arXiv:2302.00177v1 [math.DS] 1 Feb 2023

平面总碰撞不会发生无穷自旋

RICHARD MOECKEL 和 RICHARD MONTGOMERY

Abstract. 无限自旋问题研究 n体问题中完全碰撞轨道的旋转行为。早已知道，当一个解趋于完全碰撞时，其归一化构型曲线必定收敛到归一化中心构型集合。在平面 n 体问题中，每个归一化构型都确定一个由旋转等价的归一化构型组成的圆，特别地，也存在由归一化中心构型组成的圆。可以设想，借助 *infinite spin*，完全碰撞解可能收敛到这样的一个圆，而非圆上的某个特定点。本文证明这是不可能的，至少当中心构型的极限圆与其他中心构型圆相隔离时是如此。（人们相信所有中心构型都是孤立的，但一般情形下尚未得到证明。）我们的证明结合了中心流形定理与Łojasiewicz梯度不等式。

1. Introduction

考虑质量为 $m_i > 0$、位置为 $q_i \in \mathbb{R}^2$ 的平面 n 体问题，并令 $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ 运动由牛顿运动方程支配

$$m_i \ddot{q}_i = \nabla_i U(q)$$

其中

$$U(q) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \qquad r_{ij} = |q_i - q_j| \tag{1}$$

且 ∇_i 是关于 q_i 的偏梯度。问题的平移对称性意味着我们可以不失一般性地假设总动量为零，且质心固定在原点，即

$$m_1 q_1 + \ldots + m_n q_n = 0 \qquad m_1 v_1 + \ldots + m_n v_n = 0. \tag{2}$$

如果所有位置 $q_i(t)$在 $t \to T$时都收敛到同一点，那么解 $q(t)$ 就在时刻 T 发生完全碰撞。这个碰撞点必须是质心，因此有 $q(t) \to 0 \in \mathbb{R}^{2n}$。令

$$I(q) = \sum_i m_i |q_i|^2$$

Date: 2023年1月30日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 37N05,70F10, 70F15, 70F16, 70G40,70G60。*Key words and phrases.* 天体力学，n体问题，无限自旋。

表示相对于原点的转动惯量。我们可以将 $I(q)$视为 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的质量范数的平方，并写作 $I(q) = \|q\|^2$。于是，量$r(q) = \sqrt{I(q)} = \|q\|$ 可方便地用来度量碰撞距离。单位向量 $\hat{}q = q/\|q\|$ 是相应的归一化构型。考虑质心条件后，归一化构型构成一个球面 $S \simeq \mathbb{S}^{2n-3}$。

Chazy [3] 关于完全碰撞解的一条经典结果指出，当 $t \to T$（完全碰撞时刻）时，它们的归一化构型曲线 $\hat{}q(t)$ 收敛到归一化中心构型集合。

定义 1. 若点 $q \in \mathbb{R}^{2n}$ 满足

$$\nabla_i U(q) + \lambda m_i q_i = 0 \tag{3}$$

其中某个常数为 $\lambda > 0$。

这意味着第 i个物体所受的引力加速度为 $-\lambda q_i$，其方向指向原点，且与到原点的距离成正比。若将质量置于中心构型 q_0，并令初速度为零，就会得到一个简单的完全碰撞解，其形式为$q(t) = f(t)q_0$，其中 $f(t) > 0$是标量函数，且当 $t \to T$时， $f(t) \to 0$。完全碰撞还有许多不那么显而易见的例子，但 $\hat{}q$ 的极限点始终是中心构型。

归一化中心构型就是满足 $I(q) = \|q\| = 1$的中心构型，即 $q \in S$。若将 λ 视为拉格朗日乘子，那么式 (3) 可看作牛顿势能 $U(q)$在单位球面 S上的限制函数的临界点方程。无限自旋问题源于 n体问题的旋转对称性。任意构型 $q = (q_1, \dots, q_n) \neq 0$ 确定了一个由对称构型组成的圆： $R(\theta)q = (R(\theta)q_1, \dots, R(\theta)q_n)$，其中$R(\theta) \in SO$是一个 2×2 旋转矩阵。若 q 是中心构型，那么它的每个旋转 $R(\theta)q \in SO(2)q$也都是中心构型。换言之， $U(q)$在 S上存在临界点圆族。现在转到$(2n-4)$维商流形$S/SO(2)$，它与复射影空间 $\mathbb{CP}(n-2)$微分同胚。将商映射 $S \to \mathbb{CP}(n-2)$记为 $q \mapsto [q]$。将由 U诱导的、定义在 $\mathbb{CP}(n-2)$上的函数记为 $[q] \mapsto U([q])$。关于中心构型的一个著名猜想是：除对称性外，中心构型只有有限多个；等价地， $U([q])$只有有限多个临界点。对于 $n = 3$、4，以及当 $n = 5$时的一般质量，这一点已得到证明。无论该猜想是否成立，我们称 q 为孤立中心构型，若 $[q]$ 是 $U([q])$的孤立临界点；若它是$U([q])$的非退化临界点，则称其为非退化中心构型。（非退化中心构型必然是孤立中心构型。）

如果 $q(t)$ 是一个总碰撞解，我们可以构造曲线 $\hat{}q(t) \in S$ and$[\hat{}q(t)] \in S/SO(2)$。根据 Chazy 的结果， $[\hat{}q(t)]$ 在 $U([q])$ 的临界点集合中的某个紧子集上收敛，当 $t \to T$。如果 $[\hat{}q(t)]$ 的极限集包含一个孤立临界点 $[q_0]$，那么必有 $[\hat{}q(t)] \to [q_0]$，当 $t \to T$。因此，$\hat{}q(t) \in S$ 收敛到 S 中相应的归一化临界点圆；自然会

想知道 ˆ*q*(*t*) 是收敛到某个特定的中心构形，还是收敛到圆的一个非平凡子集。例如，很容易想象它可能通过无限自旋而收敛到整个圆。本文的主要目标是证明这种情况不会发生。

定理1。设 $q(t)$ 是平面 n 体问题的一个解，且 $q(t) \to 0$作为 $t \to T$，并假设其约化归一化构形 $[\hat{q}(t)] \in S/SO(2)$ 收敛到一个孤立中心构形。若 $\theta(t)$ 是 S 中相应中心构形圆上的角变量，则 $\theta(t)$ 随着 $t \to T$ 收敛，因此 $\hat{q}(t)$ 收敛到该圆上的一个特定中心构形。

Chazy 在假设极限中心构形非退化的条件下证明了此定理 [3]，因此问题的关键在于处理退化情形。Wintner 将此列为一个未解决问题，它也出现在天体力学未解问题列表中的第 5 个问题 [1]。本文解决的是极限中心构形为孤立中心构形的平面情形。

定理1将由另一个关于膨胀与旋转约化相空间中解的结果推出。研究完全碰撞的现代方法采用 McGehee 膨胀技术，其中引入尺度坐标 r、单位球面 S 上的一组坐标，以及适当的速度变量和新的时间尺度 τ [8, 9]。在这些坐标下$\{r = 0\}$ 成为一个不变完全碰撞流形。碰撞流形中存在与归一化中心构形相对应的静止点。此前经历完全碰撞的轨道 $t \nearrow T$ 如今会随着 $\tau \to +\infty$ 收敛到碰撞流形中静止点集合的一个紧子集。下一节中，我们将引入这类坐标，并配以角坐标 θ 以及与商空间$S/SO(2)$相对应的约化坐标。最终，我们得到一个膨胀与旋转约化问题，以及关于角度 θ 的积分公式。随后我们将证明

定理2. 对于吹胀并约化旋转后的问题，收敛到孤立中心构型的完全碰撞解，相对于一种自然的黎曼度量具有有限弧长。

这将推出定理1，因为有限弧长意味着给出 θ 随 $\tau \to \infty$ 变化的积分是有限的。

此前有几项研究声称，通过估计速度的旋转分量解决了这个问题。但这种做法没有考虑到“下落的猫”现象：即使速度的旋转分量为零，形状变化仍会产生旋转。我们在附录中对此问题作了更详尽的讨论。我们的方法结合了对退化静止点中心流形上的流的研究，以及计算角度变化的积分公式。最近一篇基于中心流形上流的幂级数展开的预印本声称，解决了一维和某些二维中心流形的旋转问题 [16]。

2. Reduced Planar n-Body Problem and the Spin Angle

假设质心位于原点，且总动量为零。我们可以通过线性映射 $q = Pz$, $P: \mathbb{R}^{2n-2} \to \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{2n}$ where$z = (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{2n-2}$, $z_i \in \mathbb{R}^2$, 对（$2n-2$）维质心子空间 $\mathcal{W}$ 进行参数化。例如，我们可以使用相对于第 n 个物体的相对位置 $z_i = q_i - q_n$，或广义雅可比变量。

无论如何选择这些坐标，相互距离都可以用 z 表示，而式 (1) 确定了定义在 $\mathbb{R}^{2n-2} \setminus \Delta$ 上的解析函数 $U(z)$，其中 $\Delta = \{z: r_{ij} = 0$，对某个 $i \neq j\}$ 成立。 $-U(z)$ 是牛顿势能函数。转动惯量和质量范数平方 $I(q) = \sum_i m_i |q_i|^2$ 将变为

$$I(z) = \|z\|^2 = z^T M z$$

其中 M 是相应的 $(2n-2) \times (2n-2)$ 正定对称矩阵 $P^T \mathrm{diag}(m_1, m_1, \ldots, m_n, m_n) P$。

令 $\zeta = \dot{z}$ 为相应的速度变量。那么，由于 $\dot{q} = P\zeta$，动能 $K = \frac{1}{2}\sum_i m_i |\dot{q}_i|^2$ 变为

$$K(\zeta) = \frac{1}{2}\|\zeta\|^2 = \frac{1}{2}\zeta^T M \zeta$$

因此，平移约化问题可以看作定义在切丛 $T(\mathbb{R}^{2n-2} \setminus \Delta)$ 上、拉格朗日量为 $L = K(\zeta) + U(z)$ 的拉格朗日系统。欧拉—拉格朗日方程为

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \zeta \\ \dot{\zeta} &= M^{-1} \nabla U(z) \end{aligned}$$

系统的总能量为

$$K(\zeta) - U(z) = \frac{1}{2}\|\zeta\|^2 - U(z) = h.$$

接下来，我们将引入新的坐标，用以表示构型的大小、旋转角和形状。为描述这些量，将位置和速度视为复数会很方便，因此有 $z, \zeta \in \mathbb{C}^{n-1}$。我们将在 $\mathbb{C}^{n-1}$ 上引入厄米质量度量

$$\langle\langle v, w \rangle\rangle_{\mathbb{C}} = \overline{v}^T M w \qquad v, w \in \mathbb{C}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^{2n-2}$$

其中 $\overline{v}$ 是 v 的复共轭。实部 $\langle\langle v, w \rangle\rangle = \mathrm{re}\langle\langle v, w \rangle\rangle_{\mathbb{C}}$ 称为质量内积。相应的范数就是我们的质量范数 $\|v\|$。虚部 $\mathrm{im}\langle\langle v, w \rangle\rangle_{\mathbb{C}}$ 是一种非退化的反对称双线性形式，下面也会用到。

令 $r = \|z\|$，并定义归一化构型 $\hat{z} = z/r \in \mathbb{S}^{2n-3}$。于是我们有

$$\|\hat{z}\| = 1 \qquad \langle\langle \hat{z}, \hat{\zeta} \rangle\rangle = 0 \tag{4}$$

$\hat{\cdot}$，其中 $\zeta = \hat{z}_\circ$ 为引入显式的旋转角，将范围限制在 $\mathbb{S}^{2n-3}$ 的开子集上，其中 $\hat{z}_{n-1} \neq 0$，并引入极坐标，使得 $\hat{z}_{n-1} = ke^{i\theta}$，其中 $k > 0_\circ$ 请注意，角度的选取使得 $\theta = 0$ 表示 z_{n-1} 位于正实轴上的状态。这相当于为旋转群作用选取了一个局部截面。角变量的不同选取仅会使每个旋转群轨道上的角度相差一个常数，不会影响收敛性问题。

定义新变量 $s_i = z_i/z_{n-1} = \hat{z}_i/\hat{z}_{n-1\circ}$ 然后

$$\hat{z} = ke^{i\theta}(s_1, \ldots, s_{n-1}, 1) = ke^{i\theta}(s, 1) \qquad s \in \mathbb{C}^{n-2}.$$

由于 $\|\hat{z}\| = 1$，我们有 $k = \|(s,1)\|^{-1}$，坐标变换由 ψ：$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^{n-2} \to \mathbb{C}^{n-1}$ 给出

$$z = \psi(r, \theta, s) = r\, e^{i\theta} \frac{(s,1)}{\|(s,1)\|}. \tag{5}$$

求导后，我们计算得到

$$\dot{z} = (\dot{r} + \dot{k}r + i\dot{\theta}r)e^{i\theta}k(s,1) + re^{i\theta}k(\dot{s},0) \tag{6}$$

这里继续使用 $k = \|(s,1)\|^{-1}$，由此根据链式法则可得

$$\dot{k} = -\frac{G(s,\dot{s})}{\|(s,1)\|^3}, \text{ and } G(s,\dot{s}) = \langle\!\langle (s,1), (\dot{s},0) \rangle\!\rangle.$$

引入速度变量 $\zeta = \dot{z}$、$\rho = \dot{r}$、$\omega = \dot{s}_\circ$ 再引入

$$\Omega(s,\omega) = \mathrm{im}\langle\!\langle (s,1), (\omega,0) \rangle\!\rangle_{\mathbb{C}}$$

并用 $\|\omega\|$ 替代 $\|(\omega,0)\|_\circ$ 化简后，得到拉格朗日量为

$$L = \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 + \frac{r^2\|\omega\|^2}{2\|(s,1)\|^2} - \frac{r^2 G(s,\omega)^2}{2\|(s,1)\|^4} + \frac{r^2\dot{\theta}\,\Omega(s,\omega)}{\|(s,1)\|^2} + \frac{1}{r}V(s)$$

其中

$$V(s) = \|(s,1)\|\, U(s,1).$$

拉格朗日量 L 的前五项只是用新变量重写后的动能 $\frac{1}{2}\|\zeta\|^2$。V 与 U 之间的关系式源于势能的旋转不变性和齐次性：

$$U(z) = U\left(\frac{re^{i\theta}(s,1)}{\|(s,1)\|}\right)) = \frac{\|(s,1)\|}{r}U(s,1)$$

约化的最后一步利用拉格朗日量与. θ 无关这一点，消去(θ,θ)。首先计算角动量，并求解 θ:

$$\mu = L_{\dot{\theta}} = r^2\dot{\theta} + \frac{r^2\Omega(s,\omega)}{\|(s,1)\|^2} \qquad \dot{\theta} = \frac{\mu}{r^2} - \frac{\Omega(s,\omega)}{\|(s,1)\|^2}. \tag{7}$$

然后，约化拉格朗日量或罗思函数为 $R_\mu = L - \mu\theta$，其中 θ 需用 μ表示并消去。进行这一计算可得

$$R_\mu = \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{r^2\|\omega\|^2}{2\|(s,1)\|^2} - \frac{r^2 G(s,\omega)^2}{2\|(s,1)\|^4} - \frac{1}{2}\left(\frac{r\Omega(s,\omega)}{\|(s,1)\|^2} - \frac{\mu}{r}\right)^2 + \frac{1}{r}V(s).$$

经典结果表明，只有当 $\mu = 0$ 时才可能发生完全碰撞；从现在起我们将专注于这种情形。此时，罗思函数变为

$$R(r,\rho,s,\omega) = \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{r^2}{2}\|\omega\|_{FS}^2 + \frac{1}{r}V(s)$$

其中

$$\begin{aligned}\|\omega\|_{FS}^2 &= \frac{\|(s,1)\|^2\|(\omega,0)\|^2 - |\langle\langle(s,1),(\omega,0)\rangle\rangle_{\mathbb{C}}|^2}{(\|(s,1)\|^2)^2} \\ &= \frac{\|\omega\|^2}{\|(s,1)\|^2} - \frac{G(s,\omega)^2 + \Omega(s,\omega)^2}{(\|(s,1)\|^2)^2}.\end{aligned} \tag{8}$$

我们还将使用记号 $F(s,\omega) = \|\omega\|_{FS}^2$。它是复射影空间 $\mathbb{CP}(n-2)$ 上 Fubini-Study 范数平方的局部坐标表示，该范数由 $\mathbb{C}^{n-1}$ 上的质量范数诱导而来。此外，还存在相应的 Fubini-Study 度量。

由于我们使用局部坐标，因此在 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}^{n-2} \setminus \Delta$ 或 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2n-4} \setminus \Delta$ 的切丛上有一个拉格朗日系统。转换为实坐标后，我们可以将 Fubini-Study 范数写为 $F(s,\omega) = \omega^T A(s)\omega$，其中 $A(s)$ 是一个正定的 $(2n-4) \times (2n-4)$ 矩阵。于是我们得到

$$\begin{aligned}\dot r &= \rho \\ \dot\rho &= rF(s,w) - \frac{1}{r^2}V(s) \\ \dot s &= \omega \\ \dot\omega &= \frac{1}{r^3}A^{-1}(s)\nabla V(s) - \frac{2\rho\,\omega}{r} + \frac{1}{2}A^{-1}(s)\nabla F(s,\omega) - A^{-1}(s)\dot A(s)\omega\end{aligned} \tag{9}$$

其中 ∇ 表示关于s的欧几里得梯度或偏梯度。系统的总能量为

$$\frac{1}{2}\rho^2 + \frac{r^2}{2}F(s,\omega) - \frac{1}{r}V(s) = h.$$

(9)中的最后一个方程由欧拉-拉格朗日方程$(R_\omega)^{\cdot} = R_s$得出。我们有 $R_\omega = r^2 A(s)\omega$ 因此

$$(R_\omega)^{\cdot} = r^2 A(s)\dot\omega + r^2\dot A(s)\omega + 2r\rho\,(A(s)\omega).$$

关于 $\dot\omega$ 的方程可以借助 Fubini-Study 度量下的梯度和协变导数写得更加简洁。令 $\tilde\nabla = A^{-1}(s)\nabla$ 表示相对于 Fubini-Study 度量的梯度或偏梯度，并令 D_t 表示沿曲线的向量场的协变时间导数

沿曲线 $s(t)$ 的向量场。那么我们有

$$\begin{aligned}\tilde{D}_t\omega &= \dot{\omega} - \frac{1}{2}A^{-1}(s)\nabla F(s,\omega) + A^{-1}(s)\dot{A}(s)\omega \\ &= \dot{\omega} - \frac{1}{2}\tilde{\nabla}F(s,\omega) + A^{-1}(s)(DA(s)(\omega))\omega\end{aligned}$$

且最后一个欧拉-拉格朗日方程简化为

$$\tilde{D}_t\omega = \frac{1}{r^3}\tilde{\nabla}V(s) - \frac{2\rho\,\omega}{r}. \tag{10}$$

尽管我们消去了角度 θ，但我们仍想研究趋近完全碰撞奇点的解的行为。虽然角动量为零， $\theta(t)$ 不一定是常数。事实上，我们有

$$\dot{\theta} = -\frac{\Omega(s,\omega)}{\|(s,1)\|^2}. \tag{11}$$

$\dot{}$可以想见，随着形状 $s(t)$变化， $\theta(t)$的积分可能发散，从而产生“无限自旋”（更详尽的解释见附录）。我们将证明这种情况不会发生。

3. 碰撞流形与中心流形

为了研究趋于完全碰撞的轨道，我们将使用 McGehee爆破方法。具体而言，引入重标度速度变量 $v = \sqrt{r}\rho$、 $w = r^{\frac{3}{2}}\omega$以及新的时间变量 τ，使得 $' = r^{\frac{3}{2}}\cdot$。爆破微分方程为

$$\begin{aligned} r' &= vr \\ v' &= \frac{1}{2}v^2 + F(s,w) - V(s) \\ s' &= w \\ \tilde{D}_\tau w &= \tilde{\nabla}V(s) - \frac{1}{2}vw \end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\tilde{D}_\tau w = w' - \frac{1}{2}\tilde{\nabla}F(s,w) + A^{-1}(s)(DA(s)(w))w.$$

能量方程为

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}F(s,w) - V(s) = rh.$$

碰撞流形 $\{r=0\}$ 是不变的。平衡点具有˜以下形式： $P = (r, v, s, w) = (0, v_0, s_0, 0)$，其中 $\nabla V(s_0) = 0$。最后一个方程等价于 $\nabla V(s) = 0$，它刻画了约化中心构型。若 $q(t)$ 是一个总碰撞解，且满足 $t \nearrow T$，则相应的解 $\gamma(\tau) = (r(\tau)\ v(\tau)\ s(\tau)\ w(\tau))$ 会收敛到某个水平集 $v = v_0 < 0$ 中平衡点集合的一个紧子集。能量方程表明 $v_0 = -\sqrt{2V(s_0)}$。由于 $r' = vr$ 且 $v(\tau) \to v_0 < 0$，因此 $r(\tau)$ 将指数收敛到 0。

假设 P 是一个孤立平衡点，且满足 $v_0 < 0$ ；它是此类总碰撞解 $\gamma(\tau)$ 的一个极限点。由于 P 是孤立的，我们有 $\gamma(\tau) \to P$ ，当 $\tau \to \infty$ 时成立。我们要证明 Fubini-Study 弧长 $L(s)$ 有限，其中

$$L(s) = \int \|s'(\tau)\|_{FS}\, d\tau = \int \|w(\tau)\|_{FS}\, d\tau. \tag{13}$$

P 处的线性化微分方程的矩阵为

$$\begin{bmatrix} \delta r' \\ \delta v' \\ \delta s' \\ \delta w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & D\tilde{\nabla} V(s_0) & -\frac{1}{2} v_0 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r \\ \delta v \\ \delta s \\ \delta w \end{bmatrix}.$$

由于 $\nabla V(s) = 0$，因此 $D\tilde{\nabla} V(s_0) = D(A^{-1}(s)\nabla V(s)) = A^{-1}(s) D\nabla V(s)$。

能量流形的切空间由 $v_0 \delta v = h \delta r$ 给出，因此左上角的 2×2 块产生一个特征值 $v_0 < 0$。这对应于 $r(\tau)$ 指数收敛到 0。令 B 为右下角的 $(4n-8) \times (4n-8)$ 块，它表示碰撞流形内的线性化微分˜方程。若 δs 满足 $D\nabla V(\sigma_0)\delta s = c\,\delta s$，则 $(\delta s, \delta w) = (\delta s, \lambda_\pm \delta s)$ 是 B 的一个特征向量，其特征值为

$$\lambda_\pm = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 16c}}{4}.$$

由于 $v_0 < 0$，因此任何非实特征值都是不稳定的。此外 $\operatorname{re} \lambda_+ > 0$ ，并且我们有 $\lambda_- = 0$ 当且仅当 $c = 0$。

如果矩阵 $D\nabla V(s_0)$ 非奇异，那么相应的静止点P 是双曲的，因此是孤立的。所有当$\tau \to \infty$时趋近于 P 的解都属于稳定流形，并以指数速度收敛。由此可知，弧长积分 (13) 的被积函数以指数速度趋于 0，因此 $L(s) < \infty$。由于角动量为零，自旋角 $\theta(\tau)$ 满足

$$\theta' = -\frac{\Omega(s, w)}{\|(s, 1)\|^2}. \tag{14}$$

这可以得到形如 $|\theta'| \le K \|w\|_{FS}$ 的估计，因此当 $\tau \to \infty$ 时， $\theta(\tau)$ 也收敛到一个极限。这就证明了当 ω 极限集包含一个非退化中心构型时的定理 1 和 2。

现在假设极限集中存在一个退化中心构型，其对应的静止点为P 。通过选择局部坐标，可以假设 $s_0 = 0 \in \mathbb{R}^{2n-4}$。这等价于选择未约化坐标 $z \in \mathbb{C}^n$ ，使得所选中心构型的坐标具有 $z_0 = (0, \dots, 0, z_n)$的形式，这可以通过更换复基轻易实现。我们将需要使用中心流形和中心稳定叶丛，相关内容请参阅 [2, 6, 17]。引入截断函数来修改微分方程，使新的微分方程

在原点的某个邻域之外是线性的。修改后的方程具有不变的中心稳定流形、中心不稳定流形和中心流形，它们分别与对应的子空间相切。这些流形是唯一的，但取决于截断函数的选择。不过，无论如何进行截断，所关注的解都将包含在中心稳定流形中。此外，中心稳定流形 W^{cs} 以中心流形 W^c 为基底分叶，使得 W^{cs} 中的解会指数趋近于 W^c 中对应的解。

证明的其余部分将着重估计从 P 附近出发并位于中心流形 $W^c(P)$ 上的解 $\gamma(\tau)$ 的弧长。随后，处理中心稳定流形上的解将很容易。一个技术问题是，尽管原始微分方程是实解析的，中心流形可能只有有限阶光滑性。

4. Flow on the Center Manifold

根据上文对特征值的讨论，中心子空间为

$$\mathbb{E}^c = \{(\delta r, \delta v, \delta s, \delta w) = (0, 0, \delta s, 0) : D\nabla V(s_0)\delta s = 0\}.$$

令 $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{2n-2}$ 为 $D\nabla V(0)$ 的核。假设其维数为 $k > 0$，并假设选择 s 坐标使得 $\mathcal{K} = \mathbb{R}^k \times \{0\}$。于是写作 $s = (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$, $l = 2n - 4 - k$，并类似地将 w 分解为 $w = (\xi, \eta)$。中心流形将呈现为如下图像

$$y = f(x) \qquad \xi = \phi(x) \qquad \eta = \psi(x) \tag{15}$$

其中 $f(0) = 0$，$Df(0) = 0$，对 ϕ、ψ 也同样如此。由于碰撞流形和能量流形是不变的，我们可以假设中心流形也满足

$$r = 0 \qquad v(x) = -\sqrt{2V(s(x)) - \|w(x)\|^2}.$$

由于中心流形是不变的，可以利用参数化 (15) 将膨胀后的欧拉-拉格朗日方程 (12) 的限制拉回，从而在 $\mathbb{R}^k$ 中原点的某个邻域 $\mathcal{U}$ 上得到一个一阶微分方程。若 $x(\tau)$ 是这个拉回方程的一个解，则

$$s(\tau) = (x(\tau), f(x(\tau))) \qquad w(\tau) = (\phi(x(\tau)), \psi(x(\tau)))$$

是 (12) 的一个解。因此，

$$x' = \xi = \phi(x) \qquad y' = \eta = \psi(x) = Df(x)\phi(x).$$

这些关系沿着每一条解曲线 $x(\tau)$ 都成立；但由于每个点 $x \in \mathcal{U}$ 都有一条解曲线经过，因此可以将它们视为由 f、ϕ、ψ 满足的函数方程。特别地，我们的拉回微分方程就是 $x' = \phi(x)$。

若引入记号 $g(x) = (x, f(x))$，则关于 ψ 的函数方程表明，中心流形 (15) 的参数化可写为

$$s = g(x) \qquad w = (\phi(x), \psi(x)) = Dg(x)\phi(x).$$

设 $x(\tau)$ 是拉回微分方程 $x' = \phi(x)$ 的任意解，并设$w(\tau) = Dg(x)\phi(x)|_{x=x(\tau)}$。那么由链式法则可得

$$w'(\tau) = Dg(x)D\phi(x)\phi(x) + D(Dg(x))(\phi(x))\phi(x)$$

其中 $x = x(\tau)$，且 (12) 中的协变导数具有如下形式

$$\tilde{D}_\tau w(\tau) = w'(\tau) - \frac{1}{2}\tilde{\nabla}F(g(x), w(x)) + A^{-1}(g(x))(DA(g(x))(w(x)))w(x)$$

其中 $w(x) = Dg(x)\phi(x)$，且 $x = x(\tau)$。将这些结果全部代入 (12)，可得一个稍后将用到的估计。

引理 1. 在 $\mathbb{R}^k$ 中原点的一个充分小邻域 $\mathcal{U}$ 内，存在正常数 k_1、k_2，使得

$$k_1|\phi(x)| \le |\tilde{\nabla}V(g(x))| \le k_2|\phi(x)|. \tag{16}$$

证明。设 $x(\tau)$ 是 $x' = \phi(x)$ 的任意一个解，且 $w(\tau) = Dg(x)\phi(x)$。则 (12) 给出

$$\tilde{D}_\tau w = \tilde{\nabla}V(g(x)) - \frac{1}{2}v(x)Dg(x)\phi(x) \tag{17}$$

其中 $v(x) = -\sqrt{2V(g(x)) - \|Dg(x)\phi(x))\|^2}$，且 $x = x(\tau)$。上面关于 $w'(\tau)$ 和 $D_\tau w(\tau)$ 的方程给出了 (17) 左侧关于 $g(x(\tau))$ 和 $\phi(x(\tau))$ 的表达式。由于任意给定的 $x \in \mathcal{U}$ 都存在一个经过它的解 $x(\tau)$，因此我们可以得到关于 x 的函数方程。注意，左侧的大多数项都关于 $\phi(x)$ 呈二次依赖，只有一项例外，该项依赖于 $D\phi(x)\phi(x)$。回忆 $\phi(0) = 0$ 和 $D\phi(0) = 0$，并注意到矩阵范数 $|Dg(x)|$ 有界。因此˜，对于任意常数 $c > 0$，在原点的每个充分小邻域内都有形如 $|D_\tau w| \le c|\phi(x)|$ 的估计。

由于 $v(x) \simeq -\sqrt{2V(0)} < 0$，因此 (17) 中的最后一项满足 $c_1|\phi(x)| \le |\frac{1}{2}v(x)Dg(x)\phi(x)| \le c_2|\phi(x)|$，其中 c_1、c_2 为正常数。于是我们有

$$(c_1 - c)|\phi(x)| \le |\tilde{\nabla}V(g(x))| \le (c_2 + c)|\phi(x)|.$$

在足够小的邻域内进行分析，我们可以得到 $c < c_1$ 从而完成证明。 证毕

˜函数方程 (17) 涉及在$\mathbb{R}^{2n-2}$中的 Fubini-Study 梯度 $\nabla V(s)$，其取值点为 $s = g(x)$。下一步是将该方程改写为函数 $W(x) = V(g(x))$ 的 k 维梯度形式。令X 表示中心流形到构形空间的投影。函数 $s = g(x) = (x, f(x))$ 是一个浸入，它为 X 提供参数化，因此我们可以利用 g 将 Fubini-Study 度量拉回到 X上的黎曼度量。将该度量的平方范数记为 $\|\xi\|_X^2 = \hat{}F(x, \xi)$，其中$x, \xi \in \mathbb{R}^k$。于是

$$\|\xi\|_X^2 = \hat{F}(x, \xi) = F(g(s), Dg(x)\xi) = \|Dg(x)\xi\|_{FS}^2$$

其中 $F(s,w)$ 是平方 Fubini-Study 范数 (8)。具体而言，我们有 $\hat{F}(x,\xi) = \xi^T B(x)\xi$，其中 $B(x)$ 是 $k\times k$ 矩阵

$$\hat{A}(x) = Dg(x)^T A(g(x))Dg(x) \qquad Dg(x) = \begin{bmatrix} I \\ Df(x) \end{bmatrix}$$

且 $A(s)$ 是 Fubini-Study 度量的矩阵。

拉回度量将确定一个协变导数，我们将其记为 D。现在令 $x(\tau)$ 为 X 中的曲线，$\xi(\tau)$ 为沿着$x(\tau)$的向量场。于是，在 $\mathbb{R}^{2n-4}$ 中有相应的曲线和向量场，分别由$s(\tau) = g(x(\tau))$、$w(\tau) = Dg(x(\tau))\xi(\tau)$给出。由于 g是等距浸入，可以证明 X中的协变导数$\hat{}$ $D_\tau\xi$与 $\mathbb{R}^{2n-4}$中的 $\tilde{D}_\tau w$之间满足如下关系：

$$\pi(\tau)\tilde{D}_\tau w(\tau) = Dg(x(\tau))\hat{D}_\tau\xi(\tau)$$

其中，$\pi(\tau)$ 是从 $T_{s(\tau)}\mathbb{R}^{2n-2} \to \mathrm{im}(Dg(x(\tau))$到其上的正交投影，所依据的是 Fubini-Study 度量。我们还可以将势函数 $V(s)$拉回为函数 $W(x) = V(g(x))$。若$\hat{}\nabla$ 表示相对于 X上的拉回度量的梯度，则有

$$\pi(\tau)\tilde{\nabla}V(s(\tau)) = Dg(x(\tau))\hat{\nabla}W(x(\tau)).$$

设 $x(\tau)$ 是 $x' = \phi(x)$ 的任意一个解，并令 $\xi(\tau) = x'(\tau) = \phi(x(\tau))$。则 $s(\tau) = g(x(\tau))$，$w(\tau) = Dg(x(\tau))\xi(\tau)$ 满足 (17)。对 (17) 两边应用正交投影 $\pi(\tau)$，得到

$$Dg(x)\hat{D}_\tau\xi = Dg(x)\hat{\nabla}W(x) - \frac{1}{2}vDg(x)\xi.$$

由于 g 是浸入，我们得出 $x(\tau)$ $\xi(\tau)$ 满足

$$\hat{D}_\tau\xi = \hat{\nabla}W(x) - \frac{1}{2}v\phi(x). \tag{18}$$

由于 $\xi'(\tau) = D\phi(x(\tau))\phi(x(\tau))$，协变导数 D 的显式公式为

$$\hat{D}_\tau\xi = D\phi(x)\phi(x) - \frac{1}{2}\hat{\nabla}\hat{F}(x,\xi) + \hat{A}^{-1}(g(x))(D\hat{A}(x)(\xi)\xi$$

其中 $\xi = \phi(x)$ 且 $x = x(\tau)$。如上所述，我们可以用 x 替换 $x(\tau)$，并将其视为一个函数方程。类似于引理 1 证明中的论证可得

引理 2. 在 $\mathbb{R}^k$ 中原点的一个充分小邻域 $\mathcal{U}$ 内，存在正常数 l_1、l_2，使得

$$l_1|\phi(x)| \le |\hat{\nabla}W(x)| \le l_2|\phi(x)|. \tag{19}$$

我们还可以利用 (18) 看出，中心流形上的微分方程近似为一个梯度。这将是排除无限自旋的关键。

引理 3. 中心流形上的微分方程为 $x' = \phi(x)$ ˆ，其中 $\phi(x) = -k\nabla W(x)$ $+ \gamma(x)$，其中 $k = -2/v(0) > 0$ 且 $\gamma(x) =$ˆ$o(|\nabla W(x)|)$。

证明。(18) 左端为 $o(|\phi(x)|)$，因此我们可以重排方程，得到

$$\phi(x) = \frac{2}{v(x)}\hat{\nabla}W(x) + o(|\phi(x)|).$$

ˆ ˆ 此外， $v(x) = v(0) + O(|\nabla W(x))) + O(|\phi(x)|)$，且 $|\phi(x)| \leq l_2|\nabla W(x)|$，因此

$$\begin{aligned}\phi(x) &= -k\hat{\nabla}W(x) + O(|\hat{\nabla}W(x)|^2) + O(|\phi(x)||\hat{\nabla}W(x)|) + o(|\phi(x)|) \\ &= -k\hat{\nabla}W(x) + o(|\hat{\nabla}W(x)|).\end{aligned}$$

QED

最后一个要素是关于 $W(x)$ 的 Łojasiewicz 梯度不等式。

引理 4. 在原点的一个充分小邻域内，限制势函数 $W(x)$ 满足

$$|\hat{\nabla}W(x)|^2 \geq |W(x) - W(0)|^\alpha \tag{20}$$

其中 $1 < \alpha < 2$。

证明。由于 $V(s)$ 是实解析的，它在 $s = 0$ 的某个邻域内满足 Lojasiewicz 梯度不等式 $|\nabla V(s)|^2 \geq C|V(s) - V(0)|^\alpha$，其中 $0 < \alpha < 2$ 且 $C > 0$。将 ∇ 替换为 ∇ 只会改变常数 C。不失一般性，假设 $1 < \alpha < 2$；因为当 $|V(s) - V(0)| \leq 1$ 时，增大指数会使不等式变弱。

由于中心流形不一定是解析的，我们无法立即对 $W(x) = V(g(x))$ 得到这样的不等式。不过，当 $s = g(x)$ 时，有 $V(s) - V(0) = W(x) - W(0)$。由引理 1 和 2 ˆ ˜ ˆ 可知，$|\nabla W(x)| \geq K|\nabla V(g(x))|$，其中 $K = l_1/k_2$。由此得到 $|\nabla W(x)| \geq KC|W(x) - W(0)|^\alpha$；进一步增大 α，即可使$KC = 1$。证毕

Lojasiewicz 运用其不等式证明，对于解析梯度微分方程，收敛到临界点的解具有有限弧长[7, 4]。在我们的中心流形方程中，同样的性质也成立。

引理 5. 假设 $x(\tau)$ 是形如$x' = -k$ ˆ$\nabla W(x)+\gamma(x)$ 的微分方程的解，其中 $k > 0$ 且 $\gamma(x) = o(|$ ˆ$\nabla W(x)|)$，并假设$W(x)$ 满足形如（20）的不等式。假设 $x(\tau)$ 是满足$x(\tau) \to 0$ as $\tau \to \infty$ 的解。那么，曲线 $x(\tau)$ 的弧长是有限的。这里的梯度和弧长均相对于某个光滑黎曼度量取值。

证明。不失一般性，我们可以假设 $W(0) = 0$。给定任意常数 $c > 0$，我们可以在 $x = 0$ 的邻域 $\mathcal{U}$ 中进行讨论，使得 (20)

$\hat{}$ 成立，并且 $|\gamma(x)| \leq c|\nabla W(x)|$。我们将假设 $c < k$。由于$x(\tau) \to 0$，我们可以假设对于所有 $\tau \geq 0$，都有 $x(\tau) \in \mathcal{U}$。

为了估计弧长，注意到由于 $|x'| \leq k|\hat{\nabla} W(x)| + |\gamma(x)| \leq \hat{} (k + c)|\nabla W(x)|$，只需估计积分 $|\nabla W(x(\tau))|$。首先考虑 $W(x(\tau))$。我们有

$$W' = -k|\hat{\nabla} W|^2 + \langle \gamma, \hat{\nabla} W \rangle \leq -(k - c)|\hat{\nabla} W|^2 \leq -k_2 W^\alpha$$

其中 $k_2 = k - c > 0$。第一个不等式表明 $W'(\tau) \leq 0$，并且由于$W(x(\tau)) \to W(0) = 0$，我们必有 $W(x(\tau)) \geq 0$，对所有 $\tau \geq 0$均成立。这使我们可以去掉式 (20) 中的绝对值，从而得到第二个不等式。

对其在 $[0, \tau]$ 上积分，得到

$$W(\tau) \leq \frac{W_0}{(1 + \lambda\tau)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \tag{21}$$

其中 $W_0 = W(x(0))$ 且 $\lambda = k_2(\alpha - 1)W_0^{\alpha-1}$。由于 $1 < \alpha < 2$，对于某个 $\epsilon > 0$，我们有$\frac{1}{\alpha-1} = 1 + 2\epsilon$。

由于 $W' \leq -k_2|\hat{\nabla} W(x)|^2$，我们可以巧妙地运用柯西-施瓦茨不等式 [4] 得到

$$\begin{aligned}\int_0^T |\hat{\nabla} W(x(\tau)| &\leq \int_0^T \sqrt{-W'/k_2} = \int_0^T \sqrt{-W'/k_2}\, \tau^{\frac{1+\epsilon}{2}}\, \tau^{-\frac{1+\epsilon}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{k_2}\int_0^T -W'\tau^{1+\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \tau^{-(1+\epsilon)}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

只需证明第一个积分有界。分部积分可得

$$\int_0^T -W'\tau^{1+\epsilon} = W(T)\tau^{1+\epsilon}|_T^0 + (1 + \epsilon)\int_1^T W(\tau)\tau^\epsilon.$$

由于 $W(\tau)$ 满足指数为 $1+2\epsilon$ 的 (21)，因此两项都有界 证毕

综合这些引理，我们得到局部中心流形中流的如下描述。

定理3. 设 P 是一个满足 $v_0 < 0$的退化静止点。令 $\mathcal{U}$ 为 P 的一个充分小邻域，令 $W_{\mathcal{U}}^c$ 为局部中心流形。若 $\gamma(\tau)$ 是 $W_{\mathcal{U}}^c$中的一个解，且当 $\tau \to \infty$ 时收敛到 P，那么 γ具有有限弧长。

5. Completion of the proofs

为完成定理2的证明，考虑任意一条完全碰撞轨道，其约化归一化轨道收敛到一个孤立中心构型，并令$\gamma(\tau)$为膨胀约化方程(12)的相应解。于是，$\gamma(\tau)$收敛到碰撞流形上的一个静止点 $P = (0, v_0, s_0, 0)$，其中 $v_0 < 0$，且 s_0 表示该孤立中心构型。我们已经考虑过 s_0 是非退化临界点的情形，因此现在假设 s_0是退化的。选取 P 的一个邻域，使定理3在其中成立。我们

可以假设对所有 $\tau \geq 0$， $\gamma(\tau) \in \mathcal{U}$，由此可知 $\gamma(\tau)$属于 $\tau \geq 0$对应的局部中心稳定流形$W^{cs}_{\mathcal{U}}$。中心稳定纤维化意味着，在同一纤维上，中心流形中存在一条相应轨道 $\gamma_c(\tau)$。由于中心稳定纤维化的纤维呈指数收缩，我们还有 $\gamma_c(\tau) \to P$，当 $\tau \to \infty$ 时成立；定理3还意味着$\gamma_c(\tau)$具有有限弧长。为说明 $\gamma(\tau)$也具有有限弧长，注意到 $\gamma(\tau)$与 $\gamma_c(\tau)$之间的距离呈指数趋于零；又由于这两条曲线都是光滑一阶微分方程的解，导数 $\gamma'(\tau)$与 $\gamma_c'(\tau)$之间的距离也呈指数趋于零。因此，两条曲线的弧长之差有界。

这就完成了定理2的证明。如上文所述，有限弧长意味着定义自旋角 $\theta(\tau)$的积分收敛，从而得到定理1。

6. Appendix

我们指出，先前关于“n体问题的完全碰撞解不可能具有无限自旋”的证明中存在错误。参见 [13] 和 [5]。这些证明依赖于将速度向量依赖构型地投影到其“旋转部分”上。见下文定义2。作者正确地证明了其碰撞解的速度没有旋转部分。（对于部分碰撞，他们证明这些“旋转部分”以指数速度趋于零。）错误在于由这一消失性质得出的一项推论。这些论文声称，如果速度没有旋转部分，那么运动过程中产生的净旋转必定是有限的。我们将通过具体例子表明，速度的旋转部分可以恒等于零，但n体构型仍可能经历无限旋转，即无限自旋。

明理的读者或许会质疑：“如果某个运动的旋转部分为零，这个物体怎么可能发生任何自旋，更不用说无限自旋了？”如果这个物体是刚体，那么这种质疑确实有道理：当其运动的旋转部分为零时，它根本不可能自旋。但我们的物体并非刚体，而是“星群”——由平面上 n 个运动点组成的构型。要为非刚体定义净旋转或自旋，是一件相当微妙的事。问题的核心在于规范理论中的一些思想，这些思想通过带联络的主丛理论得到了形式化。下面我们将回到下落的猫来进行说明。（关于非刚体旋转与重新定向的这一视角，以及它与 n 体问题的关系，更多详情请见 [12], [11]and [10] 。）

首先需要明确的是，我们的速度的“旋转部分”为零，当且仅当运动的总角动量为零。请参见下文的命题 1。一只以零角动量下落的猫会产生净旋转并恢复直立。尽管猫的构型的速度的旋转部分为零，但它仍然会旋转到足以使自己恢复直立。猫无法改变其

角动量（从其质心观察）。角动量是守恒的。它通过改变自身的形状，并利用“角动量等于零”定义了一个具有非零曲率的联络这一事实，使自己恢复直立。

我们把运动中的 n 体系统想象成一只下落的猫。将总角动量设为零，就在主圆丛 $S = \mathbb{S}^{2n-3} \to \mathbb{CP}(n-2)$ 上定义了一个联络。（该联络的平行移动方程就是论文正文中的方程（14）。）产生无穷自旋的关键在于，这个联络的曲率不为零。因此，我们可以在 $\mathbb{CP}(n-2)$ 上绘制曲线，使其在无限时间内趋于一个固定点 s_0，但其水平提升没有极限；相反，它们的闭包包含 s_0 上方的整个纤维。

记 $\mathbb{R}^{2n}$ 为平面 n 体构形空间。平移、缩放和旋转群 G 作用于 $\mathbb{R}^{2n}$。G 的这三个生成子群在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中定义了三个线性子空间，我们分别称之为（平移）、（缩放）和（旋转）子空间。后两个子空间取决于构型 $q \in \mathbb{R}^{2n}$。关于这些子空间的详细信息见下文。这三个子空间并不穷尽 $\mathbb{R}^{2n}$，若 $n > 2$。它们直和的正交补表示构形空间的其余部分，而该正交补中的向量表示“纯形状”形变，因此我们将其称为纯形状子空间。综上，我们得到速度空间的“Saari分解”：

$$\mathbb{R}^{2n} = \text{translation} \oplus \text{scaling} \oplus \text{rotation} \oplus \text{pure shape}. \tag{22}$$

我们必须相对于质量度量计算定义（纯形状）的正交补。

$$\langle v, w \rangle = \Sigma m_a v_a \cdot w_a$$

在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上。

Remark. Saari 在 [14] 中将这一分解形式化，因此这一分解以他的名字命名。只要构型的质心为零，前三个子空间便两两正交。

定义 2。向量 $v \in \mathbb{R}^{2n}$ 的“旋转部分”是它在旋转子空间上的正交投影。若向量属于纯形状子空间，则称其为“水平的”。若曲线 $q(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ 的导数 $\dot{q}(t)$ 处处水平，则称该曲线为水平曲线。

将质心固定在原点后，我们消除了平移自由度，因此也消除了 $\mathbb{R}^{2n}$ 的平移子空间。回想一下，我们将 $\mathbb{R}^{2n}$ 的质心为零子空间与 $\mathbb{C}^{n-1}$ 等同，此时 Saari 分解变为

$$\mathbb{C}^{n-1} = \text{scaling} \oplus \text{rotation} \oplus \text{pure shape}. \tag{23}$$

而质量度量是厄米质量度量的实部。缩放群和旋转群通过标量乘法作用于此 $\mathbb{C}^{n-1}$，其中缩放作用为 $z \mapsto \lambda z$，$\lambda > 0$为实数；而旋转群的作用为

$z \mapsto e^{i\theta}z$，其中 θ 为旋转角。对这些作用在单位元处求导，或者等价地，取它们在 z处轨道的切空间，可得到缩放子空间和旋转子空间。因此，缩放空间由 z 的实张成构成，而旋转子空间由 iz的实张成构成。

命题 1. 速度向量 ζ 附着于 z 时，其旋转部分为零，当且仅当总角动量 $J(z,\zeta)$ 为零。此外，

$$J(z,\zeta) = \operatorname{im}\langle\!\langle z,\zeta\rangle\!\rangle_{\mathbb{C}}$$

Proof. 为了使表达式更符合标准物理学用法，我们将用 v 表示“速度”，而不是 ζ。$v=\zeta$ 的旋转部分为零，当且仅当它与旋转子空间正交；该子空间是由 iz 张成的实数空间。因此，若 $\operatorname{re}\langle\!\langle iz,v\rangle\!\rangle_{\mathbb{C}}=0$，则 v 的旋转部分为零。但 $\operatorname{re}\langle\!\langle iz,v\rangle\!\rangle_{\mathbb{C}} = -\operatorname{im}\langle\!\langle z,v\rangle\!\rangle_{\mathbb{C}}$。展开可得

$$\begin{aligned} -\operatorname{im}\langle\!\langle z,v\rangle\!\rangle_{\mathbb{C}} &= -\Sigma m_a \operatorname{im}(\bar{z}_a v_a)) \\ &= -\Sigma m_a z_a \wedge v_a \end{aligned}$$

其中，中间一行的楔积表示叉积的平面形式：$(x,y)\wedge(a,b) = \operatorname{im}(x-iy)(a+ib) = xb-ya$ 对于 $(x,y),(a,b)\in\mathbb{R}^2$。最后这个表达式可辨认为平面角动量的标准表达式：

$$\Sigma m_a z_a \wedge v_a = J(z,v).$$

QED

remark在z处，z 在旋转子空间上的正交投影为 $i\omega z$，其中标量$\omega = {}^{1}_{I\,z()}J(z,iz)$。

我们用方程（5）中引入的变量 r,θ,s 来改写角动量：$z = rke^{i\theta}(s,1)$，其中$k = {}^{1}_{\|\,s\,1\,(,)\|}$ 以及相应的速度

$$\zeta = \dot{z} = (\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\dot{k}}{k} + i\dot{\theta})z + re^{i\theta}k(\dot{s},0).$$

由此可得 $\langle\!\langle z,\zeta\rangle\!\rangle_{\mathbb{C}} = ((\frac{\dot{r}}{r}+\frac{\dot{k}}{k}+i\dot{\theta})r^2 + r^2k^2\langle\!\langle(s,1),(\dot{s},0)\rangle\!\rangle_{\mathbb{C}}$，并由$J(z,\zeta) = \operatorname{im}\langle\!\langle z,\zeta\rangle\!\rangle_{\mathbb{C}}$得到

$$J(z,\zeta) = r^2\dot{\theta} + r^2k^2\Omega(s,\dot{s}),\ \text{where } \Omega(s,\dot{s}) := \operatorname{im}\langle\!\langle(s,1),(\dot{s},0)\rangle\!\rangle_{\mathbb{C}}.$$

由此可得

$$J(z,\zeta) = 0 \iff \dot{\theta} = -\frac{\Omega(s,\dot{s})}{\|(s,1)\|^2} \tag{24}$$

这与方程（7）一致，其中角动量记为μ。

为便于后续讨论，我们将对原来的复线性坐标 z_i 应用线性变换，使厄米质量度量化为标准形式，从而简化这个最后的表达式。在这些新变量中（我们仍记作 z_i），有 $\langle\!\langle z、\ z\rangle\!\rangle_{\mathbb{C}} = \Sigma\bar{z}_i z_i$。

我们同样将 s_i 重新定义为新 z_i 与新 z_{n-1}的商。于是，对 s_i 作类似的重新定义后:

$$\frac{\Omega(s,\dot{s})}{\|(s,1)\|^2}=\frac{\operatorname{im}\Sigma\bar{s}_i\dot{s}_i}{\Sigma_{i=1}^{n-2}|s_i|^2+1}$$

下面给出本附录的主要结果。

命题 2. 对任意 $s_0\in\mathbb{CP}(n-2)$，都存在解析曲线 $c(t)$，它们在无限时间内收敛到 s_0，且其水平提升 $z(t)$ 到 $\mathbb{C}^{n-1}\setminus 0$具有无限自旋。

水平曲线的旋转部分均为零。该命题表明，旋转部分为零并不能保证自旋有限。

Proof. 我们可以取 s_0 使其仿射坐标为 $s_i=0$，因此可用齐次坐标为 $[0,\dots,0,1]$的点表示。任何投影到 $\mathbb{CP}(n-2)$ 后收敛到 s_0 的曲线，在仿射坐标中都可表示为曲线 $s(t)=(s_1(t)\dots,s_{n-2}(t))$，其中 $s_i(t)\to 0$ 为$t\to\infty$。在我们的坐标中，投影到这条曲线上的 $\mathbb{C}^{n-1}\setminus\{0\}$ 中的任意曲线都具有形式 $(r(t)\ \theta(t)\ s(t))$。当且仅当 θ 满足微分方程 (24) 时，该曲线才是水平的。我们对这个零角动量方程积分，得到

$$\theta(t)-\theta(0)=-\int_{s([0,t])}\frac{\Omega(s,ds)}{\|s\|^2+1}.$$

其中我们设定 $\Sigma_{i=1}^{n-2}|s_i|^2=\|s\|^2$。

为了得到引理所需的曲线 $c(t)$，我们只需改变第一个仿射坐标 s_1，也就是说，取如下形式的曲线$s(t)=(s_1(t)\ 0,\dots,0)$。对于这样的曲线，线积分中的被积函数为 $\frac{\operatorname{im}(\bar{s}_1ds_1)}{|s_1|^2+1}$。为证明之需，我们设定

$$s_1=re^{i\psi}$$

此时 $\operatorname{im}\bar{s}_1ds_1=r^2d\psi$ 且 $|s_1|^2+1=r^2+1$，因此我们的被积函数为

$$\frac{\Omega(s,ds)}{|s|^2+1}=\frac{r^2d\psi}{r^2+1}.$$

现在假设我们的曲线 $s_1(t)$ 位于单位圆盘 $r<1$ 内，因此 $1/(r^2+1)>1/2$；并且我们的曲线还在s_1 平面中逆时针方向螺旋趋向原点，因此 $\psi(t)$ 随着 t 单调递增。于是我们得到

$$\theta(t)<\theta(0)-\frac{1}{2}\int_0^t r(t)^2\dot{\psi}dt.$$

要构造具有无限自旋的曲线 $c(t)$，剩下的任务很简单：确保 $r(t)\to 0$ as $t\to\infty$，同时积分 $\int_0^t r(t)^2\dot{\psi}dt$ 发散至$+\infty$。作为一类例子，取 $r(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ and $\psi=ct$，其中 c 为任意正数。于是 $r^2\dot{\psi}=\frac{c}{t}$，且角度 $\theta(t)$ 对数式地发散至负无穷。证毕

References

[1] Albouy, A., Cabral, H., Santos, A., *Some problems on the classical n-body problem*, Cel.Mech.Dym.Ast., 113, (2012), 369–375. [2] Bressan, A., *Tutorial on the center manifold theorem*, in Springer LNM 1911, 双曲平衡律系统 (2003) pp. 327-44. [3] Chazy, J., *Sur certaines trajectoires du problème des n corps*, Bull. Astron., 35, (1918), 321–389.[4] Colding, T.H. and Minicozzi, W.P., *Lojasiewicz inequalities and applications*, 微分几何调查, 19 1, (2014). [5] Elbialy, M. S. *Collision Singularities in Celestial Mechanics*, SIAM J. Math. Anal, (1990), 21, no. 6, 1563-1593. [6] Fenichel, N., *Asymptotic stability with rate conditions*, Ind.Univ. Math.J.,23, 1109– 1137.[7] ¯Lojasiewicz, S., 关于解析函数梯度的轨迹，几何研讨班 1982-1983，博洛尼亚大学`a，(1984)，115–117。[8] McGehee, R. *Triple collision in the collinear three-body problem*, Inv. Math, 27, (1974), 191-227. [9] McGehee, R. *Singularities in classical celestial mechanics*, 国际数学家大会论文集，赫尔辛基 (1978), 827–834. [10] R. Montgomery, 次黎曼几何、其测地线及其应用概览，数学调查与专著, 第 91 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002。[11] Montgomery, R. *Isoholonomic Problems and Some Application*, Comm. Math. Phys., (1990 **128**, 565 592,), - Montgomery, R. [12] *The Three-Body Problem and the Shape Sphere*, Amer. Math. Monthly, v 122, no. 4, pp 299-321 , 2015; arXiv:1402.0841. [13] Saari, D. and Hulkower, N. *On the Manifolds of Total Collapse Orbits and of Completely Parabolic Orbits for the n-Body Problem* 1981 **41**, 27 43 , J. Diff. Eq., ( ), - . [14] Saari, D. *Symmetry in n-particle systems*, 哈密顿动力系统系列：Contemp. Math., (1988) 81, 23-42, AMS pub., 普罗维登斯，罗得岛州。[15] Siegel, C.L. and Moser, J., *Lectures on Celestial Mechanics*, 施普林格出版社，纽约，1971。[16] Yu, Xiang, *On the Problem of Infinite Spin in the Total Collision of the Planar N-Body Problem* 1911 10 48550 1911 11006 , arXiv: . 11006 [math.DS], https://doi.org/ . /arXiv. . . [17] Wiggins, S. *Normally Hyperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems*, 应用数学科学，第 105 卷, 施普林格出版社，纽约，1994。[18] Wintner, A., *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1941。

School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis MN 55455*Email address*: rick@math.umn.edu

Dept. of Mathematics, University of California, Santa Cruz, Santa CruzCA*Email address*: rmont@count.ucsc.edu