arXiv:2302.00218v3 [math.FA] 4 Mar 2024

迹类的投影常数

A. DEFANT、D. GALICER、M MANSILLA、M. MASTYŁO 和 S. MURO

摘要。我们研究带迹范数的 n 维希尔伯特空间上算子空间 $\mathscr{S}_1(n)$ 的投影常数。我们给出了 $\mathscr{S}_1(n)$ 的投影常数的积分公式；即 $\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{S}_1(n)\big) = n\int_{\mathscr{U}_n} |\mathrm{tr}(U)|dU$，其中积分是相对于 $\mathscr{U}_n$ 酉算子群上的 Haar 概率测度进行的。利用概率方法，我们推导出极限公式 $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{S}_1(n)\big)/n = \mathrm{p}\pi/2$。

引言

投影常数是巴拿赫空间及其局部理论中的一个基本概念。它起源于对巴拿赫空间可补子空间的研究。若 X 是巴拿赫空间 Y 的一个可补子空间，则 X 在 Y 中的相对投影常数定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}(X,Y) &= \inf\big\{\|P\| :\ P\in\mathscr{L}(Y,X),\ P|_X = Id_X\big\}\\ &= \inf\big\{c>0 :\ \forall\, T\in\mathscr{L}(X,Z)\ \ \exists\ \text{an extension}\ \widetilde{T}\in\mathscr{L}(Y,Z)\ \text{with}\ \|\widetilde{T}\|\le c\|T\|\big\},\end{aligned}$$

其中 Id_X 表示 X 上的恒等算子，而通常地，$\mathscr{L}(U,V)$ 表示从 U 到 V 的所有有界线性算子构成的巴拿赫空间，其范数为一致范数。下文中，$\mathscr{L}(U) := \mathscr{L}(U,U)$。这里采用约定 $\inf\varnothing = \infty$。

X 的（绝对）投影常数定义为

$$\boldsymbol{\lambda}(X) := \sup\ \boldsymbol{\lambda}(I(X),Y),$$

其中，上确界取遍所有巴拿赫空间 Y 及等距嵌入 $I : X \to Y$。

众所周知，任意巴拿赫空间 X 都能等距地嵌入 $\ell_\infty(\Gamma)$ 中，其中 Γ 是依赖于 X 的非空集合（通常，$\ell_\infty(\Gamma)$ 表示定义在 Γ 上的所有有界标量值函数所构成的巴拿赫空间），于是

$$\boldsymbol{\lambda}(X) = \boldsymbol{\lambda}(X,\ell_\infty(\Gamma)). \tag{1}$$

2020 数学主题分类。 主要分类：46B06、46B07、47B10。次要分类：43A15、33C55、46G25。关键词与短语。 投影常数、迹类算子、调和分析、巴拿赫空间中的局部不变量。第四位作者的研究得到波兰国家科学中心（NCN）资助，项目编号：2019/33/B/ST1/00165；第二、第三和第五位作者的研究得到 CONICET-PIP 11220200102336 和 PICT 2018-4250 资助。第五位作者的研究还得到 ING-586-UNR 资助。

因此，求 $\boldsymbol{\lambda}(X)$ 等价于求从 $\ell_\infty(\Gamma)$ 到其中 X 的一个等距副本上的极小投影的范数。

下面回顾几个与本文目的相关的具体情形——关于这些内容的详尽论述，请参阅优秀的专著 [6, 16, 19, 23, 24]。我们采用（局部）巴拿赫空间理论中的标准记号，并指出，本文中的所有巴拿赫空间均假定为复数域上的空间。按照惯例，$\mathscr{L}X$ 表示由 X 上的所有（有界）线性算子 T 构成的巴拿赫空间，并赋予算子范数。对于 $1 \le p \le \infty$ 和 $n \in \mathbb{N}$，符号 ℓ_p^n 表示赋予闵可夫斯基范数 $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$ 和 $\|x\|_\infty = \sup_{1\le k\le n} |x_k|$ 的巴拿赫空间，分别如此。

哈恩-巴拿赫定理的一个众所周知的简单应用表明：

$$\boldsymbol{\lambda}(\ell_\infty^n) = 1\,.$$

$\boldsymbol{\lambda}(\ell_2^n)$ 和 $\boldsymbol{\lambda}(\ell_1^n)$ 的精确值由 Grünbaum [8] 和 Rutovitz [22]计算得出：若 $d\sigma$ 表示球面 $\mathbb{S}_n(\mathbb{C})$ 上的归一化表面积测度，则

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\ell_2^n\big) = n\int_{\mathbb{S}_n} |x_1|\, d\sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{n!}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\,. \tag{2}$$

另一方面，若 dz 表示 $\mathbb{T}^n$ 在 $\mathbb{C}^n$ 中的特征边界上的归一化勒贝格测度，且 J_0 是由 $J_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \cos(t\cos\varphi)d\varphi$ 定义的零阶贝塞尔函数，则

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\ell_1^n\big) = \int_{\mathbb{T}^n} \Big|\sum_{k=1}^n z_k\Big|\, dz = \int_0^\infty \frac{1-J_0(t)^n}{t^2}dt\,. \tag{3}$$

Mo此外，König、Schütt 和 Tomczak-Jagermann [14] 证明，对于 $1 \le p \le 2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}\big(\ell_p^n\big)}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,. \tag{4}$$

现在转向这些结果的非交换类比。ℓ_∞^n 的算子类比是巴拿赫空间 $\mathscr{L}(\ell_2^n)$。根据 [7, 定理 5.6]，已知

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{L}(\ell_2^n)\big) = \frac{\pi}{4}\frac{n!^2}{\Gamma(n+\frac{1}{2})^2}\,.$$

希尔伯特-施密特算子空间 $\mathscr{H}_2(n)$ 在 ℓ_2^n 上是一个希尔伯特空间，由式（2）可推得

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_2(n)\big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{n^2!}{\Gamma(n^2+\frac{1}{2})},$$

这尤其导出了以下两个极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_2(n)\big)}{n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{L}(\ell_2^n)\big)}{n} = \frac{\pi}{4}\,. \tag{5}$$

有限维沙滕类是非交换泛函分析中各种自然对象的基本构件。回顾一下，$s_k(u)_{k=1}^n$ 算子 $u \in \mathscr{L}(\ell_2^n)$ 的奇异数由

算子 $|u| = (u^*u)^{1/2}$ 的特征值给出；根据定义，沙滕p类 $\mathscr{S}_p(n)$，$1 \le p \le \infty$ 是赋范于范数 $\|u\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |s_k(u)|^p\right)^{1/p}$ 的 ℓ_2^n 上所有算子构成的巴拿赫空间（对于$p = \infty$，这里取所有 $1 \le k \le n$ 中的最大值）。众所周知，等式 $\mathscr{S}_\infty(n) = \mathscr{L}(\ell_2^n)$ 和 $\mathscr{S}_2(n) = \mathscr{H}_2(n)$ 均等距成立。我们指出，空间 $\mathscr{S}_1(n)$ 通常称为迹类。

对于3在 $\mathscr{S}_1($$n$情形下的非交换类比，目前已知的最佳估计似乎是

$$\frac{n}{3} \le \boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{S}_1(n)\big) \le n. \tag{6}$$

下界由 Gordon和Lewis 于 [7], 证明，而上界则是著名的 Kadets-Snobar不等式[13]的推论。

正如（3）中所指出的，对于 $\boldsymbol{\lambda}\big(\ell_1^n\big)$有一个有用的积分公式。我们的主要目标是给出 $\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{S}_1(n)\big)$的非交换类比，并利用它求出（5）中缺失的极限。更确切地说，我们证明

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{S}_1(n)\big) = n \int_{\mathscr{U}_n} |\mathrm{tr}(U)|\, dU,$$

其中，$\mathrm{tr}(U)$ 表示矩阵 U 的迹，积分是关于酉群 $\mathscr{U}_n$ 上的 Haar 概率测度进行的；然后我们采用概率方法（在所谓的 Weingarten 演算框架内）推导出

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{S}_1(n)\big)}{n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

最后，我们用几句话介绍所用的技巧。计算投影常数，更一般地说，构造极小投影的一项重要工具归功于 Rudin [20]（另见 [24, 第三章 B 节]）。这项技巧有时称为 Rudin 的平均技术，例如可用来证明（2）以及（3）。

给定 Y 的一个等距子空间 X，我们概述这一策略中最重要的步骤，以求出相对投影常数 $\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$：选取一个可能的「自然候选」$\mathrm{P}: \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$，作为极小投影；找出一个作用于 $\mathscr{L}(\mathrm{Y})$ 的拓扑群 G，也就是说，每个 $g \in \mathrm{G}$ 都定义了算子 T_g，并以「相容的方式」作用于 Y；证明 P 实际上是唯一一个与所有算子 T_g（$g \in \mathrm{G}$）可交换的投影；考虑任意一个投影 $\mathrm{Q}: \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$，并对 G 上的 Haar测度取平均，得到所有算子 $\mathrm{T}_g^{-1}\mathrm{QT}_g$ 的平均值。这个平均值与所有算子 T_g（$g \in \mathrm{G}$）可交换，因此必定与 P 重合；用一个简单的凸性论证证明 $\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \|\mathrm{P}: \mathrm{Y} \to \mathrm{X}\|$；分析 $\|\mathrm{P}: \mathrm{Y} \to \mathrm{X}\|$，以便改进 $\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ 的公式。

因此，若此处 $Y = \ell_\infty(\Gamma)$，那么 (1) 表明，这些步骤可能导出 $\boldsymbol{\lambda}(X)$ 的公式或估计。让我们看看，我们所追求的对象 $\mathscr{S}_1(n)$ 如何自然地嵌入某个合理的 $\ell_\infty(\Gamma)$ 中。众所周知，(ℓ_2^n) 与 $\mathscr{S}_1(n)$ 之间存在迹对偶性，也就是说，映射

$$\mathscr{S}_1(n) \to \mathscr{L}(\ell_2^n)^*, \quad u \mapsto [v \mapsto \operatorname{tr}(uv)] \tag{7}$$

定义了一个线性等距双射。进一步而言，我们可以将此映射与限制映射 $\mathscr{L}(\ell_2^n)^* \to \mathrm{C}(\mathscr{U}_n)$, $\mathrm{u} \mapsto \mathrm{u}|_{\mathscr{U}_n}$ 复合，其中 $\mathscr{U}_n$ 表示所有酉 $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ 矩阵构成的群；事实上，这将得到一个等距嵌入 $\mathscr{S}_1(\mathrm{n}) \to \mathrm{C}(\mathscr{U}_n)$（见命题 2.11）。因此，接下来我们的目标是分析相对投影常数 $\boldsymbol{\lambda}(\mathscr{S}_1(\mathrm{n}), \mathrm{C}(\mathscr{U}_n))$。

为了应用 Rudin 的平均化技巧，我们需要在酉群上发展出我们称之为“酉调和”的理论 $\mathscr{U}_n$，粗略地说，它们是在有限多个“矩阵变量”中定义的调和多项式 z 和 $\bar{z}$，这些变量取自酉群 $\mathscr{U}_n$。这一切都深受经典球谐函数理论的启发（例如参见[21]），也就是研究有限多个复变量中的调和多项式 z 和 $\bar{z}$ 在 n 维欧几里得球面 $\mathbb{S}_n$ 上的情形。第 1 节将介绍酉调和及其在 $C(\mathscr{U}_n)$ 中的稠密性。1。

在第2 节中，我们表述并证明主要定理2.1。尽管本文唯一关注的就是这一点——对定理2.1 的证明进行细致构建——但这表明，其中某些部分可以推广到定理2.6所给出的更抽象版本。

1. 酉调和及其稠密性

我们需要将球面 $\mathbb{S}_n$ 上的球谐函数理论的若干方面（例如[21, 第 12] 章和 [1, 第 2]章中所阐述的内容）推广到我们称为酉群 $\mathscr{U}_n$ 上的酉调和。

1.1. 酉矩阵。记 M_n 为所有 $n \times n$ 矩阵 $Z = (z_{k\ell})$ 的空间，其元素来自 $\mathbb{C}$。由所有酉 $n \times n$ 矩阵 $U = (u_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ 构成的群，赋予由 $\mathscr{L}(\ell_2^n)$ 诱导的拓扑后，成为一个非阿贝尔紧群。它是幺模的；我们将函数 $f \in L_2(\mathscr{U}_n)$ 关于 $\mathscr{U}_n$ 上的Haar测度的积分记为

$$\int_{\mathscr{U}_n} f(U)\, dU.$$

这类积分构成所谓的 Weingarten 演算，在随机矩阵理论、数学物理和量子信息理论中具有极其重要的意义（参见例如 [4, 15]）。

基本上，我们只需要 Weingarten 演算中两个具体积分的精确值。第一个是

$$\int_{\mathcal{U}_n} u_{i,j}\overline{u_{k,\ell}}\,dU = \frac{1}{n}\delta_{i,k}\delta_{j,\ell} \tag{8}$$

对于所有可能的 $1 \le i$、j、k、$\ell \le n$，以及第二个

$$\int_{\mathcal{U}_n} |\mathrm{tr}(AU)|^2\,dU = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(AA^*) \tag{9}$$

对于每个 $A \in M_n$（例如参见 [3, 第 16], [4], 页，或 [25, 推论 3。6]）

每个 $T\colon M_n \to M_n$ 使 $\mathcal{U}_n$ 保持不变的算子（即 $T\,\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_n$），定义了一个复合算子

$$C_T\colon L_2(\mathcal{U}_n) \to L_2(\mathcal{U}_n), \quad f \mapsto f \circ T.$$

事实上，有两个这样的算子 T，使 $\mathcal{U}_n$ 保持不变，特别值得关注——关于 $V \in \mathcal{U}_n$ 的左乘算子和右乘算子 L_V 及 R_V 分别为

$$L_V(U) := VU \quad \text{and} \quad R_V(U) := UV, \quad U \in M_n(\mathbb{C}^n).$$

若子空间 $S \subset L_2(\mathcal{U}_n)$ 在所有可能的复合算子 C_{L_V} 和 C_{R_V}（其中 $V \in \mathcal{U}_n$）作用下均保持不变，则称其为 $\mathcal{U}_n$- 不变。

对于任意闭子空间 $S \subset L_2(\mathcal{U}_n)$，我们将 $\pi_S\colon L_2(\mathcal{U}_n) \to L_2(\mathcal{U}_n)$ 记为到 $L_2(\mathcal{U}_n)$ 上的正交投影，其值域为 S。

1.2. 球谐函数。 符号 $\mathscr{P}(\mathbb{R}^N)$ 表示所有形如以下形式的多项式 $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$

$$f(x) = \sum_{\alpha \in J} c_\alpha\, x^\alpha, \tag{10}$$

其中 $J \subset \mathbb{N}_0^N$ 是有限的，且 $(c_\alpha)_{\alpha\in J}$ 是复系数。此外，给定 $k \in \mathbb{N}_0$，我们将 $\mathscr{P}_k(\mathbb{R}^N)$ 记为所有 k-齐次多项式 f 组成的集合，这类多项式即 f 在 (10) 中有如下形式的表示，其中 $|\alpha| := \sum \alpha_i = k$ 对每个 $\alpha \in J$ 均成立。

注意，在 (10) 中，对于每个 $c_\alpha = \partial^\alpha f(0)/\alpha!$ $\alpha \in J$，这尤其表明每个 $f \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^N)$ 的系数具有唯一性（下文中我们常将 $c_\alpha = c_\alpha(f)$ 记作）。一个特别的推论是，线性空间 $\mathscr{P}(\mathbb{R}^N)$ 带有如下自然内积：

$$\langle f, g\rangle_{\mathscr{P}} := \sum_\alpha \alpha!\, c_\alpha(f)\overline{c_\alpha(g)}, \quad f, g \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^N). \tag{11}$$

这个标量积有一种实用的改写形式。为此，首先注意到，每个 $f \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^N)$ 都定义了微分算子 $f(D)\colon \mathscr{P}(\mathbb{R}^N) \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^N)$，其定义为

$$f(D)\,g := \sum_\alpha c_\alpha(f)\partial^\alpha g, \quad g \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^N).$$

接着，不难验证，对于任意$f,g \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^N)$，都有如下公式

$$\langle f, g\rangle_{\mathscr{P}} = \left[f(D)\overline{g}\right](0). \tag{12}$$

由下式定义的多项式 $\mathbf{t} \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^N)$

$$\mathbf{t}(x) := \|x\|_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{13}$$

此时这一点尤为重要，因为

$$\Delta := \mathbf{t}(D) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \colon \mathscr{P}(\mathbb{R}^N) \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^N)$$

是拉普拉斯算子。若多项式 $f \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^N)$ 满足 $\Delta f = 0$，则称其为调和多项式。我们用 $\mathscr{H}(\mathbb{R}^N)$ 表示 $\mathscr{P}(\mathbb{R}^N)$ 中所有调和多项式构成的子空间，用 $\mathscr{H}_k(\mathbb{R}^N)$ 表示所有 k-齐次调和多项式构成的子空间。对于每个 $N \in \mathbb{N}$，有

$$\mathscr{H}(\mathbb{R}^N) = \operatorname{span}_k \mathscr{H}_k(\mathbb{R}^N). \tag{14}$$

为证明这一点，固定 $\mathrm{f} = \sum_{\alpha \in \mathrm{J\,c}} {}_{\alpha}(\mathrm{f})\,\mathrm{x}^{\alpha} \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^N)$，其次数 $\mathrm{d} = \max_{\alpha \in J} |\alpha|$。对于每个 $\mathrm{k} \in \{0, 1, \ldots, \mathrm{d}\}$，令 $\mathrm{f}_k = \sum_{|\alpha|=\mathrm{k\,c}} {}_{\alpha}(\mathrm{f})\,\mathrm{x}^{\alpha}$ 表示 f 的 k- 齐次部分。由于 $\mathrm{f} = \sum^{d}\mathrm{k}=0\,\mathrm{f}_k$，只需证明每个 f_k 都是调和的。显然，$\sum^{d}\mathrm{k}=0 \triangle \mathrm{f}_k = \triangle\,\mathrm{f} = 0$。由于所有 f_k 的支撑集彼此不相交（对应不同的多重指标集合），我们得出，对于每个 $0 \le \mathrm{k} \le \mathrm{d}$，都有 $\triangle\,\mathrm{f}_k = 0$。

后续内容大多基于以下这一众所周知的分解：$\mathscr{P}_k(\mathbb{R}^N)$ 分解为调和子空间（例如，参见 [1, 定理 2。18]）。为求完整起见，我们给出证明。

命题 1.1。对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$ 和 $N \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{P}_k(\mathbb{R}^N) = \mathscr{H}_k(\mathbb{R}^N) \oplus \mathbf{t} \cdot \mathscr{H}_{k-2}(\mathbb{R}^N) \oplus \mathbf{t}^2 \cdot \mathscr{H}_{k-4}(\mathbb{R}^N) \oplus \ldots,$$

其中，关于 (12)中的内积所取的正交和，在下标达到1 或 0时终止。

证明。给定 $\mathrm{g} \in \mathscr{P}_{k-2}(\mathbb{R}^N)$，对所有 $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^N$，令 $\mathrm{h(x)} := \mathrm{t(x)g\,(x)}$。由于 $\mathrm{t(D)} = \Delta$，这意味着 $\mathrm{h(D)} = \Delta \circ \mathrm{g\,(D)} = \mathrm{g\,(D)} \circ \Delta$。显然，若此时 $\mathrm{f} \in \mathscr{P}_k\big(\mathbb{R}^N\big)$，则由 (12)

$$\langle h, f\rangle_{\mathscr{P}} = \left[h(D)\overline{f}\right](0) = \left[g(D)\left(\Delta\overline{f}\right)\right](0) = \langle g, \Delta f\rangle_{\mathscr{P}}.$$

因此，对于每个 $g \in \mathscr{P}_{k-2}(\mathbb{R}^N)$，$f \perp \mathbf{t}$g等价于 $\Delta f \perp g$，对于每个 $g \in \mathscr{P}_{k-2}(\mathbb{R}^N)$，故等价于 $f \in \mathscr{H}_k(\mathbb{R}^N)$。由此可得

$$\mathscr{P}_k(\mathbb{R}^N) = \mathscr{H}_k(\mathbb{R}^N) \oplus \mathbf{t} \cdot \mathscr{P}_{k-2}(\mathbb{R}^N).$$

证明通过对 $\mathscr{H}_{k-2}(\mathbb{R}^N)$、$\mathscr{H}_{k-4}(\mathbb{R}^N)$ 等重复这一过程而完成。 □

我们用 $\mathbb{S}^{\mathbb{R}}{}_N$表示实希尔伯特空间 $\ell_2^N(\mathbb{R})$ 中的球面。我们用 $\mathscr{P}(\mathbb{S}^{\mathbb{R}}{}_N)$ 表示多项式 $f \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^N)$ 的所有限制 $f|_{\mathbb{S}^{\mathbb{R}}{}_N}$所构成的线性空间；当我们只考虑 k 次齐次多项式的限制时，则用 $\mathscr{P}_k(\mathbb{S}^{\mathbb{R}}{}_N)$ 表示。

将复数域上的调和多项式（即 $\mathscr{H}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ 中的多项式）限制在球面 $\mathbb{S}^{\mathbb{R}}{}_N$上的所有函数记为 $\mathscr{H}(\mathbb{S}^{\mathbb{R}}{}_N)$，这类多项式称为球谐函数。类似地，我们用 $\mathscr{H}_k(\mathbb{S}^{\mathbb{R}}{}_N)$ 表示由所有限制在 $\mathbb{S}^{\mathbb{R}}{}_N$上的 k-齐次多项式组成的空间。在 $\mathbb{S}^{\mathbb{R}}{}_N$上赋予上确界范数后，空间 $\mathscr{H}(\mathbb{S}^{\mathbb{R}}{}_N)$ 和 $\mathscr{H}_k(\mathbb{S}^{\mathbb{R}}{}_N)$ 都构成 $C(\mathbb{S}^{\mathbb{R}}{}_N)$ 的子空间。

一个在此处并不需要用到的重要事实是，空间 $\mathscr{H}_k(\mathbb{S}^{\mathbb{R}}{}_N)$ 在 $L_2(\mathbb{S}^{\mathbb{R}}{}_N)$ 中两两正交（参见例如 [1, 推论 2。15]）。

1.3. 酉调和。 更进一步地，我们将实球面 $\mathbb{S}^{\mathbb{R}}{}_N$上的球谐函数概念扩展到酉群 $\mathscr{U}_n$ 上，并将其称为酉调和。

回顾一下，M_n 表示所有元素取自 $\mathbb{C}$的$n \times n$-矩阵$Z = (z_{k\ell})$所构成的空间。此类元素取自 $\mathbb{N}_0$ 的矩阵子集 $\alpha = (\alpha_{k\ell})$记作$M_n(\mathbb{N}_0)$。对于$Z \in M_n$ 和 $\alpha = (\alpha_{k\ell}) \in M_n(\mathbb{N}_0)$，定义

$$Z^\alpha = \prod_{k,\ell=1}^{n} z_{k\ell}^{\alpha_{k\ell}}.$$

我们通过如下双射，以标准方式将M_n 与 $\mathbb{R}^{2n^2}$ 对应起来：

$$\mathbf{I}_n \colon M_n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n^2}, \tag{15}$$

该映射将每个矩阵$Z = (z_{k\ell})_{k\ell} = (x_{k\ell} + i\, y_{k\ell})_{k\ell} \in M_n$对应到元素

$$\big(x_{11}, y_{11}, \ldots, x_{1n}, y_{1n}, x_{21}, y_{21}, \ldots, x_{2n}, y_{2n}, \cdots, x_{n1}, y_{n1}, \ldots, x_{nn}, y_{nn}\big) \in \mathbb{R}^{2n^2}.$$

于是，$\mathfrak{P}(M_n)$表示由所有多项式$f = g \circ \mathbf{I}_n$构成的线性空间，其中$g \in \mathscr{P}\big(\mathbb{R}^{2n^2}\big)$。因此，根据定义，该映射

$$\mathscr{P}\big(\mathbb{R}^{2n^2}\big) \;=\; \mathfrak{P}(M_n), \quad g \mapsto g \circ \mathbf{I}_n \tag{16}$$

将两个空间视为向量空间并对应起来。

下面列举几个有用的事实。首先请注意，若$f = g \circ \mathbf{I}_n \in \mathfrak{P}(M_n)$，其中$g \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^{2n^2})$，则

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_{ij} \partial \overline{z}_{ij}} = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial^2 g}{\partial x_{ij}^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y_{ij}^2} \Big),$$

一个公式　可直接由 $\partial_{z_{ij}} = \frac{1}{2}(\partial_{x_{ij}} - i\partial_{y_{ij}})$ 和 $\partial_{\overline{z}_{ij}} = \frac{1}{2}(\partial_{x_{ij}} + i\partial_{y_{ij}})$ 的定义得到　　.

其次　　y，函数 $f\colon M_n \to \mathbb{C}$ 属于 $\mathfrak{P}(M_n)$ 当且仅当它有一个表示　　n

$$f(Z) = \sum_{(\alpha,\beta)\in J} c_{(\alpha,\beta)}\, Z^\alpha \overline{Z}^\beta, \quad Z \in M_n, \tag{17}$$

其中 J是 $M_n(\mathbb{N}_0) \times M_n(\mathbb{N}_0)$ 中的一个有限指标集，并且 $c_{(\alpha,\beta)} \in \mathbb{C}$, $(\alpha,\beta) \in J$。此外，在这种情况下，这个表示是唯一的。

确实，若 f 由 (17) 给出，则 $g = f \circ I_n^{-1} \in \mathscr{P}\big(\mathbb{R}^{2n^2}\big)$ 且 $f = g \circ I_n \in \mathfrak{P}(M_n)$。反过来，若 $f = g \circ I_n \in \mathfrak{P}(M_n)$，其中 $g = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^{2n^2})$，则通过代换 $\mathrm{Re}\, z_{ij} = \frac{1}{2}(z_{ij} + z_{ij})$ 和 $\mathrm{Im}\, z_{ij} = \frac{1}{2}(z_{ij} - z_{ij})$，即可轻易得到所需的表示。为证明 (17) 中表示的唯一性，注意到若 $f = 0$，则给定 $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$，对微分算子

$$\partial_{z_{11}}^{\alpha_{11}} \dots \partial_{z_{1n}}^{\alpha_{1n}} \partial_{\overline{z}_{11}}^{\beta_{11}} \dots \partial_{\overline{z}_{1n}}^{\beta_{1n}} \dots\dots \partial_{z_{n1}}^{\alpha_{n1}} \dots \partial_{z_{n1}}^{\alpha_{nn}} \partial_{\overline{z}_{n1}}^{\beta_{n1}} \dots \partial_{\overline{z}_{nn}}^{\beta_{nn}}$$

作用于 f（并在零点处求值），可得 $c_{(\alpha,\beta)} = 0$。

我们再次利用从$g \mapsto g \circ \mathbf{I}_n$ 式（15）中的对应关系来定义这些空间

$$\mathfrak{P}_k(M_n) := \mathscr{P}_k\big(\mathbb{R}^{2n^2}\big), \quad \mathfrak{H}_k(M_n) := \mathscr{H}_k\big(\mathbb{R}^{2n^2}\big) \quad \text{and} \quad \mathfrak{H}(M_n) := \mathscr{H}\big(\mathbb{R}^{2n^2}\big). \tag{18}$$

下面的引理对 $\mathfrak{P}_k(M_n)$ 的元素作出了简单描述 .

引理 1.2. 设 $f \in \mathfrak{P}(M_n)$ 且 $k \in \mathbb{N}$。那么，$f \in \mathfrak{P}_k(M_n)$ 当且仅当 $f(\lambda Z) = \lambda^k f(Z)$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 以及 $Z \in M_n$ 均成立。

证明。对于 $f \in \mathfrak{P}_k(M_n)$，存在 $g \in \mathscr{P}_k\big(\mathbb{R}^{2n^2}\big)$ 使得 $f = g \circ I_n$。显然，对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 以及 $Z \in M_n$，都有 $f(\lambda Z) = \lambda^k f(Z)$。反过来，假设 f 按命题中的含义是 k-齐次的。由于 $f \in \mathfrak{P}(M_n)$，存在一个有限多项式 $g(x) = \sum_\alpha c_\alpha(g)\, x^\alpha$，$x \in \mathbb{R}^{2n^2}$，使得 $f = g \circ I_n$。由于 $g = f \circ I_n^{-1}$，可知对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 以及 $x \in \mathbb{R}^{2n^2}$，都有 $g(\lambda x) = \lambda^k g(x)$。但根据系数 $c_\alpha(g)$ 的唯一性，这必然意味着只有当 $|\alpha| = k$ 时，$c_\alpha(g) \neq 0$，因此所求即为 $g \in \mathscr{P}_k(\mathbb{R}^{2n^2})$。□

显然，

$$\mathfrak{P}(M_n) = \mathrm{span}_k \mathfrak{P}_k(M_n) \tag{19}$$

（考虑定义这些空间的 $\mathbb{R}^{2n^2}$ 上的多项式），较不显然地（由（14）可立即推出）我们有

$$\mathfrak{H}(M_n) = \mathrm{span}_k \mathfrak{H}_k(M_n). \tag{20}$$

由下式给出的多项式 $\mathbf{t}_{M_n} \in \mathfrak{P}_2\big(M_n\big)$

$$\mathbf{t}_{M_n}(Z) := \mathrm{tr}(ZZ^*), \quad Z \in M_n,$$

其中 $\mathrm{tr}\colon M_n \to \mathbb{C}$ 表示迹，具有特殊的重要性。很容易看出，在由（16）给出的对应关系下，多项式 $\mathbf{t} \in \mathscr{P}_2\big(\mathbb{R}^{2n^2}\big)$（再参见（13））的像为 $\mathbf{t}_{M_n} \in \mathfrak{P}_2\big(M_n\big)$，即

$$\mathbf{t}_{M_n}(Z) = \mathbf{t}\big(\mathbf{I}_n Z\big), \quad Z \in M_n. \tag{21}$$

再次回顾，$\mathscr{P}(\mathbb{R}^{2n^2})$ 继承了（11）中的自然内积，而该内积再通过（16）中的对应关系转移为 $\mathfrak{P}(M_n)$ 上的自然内积，即

$$\langle f,g\rangle_{\mathscr{P}} := \langle f\circ \mathbf{I}_n^{-1}, g\circ \mathbf{I}_n^{-1}\rangle_{\mathscr{P}},\quad f,g\in\mathfrak{P}(M_n). \tag{22}$$

利用（18）和（21），由命题1.1 可推出其矩阵类比，这在后文将大有用处。

命题 1.3。对于所有的 $k\in\mathbb{N}_0$ 和 $n\in\mathbb{N}$

$$\mathfrak{P}_k(M_n)=\mathfrak{H}_k(M_n)\oplus \mathbf{t}_{M_n}\cdot\mathfrak{H}_{k-2}(M_n)\oplus \mathbf{t}_{M_n}^2\cdot\mathfrak{H}_{k-4}(M_n)\oplus\ldots,$$

其中，正交和的最后一项是偶数 k 时 $\mathbf{t}^{k/2}M_n$ 的张成空间，而奇数 k 时是 $\mathbf{t}^{(k-1)/2}M_n\cdot\mathfrak{H}_1(M_n)$ 的张成空间。

我们还需要两个引理。

引理 1.4。设 $f\in\mathfrak{H}(M_n)$ 且 $U\in\mathscr{U}_n$。则 $f\circ L_U\in\mathfrak{H}(M_n)$。此外，若 $f\in\mathfrak{H}_k(M_n)$，则 $f\circ L_U\in\mathfrak{H}_k(M_n)$ 也成立。

证明。回顾一个众所周知的事实：对于每个调和函数 $F\colon\ \mathbb{C}^{n^2}\to\mathbb{C}$ 以及每个 $W\in\mathscr{U}_{n^2}$，都有 $\triangle(F\circ\Phi_W)=\triangle F\circ\Phi_W$，其中 $\Phi_W z=Wz$ 对于 $z\in\mathbb{C}^{n^2}$ 成立。现在以自然方式将 M_n 和 $\mathbb{C}^{n^2}$ 对应起来，

$$\mathbf{J}_n(Z)=\big(z_{11},\ldots,z_{1n},z_{21}\ldots,z_{2n},\cdots,z_{n1},\ldots,z_{nn}\big),\quad Z\in M_n, \tag{23}$$

并定义 $g=f\circ\mathbf{J}_n^{-1}\colon\ \mathbb{C}^{n^2}\to\mathbb{C}$。显然 $\triangle g=0$，此外，经过简单计算可得

$$f\circ L_U=g\circ\Phi_{U\otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}}\circ\mathbf{J}_n.$$

由于 $U\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}\in\mathscr{U}_{n^2}$ 是酉的，因此

$$\triangle(f\circ L_U)=\triangle(g\circ\Phi_{U\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}})=\triangle g\circ\Phi_{U\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}}=0.$$

对于第二个结论，注意若 $\mathrm{f}\in\mathfrak{H}_k(\mathrm{M}n)$，则由第一个结论可知 $\mathrm{f}\circ\mathrm{L}_U\in\mathfrak{H}(\mathrm{M}n)$。但是对于所有 $\mathrm{Z}\in\mathrm{M}n$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}$，都有 $\mathrm{f}\circ\mathrm{L}_U(\lambda\mathrm{Z})=\lambda\mathrm{f}\circ\mathrm{L}_U(\mathrm{Z})$，因此由引理 1.2可得所述结论。□

对于 p、$q\in\mathbb{N}_0$，令 $\mathfrak{H}_{(p,q)}(M_n)\subset\mathfrak{H}(M_n)$ 表示所有调和多项式构成的子空间，这些调和多项式在 $Z=(z_{ij})$ 中是 p-齐次的，并且在 $Z=(z_{ij})$ 中是 q-齐次的；也就是说，所有形如以下形式的多项式 $f\in\mathfrak{H}(M_n)$

$$f(Z)=\sum_{|\alpha|=p,|\beta|=q} c_{(\alpha,\beta)}\,Z^{\alpha}\overline{Z}^{\beta},\quad Z\in M_n. \tag{24}$$

由引理 1.2 我们立即得到

$$\mathfrak{H}_{(p,q)}(M_n)\subset\mathfrak{H}_{p+q}(M_n). \tag{25}$$

下面的结果对我们的目的至关重要（另见引理 1.7）。

引理 1.5。 对于所有 $f \in \mathfrak{H}_{(p,q)}(M_n)$ 和 $U \in \mathcal{U}_n$，都有

$$f \circ L_U \in \mathfrak{H}_{(p,q)}(M_n) \qquad \text{and} \qquad f \circ R_U \in \mathfrak{H}_{(p,q)}(M_n).$$

此外，

$$\mathfrak{H}(M_n) = span_{p,q}\mathfrak{H}_{(p,q)}(M_n). \tag{26}$$

证明。 取 f 如（24）中的表示，我们有

$$f \circ L_U(Z) = \sum_{|\alpha|=p,|\beta|=q} c_{(\alpha,\beta)}\,(UZ)^{\alpha}(\overline{UZ})^{\beta}, \quad Z \in M_n.$$

现在，对于每个 $1 \le i, j \le n$，我们对 $(\sum_\ell u_{i\ell} z^{\ell j})^{\alpha_{ij}}$ 使用多项式定理，得到

$$(UZ)^{\alpha}(\overline{UZ})^{\beta} = \sum_{|\gamma|\le p,|\zeta|\le q} d_{(\gamma,\delta)}\, Z^{\gamma}\overline{Z}^{\zeta}, \quad Z = (z_{k\ell})_{k,\ell} \in M_n.$$

综上，我们得出 $f \circ L_U$ 具有一个表示

$$f \circ L_U(Z) = \sum_{|\eta|\le p,|\sigma|\le q} e_{(\eta,\sigma)}\, Z^{\eta}\overline{Z}^{\sigma}, \quad Z \in M_n.$$

另一方面，由式（25）和引理 1.4，可得 $f \circ L_U \in \mathfrak{H}_{p+q}(M_n)$，因此对于所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 以及 $Z \in M_n$，均有

$$\sum_{|\eta|\le p,|\sigma|\le q} e_{(\eta,\sigma)}\,\lambda^{|\eta|+|\sigma|}\, Z^{\eta}\overline{Z}^{\sigma} = (f \circ L_U)(\lambda Z) = \lambda^{p+q}(f \circ L_U)(Z) = \sum_{|\eta|\le p,|\sigma|\le q} c_{(\eta,\sigma)}\,\lambda^{p+q}\, Z^{\eta}\overline{Z}^{\sigma}.$$

代入 $Z = \mathrm{id} \in M_n$，可知 $e_{(\eta,\sigma)} \neq 0$ 当且仅当 $|\eta| + |\sigma| = p + q$；又由于 $|\eta| \le p$ 且 $|\sigma| \le q$，这只有在 $|\eta| = p$ 且 $|\sigma| = q$ 时才可能。由此即得所需结论：$f \circ L_U \in \mathfrak{H}_{(p,q)}(M_n)$。

等式（26）由式（20）推出，因为容易看出 $\mathfrak{H}_k(M_n) =$ 张成空间$_{p+q=k}\mathfrak{H}_{(p,q)}(M_n)$（另见例如 [21，命题 12.2。2]）。

为证明 f ∘ $R_U \in \mathfrak{H}_{(p,q)}(M_n)$，定义 f *(Z) = f (Z *)，其中 Z ∈ M_n。由于映射 $\ell_2^{n^2} \to \ell_2^{n^2}$，Z ↦ Z * 是酉的（它是一个等距映射），函数 f * 是调和函数。现在，根据式（24）中 f 的表示形式可知，f * ∈ $\mathfrak{H}_{(q,p)}(M_n)$。由已证结论可得 f * ∘ $L_{U^*} \in \mathfrak{H}_{(q,p)}(M_n)$。但对于 Z ∈ M_n

$$f \circ R_U(Z) = f(ZU) = f((U^*Z^*)^*) = f^*(U^*Z^*) = f^* \circ L_{U^*}(Z^*) = (f^* \circ L_{U^*})^*(Z),$$

因此 $f \circ R_U = (f^* \circ L_{U^*})^* \in \mathfrak{H}_{(p,q)}(M_n)$. □

1.4. **复数域 $C(\mathcal{U}_n)$的不变子空间**。用 $\mathfrak{P}(\mathcal{U}_n)$ 和 $\mathfrak{P}_k(\mathcal{U}_n)$ 分别表示多项式 $f \in \mathfrak{P}(Mn)$ 和 $f \in \mathfrak{P}_k(Mn)$ 在 $f|_{\mathcal{U}_n}$: $\mathcal{U}_n \to \mathbb{C}$ 上的所有限制所构成的线性空间。

同样，对于来自 $\mathfrak{H}(Mn)$ 和 $\mathfrak{H}_k(Mn)$ 的调和多项式在 $\mathcal{U}_n$ 上的所有限制，我们分别记作$\mathfrak{H}(\mathcal{U}_n)$ 和 $\mathfrak{H}_k(\mathcal{U}_n)$，并将其中的元素称为酉调和。所有这些都是 复数域$(\mathcal{U}_n)$ 的重要子空间。

引理 1.6。对于每个 k

$$\mathfrak{P}_k(\mathcal{U}_n) = span_{\ell \le k} \mathfrak{H}_\ell(\mathcal{U}_n), \tag{27}$$

and

$$\mathfrak{P}(\mathcal{U}_n) = span_k \mathfrak{P}_k(\mathcal{U}_n) = span_\ell \mathfrak{H}_\ell(\mathcal{U}_n) = \mathfrak{H}(\mathcal{U}_n). \tag{28}$$

证明。 命题 1.3 以及函数 $\mathbf{t}^{M_n} = n$ 在 $\mathcal{U}_n$ 推出了 (27)。为证明 (28，注意第一个等式由 (19) 得出，第二个由 (27) 得出，最后一个由 (20) 得出。 □

此外，对于 p、$q \in \mathbb{N}_0$，我们将 $\mathfrak{H}_{(p,q)}(\mathcal{U}_n$记作函数在 $\mathcal{U}_n$上的所有限制，其中函数属于 $\mathfrak{H}_{(p,q)}(Mn)$。注意，函数 f: $\mathcal{U}_n \to \mathbb{C}$ 属于 $\mathfrak{H}_{(p,q)}(\mathcal{U}_n$，当且仅当它在 $\mathcal{U}_n$上具有类似于 (24) 的表示。关于这些 复数域$(\mathcal{U}_n$子空间的一切必要信息都包含在下面这个引理中，它是引理 1.5的直接推论。

引理 1.7。 每个空间 $\mathfrak{H}_{(p,q)}(\mathcal{U}_n)$ 都是 $C(\mathcal{U}_n)$的 $\mathcal{U}_n$-不变子空间，也就是说，对于所有 $f \in \mathfrak{H}_{(p,q)}(\mathcal{U}_n)$ 和 $U \in \mathcal{U}_n$，都有 $f \circ L_U, f \circ R_U \in \mathfrak{H}_{(p,q)}(\mathcal{U}_n)$。此外，

$$\mathfrak{H}(\mathcal{U}_n) = span_{p,q} \mathfrak{H}_{(p,q)}(\mathcal{U}_n). \tag{29}$$

最后，我们给出以下对本文至关重要的稠密性结果。

定理 1.8。 $\mathfrak{H}(\mathcal{U}_n)$ 在 $C(\mathcal{U}_n)$中稠密。特别地，所有 $\mathfrak{H}_k(\mathcal{U}_n)$ 的并集的张成空间，以及所有 $\mathfrak{H}_{(p,q)}(\mathcal{U}_n)$ 的并集的张成空间，都在 $C(\mathcal{U}_n)$中稠密。

证明。 首先注意到 $\mathfrak{P}(\mathcal{U}_n)$ 是 $C(\mathcal{U}_n)$ 的子代数，且在共轭运算下封闭；所有坐标函数 e^{ij} 能够分离 $\mathcal{U}_n$ 中的点。因此，根据 Stone-Weierstrass 定理， $\mathfrak{P}(\mathcal{U}_n)$ 在 $C(\mathcal{U}_n)$ 中稠密。其余部分由（ 28 ）和（ 29）得出。 □

注 1.9。 球谐函数与酉调和之间的一个重要区别是，对于球面的情形，相应的空间 $\mathfrak{H}_{(p,q)}(\mathbb{S}_n^{\mathbb{C}})$ 在 $L_2(\mathbb{S}_n^{\mathbb{C}})$ 中彼此正交（见 [21, 定理 12.2。3]）。但对于 $\mathfrak{H}_{(p,q)}(\mathcal{U}_n$ 的子空间 $L^2(\mathcal{U}_n)$，这一点不再成立。为了说明这一点

举例来说，取 $f \in \mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathcal{U}_n)$ 和 $g \in \mathfrak{H}_{(2,1)}(\mathcal{U}_n)$，定义为 $f(U) = u_{1,1}$ 以及 $g(U) = u_{2,2}u_{1,2}\overline{u_{2,1}}$。那么（例如，见 [11, 第 4 节。2]）

$$\langle f, g\rangle_{L_2} = \int_{\mathcal{U}_n} u_{1,1}u_{2,2}\overline{u_{1,2}u_{2,1}}\,dU = -\frac{1}{(n-1)n(n+1)}. \tag{30}$$

另一方面，利用 $\mathcal{U}_n$ 上 Haar 测度的基本性质，不难证明

$$\mathfrak{H}_{(p,q)}(\mathcal{U}_n) \perp \mathfrak{H}_{(p',q')}(\mathcal{U}_n) \quad \text{whenever} \quad p+q = p'+q' \quad \text{and} \quad (p,q) \neq (p',q') \tag{31}$$

（参见 [10, §29],或 [15]）。

值得指出由（31）得出的以下结论（后续内容中无需用到），即

$$\mathfrak{H}_k(\mathcal{U}_n) = \mathfrak{H}_{(k,0)}(\mathcal{U}_n) \oplus \mathfrak{H}_{(k-1,1)}(\mathcal{U}_n) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}_{(0,k)}(\mathcal{U}_n),$$

其中 $\oplus$ 表示 $L_2(\mathcal{U}_n)$ 中的正交和。最后需要指出，与（30）不同，我们有 $\langle f, g\rangle_{\mathfrak{P}} = 0$，因此 $\mathfrak{H}_{(p,q)}(\mathcal{U}_n)$ 从 $L_2(\mathcal{U}_n)$ 继承的欧几里得结构，不同于由（22）中的内积所诱导的结构。

2. 投影常数

如 引言中所述，本工作的主要目标是证明以下结果 .

定理 2.1. 对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{S}_1(n)\big) = \big\|\pi_{(1,0)} : C(\mathcal{U}_n) \to \mathscr{S}_1(n)\big\| = n\int_{\mathcal{U}_n} |\mathrm{tr}(V)|\,dV. \tag{32}$$

此外,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{S}_1(n)\big)}{n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{33}$$

该定理的证明见第 2.5 节。证明基于下文给出的预备结果，而这些结果需要一些预备论证。

2.1. Rudin 的平均技术。

给定一个拓扑群 G 和一个巴拿赫空间 Y，若存在一个映射，使得 G 作用于 Y（通过 T），则称

$$T\colon G \to \mathscr{L}(Y),\ g \mapsto T_g$$

使得

$$T_e = I_Y, \quad T_{gh} = T_g T_h, \quad g, h \in G$$

以及所有映射

$$g \ni G \mapsto T_g(y) \in Y, \quad y \in Y$$

是连续的。如果此外所有算子 $T_g, g \in G$都是等距算子，那么我们称 G在 Y上等距作用。若 $S \in \mathscr{L}(Y)$ 与 G在 Y上的作用 T可交换，也就是说 S与所有 T_h, $h \in G$均可交换。

以下定理见[20]（另见 [24, 定理 III.B.13]）。

定理 2.2. 设 Y 是一个巴拿赫空间，X 是 Y 的一个可补子空间，且 $\mathbf{Q}\colon Y \to Y$ 是到 X 上的投影。设 G 是一个带有 *Haar*测度 m 的紧群，它通过 T 在 Y 上作用，并且 X 在 G 的作用下保持不变，即对所有 $g \in G$，都有 $T_g(X) \subset X$。则由下式给出的 $\mathbf{P}\colon Y \to Y$

$$\mathbf{P}(y) := \int_G T_{g^{-1}} \mathbf{Q} T_g(y)\, d\mathrm{m}(g), \quad y \in Y, \tag{34}$$

是到 X 上的投影，它与 G 在 Y 上的作用可交换（也就是说，对所有 $g \in G$，有 $T_g\mathbf{P} = \mathbf{P}T_g$），并且满足

$$\|\mathbf{P}\| \le \|\mathbf{Q}\| \sup_{g \in G} \|T_g\|^2.$$

此外，如果存在唯一一个将 Y 投影到 X 上且与 G 在 Y 上的作用可交换的投影，并且 G 在 Y 上等距地作用，那么$\mathbf{P}$ 由 (34) 给出的是最小的，即，

$$\boldsymbol{\lambda}(X, Y) = \|\mathbf{P}\|.$$

为了能够应用 Rudin 方法，我们需要赋予 $\mathscr{U}_n \times \mathscr{U}_n$ 一种特殊的群结构，使得可以将所得的群表示为 $\mathscr{L}$(复数域($\mathscr{U}_n$))。为此，在 $\mathscr{U}_n \times \mathscr{U}_n$上考虑如下乘法

$$(U_0, V_0) \cdot (U_1, V_1) := (U_1 U_0, V_0 V_1).$$

赋予 $\mathscr{U}_n \times \mathscr{U}_n$ 上述乘法并配备积拓扑后，它便成为一个紧拓扑群，而且很容易看出，$\mathscr{U}_n \times \mathscr{U}_n$上的 Haar测度由 $\mathscr{U}_n$ 上的 Haar测度与其自身的积测度给出。

此外，对于任意的 $(U,V) \in \mathscr{U}_n \times \mathscr{U}_n$以及任意的 $f \in L_2(\mathscr{U}_n)$，我们定义

$$\rho_{(U,V)} f := (C_{L_U} \circ C_{R_V}) f = f \circ L_U \circ R_V,$$

这给出了 $\mathscr{U}_n \times \mathscr{U}_n$ 在 复数域($\mathscr{U}_n$) 上的作用，定义为

$$\mathscr{U}_n \times \mathscr{U}_n \to \mathscr{L}\big(C(\mathscr{U}_n)\big), \quad (U, V) \mapsto \big[\rho_{(U,V)} : f \mapsto f \circ L_U \circ R_V\big]. \tag{35}$$

我们称映射 $T\colon S_1 \to S_2$，（其中S_1 和S_2 都是$L_2(\mathscr{U}_n)$的 $\mathscr{U}_n$-不变子空间）在$C(\mathscr{U}_n)$上与 $\mathscr{U}_n \times \mathscr{U}_n$的作用可交换，当且仅当

$$\big(C_{L_U} \circ C_{R_V}\big)(Tf) = T\big((C_{L_U} \circ C_{R_V}) f\big) \quad \text{for every} \quad (U, V) \in \mathscr{U}_n \times \mathscr{U}_n \text{ and } f \in S_1.$$

2.2. **卷积**。 回顾第 1.1 节， $\pi_S\colon L_2(\mathscr{U}_n) \to S$ 表示投影到 $L_2(\mathscr{U}_n)$ 中给定闭子空间 S上的正交投影。以下结果表明，在假设$S\mathscr{U}_n$不变的情况下，该投影是一个卷积算子，其核属于S。

定理 2.3. 设 S 是 $C(\mathscr{U}_n)$ 的一个 $\mathscr{U}_n$-不变子空间，且在 $L_2(\mathscr{U}_n)$ 中闭合。则以下结论成立：

(i) 存在唯一函数 $\mathrm{t}_S \in S$，使得对所有 $f \in L_2(\mathscr{U}_n)$

$$\pi_S f = f * \mathrm{t}_S,$$

(ii) π_S与所有 L_U和 R_U交换，其中 $U \in \mathscr{U}_n$，也就是说， π_S与 $\mathscr{U}_n \times \mathscr{U}_n$在 $C(\mathscr{U}_n)$ 上的作用交换，

(iii) $\|\pi_S\colon$ 复数域 $(\mathscr{U}_n) \to S\| = \int_{\mathscr{U}_n} |\mathrm{t}_S(V)|$
dV.

证明是以下引理的一个直接推论。

引理 2.4。 设 S 是 $C(\mathscr{U}_n)$ 的 $\mathscr{U}_n$-不变子空间，并且在 $L_2(\mathscr{U}_n)$ 中闭。则对于每个 $U \in \mathscr{U}_n$，存在唯一函数 $K_S U \in S$，使得对所有 $f \in L_2(\mathscr{U}_n)$

(i) $(\pi_S f)(U) = \langle f, K_U^S \rangle_{L_2} = \int_{\mathscr{U}_n} f(V)\overline{K_U^S(V)}dV$,

此外，对于 $U,V \in \mathscr{U}_n$ 的任意选择，我们有

(ii) $K_U^S(V) = \langle K_U^S, K_V^S \rangle_{L_2} = \overline{K_V^S(U)}$,

(iii) $K_U^S \circ L_{V^{-1}} = K_{VU}^S = K_V^S \circ R_{U^{-1}}$,

(iv) $K_V^S(V) = K_{Id}^S(Id) > 0$.

证明。 由 **(*i*)** 得出的结论是将黎斯表示定理应用于连续线性泛函 $L_2(\mathscr{U}_n) \to \mathbb{C}$，$f \mapsto (\pi_S f)(U)$ 后的直接结果。

(ii) $K_U^S(V) = \pi_S(K_U^S)(V) = \langle K_U^S, K_V^S \rangle_{L_2} = \overline{\langle K_V^S, K_U^S \rangle_{L_2}} = \overline{K_V^S(U)}$ for all $V \in \mathscr{U}_n$.

(iii) 固定某个 $V \in \mathscr{U}_n$，以及 $f \in L_2(\mathscr{U}_n)$，首先注意到 $S^\perp$ 也是 $\mathscr{U}_n$-不变的。于是

$$(Id - \pi_S)(f) \circ L_V \in S^\perp \quad \text{and} \quad f \circ L_V = \pi_S(f) \circ L_V + (Id - \pi_S)(f) \circ L_V,$$

因此

$$\pi_S(f \circ L_V) = \pi_S(\pi_S(f) \circ L_V) + \pi_S((Id - \pi_S)(f) \circ L_V) = \pi_S(f) \circ L_V. \tag{36}$$

Then

$$\langle f, K_{VU}^S \rangle_{L_2} = \pi_S(f)(VU) = \pi_S(f) \circ L_V(U) = \pi_S(f \circ L_V)(U),$$

因此根据（i）

$$\left\langle f, K^S_{VU}\right\rangle_{L_2} = \left\langle f\circ L_V, K^S_U\right\rangle_{L_2} = \left\langle C_{L_V} f, K^S_U\right\rangle_{L_2} = \left\langle f, C_{L_{V^{-1}}} K^S_U\right\rangle_{L_2} = \left\langle f, K^S_U\circ L_{V^{-1}}\right\rangle_{L_2}.$$

由于$f\in L_2(\mathscr{U}_n)$是任意选取的，我们得到$K_{SVU}=K_{SU}\circ L_{V^{-1}}$。另一个恒等式可类似地推出。

(iv) 令$V\in\mathscr{U}_n$，则

$$K^S_V(V) = \left\langle K^S_V, K^S_V\right\rangle_{L_2} = \left\langle K^S_{Id}\circ L_{V^{-1}}, K^S_V\right\rangle_{L_2} = \left\langle K^S_{Id}, K^S_V\circ L_V\right\rangle_{L_2} = \left\langle K^S_{Id}, K^S_{Id}\right\rangle_{L_2} = K^S_{Id}(Id) > 0. \quad \square$$

尚需证明定理2.3。定义

$$\mathrm{t}_S := K^S_{Id}, \tag{37}$$

事实上，这个证明是前一个引理的直接推论。不过在此之前，我们先总结核 t_S 的两个基本性质。

注 2.5. 设S是复数域$(\mathscr{U}_n)$中的一个 $\mathscr{U}_n$-不变子空间，且在$L_2(\mathscr{U}_n)$中闭。那么 $\mathrm{t}_S = K_{SId}$满足：

- $\mathrm{t}_S(V^*) = \overline{\mathrm{t}_S(V)}$ 对所有 $V\in\mathscr{U}_n$ 均成立，
- $\mathrm{t}_S(V^*UV) = \mathrm{t}_S(U)$ 对所有 U、$V\in\mathscr{U}_n$均成立，也就是说，t_S是所谓的类函数。

事实上，对于第一个等式，注意到

$$\mathrm{t}_S(V^*) = (K^S_{Id}\circ L_{V^{-1}})(Id) = K^S_V(Id) = \overline{K^{Id}_V(S)} = \overline{\mathrm{t}_S(V)},$$

结合这一点，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{t}_S(V^{-1}UV) &= \overline{\mathrm{t}_S(V^{-1}U^*V)} = \overline{(K^S_{Id}\circ L_{V^{-1}})(U^*V)}\\ &= \overline{K^S_V(U^*V)} = K^S_{U^*V}(V) = K^S_{Id}\circ R_{V^{-1}U}(V) = \mathrm{t}_S(U).\end{aligned}$$

定理 *2.3* 的证明。 根据引理 2.4 对于所有$U\in\mathscr{U}_n$ 以及 $f\in L_2(\mathscr{U}_n)$

$$\begin{aligned}(\pi_S f)(U) &= \int_{\mathscr{U}_n} f(V)\overline{K^S_U(V)}dV\\ &= \int_{\mathscr{U}_n} f(V)K^S_V(U)dV\\ &= \int_{\mathscr{U}_n} f(V)K^S_{Id}(UV^{-1})dV = \int_{\mathscr{U}_n} f(V)\mathrm{t}_S(UV^*)dV = (f*\mathrm{t}_S)(U),\end{aligned}$$

这证明了（i）。命题（ii）已在（36）中证明，接下来只需验证（iii）。显然，我们有

$$\|\pi_S : C(\mathscr{U}_n)\to S\| = \sup_{U\in\mathscr{U}_n}\int_{\mathscr{U}_n}|\mathrm{t}_S(UV^*)|dV,$$

并且对每个$U \in \mathcal{U}_n$根据注释2.5

$$\int_{\mathcal{U}_n} |\mathrm{t}_S(UV^*)|dV = \int_{\mathcal{U}_n} |\mathrm{t}_S(V^*)|dV = \int_{\mathcal{U}_n} |\mathrm{t}_S(V)|dV\,.$$

论证至此完成。 □

2.3. **可达性**。 设S是$C(\mathcal{U}_n)$的 $\mathcal{U}_n$不变子空间，且在$L_2(\mathcal{U}_n)$中闭合。若每个从$C(\mathcal{U}_n)$到S上的投影Q都与 $\mathcal{U}_n \times \mathcal{U}_n$在$C(\mathcal{U}_n)$上的作用交换，且等于$\pi_S|_{C(\mathcal{U}_n}$，则称$S$为可达 。

定理 2.6。 设 S 是 $C(\mathcal{U}_n)$的 $\mathcal{U}_n$不变且可达的子空间，并且在 $L_2(\mathcal{U}_n)$中闭合。则

$$\boldsymbol{\lambda}(S) = \big\|\pi_S : C(\mathcal{U}_n) \to S\big\| = \int_{\mathcal{U}_n} |\mathrm{t}_S(V)|dV\,.$$

证明。 由 Rudin 的定理 2.2 以及对 S 的假设可立即得出证明，同时注意到我们已由定理 *2.3* 得知 (*iii*) 和 (2.3 以及 (1)。 □

我们称S是$C(\mathcal{U}_n)$的 $\mathcal{U}_n$不变子空间，且在$L_2(\mathcal{U}_n)$中闭合；如果对于每个S中的$f \in$，满足$f(VUV^*) = f(U)$，对所有U、$V \in \mathcal{U}_n$均成立，则 f 是 t_S 的数乘。换言之，S中的每个类函数都是 t_S 的数乘。

正如前一个定义的名称所暗示的，我们有如下关键结果。

命题 2.7。 设 S 是 $C(\mathcal{U}_n)$ 的 $\mathcal{U}_n$-不变子空间，并且在 $L_2(\mathcal{U}_n)$ 中闭。则当 S 强可达时，S 可达。

证明需要下面的陈述。

引理 2.8。 设 H 和 S 是 $C(\mathcal{U}_n)$ 的 $\mathcal{U}_n$-不变子空间，且二者在 $L_2(\mathcal{U}_n)$ 中均闭。则若 S 强可达，任何算子 $T : H \to S$ 若与 $\mathcal{U}_n \times \mathcal{U}_n$ 在 $C(\mathcal{U}_n)$ 上的作用交换，则 T 是 $\pi_S|_H$ 的标量倍。

此外，若 H 与 S 正交，且 Q 是 H 上到 S 的投影 $\oplus S$，并且与 $\mathcal{U}_n \times \mathcal{U}_n$在 $C(\mathcal{U}_n)$ 上的作用交换，则 $Q = \pi_S|_{H\oplus S}$。

证明。 根据关于 T的假设以及引理 2.4， （iii）对于每个 $V \in \mathcal{U}_n$,

$$\big(C_{L_V} \circ C_{R_{V^{-1}}}\big)(T\mathrm{t}_H) = T\big((C_{L_V} \circ C_{R_{V^{-1}}})\mathrm{t}_H\big) = T\,t_H\,.$$

这意味着 $(T\mathrm{t}_H)(V^*UV) = (T\mathrm{t}_H)(U)$，对所有 $U,V \in \mathcal{U}_n$ 都成立。由于 S是强可达的，我们有 $T\mathrm{t}_H = \gamma\,\mathrm{t}_S$对于某个 $\gamma \in \mathbb{C}$。但根据定理 2.3 我们知道，对于所有 $h \in H$

$$h = \pi_H h = h * \mathrm{t}_H\,,$$

因此

$$Th = h * T\mathrm{t}_H = \gamma h * \mathrm{t}_S = \gamma \pi_S h.$$

为证明第二个断言，注意到根据引理的第一部分，我们有 $Q|_H = \gamma \pi_S|_H$ 对于某个$\gamma \in \mathbb{C}$。但由于根据假设 $H \subset S^\perp$，这意味着 $Q_{|H} = 0 = \pi_{S|H}$。另一方面，由于 Q 是到 S上的投影，我们看到 $Q|_S = Id_S = \pi_S|_S$，从而完成证明。□

现在我们给出一个

命题 *2.7* 的证明。 设 Q是作用在 复数域$(\mathscr{U}_n)$上到 S的一个投影，它与$\mathscr{U}_n \times \mathscr{U}_n$在 复数域$(\mathscr{U}_n)$上的作用可交换。根据定理 1.8，只需证明对于每一对 $(p、q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

$$Q_{|\mathfrak{H}_{(p,q)}} = \pi_S|_{\mathfrak{H}_{(p,q)}}.$$

给定这样一对 (p, q)，我们定义子空间

$$H := \{f - \pi_S f : f \in \mathfrak{H}_{(p,q)}\} \subset C(\mathscr{U}_n).$$

那么 H是 $\mathscr{U}_n$-不变的；事实上，根据定理 2.3 的 (ii)，以及 $\mathfrak{H}_{(p,q)}$ 是 $\mathscr{U}_n$-不变的这一事实（已在引理 1.7 中证明），对于每个 $f \in \mathfrak{H}_{(p,q)}$ 和$U \in \mathscr{U}_n$，我们有

$$(f - \pi_S f) \circ L_U = f \circ L_U - \pi_S f \circ L_U = f \circ L_U - \pi_S(f \circ L_U) \in H,$$

且右乘法下的不变性可类似地推出。由于 $H \perp S$和 Q与 $\mathscr{U}_n \times \mathscr{U}_n$在 复数域 $(\mathscr{U}_n)$ 上的作用可交换，引理 2.8(第二部分应用于 Q在 $H \oplus S$上的限制) 表明

$$Q_{|H\oplus S} = \pi_S|_{H\oplus S},$$

因此特别有 $Q_{|H} = \pi_S|_H = 0$。但对每个 $f \in \mathfrak{H}_{(p,q)}(\mathscr{U}_n)$

$$Q(f) = Q(f - \pi_S f) + Q(\pi_S f) = \pi_S f,$$

这就完成了论证。 □

2.4. **特殊情形** $S = \mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathscr{U}_n)$。 回顾第 1.4 节中对所有形如下列形式的多项式 $\mathscr{U}_n$-不变子空间 $\mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathscr{U}_n)$ 的定义：复数域 $C(\mathscr{U}_n)$ 上所有多项式 $f \in C(\mathscr{U}_n)$

$$f(U) = \sum_{1\le i,j\le n} c_{i,j}\, u_{i,j},$$

其中 $U = (u_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathscr{U}_n$。

在定理 2.3 中，我们证明了将 $L_2(\mathscr{U}_n)$ 中的 $\mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathscr{U}_n)$ 上的正交投影 $\pi_{(1,0)} = \pi_{\mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathscr{U}_n)}$ 是关于核 $t_{(1,0)} = t_{\mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathscr{U}_n)}$ 的卷积算子。我们需要用 $\mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathscr{U}_n)$ 的规范正交基来对这个投影作另一种描述。

根据（8），归一化函数 $\mathrm{p}n e_{ij}$、$1 \le i$、$j \le n$ 构成 $\overline{L_2}(\mathscr{U}_n)$ 中的一个正交系，因此也是 $\mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathscr{U}_n)$ 的标准正交基；将后者视为 $L_2(\mathscr{U}_n)$ 的子空间。于是，对于每个 $f \in L_2(\mathscr{U}_n)$

$$\pi_{(1,0)}(f) = \sum_{1\le i,j\le n} \langle f, \sqrt{n} e_{ij}\rangle_{L_2} \sqrt{n} e_{ij} = n \sum_{1\le i,j\le n} \langle f, e_{ij}\rangle_{L_2} e_{ij}, \tag{38}$$

其中 $e_{ij} \in \mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathscr{U}_n)$ 定义为 $e_{ij}(U) = u_{i,j}$ 对于 $U \in \mathscr{U}_n$。

Co比较 $\pi_{(1,0)}$ 的两种表示后，我们得到以下结果

命题 2.9. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\mathrm{t}_{(1,0)} = n\mathrm{tr}$，此外

$$\pi_{(1,0)} f = n\,(f * \mathrm{tr}), \quad f \in L_2(\mathscr{U}_n)$$

and

$$\|\pi_{(1,0)} : C(\mathscr{U}_n) \to \mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathscr{U}_n)\| = n \int_{\mathscr{U}_n} |\mathrm{tr}(V)|\, dV\,.$$

证明。 为验证等式 $\mathrm{t}_{(1,0)} = n\mathrm{tr}$，请回顾引理 2.4 的 (i) 以及 $\mathrm{t}_{(1,0)}$由（37）定义可知，对于所有 $f \in L_2(\mathscr{U}_n)$，有

$$(\pi_{(1,0)} f)(Id) = \langle f, \mathrm{t}_{(1,0)}\rangle_{L_2}\,.$$

另一方面，由（38），对于所有 $f \in L_2(\mathscr{U}_n)$，

$$(\pi_{(1,0)} f)(Id) = n \sum_{i,j} \langle f, e_{ij}\rangle_{L_2} e_{ij}(Id) = n \sum_{i} \langle f, e_{ii}\rangle_{L_2} = n\langle f, \mathrm{tr}\rangle_{L_2}\,,$$

这与前一个等式合在一起，正是我们所要证明的。由定理 2.3, (iii) 立即可推出第二和第三个结论。□

命题 2.10. $\mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathscr{U}_n)$ 是一个强可达的 $\mathscr{U}_n$-不变子空间，其中 $C(\mathscr{U}_n)$。

证明。取 $\mathrm{f} = \sum_{1\le \mathrm{i},\mathrm{j} \le \mathrm{n}} \mathrm{c}_{i,j} \mathrm{e}_{i,j} \in \mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathscr{U}_n)$，使得对于每个 $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathscr{U}_n$，都有 $\mathrm{f}(\mathrm{V}^{-1}\mathrm{U}\,\mathrm{V}) = \mathrm{f}(\mathrm{U})$。显然，f 可以视为 $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 上的线性泛函。这意味着存在 $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$，使得对所有 $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$，都有 $\mathrm{f}(\mathrm{U}) = \mathrm{tr}(\mathrm{AU})$。于是，由 f 的假设可知，对于所有 $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathscr{U}_n$

$$\mathrm{tr}(AU) = f(U) = f(V^{-1}UV) = \mathrm{tr}(AV^{-1}UV) = \mathrm{tr}(VAV^{-1}U).$$

结合任意一个 $M_n(\mathbb{C})$ 中的矩阵都是酉矩阵的线性组合这一事实，我们推出，对于每个 $V \in \mathscr{U}_n$，都有 $A = VAV^{-1}$，因此A与 $M_n(\mathbb{C})$ 中的所有矩阵都可交换。这意味着$A = \gamma Id$，其中某个 $\gamma \in \mathbb{C}$，从而得到所需的结论$f = \gamma\mathrm{tr}$。□

需要说明的是：若 $p + q > 1$，则 $g_1(A) := \mathrm{tr}(A^p(A^*)^q)$ 和 $g_2(A) := \mathrm{tr}(A)^p\mathrm{tr}(A^*)^q$ 是不同的类函数。因此，在这种情况下，$\mathfrak{H}_{(p,q)}(\mathscr{U}_n)$ 并非强可达。

下面的结果说明，$\mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathscr{U}_n)$ 与迹类 $\mathscr{S}_1(n)$ 等同。

命题 2.11. </style}空间 ($\mathscr{U}_n$) 与 $\mathscr{S}_1(n)$等距同构。更确切地说，

$$\mathscr{S}_1(n) \to \mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathscr{U}_n),\quad A \mapsto [f : U \mapsto \mathrm{tr}(AU)] \tag{39}$$

是一个到上的等距映射。

证明。显然，式 (39) 中的映射是一个线性双射。事实上，作为线性空间， $\mathscr{S}_1$(n) 等于 M$_n$(ℂ)，而 $\mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathscr{U}_n)$ 等于 M$_n$(ℂ)$^{\times}$M$_n$(ℂ) 的代数对偶。此外，众所周知，映射 A ↦ [f : U ↦tr(AU)] 将 M$_n$(ℂ) 与 M$_n$(ℂ)$^{\times}$对应起来。因此，只需证明式 (39) 中的映射是等距的。为此，我们使用 Nelson 的一个结果 [17] （另见 [9, 定理 1]），该结果表明，对于任意在 $\mathscr{L}(\ell_2^n)$ 的闭单位球上连续、在开单位球上解析的复值函数 f，我们有 sup$_{\|T\|\le 1}$|f (T)| = sup$_{U\in\mathscr{U}_n}$|f (U)|。于是，由 (7) 可知，对每个 A ∈ $\mathscr{S}_1$(n)

$$\|A\|_1 = \sup_{\|T\|\le 1} |\mathrm{tr}(AT)| = \sup_{U\in\mathscr{U}_n} |\mathrm{tr}(AU)|,$$

从而完成论证。 □

2.5. **主要结果的证明**。我们首先给出

由(32)得到的积分公式的证明。我们采用命题2.11中的识别，并将其与命题2.10 和定理2.6结合。然后，命题2.9 完成论证。□

现在我们来处理由（33）得到的极限公式。为此，我们需要回顾概率论中的一些著名结果（更多内容见[2]）。我们将用到以下结论：给定任意一个随机变量序列（Y_n），若其依分布收敛于随机变量 Y，且f是任意连续实值函数，则序列 $\big(f(Y_n)\big)$依分布收敛于$f(Y)$。此外还记得，随机变量序列（Y_n)$_n$ 称为一致可积，当且仅当

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{n\ge 1} \int_{|Y_n|\ge a} |Y_n|\,dP = 0.$$

由于以下事实（一致可积性对我们很有用；例如参见 [2, 定理 3.5]）：若 (Y_n)$_n$ 是一个一致可积的随机变量序列，且 $Y_n \xrightarrow{D} Y$，则 Y可积，并且

$$\mathbb{E}(Y_n) \to \mathbb{E}(Y). \tag{40}$$

为检验一致可积性，我们引用一个标准判据。

注 2.12. 若 sup$_n$𝔼(|Y_n|$^{1+\varepsilon}$) ≤复数域 对某个 ε,复数域 >0 成立，则 (Y_n)$_n$ 一致可积；事实上，这是以下结论的推论

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{n\ge 1} \int_{|Y_n|\ge a} |Y_n|\,dP \le \lim_{a\to\infty} \frac{1}{a^{\varepsilon}} C.$$

现在我们可以给出

由（33）得出的极限公式的证明。考虑定义在 $\mathscr{U}_n$ 上的随机变量序列 $\big(\mathrm{tr}(\mathrm{U}(\mathrm{n}))\big)$，其中 U (n) 是服从均匀 Haar 分布的酉矩阵。于是，根据 [12, 推论 2.4]（另见[5] 或习题 8.5.5]），前述序列依分布收敛到标准复高斯随机变量 $\boldsymbol{\gamma}$。事实上，随机变量 $\mathrm{p2Re}\,[\mathrm{tr}(\mathrm{U}(\mathrm{n}))]$ 和 $\mathrm{p2I\,m}\,[\mathrm{tr}(\mathrm{U}(\mathrm{n}))]$ 依分布收敛到标准实高斯随机变量。

因此，序列 $\big(\sqrt{2}|\mathrm{tr}(U(n))|\big)$ 定义在 $\mathscr{U}_n$ 上的随机变量依分布收敛到瑞利随机变量。此外，由（9）中所述，对每个 n

$$\mathbb{E}\big(|\mathrm{tr}(U(n))|^2\big) = \int_{\mathscr{U}_n} |\mathrm{tr}(V)|^2 \, dV = 1\,,$$

根据注 *2.12*，随机变量序列 $\mathrm{tr}(U(\mathrm{n}))$ 一致可积。因此，由（40）可得 $\big(\mathbb{E}(\sqrt{2}|\mathrm{tr}(U(n))|)\big)$ 收敛到瑞利随机变量的期望。也就是说，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(\sqrt{2}|\mathrm{tr}(U(n))|\big) \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

利用（32），我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\boldsymbol{\lambda}(\mathscr{S}_1(n))) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(\sqrt{2}|\mathrm{tr}(U(n))|\big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

由此完成证明。 □

2.6. **其他例子**。 在本节最后，我们给出一些其他例子，说明为实现主要目标（定理 2.1）而发展起来的理论可以应用于这些例子。

第一个结果表明，可达的 $\mathscr{U}_n$-不变子空间总是成对出现。为此，我们定义线性等距双射

$$\phi : C(\mathscr{U}_n) \to C(\mathscr{U}_n),\ f \mapsto [U \mapsto f(U^*)]\,.$$

对于复数域S中的任意子空间$C(\mathscr{U}_n)$，我们记$S_* := \phi S$。作为第一个例子，我们提到，等距地

$$\big(\mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathscr{U}_n)\big)_* = \phi\big(\mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathscr{U}_n)\big) = \mathfrak{H}_{(0,1)}(\mathscr{U}_n)\,.$$

命题 2.13。 设 S 是 $C\,(\mathscr{U}_n)$ 的一个 $\mathscr{U}_n$-不变子空间，且在 $L_2(\mathscr{U}_n)$ 中闭。则 S_*是 $\mathscr{U}_n$-不变的，并且 $\mathrm{t}_{S_*} = \mathrm{t}_S$。 此外，当且仅当 S_*强可达（（分别地，可达）时，S 强可达（（分别地，可达）。

证明。 显然，S_* 是 $\mathscr{U}_n$-不变的。为证明 $\mathrm{t}_{S_*}=\mathrm{t}_S$，先注意到 $\pi_{S_*}=\overline{\phi}\circ\pi_S\circ\phi$。于是，对每个 $f\in L_2(\mathscr{U}_n)$ 和 $U\in\mathscr{U}_n$，由定理 2.3 和注 2.5 可得

$$\begin{aligned}\big(\pi_{S_*}f\big)(U)&=\big((\pi_S\phi f)\big)(U^*)\\&=\big(\phi f*\mathrm{t}_S\big)(U^*)=\int_{\mathscr{U}_n}f(V^*)\mathrm{t}_S(U^*V^*)dV\\&=\int_{\mathscr{U}_n}f(V^*)\overline{\mathrm{t}_S}(VU)dV=\int_{\mathscr{U}_n}f(V)\overline{\mathrm{t}_S}(V^*U)dV\\&=\int_{\mathscr{U}_n}f(V)\overline{\mathrm{t}_S}(UV^*)dV=\big(f*\overline{\mathrm{t}_S}\big)(U),\end{aligned}$$

由 t_{S_*} 的唯一性可知这一结论成立。接下来讨论“此外”部分。显然，S 的强可达性等价于 S_* 的强可达性。因此，假设 S 可达，并证明 S_* 可达。任取一个投影 $\mathrm{Q}:\mathrm{C}(\mathscr{U}_n)\to\mathrm{S}_*$，它与 $\mathscr{U}_n\times\mathscr{U}_n$ 在 $\mathrm{C}(\mathscr{U}_n)$ 上的作用交换。由于对所有 $\mathrm{V}\in\mathscr{U}_n$，$\phi\circ\mathrm{C}_{L_V}=\mathrm{R}_{V^*}\circ\phi$ 且 $\phi\circ\mathrm{C}_{R_V}=\mathrm{L}_{V^*}\circ\phi$，投影 $\phi\circ\mathrm{Q}\circ\phi$ 到 S 与 $\mathscr{U}_n\times\mathscr{U}_n$ 在 $\mathrm{C}(\mathscr{U}_n)$ 上的作用交换，因此由假设可得$\phi\circ\mathrm{Q}\circ\phi=\pi_S$。但显然 $\mathrm{Q}=\phi\circ\pi_S\circ\phi=\pi_{S_*}$，结论得证。□

注意，特别是，$\mathfrak{H}_{(0,1)}(\mathscr{U}_n)$ 是 $\mathscr{U}_n$-不变且可达，并且 $\mathrm{t}_{(0,1)}=\mathrm{tr}$，因此由定理 2.6

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathfrak{H}_{(0,1)}(\mathscr{U}_n)\big)=\big\|\pi_{(0,1)}:C(\mathscr{U}_n)\to\mathfrak{H}_{(0,1)}(\mathscr{U}_n)\big\|=n\int_{\mathscr{U}_n}|\mathrm{tr}(V)|dV.$$

此外，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\boldsymbol{\lambda}\big(\mathfrak{H}_{(0,1)}(\mathscr{U}_n)\big)}{n}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

当然，这也是定理 2.1 的一个简单推论，利用 ϕ 将 $\mathfrak{H}_{(0,1)}(\mathscr{U}_n)$ 与$\mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathscr{U}_n$等距地对应起来。

接下来，我们继续介绍可达子空间的另一条简单稳定性。

命题 2.14. 设 S_1 和 S_2 是 复数域 $C(\mathscr{U}_n)$中的可达、$\mathscr{U}_n$-不变子空间，它们在 $L_2(\mathscr{U}_n)$ 中是闭且正交的。那么，$S_1\oplus S_2$ 是可达且 $\mathscr{U}_n$-不变的，并且 $t_{S_1\oplus S_2}=\mathrm{t}_{S_1}+\mathrm{t}_{S_2}$。因此，

$$\boldsymbol{\lambda}(S_1\oplus S_2)=\big\|\pi_{S_1}+\pi_{S_2}:C(\mathscr{U}_n)\to S_1\oplus S_2\big\|=\int_{\mathscr{U}_n}|\mathrm{t}_{S_1}(V)+\mathrm{t}_{S_2}(V)|dV.\tag{41}$$

证明。 显然，$S_1\oplus S_2$ 是 $\mathscr{U}_n$-不变的。注意，$\pi_{S_1\oplus S_2}=\pi_{S_1}+\pi_{S_2}$ 是 $L_2(\mathscr{U}_n)$ 到 $S_1\oplus S_2$上的正交投影。于是，由定理 2.3 可知，对所有 $f\in L_2(\mathscr{U}_n)$，都有

$$\pi_{S_1\oplus S_2}f=\pi_{S_1}f+\pi_{S_2}f=f*\mathrm{t}_{S_1}+f*\mathrm{t}_{S_2}=f*(\mathrm{t}_{S_1}+\mathrm{t}_{S_2}).$$

因此，根据$t_{S_1\oplus S_2}$ 的唯一性，我们得到

$$\mathrm{t}_{S_1\oplus S_2}=\mathrm{t}_{S_1}+\mathrm{t}_{S_2}.$$

现在我们证明$S_1 \oplus S_2$是可达的。为此，设Q是从复数域$(\mathcal{U}_n)$到$S_1 \oplus S_2$上的一个投影，并且该投影与$\mathcal{U}_n \times \mathcal{U}_n$在复数域$(\mathcal{U}_n)$上的作用可交换。我们断言$Q = \pi_{S_1 \oplus S_2}$。事实上，考虑这两个投影

$$Q_{S_1} = \pi_{S_1} \circ Q \quad \text{and} \quad Q_{S_2} = \pi_{S_2} \circ Q$$

映射到复数域$(\mathcal{U}_n)$上的S_1和S_2，，分别如此。由于π_{S_1}和π_{S_2}都与$\mathcal{U}_n \times \mathcal{U}_n$在复数域$(\mathcal{U}_n)$上的作用可交换，$Q_{S_1}$和$Q_{S_2}$也如此。于是，根据$S_1$和$S_2$的可达性，我们得到

$$Q_{S_1} = \pi_{S_1} \quad \text{and} \quad Q_{S_2} = \pi_{S_2},$$

因此，对于所有$f \in$复数域$(\mathcal{U}_n)$，如所求

$$Qf = \pi_{S_1}(Qf) + \pi_{S_2}(Qf) = \pi_{S_1} f + \pi_{S_2} f = \pi_{S_1 \oplus S_2} f.$$

要完成证明，只需注意到（41）直接由定理2.6得出。 □

结合前两个命题，我们得到

推论 2.15。对于每个$n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}\big(\mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathcal{U}_n) \oplus \mathfrak{H}_{(0,1)}(\mathcal{U}_n)\big) &= \big\|\pi_{(1,0)} \oplus \pi_{(0,1)} : C(\mathcal{U}_n) \to \mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathcal{U}_n) \oplus \mathfrak{H}_{(0,1)}(\mathcal{U}_n)\big)\big\| \\ &= 2n \int_{\mathcal{U}_n} |Re(\mathrm{tr}(V))| dV.\end{aligned}$$

此外，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}\big(\mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathcal{U}_n) \oplus \mathfrak{H}_{(0,1)}(\mathcal{U}_n)\big)}{\sqrt{2}n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{42}$$

在给出证明之前，我们指出，上述分数的分母（即 p2n）恰好是和空间 $\mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathcal{U}_n) \oplus \mathfrak{H}_{(0,1)}(\overline{\mathcal{U}_n})$ 的维数的平方根。

推论 *2.15* 的证明。 我们只需证明（42），因为投影常数的积分公式可直接由（41）和命题 2.9 得出。

我们重复一个与（33）的证明类似的论证。根据 [12, 推论 2.4], , 我们知道随机变量序列 $\big($ p2Re [tr(U n))] $\big)$ 依分布收敛于标准实高斯随机变量 g 。特别地， $\big($p2|Re [tr(U (n))]|$\big)$ 依分布收敛于 |g |。注意，序列 $\big($p2|Re [tr(U (n))]|$\big)$ 一致可积。事实上， $\mathbb{E}(|\mathrm{Re}\,[\mathrm{tr}(U(n))]|^2) \le \mathbb{E}(|\mathrm{tr}(U(n))|^2) = 1$（再次参见注 2.12）。因此，由（40）可得，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}\big(\mathfrak{H}_{(1,0)}(\mathcal{U}_n) \oplus \mathfrak{H}_{(0,1)}(\mathcal{U}_n)\big)}{\sqrt{2}n} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(\sqrt{2}|Re[\mathrm{tr}(U(n))]|\big) = \mathbb{E}|g| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |x| e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

证明至此完成。 □

参考文献

[1] K. Atkinson 和 W. Han，《球面上的球谐函数与逼近：导论》，收录于《数学讲义》第 2044 卷。Springer，海德堡，2012 年。[2] P. Billingsley，《概率测度的收敛》。奇切斯特：Wiley，1999 年。[3] M. Cerezo、A. Sone、T. Volkoff、L. Cincio 和 P. J. Coles，《浅层参数化量子电路中依赖于代价函数的贫瘠高原》。《自然·通讯》，12(1)：1–12，2021 年。[4] B. Collins 和 P. ´Sniady，《关于酉群、正交群和辛群上的 Haar 测度积分》。《数学物理通讯》，264(3)：773–795，2006 年。[5] P. Diaconis 和 M. Shahshahani，《关于随机矩阵的特征值》。《应用概率杂志》，31A：49–62，1994 年。[6] J. Diestel、H. Jarchow 和 A. Tonge，《绝对可和算子》，收录于《剑桥高等数学研究丛书》第 43 卷。剑桥：剑桥大学出版社，1995 年精装版的平装重印版，2008 年。[7] Y. Gordon 和 D. R. Lewis，《绝对可和算子与局部无条件结构》。《数学学报》，133：27–48，1974 年。[8] B. Grünbaum，《投影常数》。《美国数学会汇刊》，95：451–465，1960 年。[9] L. A. Harris，《算子空间中区域的全纯映射》。《非线性分析：理论、方法与应用》，30(6)：3493–3503，1997 年。[10] E. Hewitt 和 K. A. Ross，《抽象调和分析。第一卷：拓扑群的结构、积分理论、群表示》，收录于《数学科学基础丛书》第 115 卷。柏林：施普林格出版社，第 2 版，1994 年。[11] F. Hiai 和 D. Petz，《半圆律、自由随机变量与熵》，收录于《数学调查专著》第 77 卷。罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2000 年。[12] K. Johansson，《关于来自紧经典群的随机矩阵》。《数学年刊》（第 2 辑），145(3)：519–545，1997 年。[13] M. I. Kadets 和 M. G. Snobar，《紧闵可夫斯基空间上的一些泛函》。《数学札记》，10：694–696，1972 年。[14] H. König、C. Schütt 和 N. Tomczak-Jaegermann，《对称空间的投影常数及 Khintchine 不等式的变体》。《纯粹与应用数学杂志》，511：1–42，1999 年。[15] G. Köstenberger，《Weingarten 演算》。arXiv 预印本 arXiv:2101.00921，2021 年。[16] J. Lindenstrauss 和 L. Tzafriri，《经典巴拿赫空间 I：序列空间》，收录于《数学与相关领域成果》第 92 卷。施普林格出版社，柏林，1977 年。[17] E. Nelson，《单位算子球的特征边界》。《美国数学会会刊》，12：994–995，1961 年。[18] L. Pastur 和 M. Shcherbina，《大型随机矩阵的特征值分布》，收录于《数学调查专著》第 171 卷。罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2011 年。[19] G. Pisier，《线性算子的分解与巴拿赫空间的几何》，收录于《区域会议数学系列》第 60 卷。罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），1986 年。[20] W. Rudin，《不变子空间上的投影》。《美国数学会会刊》，13：429–432，1962 年。[21] W. Rudin，《复数域单位球中的函数论》。《经典数学》。柏林：Springer，1980 年原版重印版，2008 年。[22] D. Rutovitz，《与有限维巴拿赫空间相关的一些参数》。《伦敦数学学会杂志》，40：241–255，1965 年。[23] N. Tomczak-Jaegermann，《巴拿赫-马祖尔距离与有限维算子理想》，收录于《皮特曼纯粹与应用数学专著与调查》第 38 卷。哈洛：朗文科学技术出版社；纽约：John Wiley &| Sons, Inc.，1989 年。[24] P. Wojtaszczyk，《分析学家的巴拿赫空间》。剑桥：剑桥大学出版社，1996 年。

[25] L. Zhang. 酉群上的矩阵积分：舒尔-韦尔对偶的应用。*arXiv* 预印本 *arXiv:1408.3782*，2014。

卡尔·冯·奥西茨基奥尔登堡大学数学研究所，德国奥尔登堡 26111

电子邮箱：defant@mathematik.uni-oldenburg.de

布宜诺斯艾利斯大学精确与自然科学学院数学系及 IMAS-CONICET。大学城，Pabellón I（C1428EGA），布宜诺斯艾利斯自治市，阿根廷

电子邮箱：dgalicer@dm.uba.ar

布宜诺斯艾利斯大学精确与自然科学学院数学系及 IAM-CONICET。SAAVEDRA15（C1083ACA），布宜诺斯艾利斯自治市，阿根廷

电子邮箱：mmansilla@dm.uba.ar

亚当·密茨凯维奇大学数学与计算机科学学院，波兹南，UNIWERSYTETU POZNA´NSKIEGO 4，61-614 波兹南，波兰

电子邮箱：mieczyslaw.mastylo@amu.edu.pl

FCEIA、罗萨里奥国立大学及 CIFASIS、CONICET，奥坎波与埃斯梅拉达，S2000 罗萨里奥，阿根廷

电子邮箱：muro@cifasis-conicet.gov.ar