arXiv:2302.00231v2 [math.FA] 4 Mar 2024

狄利克雷多项式空间的投影常数

A. DEFANT、D. GALICER、M. MANSILLA、M. MASTYŁO 和 S. MURO

摘要。给定一个频率序列 $\omega = (\omega_n)$ 和一个有限子集 $J \subset \mathbb{N}$，我们研究由所有狄利克雷多项式 $D(s) := \sum_{n\in J} a_n e^{-\omega_n s}$（$s \in \mathbb{C}$）构成的空间 $\mathscr{H}_\infty(\omega)$。主要目标是证明有限维巴拿赫空间 $\mathscr{H}_\infty^J(\omega)$ 配备范数 $\|D\| = \sup_{\mathrm{Re}\, s>0} |D(s)|$ 后，其投影常数 $\lambda\big(\mathscr{H}_\infty^J(\omega)\big)$ 的渐近正确估计。基于 ω-狄利克雷群上的调和分析，我们证明公式 $\lambda\big(\mathscr{H}_\infty(\omega)\big) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Big|\sum_{n\in J} e^{-i\omega_n t}\Big| dt$，并将其应用于各种具体频率 ω 和指标集 J。举例来说，结合 Harper 在概率解析数论领域近期的一项深刻结果，对于由长度为 x 的所有普通狄利克雷多项式 $D(s) = \sum_{n\le x} a_n n^{-s}$ 构成的空间 $\mathscr{H}_\infty^{\le x}\big((\log n)\big)$，我们证明其投影常数的阶为 $\lambda\big(\mathscr{H}_{x_\infty}^{\le}\big((\log n)\big)\big) \sim \sqrt{x}/(\log\log x)^{\frac{1}{4}}$，且该阶渐近正确。

引言

巴拿赫空间中可补子空间及其投影常数的研究历史悠久，可以追溯到巴拿赫空间算子理论的开端。回顾一下，若X是巴拿赫空间Y的闭子空间，则X在Y中的相对投影常数定义为

$$\lambda(X,Y) = \inf\big\{\|P\| : P \in \mathscr{L}(Y,X),\ P|_X = \mathrm{id}_X\big\},$$

其中，id_X是X上的恒等算子；按惯例，$\mathscr{L}(U,V)$表示U与V之间所有有界线性算子构成的巴拿赫空间，其范数为一致范数。这里采用约定 $\inf \emptyset = \infty$。

以下直接的结果揭示了投影常数与线性算子延拓之间的密切联系：对任意巴拿赫空间Y及其子空间X，均有

$$\lambda(X,Y) = \text{下确界}\big\{c > 0 : \forall\, T \in \mathscr{L}(X,Z)\ \ \exists \text{是一个扩张 } \widetilde{T} \in \mathscr{L}(Y,Z),\ \text{且满足 } \|\widetilde{T}\| \le c\|T\|\big\},$$

2020 数学主题分类。 主要分类：30B50、43A77、46B06。次要分类：46B07；46B07；46G25。关键词和短语。 狄利克雷级数空间、投影常数。第四位作者的研究得到波兰国家科学中心（NCN）资助，项目编号 2019/33/B/ST1/00165；第二、第三和第五位作者得到 CONICET-PIP 11220200102336 和 PICT 2018-4250 资助。第五位作者的研究还得到 ING-586-UNR 资助。

其中Z是任意巴拿赫空间。此外，巴拿赫空间X的（绝对）投影常数定义为

$$\boldsymbol{\lambda}(X) := \sup \boldsymbol{\lambda}(I(X), Y),$$

其中，上确界取遍所有满足以下条件的巴拿赫空间 Y：存在一个等距嵌入$I\colon X \to Y$，使得 $I(X)$ 在 Y中可补。

频率 $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个严格递增的非负实数列，满足 $\omega_n \to \infty$ 当$n \to \infty$。给定有限指标集 $J \subset \mathbb{N}$和复数 $(a_n)_{n\in J}$，我们称

$$D(s) := \sum_{n\in J} a_n e^{-\omega_n s}, \quad s \in \mathbb{C}$$

为一个支撑于指标集 J上的 ω-狄利克雷多项式。对于频率 $\omega = (n)_{n\in\mathbb{N}}$，经过代换 $z = e^{-s}$，我们得到单个复变量的多项式 $\sum_{n\in J} a_n z^n$；而在 $\omega = (\log n)_{n\in\mathbb{N}}$的情形下，所有普通狄利克雷多项式 $\sum_{n\in J} a_n n^{-s}$。

记 $\mathscr{H}_\infty(\omega)$ 为由所有支撑于有限指标子集 $J \subset \mathbb{N}$上的 ω-狄利克雷多项式构成的（有限维）巴拿赫空间，其范数定义为

$$\|D\|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n\in J} a_n e^{-i\omega_n t} \right| = \sup_{\operatorname{Re} s>0} \left| \sum_{n\in J} a_n e^{-\omega_n s} \right|,$$

其中　　最后一个等式是最大模原理的直接推论。

因此，本文的主要目标是研究投影常数

$$\boldsymbol{\lambda}\left(\mathscr{H}_\infty^J(\omega)\right)$$

对于各种“自然”频率 ω 以及各种“自然”的有限指标集 J of $\mathbb{N}$。给定 $x \in \mathbb{N}$，我们尤其关注巴拿赫空间的投影常数

$$\mathscr{H}_\infty^{\le x}(\omega) = \mathscr{H}_\infty^{\{n\in\mathbb{N}\colon\, n\le x\}}(\omega),$$

因此，所有长度为x的 ω-狄利克雷多项式 $D(s) = \sum_{n\le x} a_n e^{-\omega_n s}$。

在介绍我们的一些主要结果之前，让我们稍作停顿，简要谈谈现代狄利克雷级数理论。在过去二十年里，普通狄利克雷级数理论 $\sum a_n n^{-s}$ 经历了一次复兴。事实上，20世纪初，对这类级数的研究曾是数学界的热门课题之一。代表人物包括 H. Bohr、Besicovitch、Bohnenblust、Hardy、Hille、Landau、Perron 和 M. Riesz。

然而，这项研究开展于函数论与泛函分析现代交融之前，也早于多复变函数这一领域的兴起；在许多方面，该领域一直沉寂到20世纪90年代末。Hedenmalm、Lindqvist 和 Seip 于1997年发表的论文，其主要目标之一[21] 是从……的角度对狄利克雷级数展开系统研究

现代算子相关函数论与调和分析。与此同时，Boas 和 Khavinson 的一篇论文 [4] 则从多复变函数的角度，让人们重新关注 Bohr 的早期研究。

一个新领域由此兴起，以新颖的方式将经典研究与现代泛函分析、无限维全纯函数论、概率论以及解析数论交织在一起。因此，过去几十年间，一系列富有挑战性的研究问题逐渐明晰，并得到了解决。关于普通狄利克雷级数这一新发展的许多关键要素，可参见专著[9], [22], 和 [36], , 其中对此作了详细阐述。

当代这一领域的研究在很大程度上得益于 H. Bohr 的以下基本观察[5], , 有时称为 Bohr构想：

通过变换 $z_j = p_j^{-s}$ 以及算术基本定理，普通狄利克雷级数 $\sum a_n n^{-s}$可以看作关于无穷多个复变量 $z_1, z_2, \ldots$ 的函数 $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha z^\alpha$，其中 $p = (p_j)$ 表示素数序列。根据 Kronecker 的经典逼近定理，这不只是形式上的变换：例如，若只有有限多个系数 a_n 非零（从而避免讨论级数的收敛问题），那么狄利克雷多项式 $\sum a_n n^{-s}$在半平面 $\mathrm{Re}\, s > 0$ 中的上确界，等于相应多项式在无限维圆群 $\mathbb{T}^\infty$上的上确界。请注意，狄利克雷多项式 $\sum_{n=1}^{x} a_n n^{-s}$ 对应于有限维多圆环面 $\mathbb{T}^{\pi(x)}$上的多项式 $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha z^\alpha$，其中 $\pi(x)$ 表示小于或等于 x 的素数的个数。因此，上确界可以在 $\mathbb{T}^\infty$ 或 $\mathbb{T}^{\pi(x)}$ 上任意取。

我们简要介绍一些主要结果，以及推导这些结果的策略思路。

Bohr构想的原始形式是这样的：对于每个频率 ω，都可以关联一个紧阿贝尔群 G（所谓的 ω-狄利克雷群），以及 G 上的一个特征序列 h_{ω_n}，使得对于每个有限集 $J \subset \mathbb{N}$，映射 $\sum_J a_n e^{-\omega_n s} \mapsto \sum_J a_n h_{\omega_n}$ 都给出一种保持系数的对应，将 $\mathcal{H}_\infty^J(\omega)$ 与巴拿赫空间 $\mathrm{Trig}_J(G)$ 等同起来；后者由 G 上所有傅里叶系数支撑在 $\{h_{\omega_n} : n \in J\}$ 中的三角多项式构成（见第 3.1 节）。

利用 Rudin 的一个著名平均化技巧（定理 2.1 和定理 2.2），我们推导出以下积分公式（见定理 3.6）

$$\lambda\big(\mathcal{H}_\infty^J(\omega)\big) = \int_G \Big| \sum_{n \in J} h_{\omega_n} \Big| \, dm,$$

其中 m 表示G上的哈尔测度，等价地

$$\lambda\big(\mathcal{H}_\infty^J(\omega)\big) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Big| \sum_{n \in J} e^{-i\omega_n t} \Big| \, dt$$

（定理3.1）。我们针对具体频率 ω 和具体指标集J 给出了 $\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_\infty^J(\omega)\big)$的具体估计，其证明主要都基于对前述两个积分之一的计算。

对于三个标准频率 $\omega = (n)_{n\in\mathbb{N}_0}$、 $\omega = (\log p_n)_{n\in\mathbb{N}}$（如上所述，$p_n$是第$n$个素数），以及 $\omega = (\log n)_{n\in\mathbb{N}}$，我们在第3.2节的情形 I 中得到以下关于$x$渐近成立的公式：

- $\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_\infty^{\leq x}((n))\big) = \frac{4}{\pi^2}\log(x+1) + o(1)$,
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_\infty^{\leq x}((\log p_n))\big)}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,
- $\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_\infty^{\leq x}((\log n))\big) = O\left(\frac{\sqrt{x}}{(\log\log x)^{\frac{1}{4}}}\right)$.

估计前两个陈述中的积分是相当标准的——但第三个陈述则极其复杂。事实上，Harper 最近在概率解析数论方面的一个深刻定理表明： [19]

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big|\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n^{it}}\Big|dt = O\left(\frac{\sqrt{x}}{(\log\log x)^{\frac{1}{4}}}\right), \tag{1}$$

这等价于

$$\int_{\mathbb{T}^\infty}\Big|\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}:1\leq n\leq x} z^\alpha\Big|dz = O\left(\frac{\sqrt{x}}{(\log\log x)^{\frac{1}{4}}}\right).$$

这解决了 Helson 在 [23] 提出的一个长期存在的问题。事实上，Helson 曾猜想该积分的阶为 $o(\mathrm{p}x)$，这将推翻调和分析中 Neħari 定理的某种推广。我们还要指出，Harper 的结果对所谓的嵌入问题给出了否定答案：它表明，对于 $0 < p < 2$，任意普通狄利克雷多项式 $D = \sum_{n\leq x} a_n n^{-s}$在垂直直线 $[\mathrm{Re}\, s = 1/2]$ 上任意固定长度的线段上，其 L^p-积分不能由一个与 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|D(it)|^p\,dt$ 成正比的普适常数所控制（另见 [43] 中的问题 2.1）。

最后，我们提到，我们还研究了由自然数指标集支撑的普通狄利克雷多项式巴拿赫空间的投影常数，其中这些自然数的素数分解具有某种复杂性（另见第 3.2 节，情形 II 和 III）。

最后，我们比较并联系本文所得的投影常数结果，以及无条件基常数的一些重要估计 $\boldsymbol{\chi_{\mathrm{mon}}}(\mathscr{H}_{J_\infty}(\omega))$（定义见第 4 节），涉及若干自然频率 $\omega = (\omega_n)$ 和指标集 $J \subset \mathbb{N}$。从群的角度看，这与特定特征集的 Sidon 常数有关。

1. 预备知识

我们采用巴拿赫空间理论中的标准记号，例如专著 [11, 33, 35,46, 48]中所用的记号。除非另有说明，我们讨论的都是复巴拿赫空间。

给定两个由非负实数组成的序列 (a_n) 和 (b_n)，若存在常数 $c > 0$ 使得对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n \le c\, b_n$，则记作 $a_n \prec b_n$；而 $a_n \sim b_n$ 表示 $a_n \prec b_n$ 和 $b_n \prec a_n$同时成立。若还涉及额外参数 m，对于两个由非负实数组成的序列 $(a_{n,m})$ 和 $(b_{n,m})$，若存在常数 $C(m) > 0$（它仅依赖于 m，而不依赖于 n），使得对所有 $n, m \in \mathbb{N}$ 都有 $a_{n,m} \le C(m) b_{n,m}$，则记作 $a_{n,m} \prec_{C(m)} b_{n,m}$。若 $a_{n,m} \prec_{C(m)} b_{n,m}$ 且 $b_{n,m} \succ_{C(m)} a_{n,m}$，则记作 $a_{n,m} \sim_{C(m)} b_{n,m}$。如果存在超收缩比较关系，即存在绝对常数 $C > 0$ 使得对所有 $n,m \in \mathbb{N}$ 都有 $a_{n,m} \le C\, m b_{n,m}$，我们也记作 $a_{n,m} \prec_{C^m} b_{n,m}$。当然，如果 $a_{n,m} \prec_{C^m} b_{n,m}$ 且 $b_{n,m} \succ_{C^m} a_{n,m}$，我们就简记为 $a_{n,m} \sim_{C^m} b_{n,m}$。

在接下来的两段中，我们汇集一些关于投影常数以及拓扑群的标准事实。

1.1. 投影常数。任意巴拿赫空间 X 都可以等距地嵌入到 $\ell_\infty(S)$ 中，其中 S 是一个非空集合，通常取决于 X。事实上，若 S 是 X 的对偶空间的单位球，则由 Hahn–Banach定理可知，映射 $x \mapsto (\varphi(x))_{\varphi \in S}$ 是从 X 到 $\ell_\infty(S)$ 的等距嵌入。此外，对于每个可分的 X，我们可以选择 $S = \mathbb{N}$ (例如参见 [1, 定理 2.5.7])。本文中，我们将用到这样一个事实：若 S 是一个非空集合，且巴拿赫空间 X 与 $\ell_\infty(S)$ 的一个子空间 Z 等距同构，则 $\lambda(X) = \lambda(Z, \ell_\infty(S))$。事实上，这是因为 $\ell_\infty(S)$ 是等距内射的（参见 [1, 定义 2.5.1 和命题 2.5.2.]）。因此，求出 $\lambda(X)$ 等价于求 $\ell_\infty(S)$ 到 $\ell_\infty(S)$ 中 X 的一个等距副本上的最小投影的范数。然而，这通常是一个非平凡的问题。

许多作者研究了各种有限维巴拿赫空间的投影常数的一般界。最基本的一般上界由 Kadets 和 Snobar 给出 [24]：对于每个 n 维巴拿赫空间 X_n，都有

$$\lambda(X_n) \le \sqrt{n}. \tag{2}$$

相比之下，König 和 Lewis [27] 证明，对于任意维数为X_n的巴拿赫空间$n \ge 2$，严格不等式 $\lambda(X_n) < p_n$成立，而 Lewis [30] 通过证明.....改进了这一估计

$$\lambda(X_n) \le \sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+11}\right).$$

……的精确值 $\boldsymbol{\lambda}(\ell_2^n)$ 和 $\boldsymbol{\lambda}(\ell_1^n)$ 由 Grünbaum [18] 和 Rutovitz [42]计算得出：在复数情形下

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\ell_2^n(\mathbb{C})\big) = n\int_{\mathbb{S}_n(\mathbb{C})} |x_1|\, d\sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{n!}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}, \tag{3}$$

其中 $d\sigma$ 表示球面 $\mathbb{S}_n(\mathbb{C})$ 上的归一化表面测度，其中 $\mathbb{C}^n$，并且

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\ell_1^n(\mathbb{C})\big) = \int_{\mathbb{T}^n} \Big|\sum_{k=1}^n z_k\Big|\, dz = \int_0^\infty \frac{1-J_0(t)^n}{t^2}\, dt, \tag{4}$$

其中 dz表示特殊边界 $\mathbb{T}^n$上的归一化勒贝格测度，其中 $\mathbb{C}^n$，而 J_0是由 $J_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \cos(t\cos\varphi)d\varphi$ 定义的零阶贝塞尔函数。相应的实常数则不同：

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\ell_2^n(\mathbb{R})\big) = n\int_{\mathbb{S}_n(\mathbb{R})} |x_1|\, d\sigma = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\ell_1^n(\mathbb{R})\big) = \begin{cases} \boldsymbol{\lambda}\big(\ell_2^n(\mathbb{R})\big), & n \text{ odd} \\ \boldsymbol{\lambda}(\ell_2^{n-1}(\mathbb{R})), & n \text{ even}. \end{cases} \tag{6}$$

Gordon [15] 和 Garling-Gordon [14] 确定了当 $1 < p < \infty$ 且$p \notin \{1, 2, \infty\}$时，$\boldsymbol{\lambda}\big(\ell_p^n\big)$ 的渐近增长：

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\ell_p^n\big) \sim n^{\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{p}\right\}}. \tag{7}$$

König、Schütt 和 Tomczak-Jagermann [28] 证明，当 $1 \le p \le 2$时

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}\big(\ell_p^n\big)}{\sqrt{n}} = \gamma, \tag{8}$$

其中 $\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$在实数情形下成立，而$\gamma = \sqrt[\pi]{2}$在复数情形下成立。关于这些内容及更多主题的全面论述，请参阅 Tomczak-Jaegermann 的优秀专著[46] 。

1.2. **拓扑群**。 按照惯例，赋予拓扑 τ 的群G若映射 $(G,\tau) \times (G, \tau) \ni (a, b) \to ab^{-1} \in (G, \tau)$ 连续，则称其为拓扑群。从此处起，假设G是一个紧群，也就是说，它的拓扑是紧的。在这种情况下，G在G上的复值连续函数G之集$C(G)$上定义了一组自然的映射 $\{L_a\}_{a\in G}$和 $\{R_a\}_{a\in G}$，对所有a、$b \in G$，定义如下

$$L_a f(b) := f(ab), \quad \text{and } R_a f(b) = f(ba), \quad f \in C(G).$$

众所周知，对于每个紧群G，都存在唯一的博雷尔概率测度 m，使其具有左不变性，即

$$\int_G f(b)\, d\mathrm{m}(b) = \int_G L_a f(b)\, d\mathrm{m}(b), \quad a \in G,\ f \in C(G).$$

这个 m 称为G的哈尔测度。如果 m 还具有右不变性:

$$\int_G f(b)\,d\mathrm{m}(b) = \int_G R_a f(b)\,d\mathrm{m}(b), \quad a \in G,\ f \in C(G),$$

那么，紧群G称为幺模群。每个单点集都是闭集的紧群，都是幺模群的例子。

设 m 是G上的归一化哈尔测度，$\widehat{\ }G$按惯例表示G的对偶群（即G上所有连续特征的集合）。对于任意$f \in L^1(G) := L^1(G,\mathrm{m})$，$f$的傅里叶变换定义为

$$\widehat{f}(\gamma) := \int_G f(a)\overline{\gamma(a)}\,d\mathrm{m}(a), \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

回顾一下，当$L_1(G)$以卷积$f_1 * f_2$作为乘法运算时，它构成一个交换巴拿赫代数；也就是说，对于 m-几乎处处的$a \in G$

$$(f_1 * f_2)(a) := \int_G f_1(ab^{-1}) f_2(b)\,d\mathrm{m}(b).$$

群的乘积与我们的研究尤为相关。给定紧阿贝尔群$G_1,\ldots,G_n$，每个群都带有哈尔测度 $\mathrm{m}_j, 1 \le j \le n$，我们用$G := G_1 \times \cdots \times G_n$表示这些群在自然的乘法运算和积拓扑下的乘积。给定一个由特征组成的n元组 $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \in \widehat{\ }G_1 \times \cdots \times \widehat{\ }G_n$以及 $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$，我们将$G$中的特征$\widehat{\ }$记作 γ^α，其定义为

$$\gamma^\alpha(x_1,\ldots,x_n) := \gamma_1(x_1)^{\alpha_1}\cdots\gamma_n(x_n)^{\alpha_n}, \quad (x_1,\ldots,x_n) \in G.$$

特别值得关注的是 $= \mathbb{T}^n$ 维圆群$G := \mathbb{T}^n$，其中哈尔测度 m $=: dz$作用于 $\mathbb{T}^n$ 上的 Borel函数f: $\mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$，其作用公式为

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(z)\,dz = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} f(e^{it_1},\ldots,e^{it_n})\,dt_1\ldots dt_n.$$

回忆一下，$\widehat{\mathbb{T}^n} = \mathbb{Z}^n$，其中该对应关系由以下事实给出：对于每个特征 $\gamma \in \widehat{\mathbb{T}^n}$，都存在唯一的多重指标（$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$）$\in \mathbb{Z}^n$，使得对每个$z =$（$z_1,\ldots,z_n$），$\gamma$（$z$）$= z^\alpha$。

2. 三角多项式

对于任意紧群G以及任意非空有限集$E \subset \widehat{\ }G$，我们将 span$E$记作 Trig$_E(G)$，即由所有定义在G上且支撑于E的三角多项式P构成的空间；也就是说，其傅里叶变换 $\widehat{\ }P$支撑于E。下文中，我们将该有限维空间赋予G上的上确界范数。注意，每个多项式$P \in$ Trig$_E(G)$ 都具有如下形式

$$P(g) = \sum_{\gamma\in E} \widehat{P}(\gamma)\,\gamma(g), \quad g \in G.$$

G上的所有三角多项式构成的空间记作 Trig(G)。

我们需要彼得-外尔定理的两个基本推论（例如，参见 [36, 定理 1.3。3]）：对于任意紧阿贝尔群 G，空间 $\mathrm{Trig}(G)$ 在复值函数空间 $C(G)$ 中稠密（参见 [36, 定理 1.3。4]），而对偶群 $\widehat{G}$ 是希尔伯特空间 $L^2(G,\mathrm{m})$ 的标准正交基（参见 [36, 定理 1.3。6]）。

对于特殊情形 $G = \mathbb{T}^n$ 且 $\widehat{G} = \mathbb{Z}^n$，我们尤其关注指标集

$$J_p(m,n) := \Big\{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \big(\sum_j |\alpha_j|^p\big)^{\frac{1}{p}} = m\Big\}, \quad \Lambda_p(m,n) := \Big\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : \big(\sum_j \alpha_j^p\big)^{\frac{1}{p}} = m\Big\} \tag{9}$$

以及

$$J_p(\le m,n) := \Big\{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \big(\sum_j \alpha_j^p\big)^{\frac{1}{p}} \le m\Big\}, \quad \Lambda_p(\le m,n) := \Big\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : \big(\sum_j |\alpha_j|^p\big)^{\frac{1}{p}} \le m\Big\}, \tag{10}$$

其中 m、$n \in \mathbb{N}$ 和 $p \in \{1, 2, \infty\}$。当 $p = 1$ 时，我们记作 $|\alpha| = \sum_j |\alpha_j|$，通常称为 α 的阶；当然，当 $p = \infty$ 时，我们用 $\big(\sum_j |\alpha_j|^p\big)^{1/p}$ 表示 $\max_j |\alpha_j|$。

对于 $m \in \mathbb{N}$，我们将所有 m 次齐次的解析三角多项式（即所有形如以下形式的多项式）组成的巴拿赫空间记为 $\mathrm{Trig}_m(\mathbb{T}^n) := \mathrm{Trig}_{\Lambda_1(m,n)}(\mathbb{T}^n)$

$$P(z) = \sum_{\alpha \in \Lambda_1(m,n)} c_\alpha z^\alpha \quad \text{for } z \in \mathbb{T}^n.$$

类似地，$\mathrm{Trig}_{\le m}(\mathbb{T}^n) := \mathrm{Trig}_{\Lambda_1(\le m,n)}(\mathbb{T}^n)$ 表示所有次数为 $\le m$ 的解析三角多项式所构成的空间。

以下积分公式给出了给定紧阿贝尔群 $\widehat{G}$ 上、支撑在先验给定的特征集上的所有三角多项式所构成的巴拿赫空间的投影常数，是我们拟开展工作的主要依据之一。

定理 2.1. 设 G 是一个紧阿贝尔群，$E := \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\} \subset \widehat{G}$ 是一个由有限个特征组成的有限集。那么，$\Pi : C(G) \to C(G)$，由 $\Pi f = \sum_{j=1}^N f(\gamma_j)\gamma_j$ 对所有 $f \in C(G)$ 给出，是到 $Trig_E(G)$ 上的唯一一个与群在 $C(G)$ 上的作用可交换的投影。此外，Π 是极小的：

$$\boldsymbol{\lambda}\big(Trig_E(G)\big) = \big\|\Pi : C(G) \to C(G)\big\| = \int_G \Big|\sum_{j=1}^N \gamma_j(a)\Big|\, d\mathrm{m}(a).$$

下一节将证明这一结果。

2.1. **平均投影**。 如前所述，我们打算使用的主要工具之一是 Rudin 提出的一种方法（参见后文的定理 2.2）。粗略地说，在某些假设下，存在一种颇具普适性的平均化技巧，可从先验给定的投影构造出具有额外且在某种意义上更优性质的新投影。

给定一个拓扑群G和一个巴拿赫空间Y，我们需要说明G的所有元素何时都能作为Y上的有界线性算子作用。形式上，这意味着存在一个映射

$$T\colon G \to \mathscr{L}(Y),\ a \mapsto T_a$$

使得

$$T_e = I_Y,\quad T_{ab} = T_a T_b,\quad a, b \in G$$

且所有映射

$$G \ni a \mapsto T_a(y) \in Y,\quad y \in Y \tag{11}$$

均为连续映射。此时称G通过T作用于Y（或简称G作用于Y）。此外，若所有算子T_a、$a \in G$都是等距变换，则称G在Y上等距作用。若$S \in \mathscr{L}(Y)$与T通过G在Y上的作用可交换，则称S与所有T_b、$b \in G$可交换。

定理 2.2. 设 Y 是一个巴拿赫空间，X 是 Y 的一个可补子空间，且$\mathbf{Q}\colon Y \to Y$ 是到 X 上的一个投影。设 G 是一个带有哈尔测度 m 的紧群，它通过 T 作用于 Y，且 X 在 G 的作用下不变，即

$$T_a(X) \subset X,\quad a \in G. \tag{12}$$

那么，由$\mathbf{P}\colon Y \to Y$给出的算子为

$$\mathbf{P}(y) := \int_G T_{a^{-1}} \mathbf{Q} T_a(y)\, d\mathrm{m}(a),\quad y \in Y, \tag{13}$$

是一个映 *onto* X 的投影，并且与 G 在 Y 上的作用可交换，即对所有 $a \in G$，$T_a\mathbf{P} = \mathbf{P}T_a$，且满足

$$\|\mathbf{P}\| \le \|\mathbf{Q}\| \sup_{a\in G} \|T_a\|^2.$$

此外，如果 Y 上存在唯一一个映 *onto* X 且与 G 在 Y 上的作用可交换的投影，并且 G 在 Y 上等距地作用，那么$\mathbf{P}$ 由公式 (13) 给出的投影是极小的，即

$$\boldsymbol{\lambda}(X, Y) = \|\mathbf{P}\|.$$

这一结果（以不同方式）在文献中得到了各种应用（例如，参见 [26, 28,29, 37, 32, 40, 41]。对于圆群的情形，可以追溯到 Faber 的文章 [13]。为求完整起见，我们给出一个证明，其思路源自 [40] (以及 [48, 定理 III.B。13]）。

定理 2.2 的证明。首先注意，由巴拿赫–斯坦豪斯定理，$\sup_{a\in G} \mathrm{kT}_a\mathrm{k} < \infty$。于是，给定 y ∈Y，映射 a ∋G ↦ $\mathrm{T}_{a^{-1}}\mathrm{QT}_a \in \mathscr{L}(\mathrm{Y})$ 有界，并且根据 (11) 可测（因为其几乎处处取值于可分集且弱可测），因此是博赫纳可积的。由此，P 在 Y 上定义了一个算子。此外，由 (12) 可推得，对所有 y ∈Y 以及所有 x ∈X,

$$T_{a^{-1}} \mathbf{Q} T_a(y) \in X,\quad T_{a^{-1}} \mathbf{Q} T_a(x) = x,$$

这意味着$\mathbf{P}$是从Y到X上的一个投影。假设G（通过T）作用于Y，则对所有$b \in G$

$$T_{b^{-1}}\mathbf{P}T_b = \int_G T_{b^{-1}}T_{a^{-1}}\mathbf{Q}T_aT_b\,d\mathrm{m}(a) = \int_G T_{(ab)^{-1}}\mathbf{Q}T_{ab}\,d\mathrm{m}(a) = \mathbf{P},$$

因此$\mathbf{P}$与G在Y上的作用相交换。由于对所有$y \in Y$

$$\|\mathbf{P}y\|_Y \le \int_G \|T_{a^{-1}}\|\,\|\mathbf{Q}\|\,\|T_a\|\,\|y\|_Y\,d\mathrm{m}(a) \le \|\mathbf{Q}\| \sup_{a\in G}\|T_a\|^2\,\|y\|_Y,$$

所需的 kPk 估计由此得出。此外，若存在唯一一个从 Y 投影到 X 且与 G 在 Y 上的作用相交换的投影，并且 G 在 X 上等距地作用，那么式 (13) 中的投影 P 与 Q 无关，且对 Y 上所有投影到 X 的投影 Q，均有 kPk ≤kQk；也就是说，kPk ≤ $\boldsymbol{\lambda}$(X ,Y)。证明完毕。□

定理 2.1的证明。 首先注意，G以自然的方式作用于 $C(G)$（见第 2.1 节），该作用由映射 $T\colon G \to \mathscr{L}(C(G))$ $a \mapsto T_a$定义，其中

$$T_af(b) := f(ab), \quad f \in C(G),\ b \in G.$$

我们断言， $\Pi\colon\ C(G) \to C(G)$ 是到 $\mathrm{Trig}_E(G)$ 上且与所有平移算子T_a, $a \in G$相交换的唯一投影。为此，假设$\mathbf{Q}\colon C(G) \to C(G)$ 到 $\mathrm{Trig}_E(G)$ 上的投影与所有平移算子相交换。那么对所有 $\gamma,\gamma' \in \widehat{G}$，有

$$\widehat{T_a\mathbf{Q}\gamma}(\gamma') = \widehat{\mathbf{Q}T_a\gamma}(\gamma').$$

容易验证， $\widehat{T_a\mathbf{Q}\gamma}(\gamma') = \gamma'(a)\,\widehat{\mathbf{Q}\gamma}(\gamma')$，且 $\widehat{\mathbf{Q}T_a\gamma}(\gamma') = \gamma(a)\,\widehat{\mathbf{Q}\gamma}(\gamma')$。由此可得

$$\gamma'(a)\widehat{\mathbf{Q}\gamma}(\gamma') = \gamma(a)\widehat{\mathbf{Q}\gamma}(\gamma'), \quad a \in G.$$

这意味着，对于所有 $\gamma,\gamma' \in \widehat{G}$满足 $\gamma \neq \gamma'$ 的情形，都有 $\widehat{\mathbf{Q}\gamma}(\gamma') = 0$。另一方面，彼得-外尔定理指出， $\widehat{G}$构成希尔伯特空间 $L^2(G)$ 的标准正交基，因此

$$\mathbf{Q}\gamma = \sum_{\gamma'\in\widehat{G}} \widehat{\mathbf{Q}\gamma}(\gamma')\,\gamma', \quad \gamma \in \widehat{G},$$

因此，对于每个特征 $\gamma \in \widehat{G}$，都存在一个标量 c_γ，使得 $\mathbf{Q}\gamma = c_\gamma\gamma$。

由于 $\mathbf{Q}$是投影到 $\mathrm{Trig}(G)$ 上的投影，因此对于所有 $\gamma \in G\backslash E$，都有 $c_\gamma = 0$；对于所有 $\gamma \in E$，都有 $c_\gamma = 1$。由此， 对于所有 $\gamma \in E$, 都有$\mathbf{Q}\gamma = \gamma$；对于所有 $\gamma \in \widehat{G}\backslash E$，都有 $\mathbf{Q}\gamma = 0$。因此，将投影 $\mathbf{Q}$ 限制在代数 $\mathrm{Trig}(G)$ 上（即 G 上所有三角多项式构成的代数），可表示为

$$\mathbf{Q}f = \sum_{j=1}^{N} \widehat{f}(\gamma_j)\gamma_j, \quad f \in \mathrm{Trig}(G). \tag{14}$$

因此，由 $\mathrm{Trig}(G)$ 在 $C(G)$ 中的稠密性可知，上述公式对所有$f \in C(G)$ 都成立。因此 $\mathbf{Q} = \Pi$。这就证明了该结论。

由于 Π 是到 Trig 上的唯一投影$E(G)$，且与所有平移算子交换， Π 由定理 2.2 中引入的平均化技巧确定。现在注意到G 在 $C(G)$ 上等距作用，即所有映射 $T_a\colon C(G) \to C(G)$ 都是 $C(G)$ 上的等距变换。由于对所有 $a \in G$

$$T_a\gamma = \gamma(a)\gamma, \quad \gamma \in \widehat{G},$$

由此可得 $T_a(\mathrm{Trig}_E(G)) \subset \mathrm{Trig}_E(G)$ 对所有 $a \in G$成立。然后，根据定理 2.2 的此外部分， Π 是一个最小投影，即，

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathrm{Trig}_E(G)\big) = \big\|\Pi\colon C(G) \to C(G)\big\|.$$

最后，仍需证明 Π 的范数积分公式。由于 $f * \gamma = \widehat{f}(\gamma)\gamma$ 对所有 $f \in L^1(G)\widehat{}$且 $\gamma \in G$，由（14），可得

$$\Pi f = f * \Big(\sum_{j=1}^{N} \gamma_j\Big), \quad f \in C(G).$$

C显然， $\sum^N{}_{j=1}\gamma_j \in C(G)$，因此通过直接计算很容易证明

$$\big\|\Pi\colon C(G) \to C(G)\big\| = \int_G \Big|\sum_{j=1}^{N} \gamma_j(a)\Big|\, d\mathrm{m}(a).$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned}
\big\|\Pi\colon C(G) \to C(G)\big\| &= \sup_{\|f\|_\infty=1} \sup_{b\in G} \left|\int_G f(a)\Big(\sum_{j=1}^{N} \gamma_j\Big)(ba^{-1})\, d\mathrm{m}(a)\right| \\
&= \sup_{b\in G} \sup_{\|f\|_\infty=1} \left|\int_G f(a)\Big(\sum_{j=1}^{N} \gamma_j\Big)(ba^{-1})\, d\mathrm{m}(a)\right| \\
&= \sup_{b\in G} \int_G \Big|\sum_{j=1}^{N} \gamma_j(ba^{-1})\Big|\, d\mathrm{m}(a).
\end{aligned}$$

现在注意到，根据哈尔测度 m 的平移不变性，以及它同时具有左不变性和右不变性这一事实（G是幺模的，因为它是阿贝尔群），对于每个 $b \in G$，我们有，

$$\int_G \Big|\sum_{j=1}^{N} \gamma_j(ba^{-1})\Big|\, d\mathrm{m}(a) = \int_G \Big|\sum_{j=1}^{N} \gamma_j(a^{-1})\Big|\, d\mathrm{m}(a) = \int_G \Big|\sum_{j=1}^{N} \gamma_j(a)\Big|\, d\mathrm{m}(a).$$

证明至此完成。 □

2.2. **投影常数——三角多项式**。基于定理 2.1中的积分公式，我们推导出紧阿贝尔群上三角多项式空间投影常数的具体公式和渐近最优估计。这些空间的傅里叶展开支撑在一个预先固定的特征集上。

2.2.1. $\Lambda(2)$集。为了展示定理 2.1的首个应用，我们需要补充一些记号和预备知识。回顾一下，Rudin 在其经典论文 [39] 中于 1960 年 引入了 $\Lambda(p)$-集的概念，研究圆群上的傅里叶分析 𝕋。用现代语言来说，若G是一个紧阿贝尔群（配备哈尔测度 m），且 $p \in (1,\infty)$，那么子集 $E \subset \widehat{G}$称为一个 $\Lambda(p)$-集，当且仅当存在常数$C > 0$ 使得对每个三角多项式$P \in \mathrm{Trig}(G)$，都有

$$\|P\|_{L_p(G)} \le C\|P\|_{L_1(G)}. \tag{15}$$

在这种情况下，这样的最小常数称为 $\Lambda(p)$-常数E，记作 $C_p = C_p(E)$。这里指出，当 $p > 2$ 时，(15)成立等价于存在一个常数 $A_p > 0$使得

$$\|P\|_{L_p(G)} \le A_p\|P\|_{L_2(G)}, \quad P \in \mathrm{Trig}_E(G).$$

定理 2.1 的以下一个几乎直接的推论表明， $\Lambda(2)$-集对我们的目的尤为重要——另见推论 2.5 和推论 3.9。

推论 2.3。 设 G 为一个紧阿贝尔群。那么，对于任意由不同特征组成的有限集 $E = \{\gamma_1,\dots,\gamma_N\} \subset \widehat{G}$，且其 $\Lambda(2)$ 常数为 C_2,，有

$$C_2^{-1}\sqrt{N} \le \boldsymbol{\lambda}\big(Trig_E(G)\big) \le \sqrt{N}.$$

证明。 设 m 为G上的哈尔测度。由定理 2.1，可得

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathrm{Trig}_E(G)\big) = \int_G |\gamma_1(x) + \ldots + \gamma_N(x)|\, d\mathrm{m}(x).$$

由于 $\widehat{G}$是$L_2(G, \mathrm{m})$ 中的标准正交基，

$$\Big(\int_G |\gamma_1(x) + \ldots + \gamma_N(x)|^2\, d\mathrm{m}(x)\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{N}.$$

利用（15）和柯西–施瓦茨不等式即可完成证明。 □

结合前面的推论，我们需要下面这个例子。

注 2.4. 设 G 是一个紧阿贝尔群。按照 [17], 若集合 $E \subset \widehat{G}$ 满足以下条件，则称其为 B_2-集：$\gamma_1\gamma_2 = \gamma_3\gamma_4$对所有 $\gamma_1,\dots,\gamma_4 \in E$，当且仅当 $\{\gamma_3,\gamma_4\}$ 是 $\{\gamma_1,\gamma_2\}$ 的一个排列。值得注意的是，B_2-集是具有 $\Lambda(2)$-常数 p2 的 $\Lambda(2)$-集（见 [17, 命题 6.3.11]）。

顺便指出， [17, 命题 6.3.11], 还蕴含以下结论：若$E \subset \widehat{G}$满足存在自然数集 ≥ 2中的$G\gamma \in$，使得至多有N对形如$(\gamma_{i_1},\gamma_{i_2}) \subset E \times E$的元素满足$\gamma_{i_1}\gamma_{i_2} = \gamma$，那么$E$是 $\Lambda(2)$-集，且$C_2 \le pN$。

另一个 $\Lambda(2)$-集的例子对我们的目的很重要，它源自 Weissler 给出的一个不等式[47]（另见 [9, 定理 8。10]）：对所有 $P \in$ 三角$_{\leq m}$()

$$\frac{1}{\sqrt{2^m}}\Big(\int_{\mathbb{T}^n} |P(z)|^2\, dz\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \int_{\mathbb{T}^n} |P(z)|\, dz. \tag{16}$$

换言之，集合 $\{z^\alpha\colon\ \alpha \in \Lambda_1(\leq m,n)\}$ 中的特征 $\widehat{\mathbb{T}^n} = \mathbb{Z}^n$ 构成一个 $\Lambda(2)$-集，其常数为$C_2 \leq \sqrt{2^m}$（回忆一下，式（10）给出了 $\Lambda_1(\leq m,n)$ 的定义；显然，它可以视为由其生成的特征 z^α 所构成的集合）。

那么，下述结果可由定理 2.1、推论2.3和式（16）直接推出。

推论 2.5。设 $J \subset \mathbb{Z}_0^n$ 是一个有限集。那么

$$\boldsymbol{\lambda}\big(Trig_J(\mathbb{T}^n)\big) = \int_{\mathbb{T}^n} \Big|\sum_{\alpha\in J} z^\alpha\Big|\, dz,$$

并且若 $\Lambda \subset \Lambda_1(\leq m,n)$，则

$$\frac{1}{\sqrt{2^m}}\sqrt{|\Lambda|} \leq \boldsymbol{\lambda}\big(Trig_\Lambda(\mathbb{T}^n)\big) \leq \sqrt{|\Lambda|}.$$

在本推论的背景下，以下公式和估计

$$|\Lambda_1(m,n)| = \binom{n+m-1}{m} \leq e^m\Big(1+\frac{n}{m}\Big)^m \tag{17}$$

对于 $\Lambda_1(m,n)$ 的基数，这非常有用。

2.2.2. 群的乘积。我们的目标是证明 Lozinski-Kharshiladze 一项著名结果的各种多变量变体（参见 [48, IIIB. 定理 22] 和 [34]），该结果给出了 Trig$_{\leq m}(\mathbb{T})$ 的投影常数的精确估计。Trig 是定义在 $\mathbb{T}$ 上的次数至多为 m、配备上确界范数的三角多项式空间：

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathrm{Trig}_{\leq m}(\mathbb{T})\big) = \frac{4}{\pi^2}\log(m+1) + o(1). \tag{18}$$

这主要通过常规地应用定理 2.1 来完成。我们指出，第 3.2 节的这些结果是推导 Dirichlet 多项式空间投影常数公式与估计的关键。

命题 *2.6*. 设 $G=G_1\times\cdots\times G_n$ 是紧阿贝尔群 $G_1,\ldots,G_n$ 的乘积（其哈尔测度为 $mj, 1\leq j\ \leq n$），且 $E := \{\gamma^\alpha\colon\ \alpha \in J_\infty(\leq m, n)\} \subset \widehat{\ }G$，其中（$\gamma_1$，…，$\gamma_n$）$\in \widehat{G_1}\times\cdots\times\widehat{G_n}$，而 $J_\infty(\leq m, n)$ 的定义见（*10*）。则

$$\boldsymbol{\lambda}\big(Trig_E(G)\big) = \prod_{j=1}^n \int_{G_j} \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}:|k|\leq m} \gamma_j(x_j)^k\Big|\, d\mathrm{m}_j(x_j).$$

证明．设 μ 是G上的哈尔测度，它不过是哈尔测度 m_j的乘积。于是，定理 2.1 给出

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathrm{Trig}_E(G)\big) = \int_G \Big| \sum_{\alpha \in J_\infty(\leq m,n)} \gamma^\alpha(x) \Big| \, d\mu(x).$$

显然，对于所有$x = (x_1, \ldots, x_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n$，均有

$$\sum_{\alpha \in J_\infty(\leq m,n)} \gamma^\alpha(x) = \prod_{j=1}^n \sum_{|k| \leq m} \gamma_j(x_j)^k,$$

因此

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathrm{Trig}_E(G)\big) = \int_G \prod_{j=1}^n \Big| \sum_{|k| \leq m} \gamma_j(x_j)^k \Big| \, d\mu(x).$$

由富比尼定理即可完成证明。 □

我们还将使用以下更一般的变体。

命题 2.7。 设 $G := G_1 \times \cdots \times G_n$是紧阿贝尔群 $G_1, \ldots, G_n$的乘积。此外，设 $I := I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{Z}^n$，其中 I_j 是 $\mathbb{Z} for\ j \in \{1, \ldots, n\}$ 的有限子集，且 $E := \{\gamma^\alpha \colon \alpha \in I\}$。那么

$$\boldsymbol{\lambda}\big(Trig_E(G)\big) = \prod_{j=1}^n \int_{G_j} \Big| \sum_{k \in I_j} \gamma_j(x_j)^k \Big| \, d\mathrm{m}_j(x_j).$$

如上所述，我们最终给出文献（18）中提到的 Lozinski-Kharshiladze 结果的多变量版本。对每个 $m \in \mathbb{N}_0$，令 D_m 为m阶狄利克雷核

$$D_m(t) := \sum_{k=-m}^m e^{-ikt},$$

以及由下式给出的L_m m阶勒贝格常数

$$L_m := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_m(t)| \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big| \frac{\sin(m + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} \Big| \, dt.$$

我们回顾一下广为人知的标准估计

$$\frac{4}{\pi^2} \log(m+1) < L_m < 3 + \log m, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

推论 2.8。 设$\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}_0^n$令 $I_{\mathbf{d}} := \big\{\alpha \in \mathbb{Z}^n \colon |\alpha_j| \leq d_j, \quad 1 \leq j \leq n\big\}$。则

$$\boldsymbol{\lambda}\big(Trig_{I_{\mathbf{d}}}(\mathbb{T}^n)\big) = \prod_{j=1}^n L_{d_j}.$$

证明。 应用命题2.7，得到

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathrm{Trig}_{I_{\mathbf{d}}}(\mathbb{T}^n)\big) = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{T}} \Big| \sum_{|\alpha_j| \leq d_j} z^{\alpha_j} \Big| \, dz = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{T}} |D_{d_j}(z_j)| \, dz_j = \prod_{j=1}^n L_{d_j},$$

如所要求的。 □

为了陈述推论2.8的“解析对应结论”，我们对每个$m \in \mathbb{N}_0$，定义：

$$D_m^+(t) := \sum_{k=0}^{m} e^{-ikt} \quad \text{and} \quad L_m^+ := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_m^+(t)|\, dt\,.$$

并回顾式（10）中的记号 $\Lambda_\infty(\le m,n) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : \max_j \alpha_j \le m\}$。

推论 2.9。对于 $m,n \in \mathbb{N}$

(i) $\boldsymbol{\lambda}\big(Trig_{\Lambda_\infty(\le m,n)}(\mathbb{T}^n)\big) = (L_m^+)^n\,,$

(ii) $\boldsymbol{\lambda}\big(Trig_{\Lambda_\infty(\le 2m,n)}(\mathbb{T}^n)\big) = (L_m)^n\,,$

(iii) $(L_m-1)^n \le \boldsymbol{\lambda}\big(Trig_{\Lambda_\infty(\le 2m+1,n)}(\mathbb{T}^n)\big) \le (L_m+1)^n\,,$

(iv) $\boldsymbol{\lambda}\big(Trig_{\Lambda_\infty(\le m,n)}(\mathbb{T}^n)\big) \sim (1+\log m)^n\,.$

证明。 (i) 由命题2.6，可得所需结论

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathrm{Trig}_{\Lambda_\infty(\le m,n)}(\mathbb{T}^n)\big) = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{T}} \Big| \sum_{0\le\alpha_j\le m} z^{\alpha_j} \Big|\, dz = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{T}} |D_m^+(z_j)|\, dz_j = (L_m^+)^n\,.$$

(ii) 容易验证

$$D_{2m}^+(t) = e^{-imt}\,\frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}, \quad t \in (0,2\pi)\,.$$

这意味着 $L_m = \|D_m\|_{L_1(\mathbb{T})} = \|D_{2m}^+\|_{L_1(\mathbb{T})} = L_{2m}^+$，因此由 (i) 即得结论。

(iii) 由 (ii) 结合显然的估计即可得出该结论

$$\|D_{2m}^+\|_{L_1(\mathbb{T})} - 1 \le \|D_{2m+1}^+\|_{L_1(\mathbb{T})} \le \|D_{2m}^+\|_{L_1(\mathbb{T})} + 1, \quad m \in \mathbb{N}.$$

(iv) 将估计 (19) 与 (ii) 和 (iii) 中的估计相结合，即得所需的等价关系。

□

最后给出以下两个极限公式；关于指标集的定义，请再次参见 (10)：$J_\infty(\le m,n)$ 和 $\Lambda_\infty(\le m,n)$。

推论 2.10. 对于每个 $m,n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}\big(Trig_{J_\infty(\le m,n)}(\mathbb{T}^n)\big)}{\log^n m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}\big(Trig_{\Lambda_\infty(\le m,n)}(\mathbb{T}^n)\big)}{\log^n m} = \Big(\frac{4}{\pi^2}\Big)^n.$$

证明。 回顾众所周知的公式

$$\lim_{m\to\infty} \frac{L_m}{\log m} = \frac{4}{\pi^2}\,. \tag{20}$$

于是，第一个极限由推论 2.8 得出。为了证明第二个极限，我们区分两个数列 $\big(\boldsymbol{\lambda}\big(\mathrm{Trig}_{\Lambda_\infty(\leq 2m,n)}(\mathbb{T}^n)\big)/\log(2m)\big)_m$ 和 $\big(\boldsymbol{\lambda}\big(\mathrm{Trig}_{\Lambda_\infty(\leq 2m+1,n)}(\mathbb{T}^n)\big)/\log(2m+1)\big)_m$。注意，这两个数列都收敛于 $\frac{4}{\pi^2}$。事实上，由推论 2.9 (ii) 可知

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathrm{Trig}_{\Lambda_\infty(\leq 2m,n)}(\mathbb{T}^n)\big) = (L_m)^n.$$

因此，利用（20），即可得到第一个序列的结论。第二个序列的处理方法相同，只需使用推论2.9 （iii）。 □

2.2.3. 勒贝格常数。 我们指出，尽管我们在推论 2.5 中证明了三角多项式在 $\mathbb{T}^n$（支撑于指标集 J）上的投影常数的一个积分公式，但通常无法显式计算该积分。

事实上，推论 2.5 中的积分自然出现在多元傅里叶分析中（这是由于多元傅里叶级数采用了不同的求和方法）；在这一语境下，它通常称为勒贝格常数（指标集 J的勒贝格常数）。

让我们说明这一点。给定m、$n \in \mathbb{N}$，指标集

$$J_2(\leq m,n) = \Big\{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \leq m^2\Big\}, \tag{21}$$

所有球形多重指标 $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ 的“欧几里得阶”不超过m （再次参见（10））在对多元傅里叶级数求球形部分和时起着重要作用。显然，我们有

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathrm{Trig}_{J_2(\leq m,n)}(\mathbb{T}^n)\big) \leq \sqrt{\dim\big(\mathrm{Trig}_{J_2(\leq m,n)}(\mathbb{T}^n)\big)} = \sqrt{|J_2(\leq m,n)|};$$

这既可以看作推论2.5 的直接推论，也可以看作 Kadec-Snobar 定理的直接推论。

然而，要找到 $\mathrm{Trig}_{J_2(\leq m,n)}(\mathbb{T}^n)$ 的维数的精确公式，或者等价地，求出$J_2(\leq m,n)$ 的基数，通常是一个极其困难的问题。

经典格点理论中所谓的n维球面问题，研究的是$\mathcal{N}_n(R)$，即半径为R的闭欧几里得球内格点的数量，该球位于 $\mathbb{R}^n$中。这里提一下，当$n > 3$ 时，有

$$\mathcal{N}_n(R) = \omega_n R^n + O\big(R^{n-2}\big),$$

其中 $\omega_n := \frac{2\pi^{n/2}}{n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ 是 $\mathbb{R}^n$中单位球的体积。对于$n = 3$，Heath-Brown 在 [20] 中证明了

$$\mathcal{N}_3(R) = \frac{4}{3}\pi R^3 + O\big(R^{\frac{21}{16}+\varepsilon}\big),$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是任意的。他的证明基于一个显式公式，该公式给出了将$n \in \mathbb{N}$表示为三个整数平方和的方式数。为此，研究了一个狄利克雷L级数$L(1,\chi_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_n m^{-s}$

以及 $\chi_n(m) = \left(-\frac{4}{n\,m}\right)$。我们还提及 [16] Götze 的一篇重要文章，其中研究了更复杂情形下的格点问题，即 n维椭球体的情形。

在上述（21）记号下，我们可以陈述以下推论。

推论 2.11。 存在正常数 C_1 和 C_2，其中 $C_1 < C_2$ 依赖于 n，使得

$$C_1\, m^{\frac{n-1}{2}} \le \boldsymbol{\lambda}\big(Trig_{J_2(\le m,n)}(\mathbb{T}^n)\big) \le C_2\, m^{\frac{n-1}{2}}.$$

证明。 我们使用 Babenko 证明的一个双边估计 [2],，用我们的记号表示，即存在常数C_1和 C_2，满足 $0 < C_1 < C_2$ 依赖于 n，使得对每个$m \in \mathbb{N}$，以下估计成立：

$$C_1\, m^{\frac{n-1}{2}} \le \int_{\mathbb{T}^n} \Big| \sum_{\alpha \in J_2(\le m,n)} z^\alpha \Big|\, dz \le C_2\, m^{\frac{n-1}{2}}.$$

因此，所需结论由推论 2.5得出。 □

关于 Babenko 这一重要结果的历史，我们可参阅 Liflyand 撰写的精彩综述论文[31, 定理 1。1]。值得注意的是，其中给出的证明并未对维数 n 下的常数C_1和 C_2给出精确的渐近估计。 C_1和 C_2的估计都深受半径为 $\mathbb{R}^n$的闭欧几里得球的示性函数的傅里叶变换影响，而该变换可用众所周知的贝塞尔函数表示。有趣的是，当 $C_1 = C_1(\varepsilon)$： $= C_4\varepsilon^{(n-1)/2} - C_3\varepsilon^{n/2}$ 对于较小的 $\varepsilon \in (0, 1)$。

3. 狄利克雷多项式

回顾引言中的内容，给定一个频率 $\omega = (\omega_n)$ 和一个有限指标集 $J \subset \mathbb{N}$，我们用 $\mathscr{H}_{J\infty}(\omega)$ 表示由支集在 ωJ 上的所有 -狄利克雷多项式 构成的巴拿赫空间，其范数为虚轴上的上确界范数。下述关于 $\mathscr{H}_{J\infty}(\omega)$ 的投影常数的积分公式是我们的主要成果之一，对于进一步描述具体频率和指标集下的 $\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_{J\infty}(\omega)\big)$ 至关重要。另请参见定理 3.6，其中给出了一个用紧阿贝尔群表述的等价形式。

定理 3.1。 令 $J \subset \mathbb{N}$ 为一个有限子集， $\omega = (\omega_n)$ 为一个频率。则

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}^J_\infty(\omega)\big) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Big| \sum_{n\in J} e^{-i\omega_n t} \Big|\, dt.$$

证明见下一节末尾，主要基于定理2.1，并将 $\mathscr{H}_{J\infty}(\omega)$ 改写为某些与 ω 相关的紧阿贝尔群上的三角多项式 Hardy 型空间；这些三角多项式都支撑在与J相关的有限特征集上。

3.1. **Bohr构想**。 我们需要改造 [10] 中的思想。我们的首要目标是将有限维巴拿赫空间 $\mathscr{H}_\infty(\omega)$ 描述为某个紧阿贝尔群上的函数 Hardy 型空间。

下文中，若一对 (G,β) 满足：G 是紧阿贝尔群，且$\beta\colon \mathbb{R}\to G$是一个值域稠密的连续同态，则称其为狄利克雷群；如前所述，我们用 m 表示G上的哈尔测度。于是，由稠密性可知，对偶映射

$$\widehat{\beta}\colon \widehat{G}\to\widehat{\mathbb{R}}$$

是单射。此外，若用 $\mathbb{R}$ 表示赋予自然拓扑的群 $(\mathbb{R},+)$，则同态 $\mathbb{R}=\widehat{\mathbb{R}}$, $x\mapsto e^{ix\bullet}$将 $\mathbb{R}$与 $\widehat{\mathbb{R}}$同胚为拓扑群，因此可将 $\widehat{\beta}(\widehat{G})$ 视为 $\mathbb{R}$的子集。

特别地，我们注意到，若 (G,β) 是一个狄利克雷群，且 $\gamma\colon G\to\mathbb{T}$ 是一个特征，则复合映射 $\gamma\circ\beta\colon \mathbb{R}\to\mathbb{T}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个特征。因此，存在唯一的 $x\in\mathbb{R}$ 使得对所有 $t\in\mathbb{R}$，$\gamma\circ\beta(t)=e^{ixt}$。以下来自 [10, Proposition 3.10] 的结果至关重要——为完整起见，我们给出证明。

命题 3.2. 对于任意狄利克雷群(G,β)，有

$$\int_G f(a)\,d\mathrm{m}(a)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f\circ\beta(t)\,dt,\quad f\in C(G).$$

证明。 首先注意，对所有 $\gamma\in\widehat{G}$，我们都有

$$\int_G \gamma(a)\,d\mathrm{m}(a)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\gamma\circ\beta(t)\,dt.$$

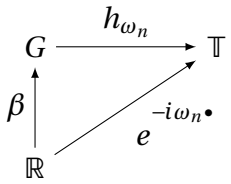
事实上，如上所述，由于对偶映射 β 的单射性，我们知道对每个 $\gamma\in G$，都存在唯一的 $x=x(\gamma)\in\mathbb{R}$，使得对所有 $t\in\mathbb{R}$，均有 $\gamma\circ\beta(t)=e^{ixt}$。现在回想一下，当 $\gamma\neq 1$ (resp., $\gamma=1$) 时，$\int_G\gamma\,dm=0$（分别地，$\int_G\gamma\,dm=1$）。显然，$\gamma\neq 1$（分别地，$\gamma=1$）推出 $x\neq 0$（分别地，$x=0$），所以在这种情况下，上述等式显然成立。因此，对所有三角多项式 $f\in C(G)$，该结论也成立。但由于所有三角多项式在 C(G) 中稠密，而且线性泛函集合 $\{\Phi_T\colon T>0\}$

$$\Phi_T\colon C(G)\to\mathbb{C},\quad \Phi_T(f):=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f\circ\beta(t)dt$$

是一致有界的，结论可由巴拿赫–斯坦豪斯定理得出 . □

给定一个频率 $\omega=(\omega_n)$，我们需要与 ω 相适配的狄利克雷群。若 $\{\omega_n\colon n\in\mathbb{N}\}\subset\widehat{\beta}(\widehat{G})$，则称这一对 (G,β) 为一个 ω-狄利克雷群；也就是说，对于每个特征 $e^{-i\omega_n\bullet}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{T}$

存在一个特征 $h_{\omega_n} \in \widehat{G}$（且该特征唯一），使得下图交换:



有关 ω-狄利克雷群所需的所有信息，请参见 [10]。

我们来收集一些例　子。第一个是频率 $\omega = (n)$，其中满足条件的数对 $(\mathbb{T}, \beta_{\mathbb{T}})$

$$\beta_{\mathbb{T}} : \mathbb{R} \to \mathbb{T},\ t \mapsto e^{-it}$$

显然构成一个 ω-狄利克雷群。将 $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$ 视为同一对象后，我们得到 $h_n(z) = z^n$，其中 $z \in \mathbb{T}$，$n \in \mathbb{Z}$。

第二个例子表明，对于任意可能的频率 ω，ω-狄利克雷群总是存在。事实上，给定一个频率 ω，实数的所谓 Bohr紧化构成一个 ω-狄利克雷群。

例 3.3。记 $\mathbb{R}^{\overline{}} := (\mathbb{R}, +, d)$ 为 $\mathbb{R}$ 的 Bohr紧化，其中 d表示离散拓扑。这是一个紧阿贝尔群，并且与映射

$$\beta_{\overline{\mathbb{R}}} : \mathbb{R} \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ x \mapsto \left[t \mapsto e^{-ixt} \right]$$

共同构成一个对于每个频率 ω 都成立的 ω-狄利克雷群。

但是，对于具体的频率 ω，通常存在一些 ω-狄利克雷群，从某种意义上说，它们比 Bohr紧化更自然地反映了这些频率的结构。

例 3.4。令 $\omega = (\log n)$。那么，无限维环面 $\mathbb{T}^\infty$ 与所谓的克罗内克流

$$\beta_{\mathbb{T}^\infty} : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^\infty, \quad t \mapsto (\mathfrak{p}_k^{-it}),$$

其中 $\mathfrak{p}_k$ 再次表示第k个素数，构成一个 ω-狄利克雷群。这基本上是 Kronecker逼近定理的推论（另一种“调和分析”论证见 [10, 例 3.7]）。注意，若将

$$\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} = \widehat{\mathbb{T}^\infty}, \quad \alpha \mapsto [z \mapsto z^\alpha]$$

（$\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ 所有有限整数序列），对于每个 $z \in \mathbb{T}^\infty$，都有

$$h_{\log n}(z) = h_{\sum \alpha_j \log \mathfrak{p}_j}(z) = z^\alpha, \tag{22}$$

其中 $n = \mathfrak{p}^\alpha$ 且 $\alpha \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$。

如前所述，我们现在将由有限指标集 $J \subset \mathbb{N}$ 支撑的所有 ω-狄利克雷多项式构成的巴拿赫空间 $\mathscr{H}_{J\infty}(\omega)$，重新表述为 ω-狄利克雷群上的函数构成的哈代空间。给定有限集 $J \subset \mathbb{N}$ 和一个 ω-狄利克雷群 (G, β)，我们记

$$H_\infty^{\omega,J}(G)$$

ˆ 表示所有三角多项式的子空间$f = \sum_{n\in J} f(h_{\omega_n}) h_{\omega_n}$，它包含于$L_\infty(G)$（相对于$G$上的哈尔测度 m）。

现在显然可以得到 $\mathscr{H}_{J\infty}(\omega)$ 的如下等价描述。

命题 3.5。L 设 $J \subset \mathbb{N}$ 为有限子集，且(G,β) 是一个 ω-狄利克雷群。那么 *Bohr ma* p

$$\mathscr{B} : \mathscr{H}_\infty^J(\omega) \to H_\infty^{\omega,J}(G), \quad \sum_{n\in J} a_n e^{-\omega_n s} \mapsto \sum_{n\in J} a_n h_{\omega_n}$$

*defi*定义一个等距线性双射，它保持 *Bohr* 和傅里叶系数 *s.*

证明。 集合 $(e^{-i\omega_n \bullet})_{n\in J}$ 和 $(h_{\omega_n})_{n\in J}$ 都是线性无关的。因此，只需验证对于任意复标量集合 $(a_n)_{n\in J}$，我们有

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \Big| \sum_{n\in J} a_n e^{-i\omega_n t} \Big| = \sup_{g\in G} \Big| \sum_{n\in J} a_n h_{\omega_n}(g) \Big|.$$

但由以下事实可立即看出这一点：对于每个$n \in J$，$e^{-i\omega_n \bullet} = h_{\omega_n} \circ \beta$，并且 β 的值域还是稠密的。 □

最后，我们现在可以证明定理 3.1。

定理 *3.1* 的证明。 取某个 ω-狄利克雷群 (G, β)（根据例 3.3，这是可能的）。于是由命题3.5 和定理 2.1 可得

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_\infty^J(\omega)\big) = \boldsymbol{\lambda}\big(H_\infty^{\omega,J}(G)\big) = \int_G \Big| \sum_{n\in J} h_{\omega_n} \Big| \, d\mathrm{m}.$$

现在应用命题3.2，得到

$$\int_G \Big| \sum_{n\in J} h_{\omega_n} \Big| \, d\mathrm{m} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Big| \sum_{n\in J} e^{-i\omega_n t} \Big| \, dt,$$

因此证明完成。 □

我们补充一个“群版本”的定理 3.1，根据命题 3.2 可立即得出。

定理 3.6。 设 $J \subset \mathbb{N}$ 为一个有限子集， ω 为一个频率，且 (G,β) 为一个 ω-狄利克雷群，其哈尔测度为m。那么

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_\infty^J(\omega)\big) = \int_G \Big| \sum_{n\in J} h_{\omega_n} \Big| \, d\mathrm{m}.$$

3.2. **投影常数——狄利克雷多项式**。 现在，我们的目标是运用迄今为止积累的知识，给出具体的应用。事实上，我们区分三种情形——每种情形的出发点略有不同。

3.2.1. 情形 ***I***. 我们考虑三种标准频率 $\omega=(n)_{n\in\mathbb{N}_0}$、 $\omega=(\log p_n)_{n\in\mathbb{N}}$（其中如上所述， p_n是第n个素数），以及$\omega=(\log n)_{n\in\mathbb{N}}$对应的长度为$x$的狄利克雷多项式巴拿赫空间 $\mathscr{H}^{\leq}{}_{x\infty}(\omega)$。

从 $\omega=(n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 出发，对于$x\in\mathbb{N}$，这一对应关系

$$\mathscr{H}_\infty^{\leq x}(\omega) \;=\; \mathrm{Trig}_{\{n\in\mathbb{N}_0:\, n\leq x\}}(\mathbb{T}),\quad \sum_{n=0}^{x} a_n e^{-\omega_n s}\mapsto \sum_{n=0}^{x} a_n z^n \tag{23}$$

显然是等距的（作变量变换$z=e^{-s}$即可），因此由定理 3.6 可得积分公式

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_\infty^{\leq x}(\omega)\big)=\int_{\mathbb{T}}\Big|\sum_{n=0}^{x} z^k\Big|\,dz. \tag{24}$$

经过标准计算可得以下结果；鉴于式（23），它是（18）中洛津斯基-哈希拉泽定理的对应结果。

定理 3.7。 对于频率 $\omega=(n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_\infty^{\leq x}(\omega)\big)=\frac{4}{\pi^2}\log(x+1)+o(1)\,.$$

接下来我们考虑频率 $\omega=(\log p_n)$。这是一个典型的 $\mathbb{Q}$-线性无关频率。众所周知（例如，参见[25,定理 9。2]），如果 ω_1，…，ω_n是实数，且在 $\mathbb{Q}$上线性无关，并且 $\omega_0=0$，那么对于任意复数$a_0,a_1,\ldots,a_x$，我们有

$$\sum_{n=0}^{x}|a_n|=\sup_{t\in\mathbb{R}}\Big|\sum_{n=0}^{x} a_n e^{-i\omega_n t}\Big|.$$

换言之，对于任意在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关的频率 ω，以及任意有限子集$J\subset\mathbb{N}$，映射

$$\mathscr{H}_\infty^{J}(\omega) \;=\; \ell_1^{|J|},\quad \sum_{n\in J} a_n e^{-\omega_n s}\mapsto (a_n)_{n\in J}$$

是等距的。因此，以下积分与极限公式可由（4）和（8）直接得到。

定理 3.8。 设 ω 是一个 $\mathbb{Q}$-线性无关的频率，且$J\subset\mathbb{N}$ 是一个有限子集。那么

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_\infty^{J}(\omega)\big)=\int_{\mathbb{T}^{|J|}}\Big|\sum_{n\in J} z_k\Big|dz.$$

此外，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\boldsymbol{\lambda}\left(\mathscr{H}_\infty^{\le x}(\omega)\right)}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

尽管常数的取值精确，我们仍可在第 Λ2 节中介绍的 2.2.1 节所述(2)-集的框架下推广前述结果。回顾注 2.4 ，紧阿贝尔群上的每个 B_2-特征集都是一个 Λ(2)-集，其 Λ(2)-常数为 $\le\sqrt{2}$。

因此，定理 3.6、推论2.3和注 2.4 推出了定理 3.8的如下推广。

定理3.9。 设 ω 是一个频率，且(G,β) 是一个具有如下性质的 ω-狄利克雷群：所有特征 $h_{\omega_n}\in\widehat{G}$ 构成一个常数为 $C_2(\omega)$的 Λ(2)-集。那么

$$\frac{1}{C_2(\omega)}\sqrt{x}\le\boldsymbol{\lambda}\left(\mathscr{H}_\infty^{\le x}(\omega)\right)\le\sqrt{x}.$$

特别地，若 ω 满足 B_2-条件，则

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x}\le\boldsymbol{\lambda}\left(\mathscr{H}_\infty^{\le x}(\omega)\right)\le\sqrt{x}.$$

最后，我们处理通常的频率 $\omega=(\log n)$，由此免费得到一个主要应用。事实上，将 Harper 在（1）中的深刻结果与定理 3.1结合起来，我们就得到巴拿赫空间 $\mathscr{H}^{\le}{}_{x\infty}$ 的投影常数的精确渐近阶。

定理 3.10。

$$\boldsymbol{\lambda}\left(\mathscr{H}_\infty^{\le x}\left((\log n)\right)\right)=O\left(\frac{\sqrt{x}}{(\log\log x)^{\frac{1}{4}}}\right)$$

用三角多项式的术语重新表述这一结果似乎也很有意思。我们记

$$\Delta(x)=\left\{\alpha\in\mathbb{N}_0^{\pi(x)}:1\le\mathfrak{p}^\alpha\le x\right\},$$

其中 $x\ge1$ 且 $\pi(x)$ 通常表示不超过 $\mathfrak{p}\le x$ 的素数个数。于是由命题 3.5 可得

$$\mathscr{H}_\infty^{\le x}\left((\log n)\right)=\mathrm{Trig}_{\Delta(x)}\left(\mathbb{T}^{\pi(x)}\right),\tag{25}$$

其中的对应关系由博尔变换给出——该变换是等距且保系数的。因此，以下两个结果分别是定理 3.10（第一条陈述）和定理2.1 （第二条陈述）的直接推论。

推论 3.11。

$$\boldsymbol{\lambda}\left(Trig_{\Delta(x)}\left(\mathbb{T}^{\pi(x)}\right)\right)=O\left(\frac{\sqrt{x}}{(\log\log x)^{\frac{1}{4}}}\right).$$

此外，

$$\boldsymbol{\lambda}\big(Trig_{\Delta(x)}\big(\mathbb{T}^{\pi(x)}\big)\big) = \big\|\mathbf{P}_{\Delta(x)} : C(\mathbb{T}^{\pi(x)}) \to Trig_{\Delta(x)}\big(\mathbb{T}^{\pi(x)}\big)\big\| = \int_{\mathbb{T}^{\pi(x)}} \big|\sum_{\alpha\in\Delta(x)} z^{\alpha}\big| dz,$$

其中，$\mathbf{P}_{\Delta(x)}$ 表示将 $L_2(\mathbb{T}^{\pi(x)})$ 上的正交投影限制到 $Trig_{\Delta(x)}\big(\mathbb{T}^{\pi(x)}\big)$。

3.2.2. 情形 II. 对于普通频率 $\omega = (\log n)$，我们考察由自然数 k 的指标集 J 生成的狄利克雷多项式巴拿赫空间 $\mathscr{H}_{\infty}(\omega)$；这些指标集的素数分解复杂度是预先给定的。更确切地说，前两个结果讨论指标集 J，其中每个元素 $k = \mathfrak{p}^{\alpha} \in J$ 所含的不同素因子不超过 n 个，且其最大值为 $\alpha_j \le m$；或者类似地，含有 n 个不同素因子，且其值为 $|\alpha| = \sum \alpha_j \le m$。回顾式 (10) 中指标集 $\Lambda_1(\le m, n)$ 和 $\Lambda_{\infty}(\le m, n)$ 的定义。

定理 3.12. 设 $\omega = (\log n)$。则

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_{\infty}^{N_{\infty}(\le m,n)}(\omega)\big) \sim (1+\log m)^n,$$

且对每个 n

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_{\infty}^{N_{\infty}(\le m,n)}(\omega)\big)}{\log^n m} = \Big(\frac{4}{\pi^2}\Big)^n,$$

其中

$$N_{\infty}(\le m, n) = \big\{k \in \mathbb{N} \colon k = \mathfrak{p}^{\alpha},\ \ \alpha \in \Lambda_{\infty}(\le m, n)\big\}.$$

证明。由此可得 由命题 3.5 和例3.4 以及式（22），可知 Bohr 映 p

$$\mathscr{B} \colon \mathscr{H}_{\infty}^{N_{\infty}(\le m,n)}(\omega) \to \mathrm{Trig}_{\Lambda_{\infty}(\le m,n)}\big(\mathbb{T}^n\big),\ \ \sum_{n\in J} a_n e^{-\omega_n s} \mapsto \sum_{\alpha\in\Lambda_{\infty}(\le m,n)} a_{\mathfrak{p}^{\alpha}} z^{\alpha}$$

定义了一个保持 Bohr 和傅里叶系数的等距线性双射。因此，第一个渐近式是推论2.9 （iv）的推论，而推论 2.10给出了极限公式。 □

将推论 2.10 替换为推论2.5 和（17），类似的论证可得以下前一定理的对应结果。

定理 3.13。 设 $\omega =$（log自然数集）。那么对每个 $m,\ n \in \mathbb{N}$均有

$$\frac{1}{\sqrt{2^m}}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k+1}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \le \boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_{\infty}^{N_1(\le m,n)}(\omega)\big) \le \left(\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k+1}{k}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中

$$N_1(\le m, n) = \big\{k \in \mathbb{N} \colon k = \mathfrak{p}^{\alpha},\ where\ \alpha \in \Lambda_1(\le m, n)\big\}.$$

我们以一个结果结束本部分。鉴于（16）中的Weissler不等式，该结果是上一定理的形式推广。为此，对有限指标集$J \subset \mathbb{N}$，定义数

$$\pi(J) = \max_{n\in J} \pi(n) \quad \text{and} \quad \Omega(J) = \max_{n\in J} \Omega(n),$$

and

$$\Delta(J) = \left\{\alpha \in \mathbb{N}_0^{\pi(J)} : n \in J, \mathfrak{p}^\alpha = n\right\}.$$

这里，按照惯例，$\pi(n)$ 表示小于 $\leq n$ 的所有素数的个数，而 $\Omega(n)$ 表示n 的素因子个数（按其重数计）。

定理 3.14. 设 $\omega = (\log n)$ 且 $J \subset \mathbb{N}$ 为一个有限子集。那么

$$\boldsymbol{\lambda}\left(\mathscr{H}_\infty^J(\omega)\right) = \int_{\mathbb{T}^{\pi(J)}} \Big| \sum_{\alpha\in\Delta(J)} z^\alpha \Big| \, dz.$$

此外，

$$\frac{1}{\sqrt{2^{\Omega(J)}}} \sqrt{|J|} \;\leq\; \boldsymbol{\lambda}\left(\mathscr{H}_\infty^J(\omega)\right) \leq \sqrt{|J|}.$$

证明。 如上（命题3.5），我们看到博尔映射

$$\mathscr{B}\colon \mathscr{H}_\infty^J(\omega) \to \mathrm{Trig}_{\Delta(J)}\left(\mathbb{T}^{\pi(J)}\right), \quad \sum_{n\in J} a_n e^{-\omega_n s} \mapsto \sum_{\alpha\in\Delta(J)} a_{\mathfrak{p}^\alpha} z^\alpha \tag{26}$$

是等距且保持系数不变的。再次由推论2.5可得结论。事实上，每个多重指标的阶 $|\alpha|$ $\alpha \in \Delta(J)$ 至多为 $\Omega(J)$，而 J和 $\Delta(J)$ 的基数相同。 □

3.2.3. 情形 ***III***. 最后，我们给出一个例子，将前两种情形中的特点结合起来。下面的结果讨论长度为 x的普通狄利克雷多项式，其支撑集为所有$1 \leq n = \mathfrak{p}^\alpha \leq x$，且恰有 m 个素因子（按重数计数）。

定理 3.15. 设 $\omega = (\log n)$。那么对每个 $m \in \mathbb{N}$，都有

$$\boldsymbol{\lambda}\left(\mathscr{H}_\infty^{N_1(m,x)}(\omega)\right) \sim_{C(m)} \sqrt{\frac{x}{\log x}} \sqrt{\frac{(\log\log x)^{m-1}}{(m-1)!}},$$

其中常数依赖于 m，但不依赖于 x，并且

$$N_1(m,x) = \left\{1 \leq n \leq x : n = \mathfrak{p}^\alpha \;\; with \;\; |\alpha| = m\right\}.$$

此外，只要 $m \leq \log\log x \, 2e$，常数 $C(m)$ 就与 m 无关。

我们先来看特殊情形 $m = 1$。首先注意，对于任意 m，根据命题 3.5，

$$\mathscr{H}_\infty^{N_1(m,x)}(\omega) = \mathrm{Trig}_{\Delta(N_1(m,x))}\left(\mathbb{T}^{\pi(N_1(m,x))}\right),$$

其中，由博尔映射给出的对应是等距且保系数的。因此，对于$m=1$，由定理 3.8 和素数定理，我们立即可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_\infty^{N_1(1,x)}\big)}{\sqrt{\frac{x}{\log x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_\infty^{N_1(1,x)}\big)}{\sqrt{\pi(x)}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

因此，前面的定理将这一渐近估计从$m=1$推广到了任意$m>1$（忽略常数）。

定理的证明 *3.15*定理 。由于 $\pi(\text{自然数集}(m,x))\le\pi(x)$ 且 $\Omega(\text{自然数集}_1(m,x)))=m$，根据定理 3.14

$$\frac{1}{\sqrt{2^m}}\sqrt{|N_1(m,x)|}\ \le\ \boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_\infty^{\le x,m}\big)\le\sqrt{|N_1(m,x)|}.$$

那么，第一个结论 f ollows from a well-known result of Landau(see, e.g., [45, 第 200] 页）表明 t

$$|N_1(m,x)|\ \sim_{C(m)}\ \frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x)^{m-1}}{(m-1)!}\quad\text{as}\quad x\to\infty.$$

为证明第二个断言，我们再次利用定理3.14

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_\infty^{N_1(m,x)}\big)=\int_{\mathbb{T}^\infty}\Big|\sum_{\alpha\in\Delta(N_1(m,x))}z^\alpha\Big|\,dz.$$

但在 [7, 方程（13），第107] 页中证明了存在一个普适常数 $C\ge1$，使得对任意x，m 满足 $m\le\operatorname{loglog}x\,2e$

$$\int_{\mathbb{T}^\infty}\Big|\sum_{\alpha\in\Delta(N_1(m,x))}z^\alpha\Big|\,dz\ \sim_C\ \left(\int_{\mathbb{T}^\infty}\Big|\sum_{\alpha\in\Delta(N_1(m,x))}z^\alpha\Big|^2dz\right)^{\frac12}=\sqrt{|N_1(m,x)|}.$$

另一方面，应用萨特-塞尔伯格公式（例如参见 [12]），我们得出，对于每个$\delta>0$，都存在 $C(\delta)>0$，使得当 $m\le(2-\delta)\operatorname{loglog}x$

$$|N_1(m,x)|\ \sim_{C(\delta)}\ \frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x)^{m-1}}{(m-1)!}\quad\text{as}\quad x\to\infty.$$

至此，论证完成。 □

4. 比较 Sidon 常数

回顾一下，给定一个拓扑群G，有限集 Γ 中的特征在对偶群 $\widehat{\ }G$ 上的 Sidon 常数**Sid**(Γ)，是指满足以下条件的最优常数 $c\ge0$：对于 G上的任意三角多项式 $f=\sum_{\gamma\in\Gamma}c_\gamma\gamma$，都有

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|c_\gamma|\le c\|f\|_\infty. \tag{27}$$

容易证明，这个常数实际上等于巴拿赫空间 Trigr(G) 中由所有$\gamma\in\Gamma$ 构成的无条件基常数。

回顾一下，巴拿赫空间 X 中基 $(e_i)_{i\in I}$ 的无条件基常数，定义为满足以下条件的所有 $K>0$ 的下确界：对于任意有限支撑的标量族 $(\alpha_i)_{i\in I}$，以及任意满足 $|\varepsilon_i|=1$ 的有限支撑族 $(\varepsilon_i)_{i\in I}$，若 $i\in I$，则有

$$\Big\|\sum_{i\in I}\varepsilon_i\alpha_i e_i\Big\| \le K\Big\|\sum_{i\in I}\alpha_i e_i\Big\|;$$

此外，在这种情况下，$(e_i)_{i\in I}$ 的无条件基常数定义为所有这些常数 K 的下确界。

特别地，对于任意有限指标集 $\Gamma\subset\mathbb{Z}^n$，$\mathrm{Trig}_\Gamma(\mathbb{T}^n)$ 中所有单项式 $(z^\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ 所构成集合的无条件基常数（记作 $\boldsymbol{\chi_{\mathrm{mon}}}\big(\mathrm{Trig}_\Gamma(\mathbb{T}^n)\big)$）等于 Sidon 常数 $\mathbf{Sid}(\Gamma)$。

给定一个有限维巴拿赫空间 X，相对于该空间某个基的无条件基常数与其投影常数是两个截然不同的对象（例如比较$\chi(\ell_2^n)=1$与 $\boldsymbol{\lambda}(\ell_2^n)\sim \mathrm{p}n$）。

然而，对于狄利克雷多项式巴拿赫空间及其对应的多变量三角多项式空间，事实证明，对这两个常数之一有更深入的理解，往往能帮助我们更好地理解另一个常数。

为说明这一观点，我们先考察单变量解析三角多项式。回顾一下，$\mathrm{Trig}_{\{k:\,1\le k\le d\}}(\mathbb{T})$ 表示所有具有如下形式的解析三角多项式$P(z)=\sum^d{}_{k=1}a_kz^k$，$z\in\mathbb{T}$，也就是次数为 $\le d$且没有常数项的多项式a_0（沿用第2节的记号）。随后，Rudin [38] 和 Shapiro [44]（另见 [9, 命题 9。7]）证明了

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d}\le\boldsymbol{\chi_{\mathrm{mon}}}\big(\mathrm{Trig}_{\{k:\,1\le k\le d\}}(\mathbb{T})\big)\le\sqrt{d}.$$

如果允许出现常数项，那么目前已知的最佳估计是

$$\sqrt{d}-O(\log d)^{\frac{2}{3}+\varepsilon}\le\boldsymbol{\chi_{\mathrm{mon}}}\big(\mathrm{Trig}_{\{k:\,0\le k\le d\}}(\mathbb{T})\big)\le\sqrt{d}.$$

这是 Bombieri 和 Bourgain 在 [6], 中证明的一个深刻结果，表明至少从技术角度来看，指标集看似微小的扰动也可能彻底改变情况。

让我们将这些结果与我们在推论2.9 中对投影常数的证明进行比较，即

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathrm{Trig}_{\{k:\,1\le k\le d\}}(\mathbb{T})\big)\sim\boldsymbol{\lambda}\big(\mathrm{Trig}_{\{k:\,0\le k\le d\}}(\mathbb{T})\big)\sim 1+\log d.$$

单变量三角多项式空间的无条件基常数（也就是 Sidon 常数）和投影常数的表现截然不同。

当然，即使我们允许更多变量，情况也不会有所改善——不过，我们或许仍能识别出一些在某种意义上具有系统性的模式。事实上，已有证明见 [8]（这一结果在 [9,

定理 9.10]) 表明

$$\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{mon}}\left(\mathrm{Trig}_{\le m}(\mathbb{T}^n)\right) \sim_{C^m} \sqrt{\binom{n+m}{m}}.$$

另一方面，根据定理 3.13 我们知道

$$\boldsymbol{\lambda}\left(\mathrm{Trig}_{\le m}(\mathbb{T}^n)\right) \sim_{C^m} \sqrt{\binom{n+m+1}{m}},$$

因此，特别有

$$\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{mon}}\left(\mathrm{Trig}_{\le m}(\mathbb{T}^n)\right) \sim_{C^m} \boldsymbol{\lambda}\left(\mathrm{Trig}_{\le m-1}(\mathbb{T}^n)\right) \sim_{C^m} \left(\frac{n+m}{m}\right)^{\frac{m-1}{2}}. \tag{28}$$

回到通常的（！）狄利克雷多项式空间，首先注意，给定 $\mathbb{N}$ 的一个有限子集J，显然，“单项式” n^{-s}、$n \in J$构成巴拿赫空间 $\mathscr{H}_{J_\infty}((\log n))$ 的一组基，下文简记为 $\mathscr{H}_{J\infty}$，因此我们记

$$\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{mon}}\left(\mathscr{H}_\infty^J\right)$$

所有 n^{-s}、$n \in J$的无条件基常数。

正如在 (26) 中已经用到的，存在一个等距同构 $\mathscr{H}_{J\infty} = \mathrm{Trig}^{\Delta(J)}(\mathbb{T}^{\pi(J)})$，它保持系数，因此由 (28) 我们可得

$$\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{mon}}\left(\mathscr{H}_\infty^{N_1(m,n)}\right) \sim_{C^m} \boldsymbol{\lambda}\left(\mathscr{H}_\infty^{N_1(m-1,n)}\right) \sim_{C^m} \sqrt{\binom{n+m}{m}};$$

这里我们再次采用定理3.13中固定的记号。

$\mathscr{H}_\infty^{\le x}$（由所有长度为$x$的狄利克雷多项式$D(s) = \sum_{n=1}^x a_n n^{-s}$构成的巴拿赫空间）的无条件基常数与其投影常数相比如何?

我们再次采用第3.2.2节中的记号。下面的渐近

$$\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{mon}}\left(\mathscr{H}_\infty^{\le x}\right) = \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{mon}}\left(\mathrm{Trig}_{\Delta(x)}(\mathbb{T}^{\pi(x)})\right) \sim_C \frac{\sqrt{x}}{e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+o(1)\right)\sqrt{\log x \log\log x}}}.$$

取自[8, 定理 3]（另见 [9, 定理 9。1]），这是 Queffélec、Konyagin 和 de la Bretèche 开始的一项长期研究计划的最终成果（有关其历史的更多详情，请参见 [9, 第 9 节。3] ）。在定理3.10 和推论3.11 中，我们证明了它在投影常数方面的对应结果：

$$\boldsymbol{\lambda}\left(\mathscr{H}_\infty^{\le x}\right) = \boldsymbol{\lambda}\left(\mathrm{Trig}_{\Delta(x)}(\mathbb{T}^{\pi(x)})\right) \sim_C \frac{\sqrt{x}}{(\log\log x)^{\frac{1}{4}}}.$$

在m次齐次情形下，Balasubramanian-Calado-Queffélec 已知类似结果 [3]（该结果在 [9, 定理 9。4]中作了进一步阐述），采用定理3.15中的记号，可得

$$\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{mon}}\big(\mathscr{H}_\infty^{N_1(m,x)}\big) = \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{mon}}\big(\mathrm{Trig}_{\Delta(N_1(m,x))}\big(\mathbb{T}^{\pi(N_1(m,x))}\big)\big) \sim_{C(m)} \frac{x^{\frac{m-1}{2m}}}{(\log x)^{\frac{m-1}{2}}},$$

而定理 3.15 给出的相应投影常数结果为

$$\boldsymbol{\lambda}\big(\mathscr{H}_\infty^{N_1(m,x)}\big) = \boldsymbol{\lambda}\big(\mathrm{Trig}_{\Delta(N_1(m,x))}\big(\mathbb{T}^{\pi(N_1(m,x))}\big)\big) \sim_{C(m)} \sqrt{\frac{x}{\log x}}\sqrt{\frac{(\log\log x)^{m-1}}{(m-1)!}}.$$

ACKNOWLEDGMENTS

我们感谢审稿人仔细阅读稿件并提出宝贵意见，这些意见改进了文章的呈现方式。代表所有作者，通讯作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] F. Albiac 和 N. J. Kalton。《巴拿赫空间理论专题》，第 233 卷。施普林格，2006 年。[2] K. I. Babenko。关于多重傅里叶级数的平均收敛及球面平均狄利克雷核的渐近性质。《欧亚数学杂志》，9(4):22–60，2018 年。[3] R. Balasubramanian、B. Calado 和 H. Queffélec。普通狄利克雷级数的玻尔不等式。《数学研究》，175(3):285–304，2006 年。[4] H. F. Bohnenblust 和 E. Hille。关于狄利克雷级数的绝对收敛。《数学年刊》，第 600–622 页，1931 年。[5] H. Bohr。无穷多个变量的幂级数在狄利克雷级数理论中的意义 $\sum \frac{a_n}{n^s}$。《哥廷根科学学会公报，数学物理学部》，1913:441–488，1913 年。[6] E. Bombieri 和 J. Bourgain。关于玻尔不等式的一点注记。《国际数学研究通知》，2004(80):4307–4330，2004 年。[7]A. Bondarenko 和 K. Seip。随机乘法函数之和的赫尔森问题。《数学》，62(1):101–110，2016 年。[8] A. Defant、L. Frerick、J. Ortega-Cerdà、M. Ounaïes 和 K. Seip。齐次多项式的 Bohnenblust-Hille 不等式具有超收缩性。《数学年刊》（第 2 辑），174(1):485–497，2011 年。[9] A. Defant、D. García、M. Maestre 和 P. Sevilla-Peris。《高维中的狄利克雷级数与全纯函数》，第 37 卷，收录于《新数学专著》。剑桥：剑桥大学出版社，2019 年。[10] A. Defant 和 I. Schoolmann。广义狄利克雷级数的 $\mathscr{H}_p$-理论。《傅里叶分析与应用杂志》，25(6):3220–3258，2019 年。[11] J. Diestel、H. Jarchow 和 A. Tonge。《绝对求和算子》，第 43 卷，收录于《剑桥高等数学研究》。剑桥：剑桥大学出版社，1995 年精装版的平装重印版，2008 年。[12] P. Erd˝os 和 A. Sarközy。关于整数的素因子个数。《数学科学学报》，42:237–246，1980 年。[13] G. Faber。关于连续函数的插值表示。《德国数学家协会年报》，23:192–210，1914 年。[14] D. J. H. Garling 和 Y. Gordon。有限维巴拿赫空间若干相关常数之间的关系。《以色列数学杂志》，9:346–361，1971 年。[15] Y. Gordon。关于l_n^p空间的投影常数与 Macphail 常数。《以色列数学杂志》，6:295–302，1968 年。

[16] F. Götze。格点问题与二次型的取值。《数学发明》，157(1):195–226，2004 年。[17] C. C. Graham 和 K. E. Hare。紧群上的插值与 Sidon 集。CMS 数学丛书/数学专著 SMC。纽约：施普林格，2013 年。[18] B. Grünbaum。投影常数。《美国数学会汇刊》，95:451–465，1960 年。[19] A. J. Harper。随机乘法函数的矩。II：高阶矩。《代数与数论》，13(10):2277–2321，2019 年。[20] D. R. Heath-Brown。球面上的格点。载于《数论进展》。为纪念 Andrzej Schinzel 60 岁生日，由斯特凡·巴拿赫国际数学中心组织的国际会议论文集，扎科帕内，波兰，1997年6月30日至7月9日。第 2 卷：初等数论与解析数论，第 883–892 页。柏林：德格鲁伊特，1999 年。[21] H. Hedenmalm、P. Lindqvist 和 K. Seip。一个狄利克雷级数希尔伯特空间及 $L^2(0,1)$ 中的伸缩函数系。《杜克数学杂志》，86(1):1–37，1997 年。[22] H. Helson。狄利克雷级数。加利福尼亚州伯克利：Henry Helson，2005 年。[23] H. Helson。汉克尔型。《数学研究》，1(198):79–84，2010 年。[24] M. I. Kadets 和 M. G. Snobar。紧闵可夫斯基空间上的若干泛函。《数学札记》，10:694–696，1972 年。[25] Y. Katznelson。《调和分析导论》。剑桥数学图书馆。剑桥：剑桥大学出版社，第 3 版，2004 年。[26] H. König。到对称空间上的投影。《数学问题》，18(1-3):199–220，1995 年。[27] H. König 和 D. R. Lewis。投影常数的一个严格不等式。《泛函分析杂志》，74:328–332，1987 年。[28] H. König、C. Schütt 和 N. Tomczak-Jaegermann。对称空间的投影常数与 Khintchine 不等式的变体。《纯粹与应用数学杂志》，511:1–42，1999 年。[29] S. Kwapién 和 C. Schütt。若干组合与概率不等式及其在巴拿赫空间理论中的应用。《数学研究》，82:81–106，1985 年。[30] D. R. Lewis。投影常数的一个上界。《美国数学会会刊》，103(4):1157–1160，1988 年。[31] E. R. Liflyand。多重傅里叶级数的勒贝格常数。《在线分析与组合杂志》，1:112，2006 年。编号 5。[32] W. A. Light。张量积空间中的极小投影。《数学杂志》，191:633–643，1986 年。[33] J. Lindenstrauss 和 L. Tzafriri。《经典巴拿赫空间 I：序列空间》，第 92 卷，收录于《数学成果与边界领域》。施普林格出版社，柏林，1977 年。[34] I. P. Natanson。《函数构造理论》，第 1 卷。美国原子能委员会技术信息推广办公室，1961 年。[35] G. Pisier。《线性算子分解与巴拿赫空间的几何》，第 60 卷，收录于《区域会议系列：数学》。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），1986 年。[36] H. Queffelec 和 M. Queffelec。《丢番图逼近与狄利克雷级数》，第 80 卷，收录于《数学阅读文库》。新德里：印度斯坦图书代理公司；新加坡：施普林格，第 2 版（增订版），2020 年。[37] M. A. Rieffel。利普希茨延拓常数等于投影常数。载于《算子理论、算子代数及其应用》。第 25 届大平原算子理论研讨会论文集，美国佛罗里达州中佛罗里达大学，2005年6月7日至12日，第 147–162 页。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2006 年。[38] W. Rudin。关于傅里叶系数的一些定理。《美国数学会会刊》，10:855–859，1959 年。[39] W. Rudin。具有间隙的三角级数。《数学与力学杂志》，9:203–227，1960 年。[40] W. Rudin。不变子空间上的投影。《美国数学会会刊》，13:429–432，1962 年。[41] W. Rudin。单位球内全纯函数的新构造，C^n，第 63 卷，收录于《区域会议系列：数学》。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），1986 年。

[42] D. Rutovitz. 关于有限维巴拿赫空间的若干参数。伦敦数学会会刊，40:241–255，1965.[43] E. Saksman 和 K. Seip. 狄利克雷级数分析中的若干开放问题。解析函数空间中的算子理论与逼近的最新进展，679:179–191，2016.[44] H. S. Shapiro. 多项式与幂级数的极值问题。博士论文，麻省理工学院，1952.[45] G. Tenenbaum. 解析数论与概率数论导论，第1卷，巴黎专题课程。巴黎：法国数学会，第2版，1995.[46] N. Tomczak-Jaegermann. 巴拿赫-马祖尔距离与有限维算子理想，第38卷，皮特曼纯应用数学专著与调查丛书 哈洛：朗文科技出版社；纽约：约翰·威立父子公司，1989.[47] F. B. Weissler. 圆上的对数型索博列夫不等式与超收缩估计。《泛函分析杂志》，37:218–234，1980.[48] P. Wojtaszczyk. 分析学家的巴拿赫空间。剑桥：剑桥大学出版社，1996。

德国奥尔登堡卡尔·冯·奥西茨基大学数学研究所，邮编 26111。电子邮件：defant@mathematik.uni-oldenburg.de 布宜诺斯艾利斯大学精确与自然科学学院数学系及 IMAS-CONICET。大学城 I 号馆（C1428EGA），布宜诺斯艾利斯自治市，阿根廷。电子邮件：dgalicer@dm.uba.ar 布宜诺斯艾利斯大学精确与自然科学学院数学系及 IAM-CONICET。萨韦德拉街 15 号（C1083ACA），布宜诺斯艾利斯自治市，阿根廷。电子邮件：mmansilla@dm.uba.ar 波兰波兹南亚当·密茨凯维奇大学数学与计算机科学学院，波兹南大学街 4 号，邮编 61-614，波兰。电子邮件：mieczyslaw.mastylo@amu.edu.pl 罗萨里奥国立大学 FCEIA 与 CIFASIS、CONICET，奥坎波街与埃斯梅拉达街交叉处，邮编 S2000，罗萨里奥，阿根廷。电子邮件：muro@cifasis-conicet.gov.ar