eta_\delta'\,\rho_\varepsilon \sum_{i,j=1}^{n-1} g^{ij}\,\Gamma(g)_{ij}^n - K\,\eta_\delta \sum_{i,j=1}^{n-1} g^{ij}\left[\partial_i\partial_j\rho_\varepsilon - \sum_{\ell=1}^{n-1}\Gamma(g)_{ij}^\ell\,\partial_\ell\rho_\varepsilon\right] \\ &= -K\,\eta_\delta''\,\rho_\varepsilon - K\,\eta_\delta \sum_{i,j=1}^{n-1}\left[g^{ij}\,\partial_i\partial_j\rho_\varepsilon - \sum_{\ell=1}^{n-1} g^{ij}\,\Gamma(g)_{ij}^\ell\,\partial_\ell\rho_\varepsilon\right] + K\,o(\eta_\delta'\,\rho_\varepsilon).\end{aligned}$$

此外，

$$g(\mathrm{Ric}(g), \sigma^{\varepsilon,\delta}) = K\,O(f_{\varepsilon,\delta}).$$

接下来，我们计算

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}_g\,\mathrm{div}_g\,\sigma^{\varepsilon,\delta} \\ &\quad= \sum_{a,b,i,j=1}^{n}\Bigg[g^{ab}\,g^{ij}\,\partial_i\partial_a\sigma_{jb}^{\varepsilon,\delta} + g^{ab}\,\partial_a g^{ij}\,\partial_i\sigma_{jb}^{\varepsilon,\delta} \\ &\qquad\qquad - \sum_{\ell=1}^{n}\left(g^{ab}\,g^{ij}\,\Gamma(g)_{ij}^\ell\,\partial_a\sigma_{\ell b}^{\varepsilon,\delta} + g^{ab}\,g^{ij}\,\Gamma(g)_{ib}^\ell\,\partial_a\sigma_{j\ell}^{\varepsilon,\delta} + g^{ab}\,g^{ij}\,\Gamma(g)_{ab}^\ell\,\partial_i\sigma_{j\ell}^{\varepsilon,\delta}\right)\Bigg] \\ &\qquad + K\,O(f_{\varepsilon,\delta})\end{aligned}$$

利用 (15)、(16) 和 (21)，我们得到

$$\sum_{a,b,i,j=1}^{n} g^{ab}\,g^{ij}\,\partial_i\partial_a\sigma_{jb}^{\varepsilon,\delta} = -K\,\eta_\delta''\,\rho_\varepsilon + O(\eta_\delta\,D^2(\bar{g}|_{\mathbb{R}^{n-1}})\rho_\varepsilon) + O(\eta_\delta\,D(\bar{g}|_{\mathbb{R}^{n-1}})\rho_\varepsilon) + O(f_{\varepsilon,\delta})$$

并且也利用（18），

$$\sum_{a,b,i,j=1}^{n}\left[g^{ab}\,\partial_a g^{ij}\,\partial_i\sigma_{jb}^{\varepsilon,\delta} - \sum_{\ell=1}^{n}\left(g^{ab}\,g^{ij}\,\Gamma(g)_{ij}^\ell\,\partial_a\sigma_{\ell b}^{\varepsilon,\delta} + g^{ab}\,g^{ij}\,\Gamma(g)_{ab}^\ell\,\partial_i\sigma_{j\ell}^{\varepsilon,\delta}\right)\right]$$

$$= 2\,K\,\eta_\delta'\,\rho_\varepsilon \sum_{i,\,j=1}^{n-1} g^{ij}\,\Gamma(g)_{ij}^{n} + O(\eta_\delta\,D(\bar{g}|_{\mathbb{R}^{n-1}})\rho_\varepsilon) + O(f_{\varepsilon,\delta})$$
$$= K\,o(\eta_\delta'\,\rho_\varepsilon) + O(\eta_\delta\,D(\bar{g}|_{\mathbb{R}^{n-1}})\rho_\varepsilon) + O(f_{\varepsilon,\delta}).$$

同样，也利用（17）和（19），

$$g^{ab}\,g^{ij}\,\Gamma(g)_{ib}^{\ell}\,\partial_a\sigma_{j\ell}^{\varepsilon,\delta} = [h(\partial M,g)(e_1,e_1) - h(\partial M,g)(e_2,e_2)]\,\eta_\delta'\,\rho_\varepsilon + o(\eta_\delta'\,\rho_\varepsilon) + O(\eta_\delta\,D(\bar{g}|_{\mathbb{R}^{n-1}})\rho_\varepsilon) + O(f_{\varepsilon,\delta}).$$

我们得出，当 $\varepsilon \searrow 0$ 时，

$$\begin{aligned}\lim_{t\searrow 0} t^{-1}\,R(g_t^{\varepsilon,\delta}) \geq\ & -[h(\partial M,g)(e_1,e_1) - h(\partial M,g)(e_2,e_2)]\,\eta_\delta'\,\rho_\varepsilon \\ & + K\,\eta_\delta \sum_{i,j=1}^{n-1}\left[g^{ij}\,\partial_i\partial_j\rho_\varepsilon - \sum_{\ell=1}^{n-1} g^{ij}\,\Gamma(g)_{ij}^{\ell}\,\partial_\ell\rho_\varepsilon\right] \\ & - K\,o(\eta_\delta'\,\rho_\varepsilon) - O(\eta_\delta\,D^2(\bar{g}|_{\mathbb{R}^{n-1}})\rho_\varepsilon) - O(\eta_\delta\,D(\bar{g}|_{\mathbb{R}^{n-1}})\rho_\varepsilon) - K\,O(f_{\varepsilon,\delta}).\end{aligned}$$

根据引理 50 和 (16)，我们可以选择 $K > 1$，使得对所有满足 $\varepsilon/2 \leq |y|_{\bar{g}} < \varepsilon$ 和 $s \in [0,\delta)$ 的 $y \in \mathbb{R}^{n-1}$，

$$K\,\eta_\delta \sum_{i,j=1}^{n-1}\left[g^{ij}\,\partial_i\partial_j\rho_\varepsilon - \sum_{\ell=1}^{n-1} g^{ij}\,\Gamma(g)_{ij}^{\ell}\,\partial_\ell\rho_\varepsilon\right] \geq O(\eta_\delta\,D^2(\bar{g}|_{\mathbb{R}^{n-1}})\rho_\varepsilon) + O(\eta_\delta\,D(\bar{g}|_{\mathbb{R}^{n-1}})\rho_\varepsilon) + K\,O(f_{\varepsilon,\delta}).$$

只要 $\varepsilon > 0$ 足够小即可。此外，根据 (19)，对所有满足 $|y|_{\bar{g}} < \varepsilon$ 和 $s \in [0,\delta)$ 的 $y \in \mathbb{R}^{n-1}$，我们有

$$-[h(\partial M,g)(e_1,e_1) - h(\partial M,g)(e_2,e_2)]\,\eta_\delta'\,\rho_\varepsilon - K\,o(\eta_\delta'\,\rho_\varepsilon) > 0 \tag{25}$$

只要 $\varepsilon > 0$ 足够小即可。因此，对所有满足 $\varepsilon/2 \leq |y|_{\bar{g}} < \varepsilon$ 和 $s \in [0,\delta)$ 的 $y \in \mathbb{R}^{n-1}$，

$$\lim_{t\searrow 0} t^{-1}\,R(g_t^{\varepsilon,\delta}) \geq 0$$

只要 $\varepsilon > 0$ 足够小即可。最后，根据 (20)，当 $\delta \searrow 0$ 时我们有 $\eta_\delta = o(\eta_\delta')$；并且根据引理 50，我们有

$$\liminf_{\varepsilon\searrow 0} \sup\{\rho_\varepsilon(y) : y \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ and } |y|_{\bar{g}} \leq \varepsilon/2\} > 0.$$

利用 (25)，我们得出，对于所有满足 $y \in \mathbb{R}^{n-1}$、$|y|_{\bar{g}} \leq \varepsilon/2$ 和 $s \in [0,\delta)$ 的情形，

$$\lim_{t\searrow 0} t^{-1}\,R(g_t^{\varepsilon,\delta}) > 0$$

只要 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta \in (0,\ \varepsilon)$ 足够小。

接下来，我们计算 $H(\partial M,\ g^{\varepsilon,\ _t}{}^{\delta})$ 在 $t = 0$ 处的线性化。与前面一样，所有几何表达式均在坐标图 Φ_ε 中计算。推导式 (17) 的论证同样表明

$$h(\partial M, g_t^{\varepsilon,\delta})(\Psi_\varepsilon) = -\frac{1}{2}\left(D(\bar{g})_{e_n}\gamma_s + t\,(D(\bar{g})_{e_n}\sigma^{\varepsilon,\delta})|_{\mathbb{R}^{n-1}}\right)\Big|_{s=0}$$

and

$$H(\partial M, g_t^{\varepsilon,\delta}) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\bar g|_{\mathbb{R}^{n-1}}}\left[(\gamma_0 + t\,\sigma^{\varepsilon,\delta}|_{\mathbb{R}^{n-1}})^{-1}\left(D(\bar g)_{e_n}\gamma_s + t\,(D(\bar g)_{e_n}\sigma^{\varepsilon,\delta})|_{\mathbb{R}^{n-1}}\right)\big|_{s=0}\right].$$

利用 $\gamma_s = A^t\,A$，以及 $\sigma^{\varepsilon,\,\delta}|_{\mathbb{R}^{n-1}} = A^T\,E\,A$，可得

$$\begin{aligned} &H(\partial M, g_t^{\varepsilon,\delta}) \\ &\quad= -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\bar g|_{\mathbb{R}^{n-1}}}\left[(A^t\,(\mathrm{Id} + t\,f_{\varepsilon,\delta}\,E)\,A)^{-1}\,D(\bar g)_{e_n}(A^t\,(\mathrm{Id} + t\,f_{\varepsilon,\delta}\,E)\,A)\right]\big|_{s=0} \\ &\quad= -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\bar g|_{\mathbb{R}^{n-1}}}\left[(A^t)^{-1}\,D(\bar g)_{e_n}A^t + A^{-1}\,D(\bar g)_{e_n}A + (\mathrm{Id} + t\,f_{\varepsilon,\delta}\,E)^{-1}\,t\,(D(\bar g)_{e_n}f_{\varepsilon,\delta})\,E\right]\big|_{s=0}. \end{aligned}$$

注意

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathrm{tr}_{\bar g|_{\mathbb{R}^{n-1}}}\left[(\mathrm{Id} + t\,f_{\varepsilon,\delta}\,E)^{-1}\,t\;E\right] = \mathrm{tr}_{\bar g|_{\mathbb{R}^{n-1}}}[E] = 0.$$

由此可得

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} H(\partial M, g_t^{\varepsilon,\delta}) = 0.$$

断言得证。 □

引理 38. 在 $M(\Sigma)\cap\partial M$上有 $h(\partial M, g) = 0$。

证明。 反设存在一个 $U \Subset M(\Sigma)\setminus\Sigma$ 开集，其上有满足 $U\cap\partial M \neq \emptyset$ 的 $h(\partial M, g) \neq 0$。令 $\{g_t\}_{t\in[0,t_0)}$ 为引理 37 给出的 M 上的黎曼度量族。仿照引理 4.3], 的证明，用命题 47 代替命题 3.3]„ 可知对所有充分小的 $t \geq 0$，方程存在唯一解 $u_t \in C^{2,\alpha}(M)$，满足

$$(26)\qquad \begin{cases} -\dfrac{4\,(n-1)}{(n-2)}\Delta_{g_t}\,u_t + R(g_t)\,u_t = 0 & \text{in } \mathrm{int}(M(\Sigma)) \\ \dfrac{2\,(n-1)}{n-2}\,D(g)_{\nu(\partial M, g_t)}u_t + H(\partial M, g_t)\,u_t = 0 & \text{on } M(\Sigma)\cap\partial M, \\ u_t = 1 & \text{on } \Sigma, \end{cases},$$

使得 $(u_t - 1) \in C^{2,\,\alpha}_{,\tau}(M(\Sigma))$. 此外，该极限

$$\dot u = \lim_{t\searrow 0} t^{-1}\,(u_t - 1)$$

对每个 $\beta\in(0,\alpha)$，都存在于 $C^{2,\,\beta}_{,\tau}(M(\Sigma)$ 中；参见 [36, 第 73-74] 页。由 (26) 可得,

$$\begin{cases} -\dfrac{4\,(n-1)}{(n-2)}\Delta_g\,\dot u + \lim\limits_{t\searrow 0} t^{-1}\,R(g_t) = 0 & \text{in } \mathrm{int}(M(\Sigma)), \\ D(g)_{\nu(\partial M, g)}\dot u^i = 0 & \text{on } M(\Sigma)\cap\partial M, \\ \dot u = 0 & \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

Let

$$\hat g_t = (1 + u_t)^{\frac{4}{n-2}}\,g_t.$$

利用 $(u_t - 1) \in C^{2,\,\alpha}_{,\,\tau}(M(\Sigma))$，可知 $\hat{}g_t$ 是 C^2-渐近平坦的；并且利用引理44，可知 $R(\hat{}g_t) = 0$ 于 $M(\Sigma)$，且 $H(\partial M,\ \hat{}g_t) = 0$ 于 $M(\Sigma)\cap\partial M$。利用引理 37，可知 $\dot u$ 不是常数。根据最大值原理，$\dot u < 0$ 于 $M(\Sigma)\setminus\Sigma$，且 $D(g)_{\nu(\Sigma,g)}\dot u < 0$ 于 Σ。

现在，引理44和引理 37意味着，对所有充分小的 $t > 0$， $H(\Sigma, \hat{g}_t) > 0$。如命题 16 的证明中一样，由此可得 $(M, \hat{g}_t)$ 具有视界边界 $\Sigma_t \subset M(\Sigma)$，并且当 $t \searrow 0$ 时， $\Sigma_t \to \Sigma$ 光滑地。

另一方面 一方面，利用 $g_t = g$ 在 Σ、 $\dot{u} = 0$ 在 Σ，以及 $H(\Sigma, g) = 0$，我们得出

$$\lim_{t \searrow 0} t^{-1} \left(|\hat{\Sigma}_t|_{\hat{g}_t} - |\Sigma|_g \right) = 0. \tag{27}$$

此外，仿照引理 35 的证明，我们有

$$\lim_{t \searrow 0} t^{-1} \left(m(\hat{g}_t) - m(g) \right) = -\frac{2}{(n-2)\,\omega_{n-1}} \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap S^{n-1}_\lambda(0)} x^i \, \partial_i \dot{u} \, \mathrm{d}\mu(\bar{g}).$$

结合引理 51，我们得出

$$\lim_{t \searrow 0} t^{-1} \left(m(\hat{g}_t) - m(g) \right) < 0. \tag{28}$$

另一方面，由推论 10 可得

$$\lim_{t \searrow 0} t^{-1} \left(m(\hat{g}_t) - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{|\hat{\Sigma}_t|_{\hat{g}_t}}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} - m(g) + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{|\Sigma|_g}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} \right) \geq 0$$

这与（27）和（28）不相容。

断言得证。 □

定理 *12* 的证明。 设 (M, g) 是一个具有视界边界 $\Sigma \subset M$ 的渐近平坦半空间，其中 $R(g) \geq 0$ 在 $M(\Sigma)$ 中，且 $H(\partial M, g) \geq 0$ 在 $M(\Sigma) \cap \partial M$ 上，使得

$$m(g) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{|\Sigma|_g}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

~ ~回顾加倍流形 $(M, \tilde{g})$ 的定义 (7) 以及投影 $\pi\colon M \to M$ 的定义 (8)。此外，回顾 $\tilde{\Sigma} = \pi^{-1}(\Sigma)$。根据引理 38， $h(\partial M, g) = 0$ 在 $M(\Sigma)$ 上 $\cap\, \partial M$。特别地，$(\tilde{M}(\tilde{\Sigma}), \tilde{g})$ 是一个质量为 $\tilde{m}(\tilde{g}) = 2\,m(g)$ 的 C^2-渐近平坦流形，而 $\tilde{\Sigma}$ 是一个具有 $|\Sigma|_{\tilde{g}} = 2\,|\Sigma|_g$ 的闭极小~曲面。由对称性，并利用 $M(\Sigma)$ 是一个外部区域这一事实，可知 ~ ~ ~ ~M(Σ) 是一个外部区域。根据定理 39，$(M(\Sigma), \tilde{g})$ 与质量为 $\tilde{m}(\tilde{g})$ 的 Schwarzschild 空间 (31) 的外部区域等距。因此，$(M(\Sigma), g)$ 与质量为 $m(g)$ 的施瓦西半空间 (3) 的外部区域等距。□

7. 黎曼彭罗斯不等式中的刚性

在本节中，我们给出一种不同于 [26] 中论证的方法，以说明 [8, 定理 1.4]，（此处表述为定理 41）的刚性结论中，要求 ~$(M, \tilde{g})$ 具有自旋结构这一假设并非必要。

关于下文定理 39 的表述，请回顾附录 A 中渐近平坦流形 $(M, \tilde{g})$、其视界边界 Σ 以及外部区域 $M(\Sigma)$ 的定义。

˜**定理 39**。设$(M,\tilde{g})$ 是一个维数为 $3 \le n \le 7$ 、具有视界边界 $\Sigma \subset M$ 的渐近平坦流形，其中 $R(\tilde{g}) \ge 0$ 属于 $M(\Sigma)$，并且

$$\tilde{m}(\tilde{g}) = \frac{1}{2}\left(\frac{|\tilde{\Sigma}|_{\tilde{g}}}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

˜ ˜于是（M（Σ） $\tilde{g}$）与某个 *Schwarzschild*空间的外部区域等距（31）。

ˆ证明。 沿用 [8, §6], 中给出的论证，我们旨在证明，通过关于 Σ 反射（M， $\tilde{g}$）所得的流形（M，ˆg）是光滑的，从而此处表述为定理 40 的正质量定理中的等号刻画可应用于（ˆM， ˆ $u^{\frac{4}{n-2}}\hat{g}$）。这里，ˆ$u \in C^2(\hat{M})$ 是唯一的ˆ调和函数，在（$\overline{M,}$ ˆg）的两个端分别趋近于 1 和 0。为此，只需证明 Σ 是全测地的。

˜引理 35 中给出的论证表明， $R(\tilde{g}) = 0$。如果 $h(\Sigma, \tilde{g}) \neq 0$，则引理 37 中给出的论证表明，存在一族$\{\tilde{g}_t\}_{t\in[0,t_0)}$ 黎曼度量，定义在˜$(M, \tilde{g})$上，使得

- $\tilde{g}_t = \tilde{g}$ 在一个紧集之外，
- $\tilde{g}_t \to \tilde{g}$ 当 $t \searrow 0$ 时光滑地，
- $\lim_{t\searrow 0} t^{-1}(|\tilde{\Sigma}|_{\tilde{g}_t} - |\tilde{\Sigma}|_{\tilde{g}}) = 0$,
- 极限$_{t\searrow 0} t^{-1} H(\tilde{\Sigma}, \tilde{g}_t) = 0$,

and

$$\lim_{t\searrow 0} t^{-1} R(\tilde{g}_t) \ge 0 \text{ with strict inequality at some point.}$$

将引理 38 证明中的论证调整到渐近平坦流形的情形，我们看到这会与定理 41 中的不等式相矛盾。□

A. Asymptotically flat manifolds

本节回顾一些关于渐近平坦流形的事实。

令 $3 \le n \le 7$。称 $\{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ 上的度量 $\tilde{g}$： $|\tilde{x}|_{\bar{g}} > 1/2\}$ 为 C^2-渐近平坦，若其标量曲率可积，且存在 $\tau > (n-2)/2$，使得当 $\tilde{x} \to \infty$ 时，

$$|\tilde{g} - \bar{g}|_{\bar{g}} + |x|_{\bar{g}}\,|D(\bar{g})\tilde{g}|_{\bar{g}} + |x|^2_{\bar{g}}\,|D^2(\bar{g})\tilde{g}|_{\bar{g}} = O\left(|\tilde{x}|_{\bar{g}}^{-\tau}\right). \tag{29}$$

˜若一个维数为 n 的完备连通黎曼流形 $(M,\tilde{g})$ 满足以下所有性质，则称其为渐近平坦流形。

- $\tilde{g}$ 属于 C^2类。˜
- 存在 M 的一个非空紧子集，其补集与集合$\{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n : |\tilde{x}|_{\bar{g}} > 1/2\}$微分同胚。
- 在此微分同胚下， $\tilde{g}$ 的拉回是 C^2-渐近平坦的。

我们通常固定这样一个微分同胚，并将其称为渐近平坦坐标图。渐近平坦流形的质量是如下所定义的量

$$\tilde{m}(\tilde{g}) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\,(n-1)\,\omega_{n-1}}\,\lambda^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{S^{n-1}_{\lambda}(0)} \tilde{x}^i \left[(\partial_j\tilde{g})(e_i,e_j) - (\partial_i\tilde{g})(e_j,e_j)\right] \mathrm{d}\mu(\bar{g}); \tag{30}$$

参见 [4, 第 999] 页。这里，$e_1, \dots, e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基向量，而 $\omega_{n-1} = |S_1^{n-1}(0)|_{\bar{g}}$ 表示（$n-1$）维单位球面的面积。R. Bartnik 已证明，C^2渐近平坦流形的质量 (30) 收敛，且不依赖于渐近平坦坐标图的选择；参见 [6, 定理 4.2]。

设 $\Sigma \subset M$ 是一个无边界的紧超曲面。我们称这样的超曲面的各个分支为闭的。若 Σ 是分离的，则我们用单位法向量 $\nu(\Sigma, \tilde{g})$ 对 Σ 定向，使其指向 $M \setminus \Sigma$ 的非紧分支的闭包 $M(\Sigma)$。平均曲率 $H(\Sigma, \tilde{g})$ 定义为沿 Σ 对 $-\nu(\Sigma, \tilde{g})$ 取散度。

我们称 $(M, \tilde{g})$ 具有视界边界，若存在一个非空超曲面 $\Sigma \subset M$，满足以下两个性质。

- Σ 的每个分支都是闭极小超曲面。
- $M(\Sigma)$ 中的每个闭极小超曲面都是 Σ 的一个分支。

如果（$M, \tilde{g}$）具有视界边界 $\Sigma \subset M$，我们就称 M（Σ）为 M的外部区域，并称该视界 Σ 为最外层极小曲面。具有视界边界的外部区域的一个例子是质量为 $\tilde{m} > 0$、维数为 $n \geq 3$ 的 Schwarzschild空间，其定义为

$$(\tilde{M}(\tilde{\Sigma}), \tilde{g}) = \left(\left\{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^n : |\tilde{x}|_{\bar{g}} \geq \left(\frac{\tilde{m}}{2} \right)^{\frac{1}{n-2}} \right\}, \left(1 + \frac{\tilde{m}}{2} |\tilde{x}|_{\bar{g}}^{2-n} \right)^{\frac{4}{n-2}} \bar{g} \right). \tag{31}$$

其中

$$\tilde{\Sigma} = \left\{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^n : |\tilde{x}|_{\bar{g}} = \left(\frac{\tilde{m}}{2} \right)^{\frac{1}{n-2}} \right\}.$$

正质量定理由 R. Schoen 和 S.-T. Yau 于 [36]使用极小曲面技术证明，随后 E. Witten 于 [40] 利用狄拉克方程的某些解证明。

定理 40 （[35, 定理 4。2]）。 设（$M, \tilde{g}$）为维数为$3 \leq n \leq 7$ 且标量曲率非负的渐近平坦流形。则有 $\tilde{m}$（$\tilde{g}$）≥ 0。此外， $\tilde{m}$（$\tilde{g}$）$= 0$ 当且仅当（$M, \tilde{g}$）与（$\mathbb{R}^n, \bar{g}$）等距。

G. Huisken 和 T. Ilmanen 使用逆平均曲率流，在视界边界连通的情况下证明了黎曼彭罗斯不等式 [21]。对于一般的视界边界，H. L. Bray [7]利用其准静态流证明了该不等式。H. L. Bray 与 D. A. Lee 合作的工作 [8] 将他的技术推广到了更高维数。

定理 41 ([8, 定理 1.4]). 设$(M, \tilde{g})$ 是一个维数为 $3 \leq n \leq 7$、具有视界边界 $\Sigma \subset M$ 的渐近平坦流形，且满足 $R(\tilde{g}) \geq 0$ 于 $M(\Sigma)$。则有

$$\tilde{m}(\tilde{g}) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\tilde{\Sigma}|_{\tilde{g}}}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}. \tag{32}$$

若$(M, \tilde{g})$ 是一个自旋流形，则等号成立当且仅当$(M(\Sigma)\ \tilde{g})$ 与 *Schwarzschild*空间的外部区域等距(31)。

注 42. 假设$(M, \tilde{g})$ 是自旋的并非必要；参见 [26, 定理 1.1] 以及定理 *39*。

注 43. *G. Lam* [24, 推论 20] 以及 *L.-H. Huang* 和 *D. Wu* [20, 定理 2] 已证明~，若$(M, \tilde{g})$ 是欧几里得空间中的渐近平坦超曲面，则定理 *41* 在所有维数下均成立。

B. Riemannian geometry

本节回顾黎曼几何中的一些事实。

引理44 ([22, §3])**.** 设(M, g) 是一个维数为 $n \geq 3$ 的黎曼流形，且 $u \in C^\infty(M)$是一个正函数。设

$$g^u = u^{\frac{4}{n-2}}\, g$$

并设 $\Sigma \subset M$ 是一个双侧超曲面，其单位法向量为 $\nu(\Sigma, g)$，平均曲率为$H(\Sigma, g)$，它是沿 Σ对 $\nu(\Sigma, g)$ 取散度计算得到的。

有如下结论

$$R(g^u) = u^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(-\frac{4\,(n-1)}{n-2} \Delta_g u + R(g)\, u \right)$$

and

$$H(\Sigma, g^u) = u^{-\frac{n}{n-2}} \left(\frac{2\,(n-1)}{n-2}\, D(g)_{\nu(\Sigma,g)} u + H(\Sigma, g)\, u \right).$$

引理 45. 设 $n \geq 2$。存在 $\varepsilon > 0$ 具有如下性质。假设 σ 是 $\mathbb{R}^n_+ \cap B^n_1(0)$ 上的一个对称(0,2)张量，满足

$$|\sigma|_{\bar{g}} + |D(\bar{g})\sigma|_{\bar{g}} + |D^2(\bar{g})\sigma|_{\bar{g}} < \varepsilon \tag{33}$$

并令 $g = \bar{g} + \sigma$。该映射

$$\{y \in \mathbb{R}^{n-1} : |y|_{\bar{g}} < 1/2\} \times [0, 1/2) \to \mathbb{R}^n_+ \cap B^n_1(0) \qquad \textit{given by} \qquad (y, t) \mapsto \exp(g)_y(t\, \nu(\partial \mathbb{R}^n_+, g)(y))$$

是单射。

证明。令 y_1， $y_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ 且 $|y_1|_{\bar{g}}$， $|y_2|_{\bar{g}} < 1/2$。令

$$\omega_1(t) = \exp(g)_{y_1}(t\, \nu(\partial \mathbb{R}^n_+, g)(y_1)) \qquad \text{and} \qquad \omega_2(t) = \exp(g)_{y_2}(t\, \nu(\partial \mathbb{R}^n_+, g)(y_2)).$$

此外，令 $s \in [0, 1/2]$ 为极大的数，使得对所有 $t \in [0, s]$,

- $\omega_1(t), \omega_2(t) \in \mathbb{R}^n_+ \cap B^n_{3/4}(0)$,
- $\dfrac{1}{2}\, |y_1 - y_2|_{\bar{g}} \leq |\omega_1(t) - \omega_2(t)|_{\bar{g}} \leq 2\, |y_1 - y_2|_{\bar{g}}$, and
- $|\dot{\omega}_1(t) - \dot{\omega}_2(t)|_{\bar{g}} \leq \dfrac{1}{2}\, |y_1 - y_2|_{\bar{g}}$.

由（33），当 $\varepsilon \searrow 0$ 时,

$$|\dot{\omega}_1(0) - \dot{\omega}_2(0)|_{\bar{g}} = O(\varepsilon)\, |y_1 - y_2|_{\bar{g}}.$$

特别地， $s > 0$。由测地线方程,

$$|\ddot{\omega}_1(t) - \ddot{\omega}_2(t)|_{\bar{g}} = O(\varepsilon)\, |y_1 - y_2|_{\bar{g}}$$

在 $[0, s]$ 上。积分后可得 $s = 1/2$，前提是 $\varepsilon > 0$ 足够小。结论得证。

□

C. 具有视界边界的渐近平坦半空间上的拉普拉斯算子

在 [2, 命题 3.3], 中，S. Almaraz、E. Barbosa 和 L. L. de Lima 证明了渐近平坦半空间上拉普拉斯方程的存在性与唯一性结果。本节说明如何将他们的结果推广到具有视界边界的渐近平坦半空间。

设 $(M,\ g)$ 是一个速率为 $\tau > (n-2)/2$ 且具有视界边界的渐近平坦半空间。

我们固定一个渐近平坦坐标图 $\Phi:\ \{x \in \mathbb{R}^n_+ :\ |x|_{\bar g} > 1/2\} \to M$。不妨设 $\mathrm{Im}(\Phi) \cap \Sigma = \emptyset$。令 $K \subset M$ 为满足 $\partial K = \Sigma \cup \Phi(\{x \in \mathbb{R}^n_+ :\ |x|_{\bar g} \geq 2\})$ 的连通紧集。

给定 $\alpha \in (0,1)$、整数 $k \geq 0$ 以及 $u \in C^{k,\alpha}_{loc}(M)$，我们参照 [2, §3] 对加权 Hölder 范数的定义

$$\begin{aligned} &|u|_{C^{k,\alpha}_\tau(M(\Sigma))} \\ &\quad = |u|_{C^{k,\alpha}(K)} + \sum_{i=0}^{k} \sup_{|x|_{\bar g}>1} |x|_{\bar g}^{i+\tau} \, |(D^i(\bar g)u)(x)|_{\bar g} \\ &\qquad + \sup_{|x_1|_{\bar g}>1} \sup_{2\,|x_2-x_1|_{\bar g}<|x_1|_{\bar g}} |x_1|_{\bar g}^{k+\tau+\alpha} \, |x_1-x_2|_{\bar g}^{-\alpha} \, |(D^k(\bar g)u)(x_1) - (D^k(\bar g)u)(x_2)|_{\bar g} \end{aligned} \tag{34}$$

其中 $x,\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}^n_+$。我们定义

$$C^{k,\alpha}_\tau(M(\Sigma)) = \{u \in C^{k,\alpha}_{loc}(M) : |u|_{C^{k,\alpha}_\tau(M(\Sigma))} < \infty\}.$$

类似地，给定 $\beta \in (0,1)$、整数 $\ell \geq 1$ 以及 $a \in C^{\ell,\beta}_{loc}(\partial M)$，我们定义

$$\begin{aligned} |a|_{C^{\ell,\beta}_\tau(M(\Sigma)\cap\partial M)} &= |a|_{C^{\ell,\beta}(K\cap\partial M)} + \sum_{j=0}^{\ell} \sup_{|y|_{\bar g}>1} |y|_{\bar g}^{j+\tau} \, |(D^j(\bar g)a)(y)|_{\bar g} \\ &\quad + \sup_{|y_1|_{\bar g}>1} \sup_{2\,|y_1-y_2|_{\bar g}<|y_1|_{\bar g}} |y_1|_{\bar g}^{\ell+\tau+\beta} \, |y_1-y_2|_{\bar g}^{-\beta} \, |(D(\bar g)^\ell a)(y_1) - (D(\bar g)^\ell a)(y_2)|_{\bar g} \end{aligned}$$

其中 $y,\ y_1,\ y_2 \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$。我们定义

$$C^{\ell,\beta}_\tau(M(\Sigma)\cap\partial M) = \big\{a \in C^{\ell,\beta}_{loc}(\partial M) : |a|_{C^{\ell,\beta}_\tau(M(\Sigma)\cap\partial M)} < \infty \text{ and } D(g|_{\partial M})_{\nu(\Sigma,g)}a = 0 \text{ on } \Sigma\cap\partial M\big\}.$$

命题 46。 设 $\alpha \in (0,1)$。存在一个常数 $c > 0$，使得具有以下性质。给定 $\psi \in C^{0,\alpha}_\tau(M(\Sigma))$ 以及 $a \in C^{1,\alpha}_\tau(M(\Sigma)\cap\partial M)$，存在唯一解 $v \in C^{2,\alpha}_\tau(M(\Sigma))$，满足

$$\begin{cases} -\Delta_g v - \psi = 0 & \text{in } \mathrm{int}(M(\Sigma)), \\ D(g)_{\nu(\partial M,g)}v - a = 0 & \text{on } M(\Sigma)\cap\partial M, \text{ and} \\ D(g)_{\nu(\Sigma,g)}v = 0 & \text{on } \Sigma. \end{cases} \tag{35}$$

成立

$$|v|_{C^{2,\alpha}_\tau(M(\Sigma))} \leq c\,\big(|\psi|_{C^{0,\alpha}_\tau(M(\Sigma))} + |a|_{C^{1,\alpha}_\tau(M(\Sigma)\cap\partial M)}\big). \tag{36}$$

证明。 $\Sigma = \emptyset$ 的情形已在 [2, 命题 3.3]中得到证明。

若 $\Sigma \subset M$ 是一个紧超曲面，且其分支为闭超曲面或自由边界超曲面，则考虑微分流形 $\hat{M} = M(\Sigma) \times \{-1,\ 1\}/\sim$，其中

- $(x_1,\ \pm 1) \sim (x_2,\ \pm 1)$ 当且仅当 $x_1 = x_2$ 且
- $(x_1,\ \pm 1) \sim (x_2,\ \mp 1)$ 当且仅当 $x_1,\ x_2 \in \Sigma$ 且 $x_1 = x_2$.

ˆ 我们在 M 上定义黎曼度量 ˆg ，其定义为 ˆg(ˆx) $= g(\pi(\hat{x}))$，其中 $\pi([(x, \pm 1)]) = x$。注意，(ˆM, ˆg) 有两个渐近平坦端，并且 ˆg 在 $\pi^{-1}(\Sigma)$ 之外属于 C^2 类。此外还要注意，尽管 ˆg 仅为利普希茨的， $\Delta_{\hat{g}}$ 的系数仍然是利普希茨的，因为 Σ 是极小的。

ˆ ˆ ˆ ˆ 设 $\psi : M \to \mathbb{R}$ 由 $\psi(\hat{x}) = \psi(\pi(\hat{x}))$ 给出，且 ˆ$a : \partial M \to \mathbb{R}$ 由 ˆa(ˆx) $= a(\pi(\hat{x}))$ 给出。显然，ˆ$\psi \in C^{0,\ \tau}{}^{\alpha}(\hat{M})$。此外，利用 $D(g|_{\partial M})_{\nu(\Sigma,g)} a = 0$ 在 $\Sigma \cap \partial M$ 上这一事实，我们得出 ˆ$a \in C^{1,\ \tau}{}^{\alpha}(\partial\hat{M})$。根据 [2, 命题 3.3],, 存在唯一的 ˆ$v \in C^{2,\ \tau}{}^{\alpha}(\hat{M})$，使得

$$
(37) \qquad \begin{cases} -\Delta_{\hat{g}} \hat{v} - \hat{\psi} = 0 & \text{in } \hat{M}, \\ D(\hat{g})_{\nu(\partial\hat{M},\hat{g})} \hat{v} - \hat{a} = 0 & \text{on } \partial\hat{M} \end{cases}
$$

and

$$
|\hat{v}|_{C^{2,\alpha}_{\tau}(\hat{M})} \leq c \left(|\hat{\psi}|_{C^{0,\alpha}_{\tau}(\hat{M})} + |\hat{a}|_{C^{1,\alpha}_{\tau}(\partial\hat{M})} \right).
$$

ˆ 在此， $c > 0$ 是一个与 ψ 和 ˆa 无关的常数。此外，由唯一性可知，对所有 $x \in M$，ˆv($[x, 1]$) $=$ ˆv($[x, -1]$)。因此， v: $M(\Sigma) \to \mathbb{R}$ 由 $v(x) =$ ˆv($[x, 1]$) 给出，并满足 (35) 和 (36)。

该断言由此得出。 □

命题 *47*。设 $\alpha \in (0, 1)$，且 $\chi \in C^{0,\tau}{}^{\alpha}(M(\Sigma))$，其中 $\chi \geq 0$。存在一个常数 $c > 0$，使得具有以下性质。给定 $\psi \in C^{0,\tau}{}^{\alpha}(M(\Sigma))$ 和 $b \in C^{2,\alpha}(\Sigma)$，其中 $D(g)_{\nu(\partial M,g)} b = 0$ 在 $\partial\Sigma$上，则存在唯一解 $v \in C^{2,\tau}{}^{\alpha}(M(\Sigma))$，满足

$$
\begin{cases} -\Delta_g v + \chi\, v - \psi = 0 & in\ \operatorname{int}(M(\Sigma)), \\ D(g)_{\nu(\partial M,g)} v = 0 & on\ M(\Sigma) \cap \partial M,\ and \\ v - b = 0 & on\ \Sigma. \end{cases}
$$

有如下关系

$$
|v|_{C^{2,\alpha}_{\tau}(M(\Sigma))} \leq c \left(|\psi|_{C^{0,\alpha}_{\tau}(M(\Sigma))} + |b|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} \right).
$$

证明。 证明与命题 46 的证明非常相似，我们这里只简要说明必要的修改。首先，我们在（7）中 (M, g) 的双倍流形上考虑一个适当的狄利克雷问题，以代替在 $(M, \hat{g})$ 上的诺伊曼问题（ 37 ）。其次，我们使用 [6, 命题 2.2] 和 [25, 定理 9.2]来代替 [2, 命题 3.3]。□

D. Local perturbations of a Riemannian metric

本节构造本文中使用的黎曼度量的局部扰动。

引理 48. 设(M, g) 是一个维数为 $n \geq 3$ 、边界为 ∂M 的黎曼流形，其方向由指向 M的单位法向量 $\nu(\partial M, g)$ 确定。设 $\Sigma \subset M$ 是一个紧超曲面，其各个分支或者是闭的，或者是自由边界超曲面。存在一列函数 $\psi_i \in C^\infty(M)$ $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ，具有以下性质：

- $D(g)_{\nu(\Sigma,g)} \psi_i < 0$ 在 Σ。
- $D\ (g)\ _{\nu\ (\partial M,\ g)}\ \psi_i \leq 0$ 于 ∂M。
- $|\psi_i| + |D(g)\psi_i|_g + |D^2(g)\psi_i|_g = o(1)$ 在 M 中，如 $i \to \infty$。

此外，若 $W \subset M$ 是 Σ 的一个邻域，则对于除有限多个 i 之外的所有情形，支集$(\psi_i) \subset W$ 。

证明。令 $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足

- $\alpha(0) = 0$,
- $\alpha'(0) = -1$, 且
- $\alpha(t) = 0$ 若 $|t| \geq 1$。

令 $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$ 为非负函数，使得

- $\beta(t) = 1$ 若 $|t| \leq 1$ 且
- $\beta(t) = 0$ 若 $|t| \geq 2$。

设给定 $a, b\colon\ M \to \mathbb{R}$ 分别由 $a(x) = \mathrm{dist}(x, \Sigma, g)$ 和 $b(x) = \mathrm{dist}(x, \partial M, g)$ 定义。这里，$\mathrm{dist}(\,\cdot\,, \Sigma, g)$ 和 $\mathrm{dist}(\,\cdot\,, \partial M, g)$ 是有符号距离函数，它们沿各自单位法向量的方向取正值。给定整数 $i \geq 1$, 我们定义 $\psi_i : M \to \mathbb{R}$ 为

$$\psi_i(x) = i^{-3} \left[\alpha(i\,a(x)) + \beta(i\,a(x))\,\alpha(i\,b(x))\right].$$

注意，若 i 充分大，则 ψ_i 是光滑的，并且，当 $i \to \infty$时，

$$|\psi_i| + |D(g)\psi_i|_g + |D^2(g)\psi_i|_g = o(1).$$

此外，若 $W \subset M$ 是 Σ的邻域，则对于除有限多个 i之外的所有 i，都有 $\mathrm{spt}(\psi_i) \subset W$.

在 Σ上，有

$$i^2\, D(g)_{\nu(\Sigma,g)}\psi_i = -1 + \alpha'(i\,b(x))\,(D(g)_{\nu(\Sigma,g)}b)(x).$$

利用对每个 $y \in \partial\Sigma$都有 $\nu(\Sigma,\ g)(y) \in T_y\partial M$ 这一事实，我们在 $\partial\Sigma$上得到 $D(g)_{\nu(\Sigma,g)}b = 0$ 。因此，$(D(g)_{\nu(\Sigma,g)}b)(x) = O(b(x))$在 Σ上。利用当 $i\,b(x) \geq 1$时 $\alpha'(i\,b(x)) = 0$ 这一事实，我们得出

$$i^2\, D(g)_{\nu(\Sigma,g)}\psi_i \leq -\frac{1}{2},$$

假设 i 足够大。

在 ∂M上，我们有

$$i^2\, D(g)_{\nu(\partial M,g)}\psi_i = [\alpha'(i\,a(x))\,(D(g)_{\nu(\partial M,g)}a)(x) - \beta(i\,a(x))]$$

若 $i\,a(x) \geq 1$，则有

$$i^2\, D(g)_{\nu(\partial M,g)}\psi_i = -\,\beta(i\,a(x)) \leq 0.$$

若 $i\,a(x) < 1$，则如前所述，$(D(g)^{\nu(\partial M,g)}a)(x) = O(a(x))$，而 $\beta(i\,a(x)) = 1$。因此，

$$i^2\, D(g)_{\nu(\partial M,g)}\psi_i \leq -\frac{1}{2}$$

前提是 i 足够大。

结论随即得出。 □

引理 49. 设(M, g)是一个维数为 $n \geq 3$、边界为 ∂M的黎曼流形。设$U \subset M$ 为满足 $U \cap \partial M \neq \emptyset$的开集。存在一个函数 $\psi \in C^\infty(M)$，具有以下性质。

- $\psi \geq 0$ 属于 M，且支集$(\psi) \subset U$。
- $\Delta_g\psi \geq 0$ 属于 M，且在某一点处满足 $\Delta_g\psi > 0$ 。

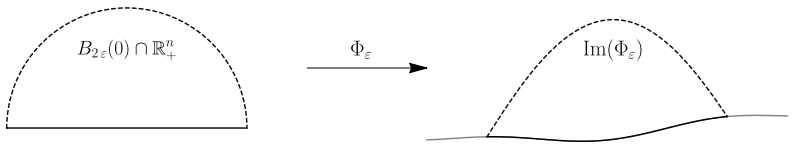


图4。映射 Φ_ε 的示意图。 $B^n_{2\varepsilon}(0)\cap\partial\mathbb{R}^n_+$ 由左侧的黑色实线表示。映射 Φ_ε 将 $B^n_{2\varepsilon}(0)\cap\partial\mathbb{R}^n_+$ 映射到 $U\cap\partial M$的一个子集，该子集由右侧的黑色实线表示。 ∂M 由灰色实线表示。

证明。 注意，存在一个常数 $c>0$，使得以下结论成立。对于每个充分小的 $\varepsilon>0$，都存在一个映射 $\Phi_\varepsilon\colon\ B^n_{2\varepsilon}(0)\cap\mathbb{R}^n_+\to U$，使得

- Φ_ε 是一个嵌入，
- $\Phi_\varepsilon^{-1}(U\cap\partial M)=\partial\mathbb{R}^n_+\cap B^n_{2\varepsilon}(0)$,
- $|\Phi_\varepsilon^* g-\bar g|_{\bar g}\le c\,\varepsilon$，且
- $|D(\bar g)\Phi_\varepsilon^* g|_{\bar g}\le c$;

见图4。

令 $f_\varepsilon\colon\ \mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}$ 为

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}e^{-(n+2)\,(2\,\varepsilon-|x+\varepsilon\,e_n|_{\bar g})^{-1}} & \text{if } |x+\varepsilon\,e_n|_{\bar g}<2\,\varepsilon,\\ 0 & \text{else.}\end{cases}$$

当 $|x+\varepsilon\,e_n|_{\bar g}<2\,\varepsilon$时，我们计算得

$$\begin{aligned}\Delta_{\bar g}f_\varepsilon=&(n+2)^2\,(2\,\varepsilon-|x+\varepsilon\,e_n|_{\bar g})^{-4}\,f_\varepsilon\\ &-2\,(n+2)\,(2\,\varepsilon-|x+\varepsilon\,e_n|_{\bar g})^{-3}\,f_\varepsilon\\ &-(n-1)\,(n+2)\,(2\,\varepsilon-|x+\varepsilon\,e_n|_{\bar g})^{-2}\,|x+\varepsilon\,e_n|_{\bar g}^{-1}\,f_\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 $\mathbb{R}^n_+$上的 $|x+\varepsilon\,e_n|_{\bar g}\ge\varepsilon$，可得

$$\Delta_{\bar g}f_\varepsilon\ge(n+2)\,(2\,\varepsilon-|x+\varepsilon\,e_n|_{\bar g})^{-4}\,f_\varepsilon.$$

同理,

$$|D(\bar g)f_\varepsilon|_{\bar g}\le(n+2)\,\varepsilon^2\,(2\,\varepsilon-|x+\varepsilon\,e_n|_{\bar g})^{-4}\,f_\varepsilon$$

and

$$|D^2(\bar g)f_\varepsilon|_{\bar g}\le\sqrt{n}\,(n+2)^2\,(2\,\varepsilon-|x+\varepsilon\,e_n|_{\bar g})^{-4}\,f_\varepsilon.$$

令 $\psi_\varepsilon\colon\ M\to\mathbb{R}$ 为

$$\psi_\varepsilon(x)=\begin{cases}f_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^{-1}(x)) & \text{if } x\in\mathrm{Im}(\Phi_\varepsilon),\\ 0 & \text{else.}\end{cases}$$

注意， $\psi_\varepsilon\in C^\infty(M)$ 和 $\mathrm{spt}(\psi_\varepsilon)\subset U$。此外，只要 $\varepsilon>0$ 足够小， $\Delta_g\psi_\varepsilon\ge0$ 和 $\Delta_g\psi_\varepsilon>0$ 就会在某点处。

该断言得证。 □

引理 50. 存在一个函数 $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ 和一个常数 $c > 0$，具有以下性质。

- $\rho(x) = 0$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^{n-1}$，满足 $|x|_{\bar g} \geq 1$。
- $\rho(x) > 0$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^{n-1}$，满足 $|x|_{\bar g} < 1$。
- $|\rho(x)| + |(D(\bar g)\rho)(x)|_{\bar g} + |(D^2(\bar g)\rho)(x)|_{\bar g} \leq c(\Delta_{\bar g}\rho)(x)$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ 满足 $1/2 < |x|_{\bar g} < 1$。

证明。设 $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ 是一个函数，满足

- $\eta(s) = 0$ 若 $s \geq 1$,
- $\eta(s) = e^{-(n+1)(1-s)^{-1}}$ 如果 $s \in [1/2, 1)$,
- $\eta(s) > 0$ 若 $s \in (1/4, 1/2)$, 且
- $\eta(s) = 1$ 若 $s \leq 1/4$。

通过类似引理 49 证明中的直接计算，可得函数 $\rho : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 定义为$\rho(x) = \eta(|x|_{\bar g})$，满足所述性质。□

E. 次调和函数的渐近增长估计

本节中，我们推导渐近平坦半空间上次调和函数的渐近增长估计。J. Corvino 在 [13, 第 164] 页陈述了渐近平坦流形上次调和函数的相应估计，S. Czimek 则在[14, 命题 26]中给出了详细证明。我们注意到，[14, 命题 26] 中的论证可以改编到渐近平坦半空间的情形。下面，我们给出另一种自成一体的证明。

注意，从某种意义上说，引理 51 是 Hopf 边界点引理的定量版本，例如见 [18, 引理 3.4]。

引理 51。 设 $n \geq 3$ 和 g 是 $\mathbb{R}^n_+$上的一个 C^2-渐近平坦度量。假设存在一个负函数 $u \in C^2_{,\tau}{}^{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$ 以及一个数 $\lambda_0 > 1$，使得

- $\Delta_g u \geq 0$ 属于 $\mathbb{R}^n_+ \setminus B^n_{\lambda_0}(0)$,
- $\Delta_g u$可积，并且
- $D(g)\nu_{(\partial\mathbb{R}^n_+,\, g)}\, u = 0$ 上 $\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B^n_{\lambda_0}(0)$。

Then

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap S^{n-1}_\lambda(0)} x^i\, \partial_i u \, \mathrm{d}\mu(\bar g) > 0.$$

证明。我们首先假设 $\Delta_g u = 0$。

设 $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ 是一个非负函数，满足 $\eta'(0) = 1$ 且当 $s \geq 1/2$ 时 $\eta(s) = 0$。令f: $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) = -(\log|x|_{\bar g})^{-1}\, |x|_{\bar g}^{-(n-2)} + \eta(|x|_{\bar g}^{-1}\, x_n)\, |x|_{\bar g}^{-(n-2)-\tau}.$$

我们计算

$$\Delta_{\bar g} f = -(2 + (n-2)\, \log|x|_{\bar g})\, (\log|x|_{\bar g})^{-3}\, |x|_{\bar g}^{-n} + O(|x|_{\bar g}^{-n-\tau}).$$

同样,

$$D(\bar g) f = O((\log|x|_{\bar g})^{-1}\, |x|_{\bar g}^{-(n-1)}) \qquad \text{and} \qquad D^2(\bar g) f = O((\log|x|_{\bar g})^{-1}\, |x|_{\bar g}^{-n}).$$

此外，在 $\partial\mathbb{R}^n_+$ 上，我们有

$$D(\bar g)_{e_n} f = -|x|_{\bar g}^{-(n-1)-\tau}.$$

如有必要，增大 $\lambda_0 > 1$，我们可得 $\Delta_g f < 0$ 在 $\mathbb{R}^n_+ \setminus B^n_{\lambda_0}(0)$ 中，且 $D(g)_{\nu(\partial\mathbb{R}^n_+,g)} f < 0$ 在 $\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B^n_{\lambda_0}(0)$ 上。取 $\delta > 0$ 使得 $u < \delta f$ 在 $\mathbb{R}^n_+ \cap S^n_{\lambda_0}(0)$ 上成立。根据最大值原理，对于每个 $\lambda > \lambda_0$,

$$u < \delta\,(f - \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n_+ \cap S^n_\lambda(0)\})$$

在 $\mathbb{R}^n_+ \cap (B^n_\lambda(0) \setminus B^n_{\lambda_0}(0))$ 中。令 $\lambda \to \infty$，我们得到

$$u < \delta f \qquad \text{in } \mathbb{R}^n_+ \setminus B^n_{\lambda_0}(0). \tag{38}$$

注意到

$$\lambda^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap S^{n-1}_\lambda(0)} x^i\, \partial_i u \,\mathrm{d}\mu(\bar g) = \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap S^{n-1}_\lambda(0)} D(g)_{\nu(\mathbb{R}^n_+ \cap S^{n-1}_\lambda(0),g)} u \,\mathrm{d}\mu(g) + O(\lambda^{(n-2)-2\tau}).$$

根据散度定理，极限

$$z = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap S^{n-1}_\lambda(0)} x^i\, \partial_i u \,\mathrm{d}\mu(\bar g) \tag{39}$$

存在且

$$\lambda^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap S^{n-1}_\lambda(0)} x^i\, \partial_i u \,\mathrm{d}\mu(\bar g) = z + O(\lambda^{(n-2)-2\tau}). \tag{40}$$

假设，为了导出矛盾，$z \le 0$。令 $w\colon [\lambda_0, \infty) \to \mathbb{R}$ 由下式给出

$$w(\lambda) = \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap S^{n-1}_\lambda(0)} u \,\mathrm{d}\mu(\bar g)$$

并注意到，结合 (40),

$$w' = (n-2)\,\lambda^{-1}\, w + \lambda^{-2} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap S^{n-1}_\lambda(0)} x^i\, \partial_i u \,\mathrm{d}\mu(\bar g) \le (n-2)\,\lambda^{-1}\, w + O(\lambda^{(n-3)-2\tau}).$$

另一方面，利用 (38)，我们有

$$w \le -\frac{1}{2}\,\delta\,\omega_{n-1}\,(\log(\lambda))^{-1}$$

因此，只要 $\lambda \ge \lambda_0$ 足够大，对每个 $\lambda \ge \lambda_0$ 都有 $w' \le (n-2)/2\,\lambda^{-1}\, w$。由此可得

$$w(\lambda) \le \lambda_0^{-(n-2)/2}\, \lambda^{(n-2)/2}\, w(\lambda_0) \tag{41}$$

只要 $\lambda_0 > 1$ 足够大，对所有 $\lambda > \lambda_0$ 都成立。另一方面，由于 $u \in C^{2,\alpha}_\tau(\mathbb{R}^n_+)$，我们有

$$w(\lambda) \ge -O(\lambda^{(n-2)-\tau}).$$

注意，这与 (41) 不相容。这就完成了 $\Delta_g u = 0$ 属于 $\mathbb{R}^n_+ \setminus B^n_{\lambda_0}(0)$ 时的证明。

现在，假设 $\Delta_g u \ge 0$ 属于 $\mathbb{R}^n_+ \setminus B^n_{\lambda_0}(0)$，且 $\Delta_g u$ 可积。根据命题 47，存在

存在 $v \in C^{2,\alpha}_{\tau}(\mathbb{R}^n_+)$，使得

$$\begin{cases} \Delta_g v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \setminus B^n_{\lambda_0}(0), \\ D(g)_{\nu(\partial M,g)} v = 0 & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B^n_{\lambda_0}(0), \text{ and} \\ v = u & \text{on } \mathbb{R}^n_+ \cap \partial B^n_{\lambda_0}(0). \end{cases}$$

由最大值原理，$u \leq v$ 属于 $\mathbb{R}^n_+ \setminus B^n_{\lambda_0}(0)$。特别地，

$$\lambda^{1-n} \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap S^{n-1}_\lambda(0)} (u - v)\, \mathrm{d}\bar{\mu}(g) \leq 0$$

对每个 $\lambda \geq \lambda_0$ 都成立。此外，利用 u，$v \in C^{2,\alpha}_{\tau}(\mathbb{R}^n_+)$，我们有

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{1-n} \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap S^{n-1}_\lambda(0)} (u - v)\, \mathrm{d}\bar{\mu}(g) = 0.$$

因此，

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap S^{n-1}_\lambda(0)} x^i\, \partial_i(u - v)\, \mathrm{d}\mu(\bar{g}) \geq 0.$$

我们已经证明

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap S^{n-1}_\lambda(0)} x^i\, \partial_i v\, \mathrm{d}\mu(\bar{g}) > 0.$$

此外，由于 $\Delta_g u$ 是可积的，导出（39）的论证表明

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap S^{n-1}_\lambda(0)} x^i\, \partial_i u\, \mathrm{d}\mu(\bar{g})$$

存在。

断言成立。 □

F. 标量曲率刚性结果

本节概述数学相对论中用于推导标量曲率刚性结果的几种技术。

R. Schoen 在 [37, 定理 1]中给出的证明，以及 M. Gro- mov 和 H. Lawson 在下述结果的 [19, 推论 A] 中独立给出的证明，在某种意义上是正质量定理的先导；正质量定理在此表述为定理 40。

定理 52 ([19, 37])。设 $n \geq 3$ 为一个整数，$T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ 为n维环面。设 g 为 T^n 上的一个黎曼度量，且满足 $R(g) \geq 0$。则 g 是平坦的。

[19, 37] 中的证明表明，T^n 上的任何黎曼度量 g，只要满足 $R(g) \geq 0$，就必然满足 $R(g) = 0$。通过研究标量曲率的变分公式（24），J. P. Bourguignon 先前观察到，除非 $\mathrm{Ric}(g) = 0$，否则可以将这样的度量扰动为具有正数量曲率的度量；参见 [22, 引理 5.2]。

设 $(M, \tilde{g})$ 是一个渐近平坦流形，具有 $R(\tilde{g}) \geq 0$ 和 $m(\tilde{g}) = 0$；见附录 A。正质量定理中的刚性结论在此表述为定理 40，可以视为

定理 52 在非紧空间上的推广。通过构造 $\tilde{g}$ 的全局变分，R. Schoen 和 S.-T. Yau 证明，除非 Ric($\tilde{g}$) $= 0$，否则 $\tilde{g}$ 可以扰动为具有非负标量曲率和负质量的度量；见 [36, §3]。若 $(M, \tilde{g})$ 是自旋的，E. Witten 的另一种论证则蕴含某些平行旋量的存在。这些旋量的存在意味着 $(M, \tilde{g})$ 是平坦的；见 [40, §3]。我们指出，Y. Shi 和 L.-F. Tam 已将这一论证推广到正则性较低的情形；见 [38, §3]。最近，S. Lu 和 P. Miao [26, 命题 2.1]将定理 40 中的刚性结论推广到了带角度量。他们的证明使用了 D. McFeron 和 G. Székelyhidi 的论证 [29]，该论证基于这样一个观察：沿里奇流，质量保持为常数。

若 $n = 3$，[36] 中正质量定理的证明表明，除非 $\tilde{M}$ 平坦 $\mathbb{R}^3$，否则 $\tilde{M}$ 中不存在非紧致、适当嵌入的面积极小曲面。R. Schoen 提出的这一猜想已由 O. Chodosh 和首位作者在 [11, 定理 1.6] 中证实。在证明中，他们利用 $\tilde{g}$ 的局部扰动，构造了此类极小曲面邻域的局部叶状分解，其中包含非紧致、适当嵌入的面积极小曲面；这些曲面是普拉托问题解的极限。我们指出，已有相关刚性结果对视界边界的拓扑施加了限制；参见 [16, 推论 1.4] 及其中的参考文献。

设 $(M, \tilde{g})$ 是维数为 $3 \leq n \leq 7$、具有视界边界 $\Sigma \subset M$ 的渐近平坦流形。若 $n = 3$ 且 Σ 连通，G. Huisken 和 T. Ilmanen 已通过逆平均曲率流演化 Σ，直至到达渐近平坦坐标图中的一个大坐标球面，从而证明了黎曼 Penrose 不等式；这里将其表述为定理 41。通过显式计算，他们证明演化中的视界的霍金质量单调不减；事实上，若 $(M(\Sigma)\ \tilde{g})$ 标量平坦，且由全脐的常平均曲率球面构成叶状分解，则该质量为常数。为在一般情形下证明定理 41（此时 $3 \leq n \leq 7$ 且 Σ 可能不连通），H. L. Bray 和 D. A. Lee 使用度量 $\tilde{g}$ 的共形流；沿此流，质量不增，而视界边界的面积保持不变。他们的证明表明，当且仅当对 $M(\Sigma)$ 关于 Σ 反射所得的双倍流形施以适当的共形变换后质量为零时，沿此流的质量才为常数。若 $(M, \tilde{g})$ 具有自旋结构，则 [38, §3] 中的刚性结果适用于这个可能不光滑的双倍流形。因此，$(M(\Sigma)\ \tilde{g})$ 等距于 Schwarzschild 空间 (31) 的外部区域。S. Lu 和 P. Miao [26] 的工作表明，$(M, \tilde{g})$ 具有自旋结构这一假设并非必要。

最后，在定理 39 中，我们给出一个关于黎曼彭罗斯不等式刚性的简短变分证明，该证明不需要自旋假设。为此，我们证明，若 (32) 中取等号，则通过沿 Σ 反射得到的 $(M(\Sigma)\ \tilde{g})$ 的双倍流形是光滑的。事实上，我们注意到，如果 Σ 的第二基本形式不恒为零，我们可以在局部扰动度量 $\tilde{g}$，使其增大 $R(\tilde{g})$，同时不减小 Σ的面积。随后，通过将标量曲率变为零的整体共形变换，我们可以在不显著减小 Σ 面积的情况下，减小 $\tilde{m}(\tilde{g})$。

参考文献

[1] Sérgio Almaraz，带边界流形上标量平坦度量在 Yamabe 型流下的收敛，微分方程杂志 (2015)，第 259 卷，2626–2694[2] Sérgio Almaraz、Ezequiel Barbosa 和 Levi Lopes de Lima，带非紧边界的渐近平坦流形上的正质量定理，《分析与几何通讯》 (2016)，第 24 卷，673–715

[3] Sérgio Almaraz、Levi Lopes de Lima 和 Luciano Mari，带非紧边界初始数据集的时空正质量定理，《国际数学研究通知》(2021)，第 4 期，2783–2841[4] Richard Arnowitt、Stanley Deser 和 Charles Misner，广义相对论中的坐标不变性与能量表达式，《物理评论》(2) (1961)，第 122 卷，997–1006[5] Ezequiel Barbosa 和 Adson Meira，带非紧边界图的正质量定理与彭罗斯不等式，《太平洋数学杂志》(2018)，第 294 卷，257–273[6] Robert Bartnik，渐近平坦流形的质量，《纯粹与应用数学通讯》(1986)，第 39 卷，661–693[7] Hubert L. Bray，利用正质量定理证明黎曼彭罗斯不等式，《微分几何杂志》(2001)，第 59 卷，177–267[8] Hubert L. Bray 和 Dan A. Lee，低于八维情形下的黎曼彭罗斯不等式，《杜克数学杂志》(2009)，第 148 卷，81–106[9] Simon Brendle，带边界流形上 Yamabe 流的一般化，《亚洲数学杂志》(2002)，第 6 卷，625–644[10] Simon Brendle 和 Szu-Yu Sophie Chen，带边界流形上 Yamabe 问题的存在性定理，《欧洲数学学会杂志》(2014)，第 16 卷，991–1016[11] Alessandro Carlotto、Otis Chodosh 和 Michael Eichmair，正质量定理的有效版本，《数学发明》(2016)，第 206 卷，975–1016[12] Alessandro Carlotto 和 Richard Schoen，爱因斯坦约束方程解的局部化，《数学发明》(2016)，第 205 卷，559–615[13] Justin Corvino，标量曲率变形以及爱因斯坦约束方程的拼接构造，《数学物理通讯》(2000)，第 214 卷，137–189[14] Stefan Czimek，关于静态度量延拓问题，硕士论文，2014。https://www.math.uni-leipzig. de/~czimek/mthesis.pdf.[15] Levi Lopes de Lima，广义相对论中的守恒量：带非紧边界的初始数据集情形，arXiv 预印本 arXiv:2103.06061 (2021)，即将收入《标量曲率展望》，M. Gromov 和 H.B. Lawson, Jr. 编，世界科技出版公司，2022。[16] Michael Eichmair、Gregory J. Galloway 和 Abraão Mendes，初始数据刚性结果，《数学物理通讯》(2021)，第 386 卷，253–268[17] José F. Escobar，带边界流形上的 Yamabe 问题，《微分几何杂志》(1992)，第 35 卷，21–84[18] David Gilbarg 和 Neil S. Trudinger，二阶椭圆偏微分方程，《数学科学基础丛书》[数学科学基本原理], 第 224 卷。施普林格出版社，柏林[19] Mikhael Gromov 和 Herbert Blaine Lawson，存在基本群时的自旋与标量曲率。I，《数学年刊》(2) (1980)，第 111 卷，209–230[20] Lan-Hsuan Huang 和 Damin Wu，渐近平坦图的彭罗斯不等式等号情形，《美国数学会汇刊》(2015)，第 367 卷，31–47[21] Gerhard Huisken 和 Tom Ilmanen，逆平均曲率流与黎曼彭罗斯不等式，《微分几何杂志》(2001)，第 59 卷，353–437[22] Jerry L. Kazdan 和 Frank W. Warner，指定曲率，《微分几何》（纯粹数学专题讨论会论文集，第 XXVII 卷，斯坦福大学，斯坦福，加利福尼亚州，1973），第 2 部分，第 309–319 页，1975[23]Thomas Koerber，带非紧边界的渐近平坦流形上的黎曼彭罗斯不等式，arXiv 预印本 arXiv:1909.13283 (2019)，即将发表于《微分几何杂志》[24] Mau-Kwong George Lam，所有维数下黎曼正质量与彭罗斯不等式的图情形。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州[25] John M. Lee 和 Thomas H. Parker，Yamabe 问题，《美国数学会通报》(N.S.) (1987)，第 17 卷，37–91[26] Siyuan Lu 和 Pengzi Miao，带角点的黎曼彭罗斯不等式刚性及其推论，《函数分析杂志》(2021)，第 281 卷，论文编号 109231，11

[27] Thomas Marquardt, 《带边界超曲面的逆平均曲率流弱解》, 《*J. Reine Angew. Math.*》（2017）, 第728卷, 237–261页[28] Stephen McCormick 和 Pengzi Miao, 《低于八维情形下的一个类彭罗斯不等式》, 《国际数学研究通知》（2019）, 第7期, 2069–2084页[29] Donovan McFeron 和 Gábor Székelyhidi, 《带角流形上的正质量定理》, 《数学物理通讯》（2012）, 第313卷, 425–443页[30] William W. Meeks III 和 丘成桐, 《嵌入极小曲面的存在性与唯一性问题》, 《*Math. Z.*》（1982）, 第179卷, 151–168页[31] Pengzi Miao, 《沿超曲面带角流形上的正质量定理》, 《*Adv. Theor. Math. Phys.*》（2002）, 第6卷, 1163–1182页（2003）[32] Roger Penrose, 《裸奇点》, 《纽约科学院年刊》（1973）, 第224卷, 125–134页[33] Simon Raulot, 《局部边界条件下狄拉克算子的格林函数及其应用》, 《*Ann. Global Anal. Geom.*》（2011）, 第39卷, 337–359页[34] Richard Schoen, 《将黎曼度量共形变形为常数量曲率》, 《微分几何杂志》（1984）, 第20卷, 479–495页[35] , 黎曼度量总数量曲率泛函的变分理论及相关课题, 《变分法专题（蒙特卡蒂尼泰尔梅, *1987*）》, 第120–154页, 《数学讲义》, 第1365卷, *Springer*, 柏林, 1989年[36] Richard Schoen 和 丘成桐, 《广义相对论中正质量猜想的证明》, 《数学物理通讯》（1979）, 第65卷, 45–76页[37] , 《正标量曲率流形的结构》, 《*Manuscripta Math.*》（1979）, 第28卷, 159–183页[38] Yuguang Shi 和 Luen-Fai Tam, 《非负标量曲率紧流形的正质量定理与边界行为》, 《微分几何杂志》（2002）, 第62卷, 79–125页[39] Alexander Volkmann, 《由平均曲率控制的自由边界问题》, 博士论文, 2015年。https://d-nb.info/1067442340/34。[40] Edward Witten, 《正能量定理的新证明》, 《数学物理通讯》（1981）, 第80卷, 381–402页

MICHAEL EICHMAIR 维也纳大学 数学系 奥斯卡-摩根施特恩广场1号 1090 维也纳, 奥地利
htt
ps://orcid.org/0000-0001-7993-9536
michael.eichmair@univie.ac.at

THOMAS KOERBER 维也纳大学 数学系 奥斯卡-摩根施特恩广场1号 1090 维也纳, 奥地利
htt
ps://orcid.org/0000-0003-1676-0824
thomas.koerber@univie.ac.at