弦效应下反弹宇宙的相空间分析

Alfredo D. Millano [1], * Kimet Jusufi [2], † 以及 Genly Leon [1, 3‡]1数学系，北方天主教大学，安加莫斯大道 *0610* 号，邮政信箱 *1280*，智利安托法加斯塔2物理系，泰托沃国立大学，伊林登街 *nn*，*1200*，北马其顿泰托沃3系统科学研究所，德班理工大学，邮政信箱 *1334*，德班 *4000*，南非

arXiv:2302.00223v1 [gr-qc] 1 Feb 2023

摘要

我们采用近期基于弦 T 对偶效应（该效应体现了零点长度）得到的修正弗里德曼方程（《物理快报B辑》836 (2023), 137621），研究反弹早期宇宙的相空间分析。这类弦效应的一个重要含义是，它们通过修正 Raychaudhuri方程，可以缓解初始奇点问题。我们考察在特定的状态方程参数范围内，宇宙能否经历加速膨胀阶段。弦效应由参数 Γ体现，该参数不仅取决于零点长度，也取决于状态参数 ω。我们根据 $-1 < \omega \leq -1/3$ and $\omega \geq -1/3$ 是否成立，构建了两个动力系统，并对各系统的平衡点进行分类。文中还讨论了精确解及其宇宙学含义。

*电子邮箱：alfredo.millano@alumnos.ucn.cl
†电子邮箱：kimet.jusufi@unite.edu.mk
‡电子邮箱：genly.leon@ucn.cl

一、引言

尽管宇宙学 ΛCDM 模型在描述宇宙当前状态及其演化方面取得了巨大成功，但宇宙加速膨胀的深层起源仍有待充分理解 [1–3]。我们通常将宇宙学常数称为暗能量——一种假想的能量源，弥漫于宇宙之中并施加负压，从而使宇宙膨胀加速[4]。然而，暗物质是另一种由不同观测揭示的神秘物质形式。大量观测事实支持暗物质和暗能量的存在。众所周知，解释星系旋转曲线需要暗物质。具体而言，可以利用星系中恒星的旋转来推断某个星系中存在物质/暗物质。在这方面，对恒星旋转的天体物理测量揭示了暗物质的存在 [5]。另一个重要事实是宇宙微波背景（CMB）辐射。人们认为，宇宙微波背景是早期宇宙留下的辐射；其温度高度均匀，但重要的是，温度仍存在微小变化，可据此推断早期宇宙的许多性质 [6–9]。这里还要提及与 Ia型超新星有关的观测事实。我们可以利用恒星爆炸性死亡的过程测量遥远星系的距离，并发现宇宙正在膨胀。这再次表明，宇宙学常数在解释宇宙膨胀方面发挥着作用。此外，解释宇宙的大尺度结构也需要暗物质和暗能量。现代宇宙学的其他发现，例如重子声学振荡，进一步提供了支持暗物质和暗能量存在的证据 [10]。早期宇宙中的物质密度变化能够揭示宇宙的性质。最后，我们可以利用广义相对论效应（如引力透镜效应）推断大尺度结构中的物质分布。 ΛCDM 模型与上述观测事实高度吻合。

人们还提出了其他尝试，试图用精质场来解释宇宙的加速膨胀 [11–15]。宇宙学常数被假定为处处恒定的能量密度，而精质场则不同，它是一个动态场，因此会随时间变化。解释宇宙加速率的另一种可能途径是修正引力理论（参见 [16–74] 及其中的参考文献）。

根据广义相对论，我们的宇宙始于大爆炸——一种可通过Raychaudhuri方程理解的宇宙学奇点。研究宇宙的演化可以发现，膨胀标量在某个时刻可能变为无穷大，这表明奇点的存在。然而，我们如今认为，在这些极端条件下，若考虑量子效应，就可以避免这种奇点。

20 世纪 70 年代，Hawking 和 Bekenstein 揭示了黑洞物理学与热力学定律之间深刻的联系。具体而言，有人指出，熵和温度等热力学量分别与视界面积和表面引力成正比，而后两者是纯粹的几何量。Jacobson 取得了一项令人振奋的发现：他将引力的爱因斯坦场方程推导为空间时空的状态方程 [75]。这一思想随后被用于多项研究；特别参见（[76–89]）。近期，Verlinde 提出，引力并非基本力，而可以视为一种熵力[90]。在 Verlinde 的引力理论中，引力是一种涌现效应，而暗物质是一种表观效应；它是由物质引起的熵位移 [91]。Verlinde 的论证基于两项重要原理。第一项原理是系统自由度的能量均分定律，第二项是全息原理。沿着这一思路，Padmanabhan 进一步探索了引力的本质。他指出，我们宇宙的空间膨胀可以理解为空间涌现的结果。通过将体内与边界上的自由度数之差等同于体积变化，他得以推导出描述宇宙演化的弗里德曼方程 [92, 93]（另见 [94–96]）。

Padmanabhan 引入了对偶性和零点长度的概念，将其作为获得量子引力效应的工具 [97]，并将其应用于黑洞物理学以消除黑洞奇点 [98–101]。在本研究中，我们将对文献 [102] 中近期修正的弗里德曼方程进行相空间分析。该修正的弗里德曼方程源自 Verlinde 提出的、包含零点长度修正的涌现引力。量子效应在早期宇宙中至关重要；特别是，研究表明奇点可以避免，宇宙也能够经历反弹情景 [102]。

本文结构如下。第二节回顾由 Verlinde 熵力情景推导的弦 T 对偶中的修正弗里德曼方程。第三节研究早期宇宙的相空间分析。最后，我们在第四节讨论研究结果。

II. 修　　正的含弦效应的弗里德曼方程　　TS

首先，我们回顾 [102]中报道的修正弗里德曼方程。引力势经过修正，因此牛顿定律表示为 [102]

$$F = -\frac{GMm}{R^2}\left[1 + \frac{l_0^2}{R^2}\right]^{-3/2}, \tag{1}$$

这里， l_0 是零点长度，其数值接近普朗克长度（见 [98]）。我们假设背景为空间均匀各向同性背景，由弗里德曼–罗伯逊–沃克（FRW）度规描述

$$ds^2 = h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{2}$$

其中 $R = a(t)r$, $x^0 = t, x^1 = r$。对于度规函数，我们有

$$h_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(-1, \frac{a^2}{1-kr^2}\right), \tag{3}$$

其中 k 为空间曲率；特别地，对于 $k = 1,0,-1$，我们分别得到闭合、平坦和开放的 FLRW 模型。对于 FRW 度规，我们可以通过以下方程求得动力学视界

$$h^{\mu\nu}\partial_\mu R\partial_\nu R = 0. \tag{4}$$

容易证明，FRW 宇宙的视界半径为

$$R = ar = \frac{1}{\sqrt{H^2 + k/a^2}}. \tag{5}$$

此外，对于 FRW 宇宙中的物质源，我们将假设其为理想流体，并用以下应力-能量张量来描述：

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \tag{6}$$

以及连续性方程

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \tag{7}$$

最后一个方程 $H = \dot{a}/a$ 定义了哈勃参数。首先，我们可以推导出动力学方程。为此，我们考虑一个具有紧致 V 边界的紧致空间区域

边界 $\mathcal{S}$，也就是说，我们有一个半径为 $R = a(t)r$ 的球体，其中 r 是一个无量纲量。将牛顿第二定律与引力（1）相结合，我们得到

$$F = m\ddot{R} = m\ddot{a}r = -\frac{GMm}{R^2}\left[1 + \frac{l_0^2}{R^2}\right]^{-3/2}. \tag{8}$$

接下来，为了推导 FRW 宇宙的弗里德曼方程，我们需要使用 $\mathcal{M}$ ，而不是总质量 M。将 M 替换为 $\mathcal{M}$后，可得 [102]

$$\mathcal{M} = -\frac{\ddot{a}a^2}{G}r^3\left[1 + \frac{l_0^2}{R^2}\right]^{3/2} \tag{9}$$

对于引力质量，我们有

$$\mathcal{M} = 2\int_V dV\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)u^\mu u^\nu. \tag{10}$$

根据这些方程，很容易得到 FRW 宇宙的修正动力学演化方程 [102]

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)\left[1 + \frac{l_0^2}{R^2}\right]^{-3/2}. \tag{11}$$

此外，由于 l_0 是一个非常小的数，我们可以在l_0 [102]附近进行级数展开

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\left(\frac{4\pi G}{3}\right)(\rho + 3p)\left[1 - \frac{3}{2}\frac{l_0^2}{r^2a^2} + ...\right], \tag{12}$$

然后，在方程 (11) 两边乘以 $2\dot{a}a$ ，并利用连续性方程

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}, \tag{13}$$

它是发现，修正后的弗里德曼方程和雷恰杜里方程 [102]

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho\left[1 - \Gamma\rho\right], \tag{14}$$

and

$$\dot{H} - \frac{k}{a^2} = -4\pi G(\rho + p)(1 - 2\Gamma\rho), \tag{15}$$

分别为，其中 $p = \omega\rho$ 和 Γ 定义为

$$\Gamma \equiv \frac{4\pi G\, l_0^2}{3}\left(\frac{1 + 3\omega}{1 + \omega}\right). \tag{16}$$

对于 $\Gamma > 0$，可以发现，弦 T 对偶修正的弗里德曼方程与圈量子引力（LQG）中得到的修正弗里德曼方程具有相似的形式 [112]

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}\left[1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right], \tag{17}$$

其中， ρ_c 是定义为如下形式的临界能量密度

$$\rho_c \equiv \frac{3}{8\pi\gamma^2\lambda^2}, \tag{18}$$

其中， $\lambda \sim 5.2 l_{Pl}^2$ [112] 是设定圈量子引力离散尺度的面积间隙，而 γ 是Immirzi参数。通过令$\Gamma = \rho_c^{-1}$ [101]，即可建立对应关系。不过，两者有一处差异： Γ 不仅取决于零点长度，还取决于状态参数 ω。若设定 $\dot{a} = 0$（$H = 0$），则可得到一个有趣的结果；在这种情况下，我们可以求解方程，得到临界密度 [102]

$$\rho_{\rm c} = \frac{1}{2\Gamma}\left(1 \pm \frac{\sqrt{2G\pi(2G\pi a^2 - 2\Gamma k)}}{2G\pi a}\right). \tag{19}$$

最后一个方程施加了约束 $2G\pi a^2 - 2\Gamma k \geq 0$。求解尺度因子$a = a_{\rm min}$，可得

$$a_{\rm min} = \sqrt{2}\, l_0 \sqrt{\frac{(1+3\omega)\, k}{1+\omega}}. \tag{20}$$

这个方程表明，对于闭宇宙，尺度因子存在一个最小长度；特别是，对于 $\omega = 0$，可得 $a_{\rm min} = \sqrt{2}\, l_0$。对于满足 $k = 0$的平坦宇宙，条件 $\dot{a} \equiv 0$ （$H = 0$）给出 $\rho_{\rm c} = 1/\Gamma$。

另一方面，当 $\Gamma < 0$ 时，修正弗里德曼方程对应于膜宇宙学中的方程 [113–119], ，具体而言，是具有单个 Z_2 对称膜 [113] 的 RS2 情景。 [119] 中的方程 (656) 和 (657) 为

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \Lambda_4 + \frac{8\pi G_4}{3}\rho\left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right) + \frac{\mu}{a^4}, \tag{21}$$

$$\dot{H} - \frac{k}{a^2} = -4\pi G(\rho + p)\left(1 + \frac{\rho}{\sigma}\right) - 2\frac{\mu}{a^4}, \tag{22}$$

其中 H 是膜上的哈勃参数， a 是尺度因子，而 $k = 0,\ \pm 1$ 描述空间曲率。张力 σ 是膜的源点，而能量密度为 ρ、压强为 $p = \omega\rho$ 的宇宙学流体也是如此。参数 Λ_4 和 G_4 分别表示膜上的有效宇宙学常数和牛顿常数。

为了与方程 (14) 和 (15) 进行比较，我们将暗辐射项设为零，并将四维宇宙学常数设为零 $\Lambda_4 = 0$。膜张力被重新解释为$\sigma = 1/(2|\Gamma|)$。

如果我们设定 $\dot{a}=0$ ($H=0$)，便可得到一个有趣的结果；在这种情况下，我们可以求解膜张力方程，得到

$$\sigma_{\mathrm{c}}=-\frac{1}{4\Gamma}\left(1\pm\frac{\sqrt{2G\pi(2G\pi a^{2}-2\Gamma k)}}{2G\pi a}\right). \tag{23}$$

最后一个方程给出了约束 $2G\pi a^{2}-2\Gamma k\geq 0$。求解尺度因子$a=a_{\min}$，可得

$$a_{\min}=\sqrt{2}\,l_{0}\sqrt{\frac{(1+3\omega)\,k}{1+\omega}},\quad \sigma|_{a_{\min}}=-\frac{1}{4\Gamma}. \tag{24}$$

该方程表明，对于闭宇宙，尺度因子存在一个最小长度。特别是，对于 $\omega=0$，可得 $a_{\min}=\sqrt{2}\,l_{0}$。对于满足 $k=0$ 的平坦宇宙，条件 $\bar{a}=0$ ($H=0$) 给出 $\sigma=1/(2|\Gamma|)$。

根据式 (23)，对于满足 $k=-1$ 的开放宇宙，只要 $\Gamma\leq 0$，就可以得到临界膜张力。由于 l_{0} 的量级为普朗克长度，即 $l_{0}\sim l_{Pl}$，其影响只有在短距离下才会变得重要。与最小尺度相对应的临界密度满足$\sigma_{\mathrm{c}}\sim l_{Pl}^{2}$，这或许可以作为自然界中最大膜张力的上限。

在本研究中，我们将区间 $\omega\in[-1,1]$ 视为物理区间。根据式（16），我们有两种情形

$$\begin{cases}\Gamma\leq 0,\ -1<\omega\leq-\frac{1}{3},\ \text{Brane-like scenario}\\ \Gamma\geq 0,\qquad \omega\geq-\frac{1}{3},\qquad \text{LQG-like scenario}\end{cases}. \tag{25}$$

我们看到，在极限 $l_{0}\to 0$下，可得到标准弗里德曼方程。此外，我们可以利用下式推导出修正的Raychaudhuri方程

$$\dot{H}=-H^{2}+\frac{\ddot{a}}{a}. \tag{26}$$

减速参数定义为

$$q=-1-\frac{\dot{H}}{H^{2}}, \tag{27}$$

其中，根据 q 的符号，我们分别可以得到减速或加速情景。如 [101], 所示，修正后的弗里德曼方程具有有趣的含义。为简单起见，取一个满足 $k=0$ 的平坦宇宙，并结合定义 $H_{0}^{2}=8\pi G\rho/3$ ，可写为 [101]

$$H\simeq H_{0}\left(1-\Delta_{GUP}H_{0}^{2}\right), \tag{28}$$

其形式为经广义不确定性原理（GUP）修正的哈勃参数，其中 $\Delta_{GUP} = \alpha l_0^2/2$ [105–109]。由于我们认为宇宙微波背景（CMB）携带着量子引力的印记，这个方程可能对哈勃张力问题有所启示。对于 H，我们可以采用普朗克合作组报告的数值， H =67.40 $\pm$ 0.50 km s^{-1} Mpc^{-1} [103]。另一方面， H_0 可视为未修正的哈勃参数，我们可以采用哈勃空间望远镜（HST）报告的数值， $H_0 = 74.03 \pm 1.42$ km s^{-1} Mpc^{-1} [104]，另见 [110, 111]。

III. 相空间分析

现在我们将演化方程

$$\dot{H} = \frac{k}{a^2} + 4\pi G(\omega + 1)\rho(2\Gamma\rho - 1), \tag{29}$$

$$\dot{\rho} = -3H(1 + \omega)\rho. \tag{30}$$

写成自治动力系统的形式。我们根据 $-1 < \omega \leq -1/3$ 和 $\omega \geq -1/3$是否成立，构造了两个动力系统，并对每个系统的平衡点进行分类，同时讨论其宇宙学含义。

首先，我们求出精确解并得出定性结果。精确解在整个模型类别的演化中发挥着重要作用，可作为宇宙演化过程中的渐近阶段或中间阶段。此外，可以运用动力系统的定性方法，获得与常微分方程自治系统相关的流动性质信息。例如，微分方程定性理论 [122–124] 在宇宙学中有一些应用 [125–127]。

注意，将（13）和 $H = \dot{a}/a$ 代入（29），可得

$$-a\ddot{a} + \dot{a}^2 - 4\pi\rho_0 G(\omega + 1)a^{-6\omega-4}\left(a^{3\omega+3} - 2\Gamma\rho_0\right) + k = 0, \tag{31}$$

其具有第一积分

$$t - t_U = \int_1^a \left(\frac{8}{3}G\pi\rho_0\left(s^{3\omega+3} - \Gamma\rho_0\right)s^{-6\omega-4} + c_1 s^2 - k\right)^{-\frac{1}{2}} ds \tag{32}$$

其中我们用 t_U 表示宇宙年龄，并令 $a(t_U) = 1$ 为尺度因子的当前值， ρ_0 为能量密度的当前值。积分常数

c_1 满足

$$c_1 = \dot{a}^2(t_U) + \frac{8}{3}\pi G\rho_0(\Gamma\rho_0 - 1) + k. \tag{33}$$

因此，该系统是可积的。

现在我们关注这些解的渐近行为。根据 Γ的符号，我们分别考虑两种情况。

A. $\Gamma \leq 0$

这一情形　对应于 $-1 < \omega \leq -\frac{1}{3}$。于是，弗里德曼方程（14）变为

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{8\pi G}{3}|\Gamma|\rho^2, \tag{34}$$

对于闭宇宙，我们令 $k = +1$。

（34）式左右两边的量均为非负。因此，我们可以定义无量纲变量

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3D^2}\rho,\ \Omega_k = \frac{k}{a^2D^2},\ Q = \frac{H}{D},\ D = \sqrt{H^2 + \frac{k}{a^2}}, \tag{35}$$

其中 $(\Omega,\Omega_k,Q) \in [0,1]\times[0,1]\times[-1,1]$，并满足

$$\frac{3|\Gamma|\Omega^2H^2}{8\pi G} = (1-\Omega)(1-\Omega_k), \tag{36}$$

$$Q^2 + \Omega_k = 1. \tag{37}$$

引入时间导数

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{H^2 + ka^{-2}}}\dot{f}, \tag{38}$$

我们得到动力系统

$$\frac{d\Omega_k}{d\tau} = Q\Omega_k(-3\omega(\Omega-2) - 3\Omega + 4), \tag{39}$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = -3Q(\omega+1)(\Omega-1)\Omega, \tag{40}$$

$$\frac{dQ}{d\tau} = \frac{1}{2}\Omega_k(3\omega(\Omega-2) + 3\Omega - 4). \tag{41}$$

利用方程　将方程 (37) 作为 Ω_k 的定义，我们得到约化动力系统

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = -3Q(\omega+1)(\Omega-1)\Omega, \tag{42}$$

$$\frac{dQ}{d\tau} = \frac{1}{2}(1-Q^2)(3\omega(\Omega-2) + 3\Omega - 4). \tag{43}$$

定义在相平面上

$$\{(\Omega, Q) \in [0,1] \times [-1,1]\}. \tag{44}$$

系统（42）和（43）存在第一积分

$$Q(\tau)^2 - 1 = e^{-\frac{c_1}{3(\omega+1)}}(1-\Omega(\tau))^{-\frac{3\omega+1}{3(\omega+1)}}\Omega(\tau)^{\frac{2(3\omega+2)}{3(\omega+1)}}, \tag{45}$$

其中 c_1 是一个积分常数。

于是，由（42）可得方程

$$\Omega'(\tau) = -3(\omega+1)\epsilon(\Omega(\tau)-1)\Omega(\tau)\sqrt{1+e^{-\frac{c_1}{3\omega+3}}(1-\Omega(\tau))^{\frac{2}{3(\omega+1)}-1}\Omega(\tau)^{2-\frac{2}{3(\omega+1)}}}, \tag{46}$$

其中 $\epsilon = \pm 1$ 是初始值 $H(0)$ 的符号。最后，我们得到以下求积:

$$\tau = \pm\frac{c_2 - \int_1^{\Omega}\frac{1}{(\xi-1)\xi\sqrt{e^{-\frac{c_1}{3\omega+3}}(1-\xi)^{\frac{2}{3(\omega+1)}-1}\xi^{2-\frac{2}{3(\omega+1)}}+1}}d\xi}{3(\omega+1)}, \tag{47}$$

其中 c_2 是一个积分常数。

方程 (45) 表明可以定义函数

$$Z(\Omega, Q) := (1-\Omega)^{\frac{3\omega+1}{3(\omega+1)}}\Omega^{-\frac{2(3\omega+2)}{3(\omega+1)}}\left[1-Q^2\right], \tag{48}$$

该函数满足 $Z' = 0$，意味着 $Z(\Omega\ Q) = c$ 其中 c 为常数。由此方程可知，渐近解满足 $\Omega \to 1$，或 $\Omega \to 0$，或 $Q^2 \to 1$。

参数区域 $-1 < \omega \leq -\frac{1}{3}$ 内，系统 (42) 和 (43) 的平衡点列于表 I

平衡点如下。

P_1: $(\Omega\ Q) = (0, -1)$，始终存在。它对应一个平直收缩解，当 $-1 < \omega < -\frac{2}{3}$时为鞍点，当 $-\frac{2}{3} < \omega < -\frac{1}{3}$时为汇点。

P_2: $(\Omega\ Q) = (0, 1)$，始终存在。它对应一个平坦膨胀解，当 $-1 < \omega < -\frac{2}{3}$时为鞍点，当 $-\frac{2}{3} < \omega < -\frac{1}{3}$时为源点。

P_3: $(\Omega\ Q) = (1, -1)$，始终存在。它对应一个平坦的收缩物质主导解，是 $-1 < \omega < -\frac{1}{3}$ 的源点，并模拟精质流体。

P_4: $(\Omega\ Q) = (1,1)$，始终存在。它对应一个平坦的膨胀物质主导解，是 $-1 < \omega < -\frac{1}{3}$ 的汇点，并模拟精质流体。

P_5: $(\Omega\ Q) = \left(2 - \frac{2}{3(\omega+1)}\ \ 0\right)$ 在 $-\frac{2}{3} < \omega \leq -\frac{1}{3}$时存在。它对应于爱因斯坦静态宇宙，且是一个鞍点。

标签	Ω	Q	存在性	k_1	k_2	稳定性
P_1	0	-1	始终	$-3(\omega+1)$	$-2(3\omega+2)$	汇点，适用于 $-\frac{2}{3}<w<-\frac{1}{3}$ 鞍点，适用于 $-1<\omega<-\frac{2}{3}$
P_2	0	1	始终	$3(\omega+1)$	$2(3\omega+2)$	源点，适用于 $-\frac{2}{3}<w<-\frac{1}{3}$ 鞍点用于 $-1<\omega<-\frac{2}{3}$
P_3	1	-1	始终	$-(3\omega+1)$	$3(\omega+1)$	源点用于 $-1<\omega<-\frac{1}{3}$
P_4	1	1	始终	$3\omega+1$	$-3(\omega+1)$	的汇点 $-1<\omega<-\frac{1}{3}$
P_5	$2-\frac{2}{3(\omega+1)}$	0	$-\frac{2}{3}<\omega\leq-\frac{1}{3}$	$-\sqrt{-(3\omega+1)(3\omega+2)}$	$\sqrt{-(3\omega+1)(3\omega+2)}$	鞍点

表 I：参数区域 $-1<\omega\leq-\frac{1}{3}$ 内系统 (42) 和 (43) 的平衡点。

最后，对于 $\omega=-\frac{2}{3}$，我们有平衡点线 $\Omega=0,\ -1\leq Q\leq 1$，其特征值为 $\{0,Q\}$。当 $Q<0$ 时，这条线稳定；当 $Q>0.$ 时，这条线不稳定。对于 $\omega=-\frac{1}{3}$，我们有平衡点线 $\Omega=1,\ -1\leq Q\leq 1$，其特征值为 $\{0,-2Q\}$。当 $Q>0$ 时，这条线稳定；当 $Q<0.$ 时，这条线不稳定。

B. $\Gamma\geq 0$

这一 种情况对应于 $\omega\geq-\frac{1}{3}$。于是，弗里德曼方程 (14) 变为

$$H^2+\frac{k}{a^2}+\frac{8\pi G}{3}\Gamma\rho^2=\frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{49}$$

其中，对于闭 合宇宙，我们设定 $k=+1$。演化方程为 (29) 和 (30)

式 (49) 左右两边的量均为非负数。因此，我们可以定义无量纲变量

$$\tilde{Q}=\frac{H}{\tilde{D}},\ \tilde{\Omega}=\Gamma\rho,\ \tilde{\Omega}_k=\frac{k}{a^2\tilde{D}^2},\ \tilde{D}=\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho}, \tag{50}$$

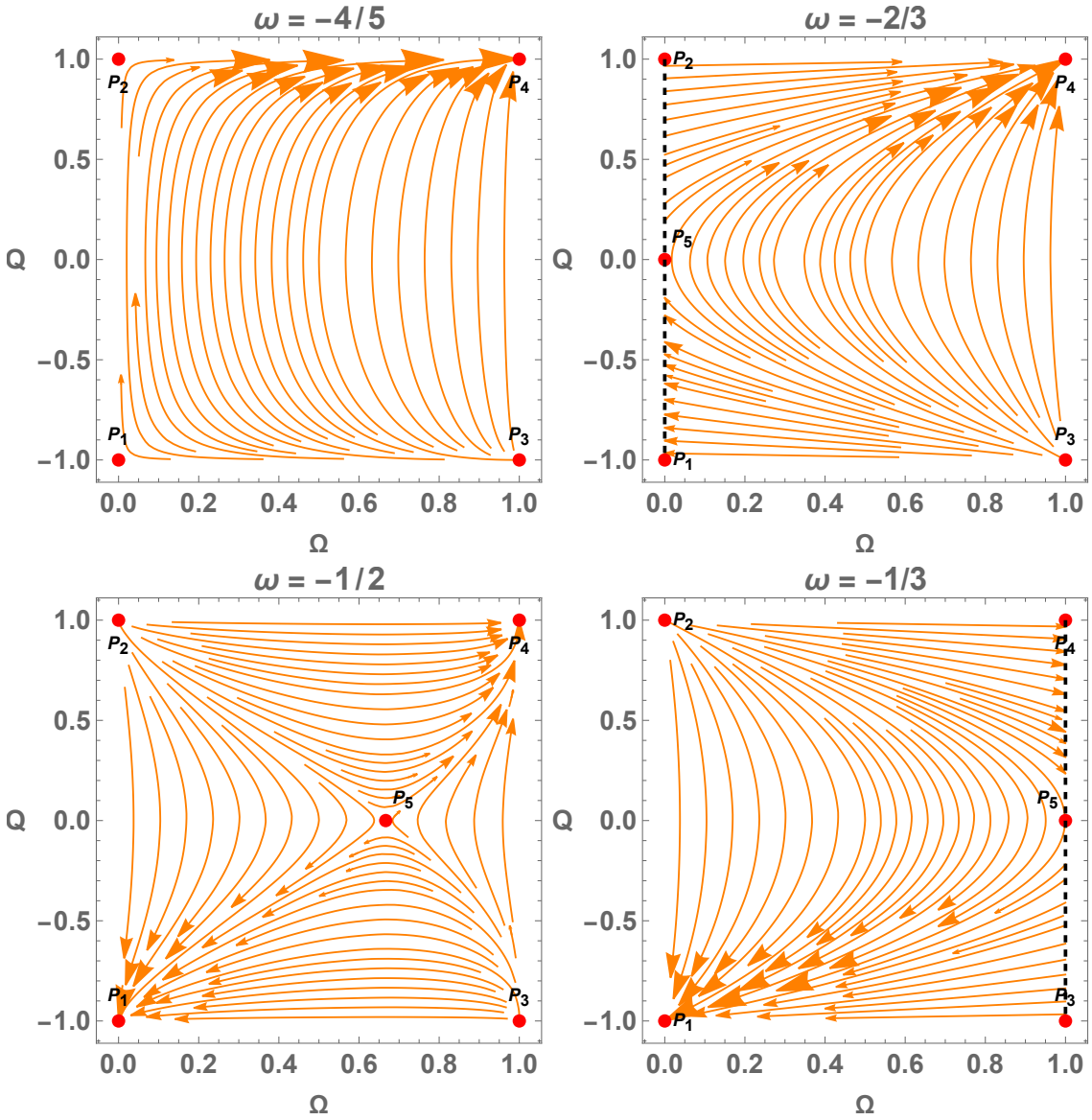


图1：系统 (42)、(43) 在参数 ω. 取不同值时的相图

约束 (49) 变为

$$\tilde{Q}^2 + \tilde{\Omega}_k + \tilde{\Omega} = 1. \tag{51}$$

引入时间导数

$$\frac{df}{d\eta} = \tilde{D}^{-1}\dot{f}, \tag{52}$$

标签	$\tilde{Q}$	$\tilde{\Omega}_k$	存在性	k_1	k_2	稳定性
Q_1	-1	0	始终	$3(\omega+1)$	$-(3\omega+1)$	$\omega > -\frac{1}{3}$的鞍点
Q_2	1	0	始终	$-3(\omega+1)$	$3\omega+1$	$\omega > -\frac{1}{3}$的鞍点
Q_3	0	$\frac{3(\omega+1)}{6\omega+4}$	$\omega \geq -\frac{1}{3}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{-((\omega+1)(3\omega+1))}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{-((\omega+1)(3\omega+1))}$	$\omega > -\frac{1}{3}$的中心

表 II：参数区域 $\omega \geq -\frac{1}{3}$ 内系统 (56) 和 (57) 的平衡点。非双曲

表示非双曲型

我们得到动力系统

$$\frac{d\tilde{Q}}{d\eta} = \frac{3}{2}(\omega+1)\left(\tilde{Q}^2 + 2\tilde{\Omega} - 1\right) + \tilde{\Omega}_k, \tag{53}$$

$$\frac{d\tilde{\Omega}_k}{d\eta} = \tilde{Q}(3\omega+1)\tilde{\Omega}_k, \tag{54}$$

$$\frac{d\tilde{\Omega}}{d\eta} = -3\tilde{Q}(\omega+1)\tilde{\Omega}. \tag{55}$$

将式 (51) 作为 Ω 的定义，我们得到约化系统

$$\frac{d\tilde{Q}}{d\eta} = \tilde{\Omega}_k - \frac{3}{2}(\omega+1)\left(\tilde{Q}^2 + 2\tilde{\Omega}_k - 1\right), \tag{56}$$

$$\frac{d\tilde{\Omega}_k}{d\eta} = (3\omega+1)\tilde{Q}\tilde{\Omega}_k, \tag{57}$$

定义在相空间中

$$\left\{(\tilde{Q}, \tilde{\Omega}_k) \in [-1,1]\times[0,1] : \tilde{Q}^2 + \tilde{\Omega}_k \leq 1\right\}. \tag{58}$$

参数区域 $\omega\omega \geq -\frac{1}{3}$ 内系统 (56) 和 (57) 的平衡点列于表 II。

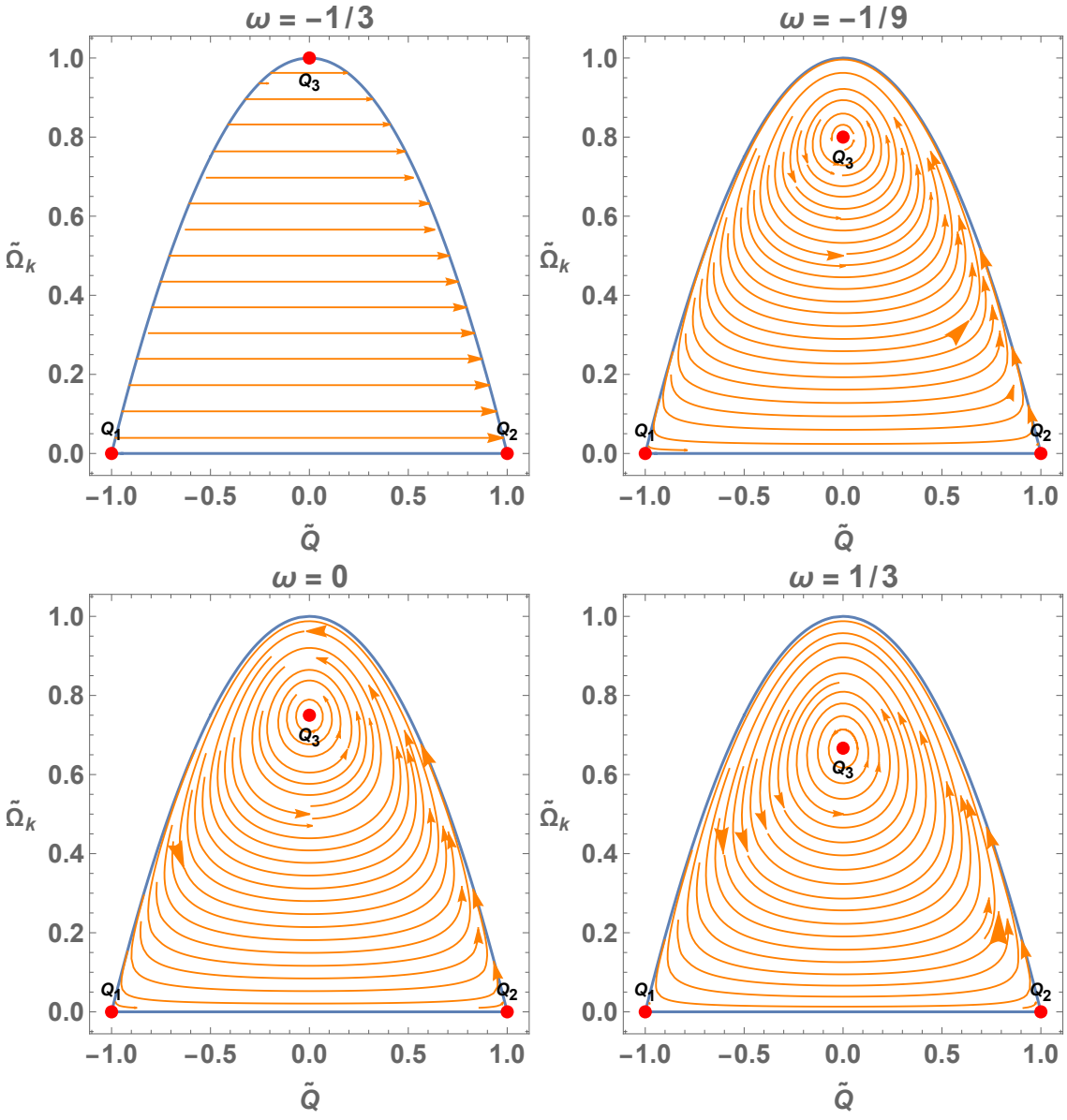
此情形下的平衡点如下。

Q_1：$\left(\tilde{Q}, \tilde{\Omega}_k\right) = (-1, 0)$ 始终存在。它对应于一个平直收缩解。特征值为 $3(\omega+1)$ 和 $-(3\omega+1)$，因此对于 $\omega > -\frac{1}{3}$，它是一个鞍点。

Q_2：$\left(\tilde{Q}, \tilde{\Omega}_k\right) = (1, 0)$ 始终存在。它对应于一个平直膨胀解。特征值为 $-3(\omega+1)$ 和 $3\omega+1$，因此对于 $\omega > -\frac{1}{3}$，它是一个鞍点。

Q_3：$\left(\tilde{Q}, \tilde{\Omega}_k\right) = \left(0, \frac{3(\omega+1)}{6\omega+4}\right)$，当 $\omega \geq -\frac{1}{3}$ 时存在。特征值为 $-\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{-((\omega+1)(3\omega+1))}$ 和 $\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{-((\omega+1)(3\omega+1))}$。~~它对应于爱因斯坦静态宇宙~~，对于 $\omega > -\frac{1}{3}$ 是一个中心（非双曲型）。

最后，对于 $\omega = -1/3$，我们得到一条平衡点线 $\tilde{Q}^2 + \tilde{\Omega}_k = 1$，其特征值为 $\{0, -2Q\}$；当 $Q < 0$ 时不稳定，当 $Q > 0$ 时稳定。



FI图 2：系统 (56)、(57) 在参数 w. 的不同取值下的相图

IV. 总结

在本研究中，我们对描述早期宇宙演化的修正 Friedmann 方程进行了详细的相空间分析。这些修正的 Friedmann 方程源自 Verlinde 熵力与涌现力情景，并通过最小长度效应体现弦 T-对偶效应。这些修正的主要影响之一是早期宇宙的初始奇点。特别是，如 [102]，所示，量子引力效应避免了初始奇点的出现。

这可以用存在一个最小长度尺度 l_0 来解释。若令 $\dot{a}=0$ ($H=0$)，则可以得到一个有趣的结果：对于 $\Gamma>0$，收缩过程（或坍缩物质）会在某个临界距离 $\sqrt{2}l_0$ 和某个临界密度 $\rho_{\rm c}$ 处停止（在圈量子引力情景中）。这种状态预计是不稳定的，并提供了一种自然产生早期膨胀宇宙的方式。然而，在这种情况下，对于 $\Gamma<0$，我们可以求解膜张力方程，得到式 (23)，该式施加了约束$2G\pi a^2-2\Gamma k\geq 0$。求解尺度因子 $a=a_{\rm min}$，可知对于闭宇宙，尺度因子存在一个最小长度；特别是对于 $\omega=0$，我们得到$a_{\rm min}=\sqrt{2}\,l_0$。对于具有 $k=0$ 的平坦宇宙，条件 $\dot{a}=0$ ($H=0$) 给出 $\sigma=1/(2|\Gamma|)$。

根据式（23），对于具有 $k=-1$ 的开放宇宙，只要满足 $\Gamma<0$，便可得到临界膜张力。由于 l_0 的量级为普朗克长度，即 $l_0\sim l_{Pl}$，其影响仅在短距离尺度上才会变得显著。对应于最小尺度的临界密度为 $\sigma_{\rm c}\sim l_{Pl}^2$，这或许可以构成自然界最大密度的一个上限。

此外，我们根据 $-1<\omega\leq -1/3$ 和 $\omega\geq -1/3$ 是否成立，构建了两个动力系统，并对每个系统的平衡点进行了分类。最后，我们讨论了精确解及其宇宙学含义。

在此，我们首先研究了 $\Gamma\leq 0$ 情形下的相空间分析，或者等价地，研究了对应于 $-1<\omega\leq -\frac{1}{3}$ 的情形。在这一情形下，当 $\Gamma\leq 0$ 时，我们可以将修正弗里德曼方程解释为与膜宇宙学中 [113–119]，对应的方程——值得注意的是，这是在具有单个 Z_2 对称膜的 RS2 情景下。此外，在所呈现的状态方程取值范围内，物质场表现为精质流体。我们的模型模拟了束缚在 FLRW-RS2 膜世界上的标量场所产生的效应 [120, 121]。

除此之外，我们还发现了以下平衡点： P_1 ，对应于平直收缩解；当 $-1<\omega<-\frac{2}{3}$ 时是鞍点，当 $-\frac{2}{3}<\omega<-\frac{1}{3}$时是汇点； P_2，对应于平坦膨胀解；当$-1<\omega<-\frac{2}{3}$ 时是鞍点，当 $-\frac{2}{3}<\omega<-\frac{1}{3}$时是源点； P_3，对应于平直收缩的物质主导解；当$-1<\omega<-\frac{1}{3}$时是源点，并且它模拟精质流体； P_4，对应于平直膨胀的物质主导解；当 $-1<\omega<-\frac{1}{3}$时是汇点，并且它模拟精质流体；以及 P_5，该点在$-\frac{2}{3}<\omega\leq -\frac{1}{3}$时存在，对应于爱因斯坦静态宇宙，且为鞍点。

随后，我们更详细地阐述了区域 $\Gamma \geq 0$，或等价地说，区域 $\omega \geq -\frac{1}{3}$（圈量子引力宇宙学）。在这种情况下，我们发现了以下平衡点： Q_1，对应于平直收缩解，且当 $\omega > -\frac{1}{3}$时为鞍点； Q_2，对应于平直膨胀解，且当 $\omega > -\frac{1}{3}$ 时为鞍点；以及 Q_3，对应于爱因斯坦静态宇宙，且当 $\omega > -\frac{1}{3}$时为中心（非双曲型）。重要的发现是，量子引力效应可以为生成动力学早期宇宙提供一种自然途径。

致谢

ADM获得了国家研究与发展署（ANID）人力资本副司/国家博士项目/2020年度，项目编号21200837；论文项目运营费用/2022年度，项目编号242220121；以及北方天主教大学研究与技术发展副校长办公室（Vridt）的资助。GL通过2022年度研究访问奖学金竞赛、Vridt第040/2022号决议和第054/2022号决议获得资助。他还感谢微分几何与应用研究中心（Núcleo de Investigación Geometría Diferencial y Aplicaciones）根据Vridt第096/2022号决议提供的支持。

[1] A. G. Riess等 [超新星搜寻团队], 《天文学杂志》**116** (1998), 1009-1038.[2] S. Perl mutter等 [超新星宇宙学项目], 《自然》**391** (1998), 51-54.[3] S. Perlmutter等 [超新星宇宙学项目], 《天体物理学杂志》**517** (1999), 565-586.[4] S. M. Carroll, W. H. Press 和 E. L. Turner, 《天文学与天体物理学年评》**30** (1992), 499-542.[5] P. Salucci, 《基础物理学》**48** (2018) no.10, 1517-1537[6]J. C. Mather, E. S. Cheng, R. A. Shafer, C. L. Bennett, N. W. Boggess, E. Dwek, M. G. Hauser, T. Kelsall, S. H. Moseley, Jr. 和 R. F. Silverberg, 等《天体物理学杂志通讯》**354** (1990), L37-L40.[7] J. C. Mather, D. J. Fixsen, R.A. Shafer, C.Mosier 和 D. T. Wilkinson, 《天体物理学杂志》**512**(1999), 511-520.[8] C. L. Bennett等 [威尔金森微波各向异性探测器], 《天体物理学杂志增刊》**148** (2003), 1-27.

[9] P. A. R. Ade 等。 [Planck],《天文学与天体物理学》571（2014），A23。[10] F. Beutler、C. Blake、M. Colless、D. H. Jones、L. Staveley-Smith、L. Campbell、Q. Parker、W. Saunders 和 F. Watson，《皇家天文学会月报》416（2011），3017-3032。[11] B. Ratra 和 P. J. E. Peebles，《物理评论D》37（1988），3406。[12] P. J. E. Peebles 和 B. Ratra，《天体物理学杂志通讯》325（1988），L17。[13] K. Coble、S. Dodelson 和 J. A. Frieman，《物理评论D》55（1997），1851-1859。[14] M. S. Turner 和 M. J. White，《物理评论D》56（1997）第8期，R4439。[15] R. R. Caldwell、R. Dave 和 P. J. Steinhardt，《物理评论快报》80（1998），1582-1585。[16] K. Dutta、S. Panda 和 A. Patel，《物理评论D》94（2016）第2期，024016。[17] E. N. Saridakis 和 M. Tsoukalas，《物理评论D》93（2016）第12期，124032。[18] H. Sheikhahmadi、E. N. Saridakis、A. Aghamohammadi 和 K. Saaidi，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》10（2016），021。[19] R. Garcia-Salcedo 和 N. Breton，《国际现代物理学杂志A辑》15（2000），4341-4354。[20] C. S. Camara、M. R. de Garcia Maia、J. C. Carvalho 和 J. A. S. Lima，《物理评论D》69（2004），123504[21] E. Elizalde、J. E. Lidsey、S. Nojiri 和 S. D. Odintsov，《物理快报B辑》574（2003），1-7。[22] C. Quercellini、M. Bruni、A. Balbi 和 D. Pietrobon，《物理评论D》78（2008），063527。[23] Y. F. Cai、E. N. Saridakis、M. R. Setare 和 J. Q. Xia，《物理学报告》493（2010），1-60[24] E. N. Saridakis 和 S. V. Sushkov，《物理评论D》81（2010），083510。[25] E. N. Saridakis，《欧洲物理学杂志C辑》67（2010），229-235[26] G. Leon 和 E. N. Saridakis，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》11（2009），006[27] N. Breton、R. Lazkoz 和 A. Montiel，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》10（2012），013[28] C. Xu、E. N. Saridakis 和 G. Leon，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》07（2012），005。[29] G. Leon 和 E. N. Saridakis，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》03（2013），025。[30] G. Leon、J. Saavedra 和 E. N. Saridakis，《经典与量子引力》30（2013），135001。[31] G. Kofinas、G. Leon 和 E. N. Saridakis，《经典与量子引力》31（2014），175011。[32] G. Leon、Y. Leyva 和 J. Socorro，《物理快报B辑》732（2014），285-297。[33] C. R. Fadragas、G. Leon 和 E. N. Saridakis，《经典与量子引力》31（2014），075018。[34] G. Leon 和 E. N. Saridakis，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》11（2015），009。[35] G. Pulgar、J. Saavedra、G. Leon 和 Y. Leyva，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》05（2015），046。[36] G. Leon 和 E. N. Saridakis，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》04（2015），031。

[37] A.Giacomini, S.Jamal, G. Leon, A. Paliathanasisand J.Saavedra, 《物理评论D》 95 (2017年) no.12, 124060.[38] A. Joyce, L. Lombriser and F. Schmidt, 《核与粒子科学年评》 66 (2016年), 95-122.[39] S. Tsujikawa, 《经典与量子引力》 30 (2013年), 214003.[40] S. Nojiri, S. D. Odintsov and V. K. Oikonomou, 《物理学报告》 692 (2017年), 1-104.[41] S. Lepe, G. Otalora and J. Saavedra, 《物理评论D》 96 (2017年) no.2, 023536.[42] T. Harko, F. S. N. Lobo, G. Otalora and E. N. Saridakis, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》 12 (2014年), 021.[43] G. Otalora, 《物理评论D》 88 (2013年), 063505.[44] G. Otalora, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》 07 (2013年), 044.[45] L. Karpathopoulos, S. Basilakos, G. Leon, A. Paliathanasis and M. Tsamparlis, 《广义相对论与引力》 50 (2018年) no.7, 79..[46] O. Akarsu and T. Dereli, 《广义相对论与引力》 45 (2013年), 1211-1226..[47] O. Akarsu, T. Dereli, N. Katırcı and M. B. Sheftel, 《广义相对论与引力》 47 (2015年) no.5, 61.[48] O. Akarsu and T. Dereli, 《国际理论物理学杂志》 51 (2012年), 612-621.[49] D. Grasso and H. R. Rubinstein, 《物理学报告》 348 (2001年), 163-266.[50] D. Garrison, [arXiv:1608.01005 [astro-ph.CO]].[51] J. D. Finke, L. C. Reyes, M. Georganopoulos, K. Reynolds, M. Ajello, S. J. Fegan and K. McCann, 《天体物理学杂志》 814 (2015年) no.1, 20.[52] Z. Haba, A. Stachowski and M. Szyd-lowski, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》 07 (2016年), 024.[53] A. Stachowski and M. Szyd-lowski, 《欧洲物理学杂志C辑》 76 (2016年) no.11, 606.[54] O. Hrycyna, M. Szyd-lowski and M. Kamionka, 《物理评论D》 90 (2014年) no.12, 124040.[55] M. Szydlowski, 《天体物理与空间科学》 339 (2012年), 389-399.[56] M. Szydlowski and O. Hrycyna, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》 01 (2009年), 039.[57] M. P. Dabrowski, T. Stachowiak and M. Szydlowski, 《物理评论D》 68 (2003年), 103519.[58] M. Szyd-lowski, A. Krawiec, A. Kurek and M. Kamionka, 《欧洲物理学杂志C辑》 75 (2015年) no.99, 5.[59] M. Szydlowski, A. Kurek and A. Krawiec, 《物理快报B辑》 642 (2006年), 171-178.[60] W. Godlowski and M. Szydlowski, 《物理快报B辑》 623 (2005年), 10-16.[61] M. Szydlowski, 《物理快报B辑》 632 (2006年), 1-5.[62] R. Garcia-Salcedo, T. Gonzalez and I. Quiros, 《物理评论D》 89 (2014年) no.8, 084047.[63] J. D. Barrow, 《物理快报B辑》 235 (1990年), 40-43 doi:10.1016/0370-2693(90)90093-L

[64] J. D. Barrow and P. Saich, 《物理快报B辑》 249 (1990年), 406-410.[65] J. D. Barrow and N. J. Nunes, 《物理评论D》 76 (2007年), 043501.[66] S. del Campo and R. Herrera, 《物理快报B辑》 670 (2009年), 266-270.[67] A. Cid and S. del Campo, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》 01 (2011年), 013.[68] A. Cid and S. del Campo, AIP会议论文集 1471 (2012年), 114-117.[69] R. Herrera, M. Olivares and N. Videla, 《欧洲物理学杂志C辑》 73 (2013年) no.1, 2295.[70] A. Cid, G. Leon and Y. Leyva, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》 02 (2016年), 027.[71] M. Kierdorf et al., 《天文学与天体物理学》 600, id.A18 (2017年).[72] R. Jimenez and A. Loeb, 《天体物理学杂志》 573 (2002年), 37-42.[73] M. Moresco, A. Cimatti, R. Jimenez, L. Pozzetti, G. Zamorani, M. Bolzonella, J. Dunlop, F. Lamareille, M. Mignoli and H. Pearce, et al. 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》 08 (2012年), 006.[74] J. Magana, M. H. Amante, M. A. Garcia-Aspeitia and V. Motta, 《皇家天文学会月报》 476 (2018年) no.1, 1036-1049.[75] T. Jacobson, 《物理评论快报》 75 (1995年), 1260-1263.[76] M. Akbar and R. G. Cai, 《物理评论D》 75 (2007年), 084003.[77] R. G. Cai and L. M. Cao, 《物理评论D》 75 (2007年), 064008.[78] R. G. Cai and S. P. Kim, 《高能物理学杂志》 02 (2005年), 050.[79] B. Wang, E. Abdalla and R. K. Su, 《现代物理快报 A》 17 (2002年), 23-30.[80] B. Wang, E. Abdalla and R. K. Su, 《物理快报B辑》 503 (2001年), 394-398.[81] R. G. Cai and Y. S. Myung, 《物理评论D》 67 (2003年), 124021.[82] R. G. Cai, L. M. Cao and Y. P. Hu, 《高能物理学杂志》08 (2008年), 090.[83] S. Nojiri and S. D. Odintsov, 《广义相对论与引力》 38 (2006年), 1285-1304.[84] A. Sheykhi, B. Wang and R. G. Cai, 《核物理 B》 779 (2007年), 1-12.[85] A. Sheykhi, B. Wang and R. G. Cai, 《物理评论D》 76 (2007年), 023515.[86] A. Sheykhi, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》 05 (2009年), 019.[87] A. Sheykhi and B. Wang, 《物理快报B辑》 678 (2009年), 434-437.[88] A. Sheykhi, 《欧洲物理学杂志C辑》 69 (2010年), 265-269.[89] A. Sheykhi, 《经典与量子引力》 27 (2010 年), 025007.[90] E. P. Verlinde, 《高能物理学杂志》 04 (2011年), 029.[91] E. P. Verlinde, 《SciPost物理学》 2 (2017年) no.3, 016.[92] T. Padmanabhan, 《现代物理快报 A》 25 (2010年), 1129-1136.

[93] T. Padmanabhan, [arXiv:1206.4916 [hep-th]].[94] R. G. Cai, 《高能物理学杂志》11（2012），016。[95] K. Yang、Y. X. Liu 和 Y. Q. Wang, 《物理评论D》86（2012），104013。[96] A. Sheykhi, 《物理评论D》87（2013）第6期，061501[97] T. Padmanabhan, 《物理评论快报》78（1997），1854–1857。[98] P. Nicolini、E. Spallucci 和 M. F. Wondrak, 《物理快报B辑》797（2019），134888。[99] P. Nicolini, 《广义相对论与引力》54（2022）第9期，106。[100] P. Gaete、K. Jusufi 和 P. Nicolini, 《物理快报B辑》835（2022），137546。[101] K. Jusufi, 《宇宙》9（2023）第1期，41。[102] K. Jusufi 和 A. Sheykhi, 《物理快报B辑》836（2023），137621。[103] N. Aghanim 等人 [Planck], 《天文学与天体物理学》641（2020），A6 [勘误：《天文学与天体物理学》652（2021），C4][104] A. G. Riess、S. Casertano、W. Yuan、L. M. Macri 和 D. Scolnic, 《天体物理学杂志》876（2019）第1期，85。[105] M. Maggiore, 《物理快报B辑》304（1993），65–69。[106] S. Hossenfelder, 《Living Rev. Rel.》16（2013），2[107] S. Aghababaei、H. Moradpour 和 E. C. Vagenas, 《欧洲物理学杂志 Plus》136（2021）第10期，997。[108] A. Giacomini、G. Leon、A. Paliathanasis 和 S. Pan, 《欧洲物理学杂志C辑》80（2020）第10期，931[109] A. Paliathanasis 和 G. Leon, 《广义相对论与引力》55（2023）第1期，12[110] M. G. Dainotti、B. De Simone、T. Schiavone、G. Montani、E. Rinaldi 和 G. Lambiase, 《天体物理学杂志》912（2021）第2期，150。[111] M. G. Dainotti、B. De Simone、T. Schiavone、G. Montani、E. Rinaldi、G. Lambiase、M. Bog-dan 和 S. Ugale，Galaxies 10（2022）第1期，24。[112] A. Ashtekar 和 D. Sloan, 《广义相对论与引力》43（2011），3619–3655。[113] L. Randall 和 R. Sundrum, 《物理评论快报》 83 （1999），3370–3373[114] P. Binetruy 、 C. Deffayet 、U. Ellwanger 和 D. Langlois, 《物理快报B辑》477（2000），285–291。[115] P. Binetruy、C. Deffayet 和 D. Langlois, 《核物理 B》565（2000），269–287[116] P. Bowcock、C. Charmousis 和 R. Gregory, 《经典与量子引力》17（2000），4745–4764[117] R. Maartens, 《Living Rev. Rel.》7（2004），7[118] P. Brax、C. van de Bruck 和 A. C. Davis, 《Rept. Prog. Phys.》67（2004），2183–2232[119] T. Clifton、P. G. Ferreira、A. Padilla 和 C. Skordis, 《物理学报告》513（2012），1–189

[120] Y. Leyva、D. Gonzalez、T. Gonzalez、T. Matos 和 I. Quiros，《物理评论D》**80**（2009），044026[121] D. Escobar、C. R. Fadragas、G. Leon 和 Y. Leyva，《经典与量子引力》**29**（2012），175005[122] S. Wiggins，《应用非线性动力系统与混沌导论》。施普林格（2003年）。[123] L. Perko，《微分方程与动力系统，第三版》（施普林格出版社，纽约，2001年），第272–273页和第281–282页。[124] M. W. Hirsch 和 S. Smale，《微分方程、动力系统与线性代数》。纽约：学术出版社（1974年）。[125] R. Tavakol，《动力系统导论》，第4章，第一部分，第84–98页，剑桥大学出版社，英格兰剑桥，（1997年）。[126] A. A. Coley，2003年，《动力系统与宇宙学》（克吕维尔学术出版社，多德雷赫特：ISBN 1-4020-1403-1）。[127] A. A. Coley，[arXiv:gr-qc/9910074 [gr-qc]]。