动态随机旅行商问题中的敏捷性与目标分布

Aviv Adler[1], Oren Gal[2], 和 Sertac Karaman[3]

[1,3]麻省理工学院信息与决策系统实验室[2]以色列理工学院[1], [3]{adlera,sertac}@mit.edu, [2] orengal@alumni.technion.ac.il

arXiv:2302.00243v1 [cs.RO] 1 Feb 2023

摘要

经典旅行商问题（TSP）的一个重要变体是动态旅行商问题，其中具有动态约束的系统需要以最短时间访问一组 n 目标位置（顺序任意）。这类任务自然地出现在许多机器人运动规划问题中，尤其是探索、监视和侦察领域，而图上的经典旅行商问题算法通常不适用于这种情形。关于此类问题的一个重要问题是：如果目标点是随机的，那么随着 n 的增加，巡回路线的长度（无论是期望值还是集中界）将如何变化？这个问题称为动态随机旅行商问题（DSTSP），人们既针对特定的重要车辆模型，也针对一般动态系统对其进行了研究；然而，通常情况下，人们只知道其增长阶。在本文中，我们探讨目标所抽取的分布与系统动力学之间的联系，从而得到巡回路径长度更精确的下界，以及对称（或无漂移）系统情形下与之匹配的上界。随后，我们将对称动力学的结果扩展到目标点由一个旨在最大化路径长度的（非随机）对手选取的情形，从而给出巡回路径长度的最坏情况界。

I. 引言与动机

A. 引言、动机与先前研究

旅行商问题（TSP）是计算机科学和优化领域中的经典问题，其任务是让一个智能体以任意顺序访问一组目标位置，并尽可能缩短总用时。最常见的形式是将目标位置建模为一个图，图中的加权边表示其端点之间的距离。除了拥有

广泛而令人惊叹的实际应用外，它在许多领域也引发了浓厚的理论兴趣。

众所周知，旅行商问题在计算上颇具挑战性——具体而言，求解给定点集上的最短巡回路线属于 NP 完全问题 [1], ，即使这些点位于 $\mathbb{R}^2$ [2]中且路径为欧几里得路径也是如此。尽管如此，针对这一问题已有多种成功的算法方法，包括近似算法和启发式方法。

旅行商问题虽然起源于运筹学，但在机器人学领域也有诸多应用。最值得注意的是，许多机器人运动规划和路径规划算法都以旅行商问题算法为核心 [3]。旅行商问题在机器人学领域的应用范围广泛，包括持续监测、监视、侦察、探索以及其他重要问题。

然而，在机器人学的大多数情况下，车辆都受到不可忽视的微分约束，这会对最优巡回路线产生重大影响。此外，加入动态约束意味着目标点之间不存在固定的“距离”概念，因为点到点的行驶时间取决于人们希望车辆在相关两个目标点处采用的具体构型（例如Dubins车的航向）。这意味着经典近似算法无法应用于这种情形，必须采用新算法来处理此类实例中的旅行商问题 [4]。此外，了解动力学对巡回路线长度的影响，有助于系统设计者为当前任务选出最合适的机器人。我们将其称为动态旅行商问题（DTSP）。

旅行商问题的一个重要变体是目标点独立同分布（iid）的情形。在这种情况下，目标是了解最短巡回路线长度这一依赖于目标点的随机变量的行为，尤其是了解随着目标点数量 n 增加，巡回路径长度如何增长。我们将其称为随机旅行商问题；加入动态约束后，则称为动态随机旅行商问题（DSTSP）。

随机旅行商问题的重要性不容忽视 [5]。Beardwood等人在 1959 [6]中刻画了欧几里得随机旅行商问题的一般渐近行为；此后，人们从算法角度对其进行了广泛研究，尤其致力于寻找能够在多项式时间内平均实现高质量近似的算法 [7]。此外，人们还发现它与各种实际和理论问题有关，例如车辆路径问题 [8] 以及欧几里得平面上的匹配 [9]。在.....的后半段

2000年代，人们针对多种车辆的随机旅行商问题得到了紧确的（相差一个常数因子以内）概率渐近界，其中尤为值得一提的是 Dubins车、Reeds-Shepp车、差速驱动车辆，以及在二维和三维空间中的双积分器（常用于模拟四旋翼飞行器动力学）
[10], [11], [12], [13], [14]。Itani 等人 [15], 运用基于次可加泛函的技术，研究了二维空间中的对称动力系统的随机旅行商问题；随后，Itani的博士论文 [16] 将该研究拓展至任意欧几里得空间中的一大类平移不变动力学 $\mathbb{R}^d$。最后，在2016年，我们采用了一种基于离散化技术的另一种基础方法。Arias-Castro 等人 [17] 曾将该技术用于相关的随机定向越野问题；我们则借此求得了任意维流形上一大类动力学的渐近增长阶，为 $n \to \infty$ [18]。在所有这些研究中，人们都给出了相应算法；随着目标点数量增加，这些算法以高概率实现的巡回路径长度不超过相对于 n最优值的一个常数倍。

B. 贡献

尽管先前关于这一问题的研究已充分刻画了随着目标点数量 n 增加，DSTSP巡回路线长度的渐近行为——特别是，动力学会导出一个称为小时间约束因子 [16], [18] 的参数，在本文中记为 γ；以高概率 $\Theta(n^{1-\frac{1}{\gamma}})$，巡回路线长度将达到相应的增长水平——但通常并未深入研究与这种增长相关的常数因子，也普遍不了解该因子与目标点分布之间的关系。

此外，先前研究通常假设目标点分布在单位正方形或直线区域上均匀分布。尽管这不会影响增长率，因为任何具有有界支撑的全维连续概率分布都可以划分为有限个近似正方形的区域，并依次处理，但改变目标点分布可能会极大地影响附加在 $\Theta(n^{1-\frac{1}{\gamma}})$ DSTSP巡回路线长度增长率上的常数因子。

在这项工作中，我们首次给出了具有显式常数的高概率 DSTSP 界，适用于广泛的动态约束和目标点概率分布。具体而言，我们针对一大类动力学给出了显式的高概率下界；对于对称（或无漂移）动力学这一特殊情形，我们还给出了与之匹配的上界（相差一个关于目标点数量 n 和密度函数 f 的常数因子），此时可以采用一种简化的算法。为了得到

这些界，对于任意动力学，我们定义其在工作空间上诱导的机动性函数，并展示机动性函数和目标点分布的概率密度函数如何影响 DSTSP 巡回路线长度中的常数因子。

C. 论文结构

本文其余部分安排如下。第 II 节正式定义问题以及结果中使用的术语。由于我们的结果需要若干假设，我们先在第 III 节陈述结果，再于第 IV 节给出这些假设；同时还将说明，当动态约束为控制仿射时，许多假设通常都成立。随后，我们在第 V 节给出旅行商问题巡回路径长度的概率下界：首先建立一个随机定向越野问题的形式，并证明一项重要的预备结果，再据此证明旅行商问题下界；然后在第 VI 节给出概率上界。最后，我们在第 VII 节将这些结果推广到目标点的位置经过安排、以最大化巡回路径长度的情形。

II. 预备知识与问题定义

本文研究动态随机旅行商问题：定义在流形$\mathcal{X}$上的动态系统（称为工作空间）必须以尽可能短的时间，按任意顺序访问一组独立同分布（iid）的目标点 $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{X}$。此类动态系统的常见示例包括 Dubins车、差速驱动车辆和双积分器（定义在 $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$上，通常用于对四旋翼运动建模）。

下文中，流形$\mathcal{A}$ 上某个过程 $a(t)$ （例如车辆的位置）的时间导数记为 $\dot{a}(t)$，它表示在 a处与 $\mathcal{A}$ 相切的向量；我们不使用 a' 表示导数。相反， a' 通常用于表示同一空间中的另一个点，例如：“对于 $\mathcal{A}$中的任意 a 和 a' ，以下条件成立”。

A. 动态系统

尽管我们主要关注系统在工作空间中的轨迹$\mathcal{X}$ （它决定了每个目标点是否以及何时被访问），但由于存在动态约束，在任意给定时刻，将系统的状态表示为构型空间（或相空间） $\mathcal{Q}$中的一个点 $\boldsymbol{q}$ 更为自然。系统在 $\mathcal{X}$ 中的位置是其在 $\mathcal{Q}$中的位置的函数，

记作 $[\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}} = x \in \mathcal{X}$；[1] 我们将 $x \in \mathcal{X}$ 的原像记作 $[x]^{\mathcal{Q}} = \{\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q} : [\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}} = x\}$。我们假设该函数在局部表现为从一个 $\dim(\mathcal{Q})$ 维欧几里得空间到一个 $\dim(\mathcal{X})$ 维子空间的投影；也就是说，对于任意满足 $[\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}} = x$的 $\boldsymbol{q}$、x，在 $\boldsymbol{q}$ 和 x 周围分别存在一些邻域，并且这些邻域上有坐标映射，使得 $[\cdot]_{\mathcal{X}}$ 相对于这些坐标映射呈线性。

为方便起见，我们假设该映射具有良好的性质：

假设1。 $[\cdot]_{\mathcal{X}}$ 是光滑的。

要使我们的结果成立，该条件不必在所有地方都完全满足（参见第 IV-F 节和附录 D），但在下文中我们假设该条件成立。

给定时刻 t 的位置 $\boldsymbol{q}(t) \in \mathcal{Q}$，以及来自某个控制集 $\mathcal{U}$ 的控制输入 $\boldsymbol{u}$，系统将按照控制律 $\dot{\boldsymbol{q}}(t) = h^{\text{cont}}(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{u})$ 演化。其中，h^{cont} 接受 $\mathcal{Q}$ 中的一个位置和一个控制，并返回一个切向量，指示系统 [3] 的运动方向。若存在某个控制函数 $\boldsymbol{u}\colon [0, T] \to \mathcal{U}$，使得对于所有 $t \in [0, T]$，都有 $\dot{\pi}(t) = h^{\text{cont}}(\pi(t), \boldsymbol{u}(t))$，则称轨迹 $\pi\colon [0, T] \to \mathcal{Q}$ 有效。

现在我们引入一些将在本文中使用的记号。我们用 Π 表示所有有效轨迹的集合（我们也会用由动力学所诱导的有效轨迹集合 Π 来指代动力学）。将 t 解释为时间，则 T 是通过控制函数 $\boldsymbol{u}$ 执行轨迹 $\pi \in \Pi$ 所需的时间，我们称之为轨迹 π 的长度，并记作 $\ell(\pi)$，因此 $\pi\colon [0, \ell(\pi)] \to \mathcal{Q}$。由于目标点是 $\mathcal{X}$ 中的点，而动力学则是在 $\mathcal{Q}$ 上定义的，因此我们将关注轨迹 $\pi \in \Pi$ 在 $\mathcal{X}$ 上的投影。记作：

$$\bar{\pi}(t) = [\pi(t)]_{\mathcal{X}} \tag{1}$$

通常，$\bar{\cdot}$ 表示集合或函数的工作空间投影。我们还会稍微滥用一下记号，用“$x \in \bar{\pi}$”表示“$\exists\, t$ s.t. $x = \bar{\pi}(t)$”，也就是说，π 在某个时刻访问 x；类似地，若存在 t 使得 $\boldsymbol{q} = \pi(t)$，则用“$\boldsymbol{q} \in \pi$”表示。

[1]通常对于某个 $\mathcal{C}$ 而言为 $\mathcal{Q} = \mathcal{X} \times \mathcal{C}$，且 $[\cdot]_{\mathcal{X}}$ 是投影函数。$\mathcal{Q} = \mathcal{X}$ 是有可能的，但这属于特殊情况。

B. 对称动力学

我们称由控制律 h^{cont} 和控制集 $\mathcal{U}$ 定义的动力学 Π 是对称的，如果对于每个 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$、$\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$，都存在一个 $\boldsymbol{u}' \in \mathcal{U}$ 使得

$$h^{\mathrm{cont}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}') = -h^{\mathrm{cont}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}) \tag{2}$$

也就是说，任何可能的运动都可以通过改变控制来反向进行。因此，对于任意有效轨迹 $\pi\colon [0, \ell(\pi)] \to \mathcal{Q}$，反向轨迹 $\overleftarrow{\pi}\colon [0, \ell(\pi)] \to \mathcal{Q}$，其中

$$\overleftarrow{\pi}(t) := \pi(\ell(\pi) - t) \tag{3}$$

也有效。这使系统能够在任意小的区域内无限期地移动，而无须离开后再返回；本文讨论的 DSTSP 算法依赖于这一能力。关于高效的非对称 DSTSP 算法，参见 [18]。

C. 控制仿射动力学

一种特殊类型的控制系统是控制仿射系统 [3]（也称为控制仿射系统），其控制集为 $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$（因此控制是 m 维实向量），且控制函数满足

$$h^{\mathrm{cont}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}) = h_0^{\mathrm{cont}}(\boldsymbol{q}) + \sum_{i=1}^{m} h_i^{\mathrm{cont}}(\boldsymbol{q}) u_i \tag{4}$$

其中 h_0^{cont}、h_1^{cont}、.....、h_m^{cont} 是定义在 $\mathcal{Q}$ 上的光滑向量场。无控制向量场 h_0^{cont} 称为漂移项；若对于所有 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$，$h_0^{\mathrm{cont}}(\boldsymbol{q}) = \mathbf{0}$（即 $\boldsymbol{q}$ 处的平凡切向量），则该系统是对称的；对于控制仿射系统，这也称为无漂移。

在某些控制仿射系统中，h_0^{cont}、. . .、h_m^{cont}张成了 $\boldsymbol{q}$处的切空间，因此可以通过线性组合向任意方向移动（但受漂移项限制）；然而，我们感兴趣的系统通常不具备这一性质，因此是非完整的 [19]。在这种情况下，移动方向受限于由向量场 h_i^{cont}张成的切平面子空间。

然而，在对称控制仿射系统中，通常可以通过利用交换子进行微小的前进和后退运动，产生一个无法直接实现的方向上的运动。形式上，$\boldsymbol{q}$ 处向量场的李代数给出了一组向量，沿这些向量可以进行微小运动。若李代数张成切空间，则称控制仿射系统在 $\boldsymbol{q}$ 处可控。在这种情况下，对于任意 $\varepsilon > 0$，d_Π 中以 $\boldsymbol{q}$ 为中心的 ε球，其内部都将包含 $\boldsymbol{q}$。

D. 度量与距离

设 $d_{\mathcal{X}}(\cdot, \cdot)$ 和 $d_{\mathcal{Q}}(\cdot, \cdot)$ 分别表示流形 $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Q}$上的度量。这些度量在任意 $x \in \mathcal{X}$和 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$处诱导出切空间上的范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$和 $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$。当 Π对称时，这是一个度量；但当 Π 不对称时，它是一个拟度量，因为一般而言， $d_{\Pi}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}') \neq d_{\Pi}(\boldsymbol{q}', \boldsymbol{q})$。

请注意，巡回路线的长度不一定是用度量 $d_{\mathcal{X}}$ 或 $d_{\mathcal{Q}}$ 来衡量的，而是由执行巡回路线所需的时间来衡量的——由于对系统施加不同的控制输入，可能会导致相对于这些度量的运动速度不同，因此两者不一定等价。我们引入这些概念是为了便于分析，尤其是为了使系统的“速度上限”假设（见假设4）具有明确的定义。

E. 可达集、小时间约束因子和机动性函数

我们首先定义由动力学 Π诱导的距离函数：

$$d_{\Pi}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}') = \inf_{\pi \in \Pi} (\ell(\pi) : \pi(0) = \boldsymbol{q} \text{ and } \pi(\ell(\pi)) = \boldsymbol{q}') \tag{5}$$

请注意，对于任意 $\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{q}'$、$\boldsymbol{q}'' \in \mathcal{Q}$，从 $\boldsymbol{q}$ 经过 $\boldsymbol{q}'$ 并最终到达 $\boldsymbol{q}''$ 所需的最短时间为 $d_{\Pi}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}') + d_{\Pi}(\boldsymbol{q}', \boldsymbol{q}'')$。此外，要对 x、$x' \in \mathcal{X}$ 之间的距离给出一个有用的等价定义会遇到困难，因为经过 $x \to x' \to x''$ 所需的时间通常不会像经过 $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{q}' \to \boldsymbol{q}''$ 那样以相同方式相加，这是因为最短有效路径 $x \to x'$ 在 x' 处可能要求的构型与最短有效路径 $x' \to x''$所要求的构型大不相同。

定义 1. 给定系统 Π、$\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$ 和 $\varepsilon > 0$，从 $\boldsymbol{q}$ 出发的 ε-可达集和工作空间 ε-可达集定义如下

$$R_{\varepsilon}(\boldsymbol{q}) := \{\boldsymbol{q}' \in \mathcal{Q} : d_{\Pi}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}') \leqslant \varepsilon\} \quad \textit{and} \quad \bar{R}_{\varepsilon}(\boldsymbol{q}) := [R_{\varepsilon}(\boldsymbol{q})]_{\mathcal{X}}\,. \tag{6}$$

我们将 $\boldsymbol{q}$ 称为 $R_{\varepsilon}(\boldsymbol{q})$ 和 $R_{\varepsilon}(\boldsymbol{q})$ 的锚点。

我们结果的一个关键方面是这些可达集，尤其是工作空间可达集的体积；从某种意义上说，它决定了动态系统的机动能力。一般而言，该体积将随 ε呈多项式尺度变化，即 $\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(R_{\varepsilon}(\boldsymbol{q})) \propto \varepsilon^{\gamma}$，其中某个适当的 γ称为小时间约束因子（沿用 [16]的说法）；最终，它将决定 TSP 巡回长度如何随目标点数量 n 增长至 ∞而变化。请注意，我们假设 γ 在整个空间中为常数。

然而，为了得到更精确的界（尤其是对于对称系统），我们还关注与 ε^{γ}相关的常数因子，该因子会因所讨论的构型 $\boldsymbol{q}$ 而异。我们将其称为构型敏捷度函数 $g:\mathcal{Q}\to\mathbb{R}_{>0}$；笼统地说，对于较小的 $\varepsilon>0$，有

$$\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\bar{R}_{\varepsilon}(\boldsymbol{q}))\approx g(\boldsymbol{q})\varepsilon^{\gamma} \tag{7}$$

形式上，我们可以如下定义：

定义 2。Π 的小时间约束因子为 γ，使得对于所有 $\boldsymbol{q}$

$$\gamma:=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log(\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\bar{R}_{\varepsilon}(\boldsymbol{q})))}{\log(\varepsilon)} \tag{8}$$

而机动性函数 $g:\mathcal{Q}\to\mathbb{R}_{>0}$ 为

$$g(\boldsymbol{q}):=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\bar{R}_{\varepsilon}(\boldsymbol{q}))}{\varepsilon^{\gamma}}. \tag{9}$$

请注意，构型敏捷度函数的输入来自 $\mathcal{Q}$。因此，我们需要定义工作空间敏捷度函数，它粗略地衡量系统在投影到 $x\in\mathcal{X}$ 的某个构型时所能达到的最大敏捷性。这一点很重要，因为如果系统可以处于多个对应于 $x\in\mathcal{X}$ 的不同构型，通常最好采用敏捷性最大的构型。为简便起见，我们也将其记为 g； g指的是构型敏捷度函数还是工作空间敏捷度函数，可根据其输入属于 $\mathcal{Q}$ 还是 $\mathcal{X}$ 来判断。根据上下文，我们将使用“机动性函数”一词指代构型敏捷度函数或工作空间敏捷度函数。

定义 3。工作空间敏捷度函数为 $g:\mathcal{X}\to\mathbb{R}_{>0}$，定义为

$$g(x):=\sup_{\boldsymbol{q}\in[x]^{\mathcal{Q}}}g(\boldsymbol{q}) \tag{10}$$

F. 动态旅行商问题与动态随机旅行商问题

动态旅行商问题（DTSP）则是如下问题：给定定义在 $\mathcal{Q}$ 上的控制系统 Π，以及给定的 n 目标点 x_1，.....，$x_n\in\mathcal{X}$，求

$$\mathrm{TSP}_{\Pi}(\{x_i\}):=\mathrm{TSP}_{\Pi}(x_1,\ldots,x_n):=\inf_{\pi\in\Pi}(\ell(\pi):x_i\in\bar{\pi}\text{ for all }i) \tag{11}$$

也就是说，寻找一条经过所有目标点的最短有效路径。我们将任何访问所有目标点 $x_1,\ldots,x_n$ 的轨迹称为旅行商问题轨迹。

动态随机旅行商问题（DSTSP）是上述问题的一种变体，其中目标点 $X_1, \ldots, X_n$ 是随机选取的；本文关注的是根据某个分布 f 在 $\mathcal{X}$ 上独立同分布（iid）选取的 $X_1, \ldots, X_n$；我们将其记作 $X_i \overset{iid}{\sim} f$。原则上，$f$ 可以是任意概率分布，但本文关注连续概率分布，其中 f 表示概率密度函数。由于 f 表示连续概率分布，因此它满足 $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$，使得对于任意子集 $\mathcal{X}^* \subseteq \mathcal{X}$，都有 $\mathbb{E}_{X\sim f}[X \in \mathcal{X}^*] = \int_{\mathcal{X}^*} f(x)\,dx$。我们将 f 的支撑集记作

$$\mathcal{X}_f := \{x \in \mathcal{X} : f(x) > 0\} \tag{12}$$

我们假设其有界（假设2）。

III. 主要结果

虽然我们的主要结果依赖于若干条件，但为清晰起见，我们先陈述结果。相关条件见第 IV 节。

在 DSTSP 中，最优旅行商路径的长度是一个随机变量，取决于目标点 $X_i \overset{iid}{\sim} f$ 的位置，其中 f 是工作空间上的概率密度函数。因此，我们的结果给出关于 $\mathrm{TSP}_\Pi(X_1, \ldots..., X_n)$ 的界，这些界随着 $n \to \infty$ 以高概率成立。我们不仅希望证明这些界失效的概率随着 $n \to \infty$ 趋于 0，还希望证明其趋于 0 的速度很快：

定义 4. 设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 是由整数 n 参数化的无限事件序列。若存在常数 c_1、c_2、$c_3 > 0$，使得对所有充分大的 n，A_n 都以极高概率发生，则称 A_n 以极高概率发生。

$$\mathbb{P}[A_n] \geqslant 1 - c_1 e^{-c_2 n^{c_3}} \tag{13}$$

这意味着 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n] = 1$，且其收敛速度快于任何多项式倒数（根据定义，甚至可以说它以“指数”速度收敛到 1）。除了快速收敛本身颇具意义外，它还使我们能够直接根据概率界得出期望巡回路径长度的界。

A. 参数

我们先定义一些用于陈述定理的参数。由于正式定义可能相当复杂，我们将概述某些参数的含义，这些参数将在后文第 IV 节中正式定义；每当我们这样做时，都会指出其具体定义位置。

首先，回顾一下，γ 是小时间约束因子，$g(x)$ 是敏捷性函数（定义 2），二者大致满足以下关系：

$$\sup_{\boldsymbol{q}\in[x]^{\mathcal{Q}}} \mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\bar{R}_{\varepsilon}(\boldsymbol{q})) \approx g(x)\varepsilon^{\gamma} \tag{14}$$

接着，我们定义整数分支因子 b，它通常表示覆盖一个 (2ε)构型可达集需要多少个 ε构型可达集（见假设 8）。然后，我们用它定义参数 β，该参数将用于下界：

定义 5. 设 b 为分支因子，γ 为 Π的小时间约束因子，r 为一个常数，其中当 Π 非对称时，$r=2$；当 Π 对称时，$r=3/2$。则下界常数定义为：

$$\beta=(1+\xi)r^{\gamma} \quad \textit{where} \quad \xi=\begin{cases} 3(\log(b)/r^{\gamma}) & \textit{if } \log(b)>r^{\gamma} \\ 3\sqrt{\log(b)/r^{\gamma}} & \textit{if } \log(b)\leqslant r^{\gamma} \end{cases} \tag{15}$$

注意，$\beta=(1+\xi)2^{\gamma}\propto \max(\log(b), r^{\gamma})$。

对于上界，我们需要考虑层次单元结构（HCS）（见定义 7），下面简要介绍。层次单元结构是一种由嵌套单元构成的递归结构，具有整数缩放参数 s 和效率参数 $\alpha\leqslant 1$。尺度为 ε、以某个 $\boldsymbol{q}\in\mathcal{Q}$ 为根节点的HCS，定义为包含在某个 $R_{\varepsilon}(\boldsymbol{q})$ 中的一个单元，其体积至少为 $\alpha g([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})\varepsilon^{\gamma}$（粗略而言，因为正式定义中还有一个额外的近似项），并且可以由 s^{γ} 个尺度为 ε/s 的 HCS 覆盖（即下一个更低的“层”）。因此，缩放参数 s 表示 HCS 向下递进一层时缩小的程度，而效率参数 α 表示单元相对于同一尺度下最大可达集的大小。

通常，HCS 可以用缩放因子 $s=2$ 构造；例如，满足常见正则性条件的控制仿射系统具有满足 $s=2$ 的 HCS（参见引理 6 和附录 B）。不过，我们采用了更一般的定义，因为它可以扩展到目标点分布在某个分形维数集合上的欧几里得旅行商问题；在某些情况下，

（例如门格海绵）自然地使用 $s \neq 2$ 进行缩放；相关结果见附录 F。

B. 主要集中界

我们首先给出一个平凡的、非概率界，它可由假设 5 直接推出：

命题 1. 存在某个常数 $C > 0$，使得对所有 x_1、x_2、……、$x_n \in \mathcal{X}_f$，

$$\mathrm{TSP}_{\Pi}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant Cn\,. \tag{16}$$

证明. 对每个 x_i，我们任意选择某个 $\boldsymbol{q}_i$ 使得 $[\boldsymbol{q}_i]_{\mathcal{X}} = x_i$；根据假设 5，存在某个 C 使得对所有 $i = 1$、……、$n-1$，均有 $d_{\Pi}(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_{i+1}) \leqslant C$，因此我们得到一条按索引顺序依次经过 $\boldsymbol{q}_1$、$\boldsymbol{q}_2$、……、$\boldsymbol{q}_n$ 的巡回路线，其长度为 $\leqslant C(n-1)$。 □

这将有助于说明，我们由定理 1 得到的概率界可推出等价的期望界（推论 1）。

现在给出主要定理，它为 DSTSP 提供一个极高概率下界，并在 Π 为对称时给出一个匹配的（在 n 和 f上相差一个常数）上界。下界使用常数 β，而该常数基于分支因子 b （以及小时间约束因子 γ）；上界则由一种依赖分层单元结构的算法推导而来，使用 s 和 α。上界和下界均包含增长率 $n^{1-\frac{1}{\gamma}}$ 以及一个刻画密度 f 与敏捷性 g 如何相互作用并影响巡回路径长度的项。

定理 1. 如果第 IV 节中的假设成立，那么对于任意 $\delta > 0$，当 n 足够大时，以下结论成立：

$$\mathrm{TSP}_{\Pi}(\{X_i\}) \geqslant (1-\delta)\beta^{-1} n^{1-\frac{1}{\gamma}} \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \quad wvhp \tag{17}$$

其中 β 是下界常数（参见定义 5）。

此外，如果 Π 是对称的，并且 $\mathcal{X}_f$ 可以通过具有缩放参数 $s \geqslant 2$ 和效率参数 $\alpha \leqslant 1$ 的分层单元结构覆盖（见定义 7），那么对于任意 $\delta > 0$，当 n 足够大时，以下结论成立：

$$\mathrm{TSP}_{\Pi}(\{X_i\}) \leqslant (1+\delta)\big(12 s \alpha^{-\frac{1}{\gamma}}\big) n^{1-\frac{1}{\gamma}} \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \quad wvhp \tag{18}$$

这些结果也适用于期望值（证明见附录 A）：

推论 1. 若第 IV 节中的假设成立，则对于任意 $\delta > 0$,

$$\mathbb{E}_{X_i \overset{iid}{\sim} f}[\mathrm{TSP}_\Pi(\{X_i\})] \geqslant (1-\delta)\beta^{-1} n^{1-\frac{1}{\gamma}} \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \tag{19}$$

对所有充分大的 n均成立。此外，若 Π 是对称的，且 $\mathcal{X}_f$ 可由具有缩放参数 $s \geqslant 2$ 和效率参数 α 的层级单元结构覆盖（参见定义 7），则对于任意 $\delta > 0$,

$$\mathbb{E}_{X_i \overset{iid}{\sim} f}[\mathrm{TSP}_\Pi(\{X_i\})] \leqslant (1+\delta)\big(12 s \alpha^{-\frac{1}{\gamma}}\big) n^{1-\frac{1}{\gamma}} \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \tag{20}$$

对所有充分大的 n均成立。

综合这些结果，对于对称的 Π，可得出以下一般规律：

$$\mathrm{TSP}_\Pi(\{X_i\}) = \Theta\Big(n^{1-\frac{1}{\gamma}} \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx\Big) \tag{21}$$

且上界与下界之间的乘法间隙为（在近似因子范围内）

$$c_{\mathrm{gap}} := c_{\mathrm{gap}}(\Pi) = 12 s \alpha^{-\frac{1}{\gamma}} \beta \tag{22}$$

其中 $\beta \propto \max(\log(b), (3/2)^\gamma)$（因为 Π 是对称的）。

请注意，对于密度函数 f 而言，这一差距是一个常数，因为没有任何参数依赖于 f。因此，式 (22) 可以看作是关于 TSP 巡回长度如何随 f 变化而变化的陈述（前提是它仍满足第 IV 节给出的假设）。虽然 c_{gap} 并不直接依赖于 g，但 g 和 c_{gap} 都依赖于 Π；不过，积分 $\int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx$ 仍然是一个很好的指标，用于衡量由 Π 控制的系统访问许多按 f 独立同分布的目标点的速度。

注 1. 我们的方法也能使我们在欧几里得旅行商问题以及目标点分布在分形维数集合上的情形下，获得与定理 1 类似的结果；参见附录 F。

注 2. 当 Π 为非对称时，增长率 $\Theta(n^{1-\frac{1}{\gamma}})$ 的上界以极高概率成立；参见 *[18]*。然而，常数因子对概率密度函数 f 的依赖，无法像式 (21) 中那样清晰地刻画。

C. DSTSP 下界

现在，我们给出定理 1 中各界的更精确表述，特别是给出收敛率。

命题 2. 设第 IV 节中的假设成立，并设

$$v_{f,g} = \mathrm{Var}_{f\sim X}\big[f(X)^{-\frac{1}{\gamma}} g(X)^{-\frac{1}{\gamma}}\big] \tag{23}$$

$$= \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{2}{\gamma}} g(x)^{-\frac{2}{\gamma}}\, dx - \left(\int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx\right)^2 \tag{24}$$

那么，对于任意 $\delta > 0$，存在某个 $\lambda > 0$，使得当 n 足够大时，

$$\mathbb{P}\left[\mathrm{TSP}_{\Pi}(\{X_i\}) \geqslant (1-\delta)\beta^{-1} n^{1-\frac{1}{\gamma}} \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx\right] \tag{25}$$

$$\geqslant 1 - \exp\left(-\frac{4}{5}\frac{\log(b)\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}}{1-\delta/2}\right) \tag{26}$$

$$- \exp\left(-\frac{n(1-\delta/2)\big(\int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx\big)^2 \delta^2/32}{(1+\delta/2)v_{f,g} + (1-\delta/2)\big(\int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx\big)^2 \delta/12}\right) \tag{27}$$

命题 3. 如果 Π 具有缩放参数 $s \geqslant 2$ 和效率参数 α 的对称层次单元结构，那么对于任意 $\delta > 0$：若 $\gamma \geqslant 3$,

$$\mathbb{P}\left[\mathrm{TSP}_{\Pi}(\{X_i\}) \leqslant (1+\delta)\big(12s\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}\big) n^{1-\frac{1}{\gamma}} \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx\right] \tag{28}$$

$$\geqslant 1 - e^{-\frac{1}{2}n^{1-2/\gamma}} \tag{29}$$

$$\geqslant 1 - e^{-\frac{1}{2}n^{1/3}} \tag{30}$$

对所有足够大的 n 均成立。为了得到更精确的界，设 $\boldsymbol{p} = (p_1、\ldots\ldots、p_m)$ 为层次单元结构中 m 个单元的概率质量。那么

$$\mathbb{P}\left[\mathrm{TSP}_{\Pi}(\{X_i\}) \leqslant (1+\delta)\big(12s\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}\big) n^{1-\frac{1}{\gamma}} \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx\right] \tag{31}$$

$$\geqslant 1 - e^{-\frac{1}{2}n^{1-2/\gamma}(\sum_{j=1}^m p_j^{1-1/\gamma})^2} \tag{32}$$

对于所有充分大的 n。注意，$1 \leqslant \sum_{j=1}^m p_j^{1-1/\gamma} \leqslant m^{\frac{1}{\gamma}},$，且当层次结构中的所有 m 个单元的质量均为 $= 1/m$ 时，$1 \leqslant \sum_{j=1}^m p_j^{1-1/\gamma} \leqslant m^{\frac{1}{\gamma}}$，取得最大值。

若 $\gamma = 2$，且（不失一般性） p_1 是 $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ 中最小的非零值，则对于所有充分大的 n，

$$\mathbb{P}\Big[\mathrm{TSP}_\Pi(\{X_i\}) \leqslant (1+\delta)\big(12s\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}\big)n^{1-\frac{1}{\gamma}}\int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}}g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\,dx\Big] \tag{33}$$

$$\geqslant 1 - e^{-\frac{(2/9)p_1 n(\sum_{j=1}^m p_j^{1/2})^2}{127-\log(1/p_1)+\log(n)}} \tag{34}$$

注 3. 请注意，尽管对于 $\gamma = 2$，概率界在极限下收敛到 1 的速度更快，也就是说，它是 $1 - e^{-\Theta(n/\text{对数}(n))}$，而非 $1 - e^{-\Theta(n^{1-2/\gamma})}$,。该界避开了 p_1 项；这一项可能非常小，导致收敛速度变慢，直到 n 非常小。不过，对于 $\gamma \geqslant 3$，我们可以使 $1 - e^{-\Theta(n)}$收敛得更快；但失败概率中包含一些项，这些项可能会一直相对较大，直到 n 极大。

D. 带对抗性目标的动态旅行商问题

定理 1 自然引出了以下问题：

- 给定一个敏捷性函数为 g、且具有某个有界 $\mathcal{X}^* \subseteq \mathcal{X}$ 的控制系统 Π，什么样的概率密度函数 f（其支撑集包含于 $\mathcal{X}^*$）能使 $X_i \overset{iid}{\sim} f$ 上的旅行商问题轨迹在 $n \to \infty$ 时最长？
- 这种“最坏情况密度函数”与对抗性目标点（即被选来最大化最优旅行商路径长度的目标点）相比如何？

我们将证明，这两者之间的差异（无论是在期望意义上，还是以极高的概率而言）至多为一个常数因子。该因子取决于动态约束的某些特征，而与机动性函数 g无关，因此得到以下界：

定理 2. 设 Π 为满足第 IV 节中假设的动态约束，且 $\mathcal{X}^* \subseteq \mathcal{X}$有界。那么对于任意 $\delta > 0$，当 n充分大时，

$$\sup_{X_1,\ldots,X_n \in \mathcal{X}^*} \big(\mathrm{TSP}_\Pi(\{X_i\})\big) \geqslant (1-\delta)\beta^{-1}n^{1-\frac{1}{\gamma}}\Big(\int_{\mathcal{X}^*} g(x)^{-1}\,dx\Big)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{35}$$

如果 Π 是对称的，具有缩放参数为 $s \geqslant 2$、效率参数为 α的层次单元结构，那么对于任意 $\delta > 0$，

$$\sup_{X_1,\ldots,X_n \in \mathcal{X}^*} \big(\mathrm{TSP}_\Pi(\{X_i\})\big) \leqslant (1+\delta)\big(6s\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}\big)n^{1-\frac{1}{\gamma}}\Big(\int_{\mathcal{X}^*} g(x)^{-1}\,dx\Big)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{36}$$

对于任意充分大的 n。

这意味着，对于对称的 Π 和任意 $\delta > 0$,

$$(1-\delta)\beta^{-1} \leqslant \frac{\sup_{X_1,\ldots,X_n\in\mathcal{X}*} \mathrm{TSP}_\Pi(X_1,\ldots,X_n)}{n^{1-\frac{1}{\gamma}}(\int_{\mathcal{X}*} g(x)^{-1}\,dx)^{\frac{1}{\gamma}}} \leqslant (1+\delta)6s\alpha^{-\frac{1}{\gamma}} \tag{37}$$

对于任意充分大的 n

请注意，这些并不是概率界，因为 X_1、.....、 X_n 已不再是随机的。下界直接由“最坏情况目标分布” $f_g(x) \propto g(x)^{-1}$ 推导得到，或者说，为了进行归一化，

$$f_g(x) = \frac{g(x)^{-1}}{\int_{\mathcal{X}*} g(y)^{-1}\,dy}\,. \tag{38}$$

当X_1、.....、 $X_n \overset{iid}{\sim} f_g$时，给定的下界确实成立这一事实（更不用说以极高概率成立了）意味着，非随机对手可以选择一组目标点，使得最短巡回路线至少达到这一长度。上界则来自我们的算法，该算法利用分层单元结构覆盖整个空间。

注 4。DSTSP 界对 f、g 的依赖表现为对 $\mathcal{X}_f$ 上某个关于 f、g 的函数进行积分；这是因为在某种意义上（当 $n \to \infty$ 时），旅行商问题的长度仅取决于局部条件。即使两个区域彼此接近，只要目标密度足够高，在每个区域中访问目标点的效率也会大致相互独立。然而，对抗性 DTSP 的积分外部还带有一个指数。这是因为局部改变 g 会改变目标点的位置，进而改变整个空间中的目标密度。

注 5. 该定理有一个奇特之处：对抗性上界（公式 (36)）的绝对常数比对应的随机界（公式 (20)）更优，即分别为 6 和 12。这是因为在对抗情形下，我们得到的是一个严格的（确定性）界；而在随机情形下，当 f 未使积分达到最大值时，一次“不走运”的目标点随机放置可能导致巡回路线比预期更长。为了得到概率界，我们乘以一个在对抗情形下不需要的缓冲常数。

IV. 假设

我们的主要结果基于关于控制系统 Π 在极小尺度下性质的若干基本假设。这些假设主要源自一个关键的元假设：

元假设 1。我们的动力学 Π 是控制仿射且等正则的（*[19],* 定义 2.10），定义在 $[\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}}$上，而 $[\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}}$包含于某个紧致的 $\mathcal{Q}^* \subseteq \mathcal{Q}$中。

对于对称的控制仿射动力学，这带来了 Chow-Rashevskii 定理，尤其是一致球盒定理（[19], 定理 2.4）等重要工具。它们表明，任意 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$ 周围的可达集始终包含 $\boldsymbol{q}$周围某一大小的直线邻域。我们将指出哪些假设源自元假设，哪些必须单独提出（特别是，任何关于目标点 f 分布的假设都与元假设无关）；详情请参见附录 B。

注 6。如果本节中的假设得到满足，即使元假设本身不成立，我们的结果仍然成立。

A. ζ-正则化近似

为了证明我们的结果，我们通常需要假设某些函数是利普希茨连续的，或远离 0 或 8，或者同时满足这两点。然而，在许多重要情况下，这些条件可能并不成立。因此，我们希望使用具有这些性质的函数近似，我们称之为 ζ-正则化近似；$\zeta > 0$ 控制近似程度、利普希茨常数以及远离 0 或 ∞的界。根据我们希望近似是上界还是下界，我们定义上 ζ-正则化近似和下 ζ-正则化近似。

定义 6. 对于定义在度量为 $d_{\mathcal{Y}}$ 的域 $\mathcal{Y}$ 上的任意函数 h 和 $\zeta > 0$，令

$$\widehat{\mathcal{F}}(h,\zeta) := \{h^* : h^*(y) \geqslant \max(h(y),\zeta),\ \textit{and } h^* \textit{ is } (1/\zeta)\textit{-Lipschitz continuous}\} \tag{39}$$

$$\check{\mathcal{F}}(h,\zeta) := \{h^* : h^*(y) \leqslant \min(h(y),\ 1/\zeta),\ \text{和 } h^* \text{ 是 } (1/\zeta)\text{-利普希茨连续}\}\,。 \tag{40}$$

我们将 h 的 ζ-正则化上近似和下近似 $\hat{}h^{(\zeta)}$ 和 $\check{}h^{(\zeta)}$ 分别定义为

$$\hat{h}^{(\zeta)}(y) := \inf_{h^* \in \widehat{\mathcal{F}}(h,\zeta)} (h^*(y)) \tag{41}$$

$$\textit{and} \quad \check{h}^{(\zeta)}(y) := \sup_{h^* \in \check{\mathcal{F}}(h,\zeta)} (h^*(y))\,. \tag{42}$$

We sh注意，$\hat{}h^{(\zeta)}$ 和 $\check{}h^{(\zeta)}$ 具有理想性质，同时又与 h相差不远：

引理 1. 对于域 $\mathcal{Y}$上任意几乎处处连续且由某个有限的 $h_{\max} = \sup_y h(y)$从上方界定的非负 h ，上 ζ-正则化函数$\hat{h}^{(\zeta)}$满足以下性质：

i. 对所有 $y \in \mathcal{Y}$，$\hat{h}^{(\zeta)}(y) \geqslant h(y)$ 和 $\hat{h}^{(\zeta)}(y) \geqslant \zeta$。ii. $\lim_{\zeta \to 0} \hat{h}^{(\zeta)}(y) = h(y)$ 几乎处处。iii. 对任意固定的 y ，$\hat{h}^{(\zeta)}(y)$ 作为 ζ 的函数是递减的。iv. $\hat{h}^{(\zeta)}(y)$ 是 $(1/\zeta)$-利普希茨连续的。

v. 若 h 在有界集合 $\mathcal{A}$ 上有有限积分，

$$\lim_{\zeta \to 0} \int_{\mathcal{A}} \hat{h}^{(\zeta)}(x)\, dx = \int_{\mathcal{A}} h(x)\, dx \tag{43}$$

vi. 对任意 $\zeta \leqslant h_{\max}$，有 $\max_y \hat{h}^{(\zeta)}(y) \leqslant h_{\max}$。（或者换句话说，$\sup_y \hat{h}^{(\zeta)}(y) = \max(\zeta, h_{\max})$。）

对于下方的 ζ-正则化函数 $\check{h}^{(\zeta)}$，也有类似结果。

证明。我们如下证明这些结论：

i：由 $\hat{h}^{(\zeta)}(y)$ 的定义可得。

ii：这是因为该结论对所有 y 处都成立，而 h 在这些点连续，这几乎处处成立。

iii：这是因为 $\mathcal{F}(h、\zeta') \subseteq \mathcal{F}(h、\zeta)$若 $\zeta' > \zeta$，因此，对$\mathcal{F}(h、\zeta)$中的值取下确界，会小于对 $\mathcal{F}(h、\zeta')$中的值取相同的下确界。

iv. 这是因为一组 c-利普希茨连续函数的下确界也具有 c-利普希茨连续性。理由如下，采用反证法。假设 $\hat{h}^{(\zeta)}$不具有 $(1/\zeta)$-利普希茨连续性；那么存在 $y_1、y_2 \in \mathcal{Y}$使得

$$|\hat{h}^{(\zeta)}(y_2) - \hat{h}^{(\zeta)}(y_1)| > (1/\zeta) d_{\mathcal{X}}(y_1, y_2)\,. \tag{44}$$

不失一般性，令 $\hat{h}^{(\zeta)}(y_1) < \hat{h}^{(\zeta)}(y_2)$。那么存在某个 $h^* \in \mathcal{F}(h、\zeta)$使得

$$h^*(y_1) - \hat{h}^{(\zeta)}(y_1) < |\hat{h}^{(\zeta)}(y_1) - \hat{h}^{(\zeta)}(y_2)| - (1/\zeta) d_{\mathcal{Y}}(y_1, y_2) \tag{45}$$

$$\implies h^*(y_2) - h^*(y_1) \geqslant \hat{h}^{(\zeta)}(y_2) - h^*(y_1) \tag{46}$$

$$> (\hat{h}^{(\zeta)}(y_2) - \hat{h}^{(\zeta)}(y_1)) - \big(|\hat{h}^{(\zeta)}(y_1) - \hat{h}^{(\zeta)}(y_2)| - (1/\zeta) d_{\mathcal{Y}}(y_1, y_2)\big) \tag{47}$$

$$= (1/\zeta) d_{\mathcal{Y}}(y_1, y_2) \tag{48}$$

因此， h^*也不是 $(1/\zeta)$-利普希茨连续的，这与 $h^* \in \mathcal{F}(h、\zeta)$相矛盾。

v. 这由 (ii) 和控制收敛定理得出（其中控制函数为 $f_{\max}$关于 $\mathcal{X}_f$，由于 f的条件， $\mathcal{X}_f$ 有界，因此该函数可积）。

vi. 这是因为，取值为 $\max(\zeta, h_{\max})$ 的常数函数是 h的一个上界，至少与 ζ 一样大，且对任意参数都利普希茨连续（因为它是常数），因此属于 $\widehat{\mathcal{F}}(h,\zeta)$。根据定义，$\hat{}h^{(\zeta)}(y)$ 必须不大于 $\max(\zeta, h_{\max})$（并且由于对于所有 y，$\hat{}h^{(\zeta)}(y) \geqslant \max(\zeta, h(y))$，这意味着 $\sup_y \hat{}h^{(\zeta)}(y) = \max(\zeta, h_{\max})$）。

下 ζ-正则化函数的证明类似。 □

上 ζ-正则化近似对于证明 TSP下界至关重要（一般而言，我们可以通过假设系统比实际情况更灵活来证明下界；也就是说，用 g 的一个上界代替 g 本身，仍能保证 DSTSP 下界成立），而下 ζ-正则化近似则对于证明 TSP上界至关重要。

B. 关于目标分布的假设

我们考察密度 f 的支撑集 $\mathcal{X}_f$，以及 f 在其上的行为。

假设2. 函数 f 是一个表示全维连续随机变量的概率密度函数，即 $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 可积、几乎处处连续，并满足 $\int_{\mathcal{X}} f(x)\,dx = 1$。那么对于任意子集 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$，

$$\mathbb{P}_{X\sim f}[X \in \mathcal{A}] = \int_{\mathcal{A}} f(x)\,dx\,. \tag{49}$$

此外， f 具有有限最大值 $f_{\max} := \sup_{x\in\mathcal{X}} f(x) < \infty$。

目标区域 $\mathcal{X}_f = \{x :\ f(x) > 0\}$ 也是紧致的。

除非是非常刻意构造的例子，否则假设 $\mathcal{X}_f$ 是紧致的，实际上只是为了确保它有界。如果允许 $\mathcal{X}_f$ 无界，利用圣彼得堡悖论，很容易构造出一些目标点分布f，使得 X_1 与 $X_2 \overset{iid}{\sim} f$ 之间的期望距离为无穷大：选取一个原点 $\mathbf{0} \in \mathcal{X}$，并令 f 的支撑集落在一系列小区域$\mathcal{X}_1$、$\mathcal{X}_2$、$\cdots \subset \mathcal{X}$上，其中 $\mathbb{P}_{X\sim f}[X \in \mathcal{X}_i] = 2^{-i}$，但对于所有 $X \in \mathcal{X}_i$，都有 $d_{\mathcal{X}}(\mathbf{0}$、$X) \approx 2^i$；于是，随机$X \sim f$到 $\mathcal{X}$ 中任意一点的期望距离都是无穷大，因此 X_2 到 X_1 的期望距离也始终为无穷大。即使只有 2 个目标点，TSP 巡回路线的长度在期望意义下也会是无穷大，更不用说 $n > 2$ 了。

C. 关于动力学的假设

现在我们来讨论关于动力学 Π 需要作出的一些假设。令 $d_{\mathcal{X}}(\cdot,\ \cdot)$ 和 $d_{\mathcal{Q}}(\cdot,\ \cdot)$ 分别表示流形 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Q}$ 上的度量。它们在任意 $x \in \mathcal{X}$ 和 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$ 处的切空间上分别诱导出范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$。

请注意，巡回路线的长度不一定是按度量 $d_{\mathcal{X}}$ 或 $d_{\mathcal{Q}}$ 来衡量的，而是按执行该巡回路线所需的时间来衡量，即按 d_{Π} 来衡量——两者不一定等价，因为系统采用不同的控制输入时，相对于这些度量可能以不同的速度运动。引入这些概念有助于分析，尤其是使以下假设定义明确：

假设 3。流形 $\mathcal{X}$ 的维度为 $\geqslant 2$。

这是为了避免退化情形。通常，当 $\mathcal{X}$ 是一维时，TSP 巡回长度为常数，因为只需扫过整个空间即可。

假设 4。存在某个关于 Π 的“速度上限” c_{Π}，使得对于任意 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$ 和控制 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$，都有 $\|h^{\mathrm{cont}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u})\|_{\mathcal{X}} \leqslant c_{\Pi}$。

请注意，假设 3 和假设 4 一起意味着以下结论：

引理 2. 小时间约束因子 γ 至少为 2。

证明。令 $\mathcal{B}_{\varepsilon}(x)$ 表示度量 $d_{\mathcal{X}}$下以 $x \in \mathcal{X}$ 为中心、半径为 ε 的球。那么

$$\bar{R}_{\varepsilon}(\boldsymbol{q}) \subseteq \mathcal{B}_{c_{\Pi}\varepsilon}([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}) \tag{50}$$

$$\implies \mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\bar{R}_{\varepsilon}(\boldsymbol{q})) \leqslant \mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\mathcal{B}_{c_{\Pi}\varepsilon}([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})) \tag{51}$$

并且我们知道，当 ε较小时，$\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\mathcal{B}_{c_{\Pi}\varepsilon}([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})) \propto \varepsilon^{\dim(\mathcal{X})}$。因此，由于 $\log(\varepsilon) < 0$,

$$\gamma = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\bar{R}_{\varepsilon}(\boldsymbol{q})))}{\log(\varepsilon)} \geqslant \frac{\log(\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\mathcal{B}_{c_{\Pi}\varepsilon}([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})))}{\log(\varepsilon)} = \dim(\mathcal{X}) \geqslant 2\,. \tag{52}$$

□

我们还假设任意两个构型都由一条有限路径 $\pi \in \Pi$连接：

假设 5。对于任意 $\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{q}' \in \mathcal{Q}$，都存在一个有效的 $\pi \in \Pi$，其 $\ell(\pi)$ 有限，且满足 $\pi(0) = \boldsymbol{q}$ 和 $\pi(\ell(\pi)) = \boldsymbol{q}'$。

换句话说，$d_{\Pi}(\boldsymbol{q}、\boldsymbol{q}') < \infty$。对于满足 Chow 条件 [19]，的对称等正则控制仿射动力学，这一假设可由 Chow-Rashevskii 定理推出。然而，对于非对称控制仿射动力学，则必须明确作出这一假设，因为存在一些简单的例子不满足该条件（例如，船被水流冲向下游，却无法逆流返回上游）。[1]

我们的结果成立的一个关键条件是，敏捷性函数定义良好，并且其所表示的极限在整个空间上一致收敛：

假设 6。控制系统 Π 具有敏捷性函数 $g:\ \mathcal{Q} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 以及小时间可达因子 γ，使得对于任意 $\rho > 0$，存在某个 $\varepsilon_{\rho}^{*} > 0$，使得对于所有 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_{\rho}^{*}$和所有 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$,

$$(1-\rho)g(\boldsymbol{q}) \leqslant \frac{\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\bar{R}_{\varepsilon}(\boldsymbol{q}))}{\varepsilon^{\gamma}} \leqslant (1+\rho)g(\boldsymbol{q}) \tag{53}$$

请注意，该假设意味着对工作空间敏捷度函数也有类似的界：

引理 3。对于 任意 $\rho > 0$，存在某个 $\varepsilon_{\rho}^{*} > 0$，使得对于所有 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_{\rho}^{*}$ 和所有 $x \in \mathcal{X}$,

$$(1-\rho)g(x) \leqslant \sup_{\boldsymbol{q}:[\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}=x} \frac{\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\bar{R}_{\varepsilon}(\boldsymbol{q}))}{\varepsilon^{\gamma}} \leqslant (1+\rho)g(x) \tag{54}$$

证明。令 $\varepsilon_{\rho}^{*} > 0$ 取与假设 6 中相同的值。于是，对于满足 $[\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}} = x$的任意 $\boldsymbol{q}$，我们有

$$\frac{\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\bar{R}_{\varepsilon}(\boldsymbol{q}))}{\varepsilon^{\gamma}} \leqslant (1+\rho)g(\boldsymbol{q}) \leqslant (1+\rho)g(x) \tag{55}$$

此外，我们有

$$\sup_{\boldsymbol{q}:[\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}=x} \frac{\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\bar{R}_{\varepsilon}(\boldsymbol{q}))}{\varepsilon^{\gamma}} \geqslant \sup_{\boldsymbol{q}:[\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}=x} (1-\rho)g(\boldsymbol{q}) = (1-\rho)g(x) \tag{56}$$

并且我们已经证明了不等式两侧。 □

我们还假设工作空间上的 g 有界：

假设 7。令 $g_{\min} := \inf_{x\in\mathcal{X}} g(x)$ 和 $g_{\max} := \sup_{x\in\mathcal{X}} g(x)$,

$$0 < g_{\min} \leqslant g_{\max} < \infty\,. \tag{57}$$

[1]要将定理 1 应用于非对称系统，必须明确证明假设 5 成立。

D. 覆盖假设

我们的方法所需的条件涉及：能够用常数个半径为 $\approx \varepsilon$ 的可达集覆盖任意半径为 2ε 的可达集；并且能够用数量按多项式甚至指数级增长的半径为 $\approx \varepsilon$ 的可达集覆盖起始集 $\mathcal{Q}_0$ 。

我们从 b-可覆盖条件开始。分支因子 $b > 1$ 是一个整数，大致对应于在 $\mathcal{Q}$中覆盖一个 2ε-可达集所需的 ε-可达集的数量：

假设 8。存在某个整数 $b > 1$，称为分支因子，使得对于任意$\rho > 0$，都存在某个 $\varepsilon_\rho^* > 0$，使得对于任意 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$ 和 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\rho^*$，都存在一个由构型组成的集合 $Q_{\rho,\varepsilon}(\boldsymbol{q})$，满足

$$R_{2\varepsilon}(\boldsymbol{q}) \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{q}' \in Q_{\rho,\varepsilon}(\boldsymbol{q})} R_{(1+\rho)\varepsilon}(\boldsymbol{q}') \text{ and } |Q_{\rho,\varepsilon}(\boldsymbol{q})| \leqslant b \tag{58}$$

引理 4。如果 Π 是对称的并满足元假设 1，则假设 8 成立。

我们还有起始可覆盖条件，它指出集合 $[\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}}$ （ f支撑集上的构型）可以用多项式数量的 ε-可达集覆盖：

假设 9。存在一个多项式 P，使得存在某个 $\varepsilon^* > 0$，并且对于任意$\varepsilon < \varepsilon^*$，都存在一个由构型组成的集合 Q_ε^0，满足

$$[\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}} \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{q} \in Q_\varepsilon^0} R_\varepsilon(\boldsymbol{q}) \text{ and } |Q_\varepsilon^0| \leqslant P(1/\varepsilon) \tag{59}$$

请注意这里使用的是构型可达集，而不是工作空间可达集 .

这所防范的真正可能情况（鉴于 $\mathcal{X}_f$ 根据假设 2 有界）是：在任意 $x \in \mathcal{X}_f$ 时，可能处于其中的构型集合无界。对于对称控制仿射系统，可达集包含体积随 ε 呈多项式增长的直线型集合，其中 $\varepsilon \to 0$ （不过，由于这里讨论的是构型可达集，指数并非 γ），因此，只要 $[\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}}$ 有界，上述结论就成立。

快速检验假设 9 是否成立的一种方法是：如果 Π 对称、控制仿射且等正则（满足元假设 1），那么假设 9 等价于$[\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}}$ 的闭包是紧致的（通常这仅意味着有界，因为它已经是闭集）：

Lemma 5. 如果 Π 对称且满足元假设 1，则假设 9 成立。

这是因为，根据一致球盒定理，对于足够小的 ε，每个以 $\boldsymbol{q}$ 为锚点的 ε-可达集都包含一个以 $\boldsymbol{q}$ 为中心的盒，其边长是 ε 的多项式，因此其体积也是 ε 的多项式（每个 $\boldsymbol{q}$ 对应同一个多项式）。于是，由于 $\mathcal{Q}$ 是一个流形，在小尺度下近似为欧几里得空间，因此紧致的 $[\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}}$ 可以用多项式数量的这些盒铺满（允许有一定重叠）。完整证明见附录 B。

E. 层次单元结构

为了使我们的算法能够运行（借此证明旅行商问题长度的上界），还需要满足一些额外条件，因为我们需要知道如何以高效的方式遍历整个空间。具体而言，我们假设层次单元结构存在，并且能够用其覆盖整个空间。层次单元结构通常体现了这样一种直觉：一个 ε- 工作空间可达集应当能够划分为多个 2^{γ} $(\varepsilon/2)$- 工作空间可达集，而这些可达集又各自能够划分为多个 2^{γ} $(\varepsilon/4)$-工作空间可达集，依此类推，从而形成一种层级结构，其中可达集的半径呈指数级递减。我们定义如下：

定义 7. 一个以 $\boldsymbol{q}_0 \in \mathcal{Q}$ 为根节点、半径为 $\varepsilon_0 > 0$、效率参数为 $\alpha \leqslant 1$、缩放参数为 s 的 ζ-正则层次单元结构 $\mathrm{HCS}(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0, \alpha, s, \zeta)$，是由以下元素构成的结构：

- 一个若尔当可测单元 $S(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0) \subseteq \mathcal{X}$ 使得

$$S(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0) \subseteq \bar{R}_{\varepsilon_0}(\boldsymbol{q}_0) \text{ and } \mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(S(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0)) \geqslant \alpha \check{g}^{(\zeta)}([\boldsymbol{q}_0]_{\mathcal{X}})\varepsilon_0^{\gamma} \tag{60}$$

  其中 $\check{g}^{(\zeta)}$ 是 g的下部 ζ-正则化近似。
- 一组两两不相交的 s^{γ} ζ-正则层次单元结构，其半径为 $\varepsilon_0/s,$ ，效率参数为 α，缩放参数为 s，根节点为 $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_{s^{\gamma}}$，使得

$$S(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0) \subseteq \bigcup_{j=1}^{s^{\gamma}} S(\boldsymbol{q}_j, \varepsilon_0/s) \quad \text{and} \quad \boldsymbol{q}_j \in \bar{R}_{\varepsilon_0}(\boldsymbol{q}_0) \text{ for all } j \tag{61}$$

  我们将这些称为原始层次单元结构的子层次单元结构。

我们有时会将一组 HCS 记作 $S_1, \ldots, S_m$；在这种情况下，如果 x 包含在顶层单元中，我们就称 $x \in S_j$。请注意，这是一个递归定义，即要给出 $\mathrm{HCS}(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0, \alpha, s, \zeta)$，我们还需要给出其组成部分 $\mathrm{HCS}(\boldsymbol{q}_j, \varepsilon_0/s, \alpha, s, \zeta)$，其中 j 从 1 到

s^γ，然后依次给出它们各自的组成部分，依此类推。因此，要了解 $\boldsymbol{q}_0$ 处的层次单元结构，需要知道一个完整的单元层级；它可以表示为一棵无限树，每个节点有 s^γ 个分支（我们在定义分层收集问题时将采用这种表示）。如果存在某种可利用的正则结构，这通常是可行的，例如球盒定理所蕴含的、内接于可达集中的直线型集合（见引理 6）。

假设单元具有乔丹可测性，旨在排除人为构造的单元结构。乔丹可测性的一项重要性质是，乔丹可测集的体积与其内部的体积相同；引理 8 的证明中用到了这一事实。

假设 10. 存在某个 α 和 s，使得对于任意 $\zeta > 0$，都存在某个 ε_0，并且对于任意 $x \in \mathcal{X}_f$，都有一个半径为 ε_0、效率为 α、缩放参数为 s的 ζ-正则 HCS，其内部包含 x。

我们可以证明，对于我们的（性质良好的）控制仿射动力学，这一条件成立：

引理 6. 如果 Π 是对称的并且满足元假设 1，那么假设 10 在$s = 2$下成立。

证明见附录 B。请注意，这条引理并未说明 α 有多大。不过，存在一个 α 能告诉我们很多，因为 α 不依赖于 f（因为 HCS 的定义没有涉及密度函数）。

现在我们讨论如何用层次单元结构覆盖 $\mathcal{X}_f$，这是我们针对对称动力学所设计的 DTSP 算法的基：

定义8。对于 $\rho \geqslant 0$， $\mathcal{X}_f$ 的一个 ρ-精确层次单元结构覆盖（HCS 覆盖）是指一组 HCS S_1, ..., S_m，满足：

- 所有 HCS 的参数（ε_0、 α、 ζ、 s）均相同。
- $\mathcal{X}_f \subseteq \bigcup_{j=1}^m S_j$。 • $\mathbb{P}_{X\sim f}[X$ 属于多个 $S_j] \leqslant \rho$。

重叠参数为 α 的任何 HCS 必然也满足重叠参数为 $\alpha' \leqslant \alpha$时的条件；因此，如果这些 HCS 的 α 取值不同，我们可以采用最小值。

假设 10 意味着存在精度任意高的 HCS 覆盖；这些结果的证明

参见附录 C。首先，我们可以得到一个固定尺度的有限 HCS 覆盖（其精度可能较差 ρ）：

引理 7. 存在 α、s，使得对于所有 $\zeta > 0$，都存在某个 ε_0，使得存在 $\mathcal{X}_f$的有限 HCS 覆盖（其精度参数为 ρ）。

然后，给定一个有限 HCS 覆盖，对于任意 $\rho > 0$，我们都可以通过递归地取子层次单元结构，直到达到所需尺度，并删除任何冗余项，从而在任意小的尺度上构造出一个 ρ 精确的覆盖。

引理 8. 如果假设 10 对参数 α、s 成立，那么对于任意 $\rho > 0$ 和 $\zeta > 0$，都存在某个 ε_0，使得可以构造一个 ρ 精确的 ζ 正则化 HCS 覆盖 S_1、.....、S_m。此外，对于任意 $\varepsilon_0^* > 0$，都存在某个 $\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon_0^*$ 使其成立。

在第六节和第 VII 节的上界证明中，我们将假设作为算法基础的 HCS 覆盖是 0 精确的，也就是说，不同 HCS 之间完全没有重叠。附录 E 证明了只要引理 8 成立，这一假设不会影响主要结果（即使不作此假设，结果仍然成立）。

注 7. 对于正则对称控制仿射动力学（我们可以对其应用球盒定理）和连续密度函数 f，我们可以找到具有 $s = 2$ 的 HCS。然而，我们采用了更宽泛的定义，允许 $s \neq 2$，从而未来可以分析分布在具有分形维数的集合中的目标点；对于某些其他 s 而言，这种分布可能具有更自然的尺度（例如，门格海绵自然地以 $s = 3$ 进行缩放）。

F. 几乎处处

在一些重要情形下，假设并不严格适用于整个空间——例如，如果动力学参数存在不连续性（比如 Dubins车进入某个区域时，其转弯半径突然发生变化），那么假设 6 可能不成立，因为在边界附近，$\boldsymbol{q}$ 可能需要 ε 任意小，因此不存在适用的固定 ε_ζ^*。为处理这种情况，我们定义了假设在某个 $\mathcal{X}^* \subseteq \mathcal{X}$ 或 $\mathcal{Q}^* \subseteq \mathcal{Q}$上几乎处处成立这一概念。

定义 9. 若对每个 $\eta > 0$，都存在某个 A_η 使得下述条件成立，则称某个假设在度量为 $d_{\mathcal{A}}$、体积为 $\mathrm{Vol}_{\mathcal{A}}$ 的空间 $\mathcal{A}$ 中的集合 A 上几乎处处成立：

- 该假设在 A_η 上成立。- 体积 $_{\mathcal{A}}(A \backslash A'_\eta) \leqslant \eta$ 其中 $A'_\eta := \{a \in \mathcal{A} : \inf_{a' \notin A_\eta} d_{\mathcal{A}}(a, a') \geqslant \eta\}$（$A_\eta$ 的 η-内部）。

我们称 A_η 为 A 的 η-近似器。

简而言之，该假设应在集合 A_η 上成立，其 η-内部 A'_η（即距集合外部的点至少 η 的点集）占据 A 的大部分，也就是说，$A \backslash A'_\eta$ 的体积至多为 η。虽然我们用同一个 $\eta > 0$ 作为内部的深度和体积上限，但也可以将其拆分为 η_1、$\eta_2 > 0$，所得定义仍然等价（通过使用 $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$）。

备注 8。需要注意的是，随着 $\eta \to 0$，A_η 和 A'_η 通常会扩展得更充分，从而完全填满 A；并且如果满足 $\eta_1 \geqslant \eta_2$，条件 $A_{\eta_1} \subseteq A_{\eta_2}$ 就可以在不影响定义的情况下强制成立。我们来定义 $A^* = \bigcup_{\eta \to 0} A_\eta$：注意，对于 $\eta > 0$，我们所讨论的假设在所有 A_η 上都成立，那么能否说它必定在 A^* 上成立？不能——我们的许多假设都具有这样的形式：“对于所有 $\zeta > 0$，存在某个 $\varepsilon^*_\zeta > 0$，使得对于所有 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*_\zeta$，某个条件对所有 a 都成立”；然而，对于每个给定的 A_η，可能都需要不同的 ε^*_ζ（因此，实际上应该是 $\varepsilon^*_{\zeta,\ \eta}$），而且可能不存在一个 $\varepsilon^*_\zeta > 0$ 能适用于所有 $\eta > 0$。

备注 8 说明了为什么我们需要定义 9，而不是更常见的“几乎处处”。接着我们指出，要得到主要结果，只需假设几乎处处成立：

命题 4. 如果命题 2 和命题 3 在所有假设处处成立时为真，那么当所有假设在支撑集 $\mathcal{X}_f$ 上几乎处处成立时，它们也为真。

证明见附录 D。

V. DSTSP 下界

现在，我们给出 DSTSP 的一个以极高概率成立的下界。该下界不仅包含关于目标点数量 n 的增长阶 $\Theta(n^{1-\frac{1}{\gamma}})$，还描述了目标点密度 f、系统的机动性函数 g 与小时间约束因子 γ 之间的关系。我们沿用 [18] 和 [17]，的技巧，希望借助以下内容来实现这一点：

定向越野问题与旅行商问题之间的联系；然而，需要更精确地考虑 f 和 g，这带来了困难。动态随机旅行商问题与定向越野问题（针对随机目标点）之间的一个重要区别在于：旅行商问题解必须访问所有目标点，而这些目标点可能分布在整个 $\mathcal{X}_f$ 中；定向越野路径则可以选择将活动范围限制在 $\mathcal{X}_f$ 内一个非常小的区域——大概是目标点密度较高和/或动态系统运动范围较大的区域。因此，旅行商问题取决于整个 $\mathcal{X}_f$ 中的 f 和 g；而定向越野问题本质上只取决于最有利或最具收益的区域，在该区域中可以最快地访问目标点，而其他地方的 f 和 g（以高概率）完全不会影响解。

A. 获利性与调整后的成本平衡函数

为了准确衡量 f、g 对某个区域“获利性”的贡献，我们考虑以下情况：当 $\varepsilon > 0$较小时，有 $\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(R_\varepsilon(\boldsymbol{q})) \approx g(\boldsymbol{q})\varepsilon^\gamma$。因此，我们可以估计任意给定目标落入 $R_\varepsilon(\boldsymbol{q})$的概率：

$$\mathbb{P}_{X\sim f}[X \in \bar{R}_\varepsilon(\boldsymbol{q})] \approx f([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X})g(\boldsymbol{q})\varepsilon^\gamma \tag{62}$$

$$\leqslant f([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X})g([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X})\varepsilon^\gamma \tag{63}$$

因此，落入以$\boldsymbol{q} \in [x]^{\mathcal{Q}}$ 为锚点、半径为ε 的可达集中的目标点期望数量可以界定为

$$\mathbb{E}_{X_i \overset{iid}{\sim} f}[|\{X_1, \ldots, X_n\} \cap \bar{R}_\varepsilon(\boldsymbol{q})|] \leqslant nf(x)g(x)\varepsilon^\gamma\,. \tag{64}$$

这意味着，如果 $\varepsilon = n^{-\frac{1}{\gamma}}(f(x)g(x))^{-\frac{1}{\gamma}}$，则半径为 ε的可达集中的目标点期望数量至多为 1；于是，我们可以将 ε 视为从 x到达最近目标点的平均时间的粗略度量，因此，$1/\varepsilon = n^{\frac{1}{\gamma}}(f(x)g(x))^{\frac{1}{\gamma}}$大致表示我们访问 x附近目标点的速率。由此，我们可以在 $\mathcal{X}$ 上定义收益函数：

$$\mathscr{c}^*(x) := \mathscr{c}^*_{f,g}(x) := \big(f(x)g(x)\big)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{65}$$

这与系统预计在x附近遭遇目标点的速率成正比（当 n 较大时）。

因此，我们希望修改定向越野问题，使获利性在整个空间内保持平衡，而不是偏向某个区域。直观来说，可以将获利性函数用作成本函数：系统在移动时，每单位长度会被收取 $\mathscr{c}^*(x)$ 成本

。这意味着，无论身处何处，它预计遇到目标点的速率大致都是每单位成本 1 个；我们称这样的问题是“平衡的”。

注9。遗憾的是，尽管在非常广泛的条件下，这种直觉通常适用于整个空间，但在许多值得关注的情形中，它并非处处成立。具体而言，在 $f([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}) = 0$ 或 $g([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}) = 0$ 的地方，或在 f 或 g 存在不连续性的地方，(63) 都可能不成立。特别是，这会导致这样一个问题：在 $\mathcal{X}_f$ 之外移动（即在 $f(x) = 0$ 的地方）是“免费”的（无需成本）。因此，成本函数为 $\mathscr{c}^*$ 的定向越野问题过于强大，无法为旅行商问题提供有用的下界。

为了解决注9提出的问题，我们修改获利性函数，从而为我们的动力学得到一个成本函数：

定义10。密度为 f、敏捷性为 g 且正则化因子为 $\zeta > 0$ 时，其调整后的成本平衡函数（我们通常简称为成本函数）为 $\mathscr{c}\colon\ \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 为

$$\mathscr{c}_\zeta(x) := (\hat{f}^{(\zeta)}(x)\hat{g}^{(\zeta)}(x))^{\frac{1}{\gamma}} \tag{66}$$

即，$\mathscr{c}_\zeta(x)$ 是 f 和 g 的上 ζ 正则化之积（f、g 的最小上界，它们分别是 $\geqslant \zeta$ 和 $(1/\zeta)$-利普希茨连续的，见定义 6）。

那么，对于轨迹 $\pi \in \Pi$，其成本为

$$\ell^{\mathscr{c}}(\pi) := \ell^{\mathscr{c}}_\zeta(\pi) := \int_0^{\ell(\pi)} \mathscr{c}\big(\pi(t)\big)dt. \tag{67}$$

为方便起见，我们希望能够按成本对 π 重新参数化。对于任意 $t \in [0,\ \ell(\pi)]$，我们定义

$$t^{\mathscr{c}} := t^{\mathscr{c}}_\pi := \int_0^t \mathscr{c}_\zeta(\pi(t'))\,dt' \tag{68}$$

并定义 $\pi^{\mathscr{c}}\colon\ [0,\ \ell^{\mathscr{c}}(\pi)] \to \mathcal{Q}$ 为满足以下条件的轨迹

$$\pi^{\mathscr{c}}(t^{\mathscr{c}}) = \pi(t)\,. \tag{69}$$

我们通常用“$\mathscr{c}$”符号表示上一节定义的按成本计量的版本，例如，$R^{\mathscr{c}}_\varepsilon(\boldsymbol{q})$ 表示在 $\leqslant \varepsilon$ 成本内从 $\boldsymbol{q}$ 可到达的区域。通常，ζ 的值固定，而 ζ 将省略不写。

我们需要证明成本函数满足一些重要性质，具体而言，即有上界和下界（远离 0），并且是利普希茨连续的：

引理 9。成本函数 $\mathcal{c}_\zeta(x) = (\hat{}f^{(\zeta)}(x)\hat{}g^{(\zeta)}(x))^{\frac{1}{\gamma}}$满足以下性质：

i. $\mathcal{c}_\zeta(x) \geqslant \mathcal{c}^*(x)$（其中 $\mathcal{c}^*(x)$ 是收益函数 $(f(x)g(x))^{\frac{1}{\gamma}}$），对所有 x 均成立。ii. $\mathcal{c}_\zeta(x)$ 一致 y 有界 y f远离 0，且是李 p希茨z 连续。在 p分段 ar，如果 $\gamma \geqslant 1$，那么它是 α-利普希茨连续的，其中

$$\alpha = \frac{1}{\gamma}\zeta^{\frac{2}{\gamma}-3}(f_{\max} + g_{\max}) \tag{70}$$

并且处处有 $\mathcal{c}_\zeta(x) \geqslant \zeta^{\frac{2}{\gamma}}$。

iii. 几乎处处有 $\lim_{\zeta\to 0} \mathcal{c}_\zeta(x) = \mathcal{c}^*(x)$。

证明。我们依次证明这些结论。

i. 这由以下事实可得：根据构造，$\hat{}f^{(\zeta)}$ 和$\hat{}g^{(\zeta)}$ 分别是 f 和 g 的上界（它们均为非负），因此

$$\mathcal{c}_\zeta(x) = (\hat{f}^{(\zeta)}(x)\hat{g}^{(\zeta)}(x))^{\frac{1}{\gamma}} \geqslant (f(x)g(x))^{\frac{1}{\gamma}} = \mathcal{c}^*(x)\,. \tag{71}$$

ii. 这是因为根据构造，$\hat{}\ f^{(\zeta)}$ 和 $\hat{}g^{(\zeta)}$ 处处都是 $\geqslant \zeta$，因此

$$\mathcal{c}_\zeta(x) = (\hat{f}^{(\zeta)}(x)\hat{g}^{(\zeta)}(x))^{\frac{1}{\gamma}} \geqslant \zeta^{\frac{2}{\gamma}}\,. \tag{72}$$

为了证明它们是利普希茨连续的，我们注意到，f 和 g 都有上界（分别为 $f_{\max}$ 和 $g_{\max}$），且 $\sup_x \hat{}f^{(\zeta)}(x) = f_{\max}$ 和 $\sup_x \hat{}g^{(\zeta)}(x) = g_{\max}$；根据构造，$\hat{}f^{(\zeta)}$和 $\hat{}g^{(\zeta)}$是 $(1/\zeta)$-利普希茨连续的。

然而，两个利普希茨连续函数的复合函数也具有利普希茨连续性（复合函数的利普希茨连续性系数是原来两个函数的系数之积）。此外，如果定义域有下界且远离零，并且有上界且远离 ∞，那么 $(\cdot)^{\frac{1}{\gamma}}$ 是利普希茨连续的；当输入的下界为 ζ^2、上界为 $f_{\max}g_{\max}$ 时（如本例），它是 α_1-利普希茨连续的，其中

$$\alpha_1 = \begin{cases} \frac{1}{\gamma}\zeta^{2(\frac{1}{\gamma}-1)} & \text{if } \gamma \geqslant 1 \\ \frac{1}{\gamma}(f_{\max}g_{\max})^{\frac{1}{\gamma}-1} & \text{if } \gamma < 1 \end{cases} \tag{73}$$

现在我们分析$\hat{}f^{(\zeta)}(x)\hat{}g^{(\zeta)}(x)$的利普希茨连续性；两个有界利普希茨连续函数的乘积也是有界利普希茨连续函数。具体而言，若 $h_1(x)$、$h_2(x)$分别是 ζ_1-利普希茨连续和 ζ_2-利普希茨连续的非负函数，且分别具有固定上界 $h_1^{\max}$、$h_2^{\max}$，那么 $h(x) = h_1(x)h_2(x)$ 也非负，且有上界 $h_1^{\max}h_2^{\max}$

并且是 $(\zeta_1 h_2^{\max} + \zeta_2 h_1^{\max})$-利普希茨连续的。因此，$\hat{}f^{(\zeta)}(x)\hat{}g^{(\zeta)}(x)$ 非负，有上界 $f_{\max}g_{\max}$（且有下界 ζ^2），并且是 α_2-利普希茨连续的，其中

$$\alpha_2 = (1/\zeta)(f_{\max} + g_{\max})\,. \tag{74}$$

因此，$\mathfrak{c}_\zeta(x)$ 是 α-利普希茨连续的，其中 $\alpha = \alpha_1\alpha_2$。特别是，当 $\gamma \geqslant 2$ 时（这是我们最感兴趣的情形），我们有

$$\alpha = \frac{1}{\gamma}\zeta^{\frac{2}{\gamma}-3}(f_{\max} + g_{\max})\,. \tag{75}$$

iii. 这是因为当 $\zeta \to 0$ 时，$\hat{}f^{(\zeta)} \to f$ 和 $\hat{}g^{(\zeta)} \to g$ 几乎处处成立；因此，二者都几乎处处成立（它们不收敛处的并集是零测集）。 □

我们还定义了距离和可达集的按成本计量版本：

定义 11. 给定 $\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{q}' \in \mathcal{Q}$，它们之间的代价距离为

$$d_\Pi^{\mathfrak{c}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}') = \inf(\ell^{\mathfrak{c}}(\pi) : \boldsymbol{q} \xrightarrow{\pi} \boldsymbol{q}', \pi \in \Pi) \tag{76}$$

给定 $\varepsilon > 0$ 和 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$，$\varepsilon$-成本可达集（在 $\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{X}$ 中）为

$$R_\varepsilon^{\mathfrak{c}}(\boldsymbol{q}) := \{\boldsymbol{q}' \in \mathcal{Q} : d_\Pi^{\mathfrak{c}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}') \leqslant \varepsilon\} \quad \textit{and} \quad \bar{R}_\varepsilon^{\mathfrak{c}}(\boldsymbol{q}) = [R_\varepsilon^{\mathfrak{c}}(\boldsymbol{q})]_{\mathcal{X}} \tag{77}$$

虽然直观上，在小尺度下，成本可达集会与原来的长度可达集相似（只是按成本函数 $\mathfrak{c}$ 缩放），但它们的形状并不完全相同。因此，我们需要证明这一变化不会改变我们的主要假设，即假设 8 和假设 9；还需要证明，这种方法能够在采用足够小的 $\zeta > 0$ 正则化时，实现我们期望的平衡效果。

引理 10. 设 b 为假设 8 中的分支因子。则存在函数 $\rho_i : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$，其中 $i = 1$ 为 2、3、4，满足 $\lim_{\zeta\to 0}\rho_i(\zeta) = 0$；并存在一个多项式 $P^{\mathfrak{c}}$（它通过成本函数 $\mathfrak{c} := \mathfrak{c}_\zeta$ 依赖于 ζ），使得对于任意 $\zeta > 0$、$\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$ 和 $0 < \varepsilon \leqslant \rho_1(\zeta)$，以下结论成立：

i. 存在一个集合 $Q_\varepsilon^{\mathfrak{c}}(\boldsymbol{q})$，使得 $|Q_\varepsilon^{\mathfrak{c}}(\boldsymbol{q})| \leqslant b$ 且

$$R_{2\varepsilon}^{\mathfrak{c}}(\boldsymbol{q}) \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{q}' \in Q_\varepsilon^{\mathfrak{c}}(\boldsymbol{q})} R_{(1+\rho_2(\zeta))\varepsilon}^{\mathfrak{c}}(\boldsymbol{q}')\,. \tag{78}$$

ii. 存在一个集合 $Q^{\not c,}{}_{\varepsilon}{}^{0}$，使得 $|Q^{\not c,}{}_{\varepsilon}{}^{0}| \leqslant P^{\not c}(1/\varepsilon)$ 且

$$\mathcal{Q}_f \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{q}\in Q_\varepsilon^{\not c,0}} R_\varepsilon^{\not c}(\boldsymbol{q}) \tag{79}$$

iii. $\mathbb{P}_{X\sim f}[X \in R_\varepsilon^{\not c}(\boldsymbol{q})] \leqslant (1+\rho_3(\zeta))\varepsilon^{\gamma}$。 iv. $\mathbb{E}_{X\sim f}[\not c_\zeta(X)^{-1}] \geqslant (1-\rho_4(\zeta))\mathbb{E}_{X\sim f}[(f(X)g(X))^{-\frac{1}{\gamma}}]$。

[2]证明。我们不失一般性地假设 $\zeta \leqslant 1$（因此 $\alpha_1 = \zeta^{\bar\gamma} \leqslant 1$），并且 ε 足够小，从而假设 8 和假设 9 成立。

该引理由 $\not c_\zeta(x)$ 的性质即可得证，即它有下界 α_1，且是 α_2-利普希茨连续的；这两个条件表明，在小尺度上，它的变化不会过于剧烈（按乘法意义而言）。首先，我们定义

$$\overleftrightarrow{R}_\varepsilon(\boldsymbol{q}) \text{ and } \overleftrightarrow{R}_\varepsilon^{\not c}(\boldsymbol{q}) \tag{80}$$

为从 $\boldsymbol{q}$ 出发，在 Π 中沿（可能交替的）反向和正向轨迹可达的集合，其总长度分别为 $\leqslant \varepsilon$ 或总成本为 $\leqslant \varepsilon$（注意，若 Π 是对称的，则 $R_\varepsilon(\boldsymbol{q}) = \overleftrightarrow{R}_\varepsilon(\boldsymbol{q})$ 和 $R_\varepsilon^{\not c}(\boldsymbol{q}) = \overleftrightarrow{R}_\varepsilon^{\not c}(\boldsymbol{q})$）。

接着，令 $c_\Pi < \infty$ 为 $\mathcal{X}$中的 Π 速度上限（即，对于任意 $\pi \in \Pi$，$\|[\dot\pi(t)]_{\mathcal{X}}\| \leqslant c_\Pi$），当然这也适用于反向轨迹，于是我们得到

$$\not c_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}) - (5c_\Pi(\alpha_2/\alpha_1))\varepsilon \leqslant \not c_\zeta([\boldsymbol{q}']_{\mathcal{X}}) \leqslant \not c_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}) + (5c_\Pi(\alpha_2/\alpha_1))\varepsilon \tag{81}$$

$$\text{for any } \boldsymbol{q}\in\mathcal{Q} \text{ and } \boldsymbol{q}' \in \overleftrightarrow{R}_{(5/\alpha_1)\varepsilon}(\boldsymbol{q}) \tag{82}$$

因为 $\not c$ 是 α_2-利普希茨连续的，且根据定义，$\boldsymbol{q}'$ 可以在至多 $(5/\alpha_1)\varepsilon$ 的时间内通过 Π（以及反向的 Π）从 $\boldsymbol{q}$ 到达；这相当于在 $\mathcal{X}$上的度量中，距离至多为 $(5c_\Pi/\alpha_1)\varepsilon$，进而根据利普希茨连续性，$\not c$的值至多变化 $(5c_\Pi(\alpha_2/\alpha_1))\varepsilon$。又因为 $\not c_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}) \geqslant \alpha_1$，我们可以将其转化为乘法界：

$$(1-(5c_\Pi(\alpha_2/\alpha_1^2))\varepsilon)\,\not c_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}) \leqslant \not c_\zeta([\boldsymbol{q}']_{\mathcal{X}}) \leqslant (1+(5c_\Pi(\alpha_2/\alpha_1^2))\varepsilon)\,\not c_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}) \tag{83}$$

$$\text{for any } \boldsymbol{q}\in\mathcal{Q} \text{ and } \boldsymbol{q}' \in \overleftrightarrow{R}_{(5/\alpha_1)\varepsilon}(\boldsymbol{q}) \tag{84}$$

接着令 $\rho_\zeta^*(\varepsilon) := (5c_\Pi(\alpha_2/\alpha_1^2))\varepsilon$（注意，$\alpha_1$、$\alpha_2$取决于 ζ，也取决于 γ和 f，以及通过 $f_{\max}$、$g_{\max}$取决于 g）；对于任意固定的 ζ，我们有 $\lim_{\varepsilon\to 0}\rho_\zeta^*(\varepsilon) = 0$。

此外，由于对所有 x 均有 $\not c_\zeta(x) \geqslant \alpha_1$，我们知道

$$\overleftrightarrow{R}_{5\varepsilon}^{\not c}(\boldsymbol{q}) \subseteq \overleftrightarrow{R}_{(5/\alpha_1)\varepsilon}(\boldsymbol{q}) \tag{85}$$

因为任何成本为 $\leqslant 5\varepsilon$ 的轨迹（允许向后移动）长度都必须为 $\leqslant (5/\alpha_1)\varepsilon$。因此，我们的界 (83) 对所有 $\boldsymbol{q}' \in \overleftrightarrow{R}^{\mathscr{C}}_{5\varepsilon}(\boldsymbol{q})$ 也成立。

现在 固定 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$ 并考虑 $R^{\mathscr{C}}_{\varepsilon'}(\boldsymbol{q}')$；如果 $R^{\mathscr{C}}_{\varepsilon'}(\boldsymbol{q}') \subseteq \overleftrightarrow{R}^{\mathscr{C}}_{5\varepsilon}(\boldsymbol{q})$，那么我们可以得出结论

$$R_{\varepsilon'/((1+\rho^*_\zeta(\varepsilon))\,\mathscr{C}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q}') \subseteq R^{\mathscr{C}}_{\varepsilon'}(\boldsymbol{q}') \subseteq R_{\varepsilon'/((1-\rho^*_\zeta(\varepsilon))\,\mathscr{C}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q}') \tag{86}$$

因为对于任意 $\boldsymbol{q}'' \in R^{\mathscr{C}}_{\varepsilon'}(\boldsymbol{q}') \subseteq \overleftrightarrow{R}^{\mathscr{C}}_{5\varepsilon}(\boldsymbol{q})$，我们都知道成本介于 $(1-\rho^*_\zeta(\varepsilon))\,\mathscr{C}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X})$ 和 $(1+\rho^*_\zeta(\varepsilon))\,\mathscr{C}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X})$之间。同样，如果 $\overleftrightarrow{R}^{\mathscr{C}}_{\varepsilon'}(\boldsymbol{q}') \subseteq \overleftrightarrow{R}^{\mathscr{C}}_{5\varepsilon}(\boldsymbol{q})$，那么

$$\overleftrightarrow{R}_{\varepsilon'/((1+\rho^*_\zeta(\varepsilon))\,\mathscr{C}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q}') \subseteq \overleftrightarrow{R}^{\mathscr{C}}_{\varepsilon'}(\boldsymbol{q}') \subseteq \overleftrightarrow{R}_{\varepsilon'/((1-\rho^*_\zeta(\varepsilon))\,\mathscr{C}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q}') \tag{87}$$

（注意：上述内容中 ε' 和 ε 之间的区别非常重要。）

现在我们证明 (i) 部分。公式 (86) 给出如下结果：

$$R^{\mathscr{C}}_{2\varepsilon}(\boldsymbol{q}) \subseteq R_{2\varepsilon/((1-\rho^*_\zeta(\varepsilon))\,\mathscr{C}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q}) \tag{88}$$

于是，我们可以应用假设 8（因为右侧是通常的可达集），得到一个基数为 b 的集合 $Q_{\varepsilon/((1-\rho^*_\zeta(\varepsilon))\,\mathscr{C}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q})$，使得

$$R_{2\varepsilon/((1-\rho^*_\zeta(\varepsilon))\,\mathscr{C}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q}) \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{q}' \in Q_{\varepsilon/((1-\rho^*_\zeta(\varepsilon))\,\mathscr{C}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q})} R_{\varepsilon/((1-\rho^*_\zeta(\varepsilon))\,\mathscr{C}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q}') \tag{89}$$

注意，不失一般性，对于任意 ε' 和任意 $\boldsymbol{q}'$（注意：这个 $\boldsymbol{q}'$ 与$Q_{\varepsilon/((1-\rho^*_\zeta(\varepsilon))\,\mathscr{C}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q})$，无关，它是任意的 $\boldsymbol{q}' \in \mathcal{Q}$），我们可以假设

$$Q_{\varepsilon'}(\boldsymbol{q}') \subset \overleftrightarrow{R}_{3\varepsilon'}(\boldsymbol{q}') \tag{90}$$

由于不失一般性，我们可以假设任意 $\boldsymbol{q}'' \in Q_{\varepsilon'}(\boldsymbol{q}')$ 都具有以下性质

$$R_{\varepsilon'}(\boldsymbol{q}'') \cap R_{2\varepsilon'}(\boldsymbol{q}') \neq \varnothing \tag{91}$$

因为 $Q_{\varepsilon'}(\boldsymbol{q}')$ 中的点正被用于覆盖 $R_{2\varepsilon'}(\boldsymbol{q}')$。这进而得到

$$R_{\varepsilon'}(\boldsymbol{q}'') \subseteq \overleftrightarrow{R}_{4\varepsilon'}(\boldsymbol{q}') \tag{92}$$

对于任意 $\boldsymbol{q}'' \in Q_{\varepsilon'}(\boldsymbol{q}')$。因此，我们可以将其应用于

$$\varepsilon' = \varepsilon/((1-\rho^*_\zeta(\varepsilon))\,\mathscr{C}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X})) \text{ and } \boldsymbol{q}' = \boldsymbol{q} \tag{93}$$

进而对任意 $\boldsymbol{q}' \in Q_{\varepsilon/((1-\rho^*_\zeta(\varepsilon))\,\mathscr{C}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}$ 均有

$$R_{\varepsilon/((1-\rho^*_\zeta(\varepsilon))\,\mathscr{C}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q}') \subset \overleftrightarrow{R}_{4\varepsilon/((1-\rho^*_\zeta(\varepsilon))\,\mathscr{C}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q}) \tag{94}$$

于是，对于 $\varepsilon \leqslant \alpha_1^2/(45\alpha_2 c_\Pi)$，有

$$\rho_\zeta^*(\varepsilon) \leqslant 1/9 \tag{95}$$

这进而意味着

$$4(1+\rho_\zeta^*(\varepsilon))/(1-\rho_\zeta^*(\varepsilon)) \leqslant 4(10/9)/(8/9) = 5 \tag{96}$$

因此，由 (87) 可得

$$\overleftarrow{R}_{4\varepsilon/((1-\rho_\zeta^*(\varepsilon))\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q}) \subseteq \overleftarrow{R}^{\mathfrak{c}}_{5\varepsilon}(\boldsymbol{q}) \tag{97}$$

最终，由 (86) 可得，对所有 $\boldsymbol{q}' \in Q_{\varepsilon/((1-\rho_\zeta^*(\varepsilon))\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q})$,

$$R_{\varepsilon/((1-\rho_\zeta^*(\varepsilon))\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q}') \subseteq R^{\mathfrak{c}}_{((1+\rho_\zeta^*(\varepsilon))/(1-\rho_\zeta^*(\varepsilon)))\varepsilon}(\boldsymbol{q}') \tag{98}$$

当 $\varepsilon \leqslant \alpha_1^2/(45\alpha_2 c_\Pi)$ 时。于是我们可以定义

$$\rho_1(\zeta) = \zeta\alpha_1^2/(45\alpha_2 c_\Pi) \text{ and } \rho_2(\zeta) = \frac{1+\zeta/9}{1-\zeta/9} - 1 \tag{99}$$

在这种情况下，当 $\varepsilon \leqslant \rho_1(\zeta)$ 时，我们得到

$$\frac{1+\rho_\zeta^*(\varepsilon)}{1-\rho_\zeta^*(\varepsilon)} \leqslant \frac{1+\rho_\zeta^*(\rho_1(\zeta))}{1-\rho_\zeta^*(\rho_1(\zeta))} \leqslant \frac{1+\zeta/9}{1-\zeta/9} = 1+\rho_2(\zeta) \tag{100}$$

其中 $\lim_{\zeta\to 0}\rho_2(\zeta) = 0$。因此，最终得到

$$R_{\varepsilon/((1-\rho_\zeta^*(\varepsilon))\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q}') \subseteq R^{\mathfrak{c}}_{(1+\rho_2(\zeta))\varepsilon}(\boldsymbol{q}') \tag{101}$$

将这些结果与上述内容结合起来，我们得到

$$\begin{aligned} R^{\mathfrak{c}}_{2\varepsilon}(\boldsymbol{q}) &\subseteq R_{2\varepsilon/((1-\rho_\zeta^*(\varepsilon))\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q}) && (102)\\ &\subseteq \bigcup_{\boldsymbol{q}'\in Q_{\varepsilon/((1-\rho_\zeta^*(\varepsilon))\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q})} R_{\varepsilon/((1-\rho_\zeta^*(\varepsilon))\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q}') && (103)\\ &\subseteq \bigcup_{\boldsymbol{q}'\in Q_{\varepsilon/((1-\rho_\zeta^*(\varepsilon))\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q})} R^{\mathfrak{c}}_{(1+\rho_2(\zeta))\varepsilon}(\boldsymbol{q}') && (104) \end{aligned}$$

以及 $|Q_{\varepsilon/((1-\rho_\zeta^*(\varepsilon))\mathfrak{c}([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q})| \leqslant b$，因此我们最终可以得出结论，(i) 部分成立，其中

$$Q^{\mathfrak{c}}_\varepsilon(\boldsymbol{q}) = Q_{\varepsilon/((1-\rho_\zeta^*(\varepsilon))\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_\mathcal{X}))}(\boldsymbol{q})\,. \tag{105}$$

（ii）部分可通过考虑 $\mathfrak{c}^*_{\max} := \sup_x (f(x)g(x))^{\frac{1}{\gamma}}$ 得出，它相对于 ζ 和 ε 是一个常数。接着，注意到 $R_{\varepsilon/\mathfrak{c}^*_{\max}}(\boldsymbol{q}') \subseteq R^{\mathfrak{c}}_\varepsilon(\boldsymbol{q}')$，因为 $\mathfrak{c}_\zeta(x) \leqslant \mathfrak{c}^*_{\max}$，我们只需使用 $P^{\mathfrak{c}}$，使得 $P^{\mathfrak{c}}(1/\varepsilon) = P(\mathfrak{c}^*_{\max}/\varepsilon)$ 和 $Q^{\mathfrak{c},\ \varepsilon\ 0} = Q_{\varepsilon/\mathfrak{c}^*_{\max}}$，即可完成证明。

（iii）部分可由以下事实得出：当 $\varepsilon \leqslant \rho_1(\zeta)$ 和 $\boldsymbol{q}' \in R_\varepsilon^{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{q})$ 时，

$$(1-(c_\Pi(\alpha_2/\alpha_1^2))\varepsilon)\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}) \leqslant \mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}']_{\mathcal{X}}) \leqslant (1+(c_\Pi(\alpha_2/\alpha_1^2))\varepsilon)\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}) \tag{106}$$

（遵循与之前相同的逻辑，但半径为 ε 而不是 5ε）。因此我们知道

$$R_\varepsilon^{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{q}) \subseteq R_{\varepsilon/((1-(c_\Pi(\alpha_2/\alpha_1^2))\varepsilon)\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}))}(\boldsymbol{q}) \tag{107}$$

然后我们设 $\rho_3(\zeta) = (1-\zeta/45)^{-\gamma} - 1$。然后，当 $\varepsilon \leqslant \rho_1(\zeta) = \zeta\alpha_1^2/(45\alpha_2 c_\Pi)$,时，我们有

$$1-(c_\Pi(\alpha_2/\alpha_1^2))\varepsilon \geqslant 1-\zeta/45 \tag{108}$$

这就意味着（将上述结果投影到 $\mathcal{X}$上）

$$\bar{R}_\varepsilon^{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{q}) \subseteq \bar{R}_{\varepsilon(1-\zeta/45)^{-1}/\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})}(\boldsymbol{q}) \tag{109}$$

接下来我们考虑上述集合的体积。由于可达集的体积趋近于 $g(\boldsymbol{q})\varepsilon^\gamma$，对于任意 $\rho_{3*}(\zeta)$，存在某个 $\rho_{1*}(\zeta)$，使得当 $\varepsilon \leqslant \rho_{1*}(\zeta)$时，

$$\mathrm{Vol}(\bar{R}_\varepsilon(\boldsymbol{q})) \leqslant (1+\rho_{3*}(\zeta))g(\boldsymbol{q})\varepsilon^\gamma \leqslant (1+\rho_{3*}(\zeta))g([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})\varepsilon^\gamma \tag{110}$$

用 $\varepsilon(1-\zeta/45)^{-1}/\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})$代替 ε可得（对于 $\varepsilon \leqslant (1-\zeta/45)\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})\rho_{1*}(\zeta) \leqslant (1-\zeta/45)\zeta^{\frac{2}{\gamma}}\rho_{1*}(\zeta)$）

$$\mathrm{Vol}(\bar{R}_{\varepsilon(1-\zeta/45)^{-1}/\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})}(\boldsymbol{q})) \leqslant (1+\rho_{3*}(\zeta))(1-\zeta/45)^{-\gamma}\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})^{-\gamma}g([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})\varepsilon^\gamma \tag{111}$$

$$= (1+\rho_{3*}(\zeta))(1-\zeta/45)^{-\gamma}\hat{f}^{(\zeta)}([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})^{-1}\varepsilon^\gamma \tag{112}$$

最后我们注意到，整个可达集（根据定义）与$\varepsilon(1-\zeta/45)^{-1}/\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})$的距离至多为，因此利普希茨连续性（以及远离 0 的有界性）意味着，对于任意 $\rho_{3**}(\zeta)$，存在某个 $\rho_{1**}(\zeta)$，使得对所有 $\varepsilon < \rho_{1**}(\zeta)$,

$$\hat{f}^{(\zeta)}(\boldsymbol{q}') \leqslant (1+\rho_{3**}(\zeta))\hat{f}^{(\zeta)}(\boldsymbol{q}) \text{ for all } \boldsymbol{q}' \text{ within distance } \varepsilon \text{ of } \boldsymbol{q} \tag{113}$$

因此，令 $\varepsilon < \rho_{1**}(\zeta)(1-\zeta/45)\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}) \leqslant \rho_{1**}(\zeta)(1-\zeta/45)\zeta^{\frac{2}{\gamma}}$，即可得到

$$\mathbb{E}_{X\sim f}[X \in \bar{R}^{\mathfrak{c}}_{\varepsilon}(\boldsymbol{q})] \leqslant \mathbb{E}_{X\sim f}[X \in \bar{R}_{\varepsilon(1-\zeta/45)^{-1}/\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})}(\boldsymbol{q})] \tag{114}$$

$$= \int_{\bar{R}_{\varepsilon(1-\zeta/45)^{-1}/\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})}(\boldsymbol{q})} f(x)\,dx \tag{115}$$

$$\leqslant \int_{\bar{R}_{\varepsilon(1-\zeta/45)^{-1}/\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})}(\boldsymbol{q})} \hat{f}^{(\zeta)}(x)\,dx \tag{116}$$

$$\leqslant \int_{\bar{R}_{\varepsilon(1-\zeta/45)^{-1}/\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})}(\boldsymbol{q})} (1+\rho_{3**}(\zeta))\hat{f}^{(\zeta)}(\boldsymbol{q})\,dx \tag{117}$$

$$= (1+\rho_{3**}(\zeta))\hat{f}^{(\zeta)}(\boldsymbol{q})\mathrm{Vol}(\bar{R}_{\varepsilon(1-\zeta/45)^{-1}/\,\mathfrak{c}_\zeta([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})}(\boldsymbol{q})) \tag{118}$$

$$\leqslant (1+\rho_{3**}(\zeta))\hat{f}^{(\zeta)}(\boldsymbol{q})(1+\rho_{3*}(\zeta))(1-\zeta/45)^{-\gamma}\hat{f}^{(\zeta)}([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})^{-1}\varepsilon^{\gamma} \tag{119}$$

$$= (1+\rho_{3**}(\zeta))(1+\rho_{3*}(\zeta))(1-\zeta/45)^{-\gamma}\varepsilon^{\gamma} \tag{120}$$

因此，注意到当 $\zeta \to 0$ 时 $\rho_{3*}(\zeta)$ 和 $\rho_{3**}(\zeta)$ 可以任意小（且当 $\zeta \to 0$ 时 $(1-\zeta/45)^{-\gamma} \to$ 趋于 1），我们可以令

$$\rho_3(\zeta) = (1+\rho_{3**}(\zeta))(1+\rho_{3*}(\zeta))(1-\zeta/45)^{-\gamma} - 1 \tag{121}$$

并且上述结论对所有满足以下条件的 ε 均成立

$$\varepsilon \leqslant \rho_{1*}(\zeta)(1-\zeta/45)\zeta^{\frac{2}{\gamma}} \text{ and } \rho_{1**}(\zeta)(1-\zeta/45)\zeta^{\frac{2}{\gamma}} \tag{122}$$

然后，我们将 ρ_1 设为上述各值中的最小值（这些值只有固定且有限个，因此该最小值仍为正）。

最后，(iv) 部分由单调收敛定理得出，因为

$$\mathbb{E}_{X\sim f}[(f(X)g(X))^{-\frac{1}{\gamma}}] = \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\,dx < \infty \tag{123}$$

并且在 $f(x)g(x)$ 连续的地方，$\lim_{\zeta\to 0}\,\mathfrak{c}_\zeta(x)^{-1} = (f(x)g(x))^{-\frac{1}{\gamma}}$，而这几乎处处成立。

□

引理 10(i) 是针对我们原始（长度）可达集的 b-覆盖性假设（假设 8）的代价可达等价形式；(ii) 同样等价于起始覆盖性假设（假设 9）；(iii) 是关于代价可达集的概率权重的陈述；(iv) 则指 $\mathfrak{c}_\zeta$ 逼近 $\mathfrak{c}^*$ 的能力（同时保持远离零且利普希茨连续）。

B. 成本平衡定向越野问题

定义12. 动态系统 Π 的成本有界轨迹集记为

$$\Pi_\lambda^{\mathfrak{c}} := \{\pi \in \Pi : \ell^{\mathfrak{c}}(\pi) \leqslant \lambda\} \tag{124}$$

于是，成本平衡定向越野问题定义如下：

$$\mathrm{CBO}_\Pi(X_1, X_2, \ldots, X_n; \lambda) := \max_{\pi \in \Pi_\lambda^{\mathfrak{c}}} (|\bar{\pi} \cap \{X_i\}_{i=1}^n|) \tag{125}$$

即，最大 个目标点数量，这些目标点可由成本至多为 λ.

请注意，与普通的定向越野问题或旅行商问题不同，即使我们将 X_1、.....、 X_n 视为固定值，该问题仍取决于密度函数 f，因为它会影响成本函数。

现在，我们希望证明 CBO 的一个（以极高概率成立的）下界，进而可将其转化为动态随机旅行商问题的相应上界。

命题5（CBO 上界）。设 Π 是一个对称动态系统， f 是满足第 IV 节中假设的概率密度函数，并且 $\lambda > 0$ 固定且足够小。那么，存在 $0 < \beta$ （它通过分支因子 b 和小时间约束因子 γ 依赖于 Π，但不直接依赖于机动性函数 g 或密度 f），使得若 X_1、 X_2、 $\ldots X_n \overset{iid}{\sim} f$，则

$$\mathrm{CBO}_\Pi(X_1, X_2, \ldots, X_n; \lambda, f) \leqslant \beta\lambda\, n^{\frac{1}{\gamma}} \tag{126}$$

以极高概率成立，其中 β 是一个不依赖于 f、 g 或 λ 的常数。

注意，由于成本平衡， β 既不依赖于 f，也不依赖于 g：改变 f 或 g （通过改变动态系统 Π）也会相应改变 $\mathfrak{c}_\zeta$，从而保持平衡。

我们将命题5中的常数和概率界表述得更加明确：

命题 6。若第 IV 节中的假设成立，则对于任意 $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}[\mathrm{CBO}_\Pi(X_1, X_2, \ldots, X_n; \lambda, f) \leqslant (1+\delta)\beta\lambda\, n^{\frac{1}{\gamma}}] \geqslant 1 - e^{-\frac{4}{5}(1+\delta)\log(b)\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}} \tag{127}$$

对于充分大的 n （其中“充分大”可以取决于 δ）。

定义 13。给定成本界 $\lambda > 0$、尺度 $\varepsilon > 0$ 和近似因子 $\rho > 0$，我们将任何由构型组成的序列定义为 λ-成本、 ε-尺度、 ρ-近似表示序列（一般简称为表示序列）

$$\boldsymbol{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{\lceil \lambda/((1-\rho)\varepsilon)\rceil}) \quad \textit{where} \quad \psi_k \in \mathcal{Q} \textit{ for all } k \tag{128}$$

$$\textit{such that } \psi_0 \in Q^{\mathfrak{C},0}_{(1-\rho)\varepsilon} \textit{ and } \psi_k \in Q^{\mathfrak{C}}_{(1-\rho/2)\varepsilon}(\psi_{k-1}) \textit{ for all } k \geqslant 1 \tag{129}$$

请注意，对于初始覆盖集 $Q^{\mathfrak{C},0}_{(1-\rho)\varepsilon}$，我们按 $(1-\rho)$ 缩小；但对于 b-覆盖集 $Q^{\mathfrak{C}}_{(1-\rho/2)\varepsilon}$，只按 $(1-\rho/2)$ 缩小。

如果 $\boldsymbol{\psi}$ 表示轨迹 π，记作 $\pi \sqsupset \boldsymbol{\psi}$，则称:

$$\pi^{\mathfrak{C}}(k(1-\rho)\varepsilon) \in R^{\mathfrak{C}}_{\varepsilon}(\psi_k) \textit{ for all } k \in \{0, 1, \ldots, n\} \tag{130}$$

我们将参数为 $\lambda, \varepsilon, \rho$ 的所有表示序列的集合记作 $\Psi^{\mathfrak{C}}_{\lambda,\varepsilon,\rho}$。此外，我们将 $\boldsymbol{\psi}$ 的成本可达集（半径为 ε）记作 $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{\lceil \lambda/((1-\rho)\varepsilon)\rceil}$ 的可达集之并，记作

$$R^{\mathfrak{C}}_{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi}) := \bigcup_{k=0}^{\lceil \lambda/((1-\rho)\varepsilon)\rceil} R^{\mathfrak{C}}_{\varepsilon}(\psi_k) \tag{131}$$

并将其工作空间投影记作

$$\bar{R}^{\mathfrak{C}}_{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi}) := \bigcup_{k=0}^{\lceil \lambda/((1-\rho)\varepsilon)\rceil} \bar{R}^{\mathfrak{C}}_{\varepsilon}(\psi_k)\,. \tag{132}$$

请注意，任一表示序列都可能表示许多（甚至无限多个）不同的有效轨迹，而任一轨迹也可能由多个表示序列表示。下面给出几个关于表示序列的引理:

引理 11. 对于任意 $\rho > 0$，存在某个足够小的 $\zeta > 0$ （它定义了成本函数）以及 $\varepsilon^{(\rho)} > 0$，使得对于所有满足以下条件的 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^{(\rho)}$： 任意轨迹 $\pi \in \Pi^{\mathfrak{C}}_{\lambda}$ 满足 $\pi(0) \in [\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}}$，均可由某个 $\boldsymbol{\psi} \in \Psi^{\mathfrak{C}}_{\lambda,\ \varepsilon,\ \rho}$ 表示。

证明。首先，我们定义足够小的 $\zeta > 0$，使得 $1 + \rho_2(\zeta) \leqslant 1/(1-\rho/2)$; 然后使用 $\varepsilon^{(\rho)} = \rho_1(\zeta)$（ $\rho_2(\zeta)$ 和 $\rho_1(\zeta)$ 的定义见引理 10）。这尤其意味着，对于任意 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^{(\rho)}$ 和任意 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$，存在一个集合 $Q^{\mathfrak{C}}_{(1-\rho)\varepsilon}(\boldsymbol{q})$，使得 $|Q^{\mathfrak{C}}_{\varepsilon}(\boldsymbol{q})| \leqslant b$ 并且

$$R^{\mathfrak{C}}_{(2-\rho)\varepsilon}(\boldsymbol{q}) = R^{\mathfrak{C}}_{2(1-\rho/2)\varepsilon}(\boldsymbol{q}) \tag{133}$$

$$\subseteq \bigcup_{\boldsymbol{q}' \in Q^{\mathfrak{C}}_{(1-\rho/2)\varepsilon}(\boldsymbol{q})} R^{\mathfrak{C}}_{(1+\rho_2(\zeta))(1-\rho/2)\varepsilon}(\boldsymbol{q}') \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{q}' \in Q^{\mathfrak{C}}_{(1-\rho/2)\varepsilon}(\boldsymbol{q})} R^{\mathfrak{C}}_{\varepsilon}(\boldsymbol{q}')\,. \tag{134}$$

然后我们归纳地构造 $\boldsymbol{\psi} \in \Psi^{\mathfrak{C}}_{\lambda,\,\varepsilon,\,\rho}$，使得 $\boldsymbol{\psi} \sqsupset \pi$。

基例：我们需要选择 ψ_0，使得 $\pi(0) = \pi^{\mathfrak{C}}(0) \in R^{\mathfrak{C}}_{\varepsilon}(\psi_0)$。这一定存在，因为根据定义，从 $Q^{\mathfrak{C}}_{0,(1-\rho)\varepsilon}$ 中各点出发的 ε-半径可达集覆盖 $[\mathcal{X}_f]^{\mathfrak{Q}}$。

归纳步骤：对于任意 $k > 0$，给定满足 $\pi^{\mathfrak{C}}((k-1)(1-\rho)\varepsilon) \in R^{\mathfrak{C}}_{\varepsilon}(\psi_{k-1})$ 的 ψ_{k-1}，我们需要选择 $\psi_k \in Q^{\mathfrak{C}}_{(1-\rho/2)\varepsilon}(\psi_{k-1})$，使得 $\pi^{\mathfrak{C}}(k(1-\rho)\varepsilon) \in R^{\mathfrak{C}}_{\varepsilon}(\psi_k)$。我们注意到，根据定义，$\pi^{\mathfrak{C}}(k(1-\rho)\varepsilon) \in R^{\mathfrak{C}}_{\varepsilon}(\pi^{\mathfrak{C}}((k-1)(1-\rho)\varepsilon))$（因为它们在有效轨迹 π 上仅相距 $(1-\rho)\varepsilon$ 成本）。因此，$\pi^{\mathfrak{C}}(k(1-\rho)\varepsilon) \in R^{\mathfrak{C}}_{(2-\rho)\varepsilon}(\psi_{k-1})$（因为我们可以通过一条成本为 ε 的有效轨迹从ψ_{k-1} 到 $\pi((k-1)(1-\rho)\varepsilon)$，再通过另一条额外成本为 $(1-\rho)\varepsilon$ 的有效轨迹从 $\pi((k-1)(1-\rho)\varepsilon)$到 $\pi(k(1-\rho)\varepsilon)$，所以总计得到一条成本为 $(2-\rho)\varepsilon$ 的有效轨迹）。但是，根据（133），我们知道 $R^{\mathfrak{C}}_{(2-\rho)\varepsilon}(\psi_{k-1})$ 被从 $Q^{\mathfrak{C}}_{(1-\rho/2)\varepsilon}(\psi_{k-1})$，中各点出发的 ε-半径代价可达集覆盖，因此我们可以选择包含 $\pi^{\mathfrak{C}}(k(1-\rho)\varepsilon) \in R^{\mathfrak{C}}_{(2-\rho)\varepsilon}(\psi_{k-1})$ 的那个作为 ψ_k，从而保持 $\psi_k \in Q^{\mathfrak{C}}_{(1-\rho/2)\varepsilon}(\psi_{k-1})$ 和$\pi^{\mathfrak{C}}(k(1-\rho)\varepsilon) \in R^{\mathfrak{C}}_{\varepsilon}(\psi_k)$。

因此，我们可以这样构造 ψ_0、ψ_1、……，直到覆盖所有的 π。由于 $\pi^{\mathfrak{C}}$的输入范围仅为 0 到 λ，因此只需做到 $\pi^{\mathfrak{C}}(\lfloor\lambda/((1-\rho)\varepsilon)\rfloor\varepsilon)$ 即可完成（如果 $\lfloor\lambda/((1-\rho)\varepsilon)\rfloor = \lceil\lambda/((1-\rho)\varepsilon)\rceil - 1$，我们甚至可能需要在表示序列中再添加一个点；这可以从 $Q^{\mathfrak{C}}_{\varepsilon}(\psi_{\lfloor\lambda/((1-\rho)\varepsilon)\rfloor})$做到）。

□

引理 12. 对于任意 $\boldsymbol{\psi} \sqsupset \pi \in \Pi$，我们有 $\pi \subset R^{\mathfrak{C}}_{2\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})$；如果 Π是对称的，则 $\pi \subset R^{\mathfrak{C}}_{(3/2)\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})$。
此外，$\bar{\pi} \subset R^{\mathfrak{C}}_{2\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})$ 对任意 Π都成立，而 $\bar{\pi} \subset R^{\mathfrak{C}}_{(3/2)\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})$ 对对称的 Π成立。

证明。对于任意 $\pi^{\mathfrak{C}}(t)$，我们可以写成 $t = k(1-\rho)\varepsilon + \tau$，其中 k 是一个整数（且介于 0 和 $\lceil\lambda/\varepsilon\rceil$之间），并且 $\tau < (1-\rho)\varepsilon < \varepsilon$。那么 $\pi^{\mathfrak{C}}(t) \in R^{\mathfrak{C}}_{2\varepsilon}(\psi_k)$，因为 $\pi^{\mathfrak{C}}(k(1-\rho)\varepsilon)$ 与 ψ_k 之间的成本不超过 ε，而且 $\pi^{\mathfrak{C}}(t)$ 与 $\pi^{\mathfrak{C}}(k(1-\rho)\varepsilon)$之间的成本不超过 $\tau < (1-\rho)\varepsilon < \varepsilon$。

如果 Π 是对称的，那么分为两种情况：(i) $\tau \leqslant \varepsilon/2$；(ii) $\tau > \varepsilon/2$。在情况 (i) 中，$\pi^{\mathfrak{C}}(t)$ 沿前进方向与 $\pi^{\mathfrak{C}}(k(1-\rho)\varepsilon)$之间的成本至多为 $\tau \leqslant \varepsilon/2$，而 $\pi^{\mathfrak{C}}(k(1-\rho)\varepsilon)$与 ψ_k之间的成本至多为 ε，因此

$$\pi^{\mathfrak{C}}(t) \in R^{\mathfrak{C}}_{(3/2)\varepsilon}(\psi_k) \subseteq R^{\mathfrak{C}}_{(3/2)\varepsilon}(\boldsymbol{\psi}). \tag{135}$$

在情况（ii）中，我们有：$\pi^{\mathfrak{C}}(t)$ 沿着 π向后移动时至多距 $\pi^{\mathfrak{C}}((k+1)(1-\rho)\varepsilon)$ $(1-\rho)\varepsilon - \tau < \varepsilon/2$（对称 Π允许这种移动），且 $\pi^{\mathfrak{C}}((k+1)(1-\rho)\varepsilon)$ 的成本至多为 ε

距 ψ_{k+1}，因此

$$\pi^{\mathscr{C}}(t) \in R^{\mathscr{C}}_{(3/2)\varepsilon}(\psi_{k+1}) \subseteq R^{\mathscr{C}}_{(3/2)\varepsilon}(\boldsymbol{\psi}). \tag{136}$$

在这两种情况下，对于任意 $t \in [0$，我们都有 $\pi^{\mathscr{C}}(t) \in R^{\mathscr{C}}_{(3/2)\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})\ \lambda]$，因此 $\pi \subseteq R^{\mathscr{C}}_{(3/2)\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})$。

将这些集合投影到 $\mathcal{X}$ 后，相关结论便显然成立。 □

引理 13. 设 b 为分支因子， $P^{\mathscr{C}}$ 为引理 10(ii) 中的多项式，

$$|\Psi^{\mathscr{C}}_{\lambda,\varepsilon,\rho}| \leqslant P^{\mathscr{C}}(1/((1-\rho)\varepsilon))b^{\lceil\lambda/((1-\rho)\varepsilon)\rceil} \tag{137}$$

此外，对于一个 任意固定的 $\delta > 0$，存在某个 $\rho^{(\delta)} > 0$ 和 $\varepsilon^{(\delta)} > 0$，使得对所有 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^{(\delta)}$,

$$|\Psi^{\mathscr{C}}_{\lambda,\varepsilon,\rho^{(\delta)}}| \leqslant b^{(1+\delta)\lambda/\varepsilon}. \tag{138}$$

证明. 这可由以下事实推出：对于任意 $\boldsymbol{\psi} = (\psi_0、\ \psi_1、\ \ldots\ldots、\ \psi_{\lceil\lambda/((1-\rho)\varepsilon)\rceil}) \in \Psi^{\mathscr{C}}_{\lambda,\varepsilon,\rho}$,，我们有 $\psi_0 \in Q^{\mathscr{C},\ }_{\ \varepsilon\ }{}^{0}$，并且对所有 $k > 0$ 都有 $\psi_k \in Q^{\mathscr{C}}_{\varepsilon}(\psi_{k-1})$。因此， $|Q^{\mathscr{C},}_{(1-\rho)\varepsilon}| \leqslant P^{\mathscr{C}}(1/((1-\rho)\varepsilon))$ 有多种选择；随后，对于每个 $k > 0$ （从 1 迭代到 $\lceil\lambda/((1-\rho)\varepsilon)\rceil$），我们有 $|Q^{\mathscr{C}}_{(1-\rho/2)\varepsilon}(\psi_{k-1})| \leqslant b$ 种选择。因此，构造 $\boldsymbol{\psi} \in \Psi^{\mathscr{C}}_{\lambda,\ \varepsilon,\ \rho}$ 的总方式数至多为 $P^{\mathscr{C}}(1/((1-\rho)\varepsilon))b^{\lceil\lambda/((1-\rho)\varepsilon)\rceil}$。

最后，该近似成立是因为对于任意 $\delta > 0$，我们都可以选择 $\rho^{(\delta)}$ 使得 $1/(1-\rho^{(\delta)}) \leqslant 1+\delta/2$。注意,

$$b^{(1+\delta)\lambda/\varepsilon}/b^{\lceil\lambda/((1-\rho^{(\delta)})\varepsilon)\rceil} \geqslant b^{((1+\delta)-1/(1-\rho^{(\delta)}))\lambda/\varepsilon-1} \geqslant b^{(\delta/2)\lambda/\varepsilon-1} \tag{139}$$

增长速度快于 $1/\varepsilon$, 中的任何多项式，具体而言，它必须快于 $P^{\mathscr{C}}(1/((1-\rho^{(\delta)})\varepsilon))$。因此，对于足够小的 ε,

$$|\Psi^{\mathscr{C}}_{\lambda,\varepsilon,\rho^{(\delta)}}| \leqslant P^{\mathscr{C}}(1/((1-\rho)\varepsilon))b^{\lceil\lambda/((1-\rho^{(\delta)})\varepsilon)\rceil} \leqslant b^{(1+\delta)\lambda/\varepsilon} \tag{140}$$

于是证明完成。 □

¯此外，给定任意常数 $r \geqslant 0$，任意 $R^{\mathscr{C}}_{r\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})$ 的概率质量（以及落入其中的目标点期望数量）都很容易求界:

引理 14. 对于任意固定的 $\lambda > 0$ 和 $\delta > 0$，存在一个充分小的 $\rho^{(\delta)} > 0$，使得对于任意充分小的 $\varepsilon > 0$ 和 $\boldsymbol{\psi} \in \Psi^{\mathscr{C}}_{\lambda\ ,\ \varepsilon,\ \rho^{(\delta)}}$,

$$\mathbb{P}_{X\sim f}[X \in \bar{R}^{\mathscr{C}}_{r\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})] \leqslant (1+\delta)r^{\gamma}\lambda\varepsilon^{\gamma-1}. \tag{141}$$

证明. 我们知道，对于任意 $\psi_k \in \mathcal{Q}$,

$$\mathbb{P}_{X\sim f}[X \in \bar{R}^{\mathfrak{c}}_{\varepsilon}(\psi_k)] \leqslant (1+o(1))\varepsilon^{\gamma} \tag{142}$$

因此，以 $r\varepsilon$ 作为半径（这不会影响 $\varepsilon \to 0$ 时 $o(1)$ 误差项仍趋于 0，且它只取决于 ε这一事实），并令 $\rho^{(\delta)}$ （如前述引理中）满足$1/(1-\rho^{(\delta)}) < 1-\delta/2,$，我们可以应用并集界。当 $\varepsilon < \delta\lambda/8,$时，存在

$$\lceil \lambda/((1-\rho^{(\delta)})\varepsilon)\rceil + 1 \leqslant (1+\delta/2)\lambda/\varepsilon + 2 \leqslant (1+(3/4)\delta)\lambda/\varepsilon \tag{143}$$

k的个可能取值。接下来，我们可以令 ε足够小，使得 $\mathbb{P}_{X\sim f}[X \in R^{\mathfrak{c}}_{r\varepsilon}(\psi_k)] \leqslant (1+\delta^*)r^{\gamma}\varepsilon^{\gamma}$，其中 δ^*是满足 $(1+\delta^*)(1+(3/4)\delta) = 1+\delta$的值（仅取决于 δ）；然后根据并集界，我们有

$$\mathbb{P}_{X\sim f}[X \in \bar{R}^{\mathfrak{c}}_{r\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})] \leqslant \bigcup_{k=0}^{\lceil \lambda/((1-\rho^{(\delta)})\varepsilon)\rceil} \mathbb{P}_{X\sim f}[X \in \bar{R}^{\mathfrak{c}}_{r\varepsilon}(\psi_k)] \tag{144}$$

$$\leqslant (\lceil \lambda/((1-\rho^{(\delta)})\varepsilon)\rceil + 1)(1+\delta^*)r^{\gamma}\varepsilon^{\gamma} \tag{145}$$

$$\leqslant (1+\delta)r^{\gamma}\lambda\varepsilon^{\gamma-1} \tag{146}$$

正如我们所希望的那样。 □

现在我们定义一个新问题，其目标是找到一个表示序列，使其2ε-成本可达集（若 Π 是非对称的）或 $(3/2)\varepsilon$-成本可达集（若 Π 是对称的）包含尽可能多的目标点。我们正式定义如下:

定义 14. 给定长度上界 $\lambda > 0$、尺度 $\varepsilon > 0$ 和近似因子 $\delta > 0$，我们将序列包含问题（SCP）定义如下。首先，令 $\rho := \rho^{(\delta)}$ 足够小，使引理13和引理14成立（我们可以取满足各自要求的值中的最小值），并令 $\zeta > 0$ （成本函数正则化因子）足够小，使引理 11 成立（从而定义成本函数 $\mathfrak{c}$）。如果 Π 是非对称的，令 $r = 2$；如果 Π 是对称的，令 $r = 3/2$；那么

$$\mathrm{SCP}_{\Pi}(X_1,\ldots,X_n;\lambda,\varepsilon,\delta) := \max_{\boldsymbol{\psi}\in\Psi^{\mathfrak{c}}_{\lambda,\varepsilon,\rho}} |\{X_1,\ldots,X_n\} \cap \bar{R}^{\mathfrak{c}}_{r\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})| \tag{147}$$

这将原本在复杂且不可数无限的 Π （被视为轨迹集合）上的优化问题，替换为在有限集 $\Psi^{\mathfrak{c}}_{\lambda,\varepsilon,\rho}$ 上的优化问题。此外，新问题是旧问题的上界:

引理 15. 对于任意动力学 Π、密度函数 f（其影响成本函数）、成本约束 $\lambda > 0$ 和尺度 $\varepsilon > 0$,

$$\mathrm{CBO}_\Pi(X_1, \ldots, X_n; \lambda) \leqslant \mathrm{SCP}_\Pi(X_1, \ldots, X_n; \lambda, \varepsilon, \delta) \tag{148}$$

证明。由引理 11 和 12 可得：对于任意 $\pi \in \Pi^{\mathscr{c}}_\lambda$，存在 $\boldsymbol{\psi} \in \Psi^{\mathscr{c}}_{\lambda,\varepsilon,\rho}$，使得 $_\boldsymbol{\psi} \sqsupset \pi$，这意味着 $\bar{\pi} \subseteq R^{\mathscr{c}}_{r\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})$。因此,

$$|\{X_1, \ldots, X_n\} \cap \bar{\pi}| \leqslant |\{X_1, \ldots, X_n\} \cap \bar{R}^{\mathscr{c}}_{r\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})| \tag{149}$$

因此，前者关于 $\pi \in \Pi$ 的最大值不超过后者关于 $\boldsymbol{\psi} \in \Psi^{\mathscr{c}}_{\lambda,\varepsilon,\rho}$ 的最大值。

□

现在我们证明命题 6。为了得到 CBO 的一个上界（以极高概率），我们希望得到 $\mathrm{SCP}_\Pi(X_1, \ldots, X_n; \lambda, \varepsilon, \delta)$ 的一个上界（以极高概率），根据引理 15，这个上界随后也将[1] 适用于 CBO。由于我们可以将 $\varepsilon > 0$ 设为任意（足够小的）值，因此我们使用 $\varepsilon = n^{-\overline{\gamma}}$（它会随着 $n \to \infty$ 而变得任意小）。

现在我们先任意固定 $\boldsymbol{\psi}$，再选择 X_1、...、$X_n \overset{iid}{\sim} f$，然后将 $|\{X_1$、...、$X_n\} \cap R^{\mathscr{c}}_{r\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})|$ 视为随机变量（因为它取决于随机输入 X_1、...、X_n）。令 $p^{(\boldsymbol{\psi})} := \mathbb{P}_{X\sim f}[X \in \bar{R}^{\mathscr{c}}_{r\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})]$。代入引理 14 得到

$$p^{(\boldsymbol{\psi})} = \mathbb{P}_{X\sim f}[X \in \bar{R}^{\mathscr{c}}_{r\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})] \leqslant (1+\delta)\lambda r^\gamma n^{-(1-\frac{1}{\gamma})} \tag{150}$$

$$\implies \mathbb{E}_{X_i \overset{iid}{\sim} f}[|\{X_1, \ldots, X_n\} \cap \bar{R}^{\mathscr{c}}_{r\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})|] \leqslant (1+\delta)\lambda r^\gamma n^{\frac{1}{\gamma}} \tag{151}$$

此外 此外，在固定 $\boldsymbol{\psi} \in \Psi^{\mathscr{c}}_{\lambda,\ \varepsilon,\ \rho}$ 后，我们可以令 $Z_i := Z_i^{(\boldsymbol{\psi})} := \mathbb{I}\{X_i \in \bar{R}^{\mathscr{c}}_{r\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})\}$，并且

$$Z := Z^{(\boldsymbol{\psi})} := \sum_{i=1}^n Z_i^{(\boldsymbol{\psi})} = |\{X_1, \ldots, X_n\} \cap \bar{R}^{\mathscr{c}}_{r\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})| \tag{152}$$

我们定义 $p^* = (1+\delta)r^\gamma n^{-(1-\frac{1}{\gamma})}$。于是我们知道 $Z_i \overset{iid}{\sim} \mathrm{Bern}(p^{(\boldsymbol{\psi})})$，并且对于充分小的 ε（由于 $\varepsilon \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时成立，这等价于 n 足够大），对所有 $\boldsymbol{\psi}$ 都有 $p^{(\boldsymbol{\psi})} \leqslant p^*$；因此，不失一般性，我们可以假设对所有 $\boldsymbol{\psi} \in \Psi^{\mathscr{c}}_{\lambda,\ \varepsilon,\ \rho}$，均有 $p^{(\boldsymbol{\psi})} \leqslant p^*$。

接下来，我们定义 Z_1^*、...、$Z_i^* \overset{iid}{\sim} \mathrm{Bern}(p^*)$ 和 $Z^* = \sum_{i=1}^n Z_i^*$。由于 $p^{(\boldsymbol{\psi})} \leqslant p^*$，对于任意 $A > 0$,

$$\mathbb{P}[Z^{(\boldsymbol{\psi})} \geqslant A] \leqslant \mathbb{P}[Z^* \geqslant A] \tag{153}$$

令 $\mu^* := \mathbb{E}[Z^*] = (1+\delta)r^\gamma \lambda n^{\frac{1}{\gamma}}$。

因此，我们依次使用引理 15、并集界、方程 (153) 和引理 13，得到对于所有 $A > 0$（其中概率取自 $X_i \overset{iid}{\sim} f$）：

$$\mathbb{P}\big[\mathrm{CBO}_{\Pi}(X_1, \dots, X_n; f, \lambda) \geqslant A\big] \leqslant \mathbb{P}\big[\mathrm{SCP}_{\Pi}(X_1, \dots, X_n; \lambda, \varepsilon, \delta) \geqslant A\big] \tag{154}$$

$$= \mathbb{P}[\exists\, \boldsymbol{\psi} \in \Psi^{\mathscr{C}}_{\lambda,\varepsilon,\rho} : Z^{(\boldsymbol{\psi})} \geqslant A] \tag{155}$$

$$\leqslant \sum_{\boldsymbol{\psi} \in \Psi^{\mathscr{C}}_{\lambda,\varepsilon,\rho}} \mathbb{P}[Z^{(\boldsymbol{\psi})} \geqslant A] \tag{156}$$

$$\leqslant |\Psi^{\mathscr{C}}_{\lambda,\varepsilon,\rho}|\, \mathbb{P}[Z^* \geqslant A] \tag{157}$$

$$\leqslant b^{(1+\delta)\lambda/\varepsilon}\, \mathbb{P}[Z^* \geqslant A] \tag{158}$$

$$= b^{(1+\delta)\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}}\, \mathbb{P}[Z^* \geqslant A] \tag{159}$$

对于任意充分小的 $\varepsilon > 0$，即充分大的 n。

由于 Z^* 是独立同分布伯努利随机变量之和，因此我们可以应用切尔诺夫界。特别地，令 $A = (1+\xi)\mu^*$。那么，上切尔诺夫界表明

$$\mathbb{P}[Z^* \geqslant A] = \mathbb{P}[Z^* \geqslant (1+\xi)\mu^*] \tag{160}$$

$$\leqslant e^{-\frac{\xi^2}{2+\xi}\mu^*} \tag{161}$$

$$= e^{-\frac{\xi^2}{2+\xi}(1+\delta) r^\gamma \lambda n^{\frac{1}{\gamma}}} \tag{162}$$

接下来注意到，式 (159) 是 CBO 问题得到结果 $\geqslant A$ 的概率上界，其形式为

$$b^{(1+\delta)\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}}\, \mathbb{P}[Z^* \geqslant A] \leqslant e^{\log(b)\,(1+\delta)\,\lambda n^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{\xi^2}{2+\xi}(1+\delta) r^\gamma \lambda n^{\frac{1}{\gamma}}} \tag{163}$$

$$= e^{\left(\log(b) - \frac{\xi^2}{2+\xi} r^\gamma\right) \lambda (1+\delta) n^{\frac{1}{\gamma}}} \tag{164}$$

我们注意到，由于 $\lambda(1+\delta) > 0$，只要 $\log(b) - \frac{\xi^2}{2+\xi} r^\gamma < 0$，当 $n \to \infty$ 时，上述结果就趋于 0（且其趋近符合 e^{-cn^γ}，即以极高概率发生）。现在我们分析 (15) 中定义的 ξ：由于 $\log(b)/r^\gamma > \sqrt{\log(b)/r^\gamma} \iff \log(b)/r^\gamma > 1 \iff \log(b) > r^\gamma$，若 $\log(b) > r^\gamma$，则得到

$$\log(b) - \frac{\xi^2}{2+\xi} r^\gamma = \log(b) - \frac{9(\log(b)/r^\gamma)^2}{2 + 3(\log(b)/r^\gamma)} r^\gamma \tag{165}$$

$$\leqslant \log(b) - \frac{9(\log(b)/r^\gamma)^2}{5(\log(b)/r^\gamma)} r^\gamma \tag{166}$$

$$= -\frac{4}{5}\log(b) \tag{167}$$

类似地，若 $\log(b) \leqslant r^\gamma$，则得到

$$\log(b) - \frac{\xi^2}{2+\xi} r^\gamma = \log(b) - \frac{9(\log(b)/r^\gamma)}{2+3\sqrt{\log(b)/r^\gamma}} r^\gamma \tag{168}$$

$$\leqslant \log(b) - \frac{9(\log(b)/r^\gamma)}{5} r^\gamma \tag{169}$$

$$= -\frac{4}{5}\log(b) \tag{170}$$

因此，无论哪种情况，我们都有以下界：

$$\log(b) - \frac{\xi^2}{2+\xi} r^\gamma \leqslant -\frac{4}{5}\log(b) \tag{171}$$

[1]那么，对于足够大的 n （因为 $\varepsilon = n^{-\frac{1}{\gamma}}$ 这等价于“对于足够小的 ε”），并令 $\{X_i\} := \{X_1, \ldots, X_n\}$，我们有

$$\mathbb{P}[\mathrm{CBO}_\Pi(\{X_i\}; f, \lambda) \geqslant (1+\delta)\beta\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}] \leqslant \mathbb{P}[\mathrm{SCP}_\Pi(\{X_i\}; \lambda, \varepsilon, \rho) \geqslant (1+\delta)\beta\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}] \tag{172}$$

$$\leqslant |\Psi^{\mathscr{C}}_{\lambda,\varepsilon,\rho}| \ \mathbb{P}[Z^* \geqslant (1+\xi)\mu^*] \tag{173}$$

$$\leqslant b^{(1+\delta)\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}} \, e^{\left(-\frac{\xi^2}{2+\xi}(1+\delta) r^\gamma \lambda \varepsilon^{\gamma-1} n\right)} \tag{174}$$

$$\leqslant e^{-\frac{4}{5}(1+\delta)\log(b)\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}} \tag{175}$$

由此证明了命题 5 和命题 6。

C. DSTSP 下界

虽然成本平衡定向越野问题可以得到简洁的界，但它用成本函数替代了轨迹长度。因此，定向越野问题与旅行商问题之间的直接对应关系在 CBO 中不再成立，我们需要一种新方法。记

$$\Pi^{\{X_i\}} := \{\pi \in \Pi : X_i \in \bar{\pi} \text{ for all } i\} \tag{176}$$

即所有旅行商问题解轨迹的集合（不一定是最短路径）。接下来，我们取某个 $\pi \in \Pi^{\{X_i\}}$，并希望证明它以极高概率至少有某个特定长度。我们通过将 π 分割成成本为 λ 的线段来实现这一点；如果 λ 足够短，那么在任意一条这样的线段范围内，成本函数都大致保持不变（因为 $\mathscr{c}_\zeta$ 是利普希茨连续的）。因此，这样一条线段的长度至少约为 $\lambda / \mathscr{c}_\zeta(x)$，其中 x 是线段上的任意一点。于是，我们可以令 ℓ_j 表示第 j条此类线段的成本，并令 $j(i)$

表示 X_i 所在的线段；接下来，我们可以对所有 i 求和，计算 X_i 所在的线段长度，结果为

$$\sum_{i=1}^{n} \ell_{j(i)} \approx \sum_{i=1}^{n} \lambda / \mathfrak{c}_\zeta(X_i) \approx n\lambda \mathbb{E}_{X\sim f}[\,\mathfrak{c}_\zeta(X)^{-1}] \approx (1-\delta) n\lambda \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx\,. \tag{177}$$

然而，这很可能会高估总长度，因为每个线段都会按照落在其上的 X_i 个目标点分别计数一次；但由命题 6 可知，这样的线段上目标点不会超过 $(1+\delta)\beta\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}$ 个。因此，总长度至少为该总和除以 $(1+\delta)\beta\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}$；结合这两个近似因子 δ（它们都可以任意小），我们得出结论：对于任意 $\delta > 0$，当 n 充分大时，

$$\mathrm{TSP}_\Pi(X_1, \ldots, X_n) \geqslant (1-\delta)\beta^{-1} n^{1-\frac{1}{\gamma}} \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \tag{178}$$

以极高概率。

令 $\lambda > 0$ 生成 X_1、X_2、$\ldots \overset{iid}{\sim} f$（一个无限的目标点序列，我们将考察访问其中前 n 个目标点的轨迹，并令 $n \to \infty$）。为简单起见，我们定义

$$\mathrm{CBO}^{(n)} := \mathrm{CBO}_\Pi(X_1, X_2, \ldots, X_n; \lambda, f) \tag{179}$$

令 β 和 ξ 如定义 5 中所定义。近似时我们将使用 $(1-\delta/2)^{-1}$ 而非 $1+\delta$（这样表述旅行商问题界会更简洁）；两者并不相等，但对于任意 $\delta_1 > 0$，都存在某个 $\delta_2 > 0$，使得 $1+\delta_1 = (1-\delta_2/2)^{-1}$，反之亦然。因此，经过这一调整，命题 6 对所有 $\delta > 0$ 在 n 充分大时均成立（“充分大”可能取决于 δ），

$$\mathbb{P}[\mathrm{CBO}^{(n)} \leqslant (1-\delta/2)\beta\lambda\, n^{\frac{1}{\gamma}}] \geqslant 1 - e^{-\frac{4}{5}\frac{\log(b)\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}}{1-\delta/2}} \geqslant 1 - e^{-\frac{4}{5}\log(b)\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}} \tag{180}$$

在本节余下部分，我们假设 $\mathsf{CBO}^{(n)}$ 的界成立；最后，我们会将其失效的概率纳入我们的界中。令 $\pi := \pi^{(n)} \in \Pi$ 为针对目标点 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ 的一条旅行商问题轨迹，并令 $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, \ell(\pi)]$ 满足 $\bar{\pi}(t_i) = X_i$（t_i 是 π 访问 X_i 的时间；若访问时间不止一个，则任意选取一个）。不失一般性，我们假设 $\max_i t_i = \ell(\pi)$（旅行商问题轨迹在访问完所有 n 个目标点后无需继续）。

我们希望将 π 划分为成本为 λ 的线段。不过，π 可能无法被均匀划分为成本为 λ 的线段，因此我们定义以下数值：

$$k := \lceil \ell^{\mathfrak{c}}(\pi)/\lambda \rceil \quad \text{and} \quad \lambda' := \ell^{\mathfrak{c}}(\pi)/k \tag{181}$$

因此， $\lambda - 1/k \leqslant \lambda' \leqslant \lambda$。此外，由于 CBO$^{(n)}$ 上的界成立，我们知道任何成本为 λ' 的轨迹最多包含 $(1-\delta/2)^{-1}\beta\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}$ 个目标点，因此要获得全部 n 个点，我们需要

$$k \geqslant \frac{n}{(1-\delta/2)^{-1}\beta\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}} = (1-\delta/2)\beta^{-1}\lambda^{-1}n^{1-\frac{1}{\gamma}} \tag{182}$$

这样的线段。因此，当 $n \to \infty \implies k \to \infty \implies \lambda' \to \lambda$时。我们定义 $0 = t'_0 < t'_1 < \cdots < t'_k = \ell(\pi)$ ，使得

$$t'_j := \min\left(t : \int_0^t \mathscr{c}_\zeta(\pi(\tau))\, d\tau = j\lambda'\right) \tag{183}$$

即，轨迹在时间 t'_j达到成本 $j\lambda'$ 。这也意味着

$$\ell^{\mathscr{c}}(\pi_{[t'_{j-1},t'_j]}) = \lambda' \tag{184}$$

即，成本 π 在任意 t'_{j-1} 与 t'_j 之间累积的值为 λ'。对于任意 j，令 $A_j := \{i\colon t_i \in [t'_{j-1}, t'_j)\}$（以及 $A_k = \{i\colon t_i \in [t'_{k-1}, t'_k]\}$），从而包含整个区间 $[0, \ell(\pi)]$ ），即 π 在时间区间 $[t'_{j-1}, t'_j)$内访问 X_i。由于 CBO$^{(n)}$ 有界，且根据（184），我们知道对于充分大的 n，所有 $j \in [k]$ 都满足

$$|A_j| \leqslant (1-\delta/2)^{-1}\beta\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}\,. \tag{185}$$

我们还令 $\ell_j := \ell^{(\pi_{,j}\ \lambda)} = t'_j - t'_{j-1}$，对应于第 λ' 个成本- j轨迹的长度，并定义 $j(i)$ ，使得 $i \in A_{j(i)}$ （π 在第 $j(i)$ 个成本-λ' 区间内访问 X_i ）；注意，它以λ 而非 λ' 作为输入（并且如上所述， λ' 由 λ 和 $\ell^{\mathscr{c}}(\pi)$ 确定）。注意，收集 $\{A_j\}_{j\in[k]}$ 将 $[n]$划分为若干部分。

由于 $\mathscr{c}_\zeta(x) \geqslant \alpha_1$ 处处成立，且 $\mathscr{c}_\zeta$ 是 α_2-利普希茨连续的，对于任意 $\eta > 0$ ，我们可以找到 λ ，使得对于所有 $\lambda' \leqslant \lambda$，如果 π' 是一条成本为 $\ell^{\mathscr{c}}(\pi') = \lambda'$ 且 $X \in \bar{\pi}'$ 的轨迹，那么$\ell(\pi') \geqslant (1-\eta)\lambda'/\mathscr{c}_\zeta(X)$。由此可得:

$$\ell(\pi) = \sum_{j=1}^{k} \ell_j \tag{186}$$

$$= \frac{1-\delta/2}{\beta\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}} \sum_{j=1}^{k} (1-\delta/2)^{-1}\beta\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}\ell_j \tag{187}$$

$$\geqslant \frac{1-\delta/2}{\beta\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}} \sum_{j=1}^{k} |A_j|\ell_j \tag{188}$$

$$= \frac{1-\delta/2}{\beta\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}} \sum_{i=1}^{n} \ell_{j(i)} \tag{189}$$

由此可得以下直观步骤（注意，我们使用 $\lambda \approx \lambda'$ 并去掉 δ 项）：

$$\ell(\pi) \gtrsim \frac{1}{\beta\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}} \sum_{i=1}^{n} \lambda / \phi_\zeta(X_i) \text{ with very high probability} \tag{190}$$

$$\gtrsim \frac{1}{\beta} n^{1-\frac{1}{\gamma}} \mathbb{E}_{X\sim f}\left[\phi_\zeta(X)^{-1}\right] \text{ with very high probability} \tag{191}$$

$$\approx \frac{1}{\beta} n^{1-\frac{1}{\gamma}} \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \tag{192}$$

两个“$\gtrsim$”步骤 (190) 和 (191) 需要准确陈述并给出论证：(190) 成立是因为成本-λ' 线段 $\pi_{[t'_{j(i)-1},\ t'_{j(i)}]}$ 包含 X_i，但处理近似时需要谨慎；而 (191) 则通过一个集中界得到证明（并且因为当 n 较大时，$\lambda' \approx \lambda$）。(192) 中的近似通过使用正则化因子 ζ 得到论证，该因子足够小，因此可以使近似达到任意所需的精度。

在准确陈述并证明将导出步骤 (190) 和 (191) 的结果之前，我们先讨论用于证明它们的主要工具，即单侧伯恩斯坦条件和伯恩斯坦不等式（见 [20]）。我们不会定义单侧伯恩斯坦条件，因为我们并未直接使用其定义；相反，我们给出一个（已知的）充分条件，即有上界的随机变量满足该条件：

命题 7. 若 $Y - \mathbb{E}[Y] \leqslant a'$（得到保证），则对于某个 $a' > 0$，Y 满足参数为 $a = a'/3$ 的单侧伯恩斯坦条件。

这很有用，因为它使我们能够使用（单侧）伯恩斯坦不等式：

命题 8. 设 Y_1、$\ldots Y_n$ 是独立同分布随机变量（每个变量的期望为 $\mathbb{E}[Y]$，方差为 $\mathrm{Var}[Y]$），且满足参数为 $a > 0$ 的单侧伯恩斯坦条件。那么，对于任意 $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \mathbb{E}[Y] \geqslant \delta\Big] \leqslant e^{-\frac{n\delta^2/2}{\mathrm{Var}[Y]+a\delta}} \tag{193}$$

通常将其表述为 Y 有上界，因为单侧伯恩斯坦不等式给出的是上尾界（通常也正是以这种方式使用）；这里我们试图推导一组有下界（因为它们均为非负）的独立同分布随机变量之和的下尾界，因此将其改写为：

命题 9. 设 $Y_1, \dots, Y_n$ 为独立同分布的非负随机变量（每个随机变量的期望为 $\mathbb{E}[Y]$，方差为 $\mathsf{Var}[Y]$）。那么对于任意 $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}\Big[\sum_{i=1}^{n} Y_i \leqslant (1-\delta) n \mathbb{E}[Y]\Big] \leqslant e^{-\frac{n\mathbb{E}[Y]^2\delta^2/2}{\mathrm{Var}[Y]+\mathbb{E}[Y]^2\delta/2}} \tag{194}$$

证明。根据命题 7，若 Y 非负，则 $-Y$ 满足参数为 $a = \mathbb{E}[Y]/3$ 的伯恩斯坦条件。于是我们可以改写为

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i \leqslant (1-\delta) n \mathbb{E}[Y] \iff \sum_{i=1}^{n} (-Y_i) \geqslant (1-\delta) n \mathbb{E}[-Y] \tag{195}$$

$$\iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (-Y_i) - \mathbb{E}[-Y] \geqslant \delta\, \mathbb{E}[Y] \tag{196}$$

将此代入命题 8，即可得出结论。 □

令 $Y_i := \mathfrak{c}_\zeta(X_i)^{-1} \leqslant 0$，若 $X \sim f$，则定义 $Y := \mathfrak{c}_\zeta(X)^{-1} \leqslant 0$ （Y_i 的通用版本）。我们需要证明以下几点:

引理 16. 对任意近似因子 $\delta < 0$，都存在一个足够小的正则化因子 $\zeta := \zeta^{(\delta)} > 0$，使得 $\mathbb{E}[Y]$ 和 $\mathsf{Var}[Y]$ 满足

$$(1-\delta)\int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \leqslant \mathbb{E}[Y] \leqslant \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \tag{197}$$

$$\textit{and} \quad \mathrm{Var}[Y] \leqslant \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{2}{\gamma}} g(x)^{-\frac{2}{\gamma}}\, dx - (1-\delta)^2 \bigg(\int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx\bigg)^2 \tag{198}$$

当 $\gamma \geqslant 2$ 时，两者均为有限值。此外，即使在 $\gamma < 2$ 时，我们也可以用正则化因子本身给期望值和方差设定上界:

$$(1-\delta)\int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \leqslant \mathbb{E}[Y] \leqslant \alpha_1^{-1} \tag{199}$$

$$\textit{and} \quad \mathrm{Var}[Y] \leqslant \alpha_1^{-2}/4\,. \tag{200}$$

证明。回顾一下，收益函数（成本函数 c_ζ 是其近似）为 $c^*(x) = (f(x)g(x))^{\frac{1}{\gamma}}$，且 $\gamma \geqslant 2$。令 $Y^* = c^*(X)$，其中 $X \sim f$。于是我们有

$$\mathbb{E}[Y^*] = \int (c^*)^{-1}\, df \tag{201}$$

$$= \int_{\mathcal{X}_f} f(x)(f(x)g(x))^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \tag{202}$$

$$= \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \tag{203}$$

$$\leqslant \int_{\mathcal{X}_f} (1 + f(x)) g_{\min}^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \tag{204}$$

$$= (\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}_f) + 1) g_{\min}^{-\frac{1}{\gamma}} \tag{205}$$

$$< \infty \tag{206}$$

其中，式 (204) 成立是因为对于所有 x，$g(x) \geqslant g_{\min}$，且

$$f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} \leqslant \max(1, f(x)) \leqslant 1 + f(x) \tag{207}$$

（并且根据定义，$\int_{\mathcal{X}_f} f(x)\, dx = 1$）。类似地，

$$\mathbb{E}[(Y^*)^2] = \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{2}{\gamma}} g(x)^{-\frac{2}{\gamma}}\, dx \tag{208}$$

$$\leqslant \int_{\mathcal{X}_f} (1 + f(x)) g_{\min}^{-\frac{2}{\gamma}}\, dx \tag{209}$$

$$= (\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}_f) + 1) g_{\min}^{-\frac{2}{\gamma}} \tag{210}$$

$$< \infty \tag{211}$$

因此，当 $\gamma \geqslant 2$ 时，$\mathbb{E}[Y^*]$ 和 $\mathbb{E}[(Y^*)^2]$ 都是有限的（因为我们依赖于 $1 - \frac{2}{\gamma} \geqslant 0$）；但根据定义，$c_\zeta(x) \geqslant c^*(x)$，因此若 $\gamma \geqslant 2$，则有 $c_\zeta(x)^{-1} \leqslant c^*(x)^{-1}$，于是 $\mathbb{E}[Y] \leqslant \mathbb{E}[Y^*] < \infty$ 和 $\mathbb{E}[Y^2] \leqslant \mathbb{E}[(Y^*)^2] < \infty$，从而 $\mathbb{E}[Y]$ 和 $\mathbf{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 \leqslant \mathbb{E}[(Y^*)^2] - (1-\delta)^2\mathbb{E}[Y^*]^2$ 都是有限的。

当 $\gamma < 2$ 时，我们接下来利用由构造可知 $c_\zeta(x) \geqslant \alpha_1$ 这一事实，因此 $\mathbb{E}[c_\zeta(X)^{-1}] \leqslant \alpha_1^{-1}$，且 $\mathbf{Var}[c_\zeta(X)^{-1}] \leqslant \alpha_1^{-2}/4$（由于 $c_\zeta(X)^{-1} \in (0,\ \alpha_1^{-1}]$ 其方差至多为 $\alpha_1^{-2}/4$）。由此，证明完成。 □

回到主证明，我们首先处理步骤 (190)：

引理17. 对于任意 $\delta_1 > 0$，存在一个足够小的 $\lambda > 0$，使得（当 $X_i \overset{iid}{\sim} f$ 时），

$$\mathbb{P}\Big[\exists\, \pi \in \Pi^{\{X_i\}} \text{ s.t. } \sum_{i=1}^{n} \ell_{j(i)} < (1-\delta_1)\lambda n \mathbb{E}[Y]\Big] \leqslant e^{-\frac{n(1-\delta_1)\mathbb{E}[Y]^2\delta_1^2/8}{(1+\delta_1)\mathrm{Var}[Y]+(1-\delta_1)\mathbb{E}[Y]^2\delta_1/6}} \tag{212}$$

对所有充分大的 n。

证明。对于任意 $x \in \mathcal{X}_f$，令

$$\ell^*(x;\lambda) = \min_{\pi' \in \Pi}(\ell(\pi') : \ell^{\mathfrak{c}}(\pi') = \lambda, x \in \bar{\pi}') \tag{213}$$

即穿过 x的最短可能成本-λ 轨迹的长度。

回想一下，对于任意 $\eta > 0$，都存在某个 $\lambda_\eta^* > 0$，使得对于任意 $0 < \lambda \leqslant \lambda_\eta^*$，

$$\mathbb{P}_{X\sim f}[\exists\, \pi' \in \Pi : X \in \bar{\pi}',\ \ell^{\mathfrak{c}}(\pi') = \lambda \text{ and } \ell(\pi') < (1-\eta)\lambda/\mathfrak{c}_\zeta(X)] \leqslant \eta \tag{214}$$

我们将 $\mathcal{X}(\eta) \subseteq \mathcal{X}_f$ 定义为满足以下条件的区域

$$x \in \bar{\pi}',\ \ell^{\mathfrak{c}}(\pi') = \lambda \implies \ell(\pi') \geqslant (1-\eta)\lambda/\mathfrak{c}_\zeta(x) \tag{215}$$

对于 $\lambda \leqslant \lambda_\eta^*$，该条件不再成立，即

$$\mathcal{X}(\eta) = \{x \in \mathcal{X}_f : \exists\, \pi' \in \Pi : x \in \bar{\pi}',\ \ell^{\mathfrak{c}}(\pi') \leqslant \lambda_\eta^* \text{ and } \ell(\pi') < (1-\eta)\ell^{\mathfrak{c}}(\pi')/\mathfrak{c}_\zeta(x)\} \tag{216}$$

那么，如果我们有一些 $x \in \mathcal{X}_f$以及一条轨迹 π'，使得 $x \in \bar{\pi}'$且 $\ell^{\mathfrak{c}}(\pi') = \lambda < \lambda_\eta^*$，

$$\ell(\pi') \geqslant \begin{cases} (1-\eta)\lambda'/\mathfrak{c}_\zeta(x) & \text{if } x \notin \mathcal{X}(\eta) \\ 0 & \text{if } x \in \mathcal{X}(\eta) \end{cases} \tag{217}$$

因此，我们定义随机变量

$$Z_i := Z_i^{(\eta)} = \begin{cases} (1-2\eta)\lambda/\mathfrak{c}_\zeta(X_i) & \text{if } X_i \notin \mathcal{X}(\eta) \\ 0 & \text{if } X_i \in \mathcal{X}(\eta) \end{cases} \tag{218}$$

由于这些变量是独立同分布的（仅取决于独立同分布的 X_i），令 Z 表示其一般形式。根据（185），我们知道

$$\lambda' \geqslant \lambda - 1/k \geqslant (1-\beta n^{-(1-\frac{1}{\gamma})})\lambda \tag{219}$$

$$\implies (1-\eta)\lambda' \geqslant (1-2\eta)\lambda \quad \text{for} \quad n \geqslant (\beta/\eta)^{1+\frac{1}{\gamma-1}} \tag{220}$$

由于 $\ell_{j(i)}$ 是一条经过 X_i 的成本-λ' 轨迹，因此我们知道（固定 η），对于任意充分大的 n

$$\ell_{j(i)} \geqslant Z_i \text{ for all } i \tag{221}$$

此外，由于 $\mathbb{P}_{X\sim f}[X \in \mathcal{X}(\eta)] \leqslant \eta$，且因为 $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}_{X\sim f}[\,\mathscr{C}_\zeta(X)^{-1}]$ 和 $\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}_{X\sim f}[\,\mathscr{C}_\zeta(X)^{-2}]$ 是有限的，我们有

$$\lim_{\eta\to 0}\mathbb{E}[Z^{(\eta)}] = \lambda\mathbb{E}[Y] \quad \text{and} \quad \lim_{\eta\to 0}\mathrm{Var}[Z^{(\eta)}] = \lambda\mathrm{Var}[Y] \tag{222}$$

因此，对于任意 $\delta_1 > 0$，我们可以选取某个 $\eta > 0$，使得

$$\mathbb{E}[Z^{(\eta)}] \geqslant (1-\delta_1/2)\lambda\mathbb{E}[Y] \text{ and } \mathbb{E}[Z^{(\eta)}] \leqslant (1+\delta_1)\lambda\mathrm{Var}[Y] \tag{223}$$

固定这样的 η，我们应用命题 9（注意到 Z_i 均为非负独立同分布），以获得

$$\mathbb{P}\Big[\sum_{i=1}^n Z_i \leqslant (1-\delta_1/2)n\mathbb{E}[Z]\Big] \leqslant e^{-\frac{n\mathbb{E}[Z]^2(\delta_1/2)^2/2}{\mathrm{Var}[Z]+\mathbb{E}[Z]^2(\delta_1/2)/3}} \tag{224}$$

$$\implies \mathbb{P}\Big[\sum_{i=1}^n Z_i \leqslant (1-\delta_1)\lambda n\mathbb{E}[Y]\Big] \leqslant e^{-\frac{n(1-\delta_1)\mathbb{E}[Y]^2\delta_1^2/8}{(1+\delta_1)\mathrm{Var}[Y]+(1-\delta_1)\mathbb{E}[Y]^2\delta_1/6}} \tag{225}$$

$$\implies \mathbb{P}\Big[\sum_{i=1}^n \ell_{j(i)} \leqslant (1-\delta_1)\lambda n\mathbb{E}[Y]\Big] \leqslant e^{-\frac{n(1-\delta_1)\mathbb{E}[Y]^2\delta_1^2/8}{(1+\delta_1)\mathrm{Var}[Y]+(1-\delta_1)\mathbb{E}[Y]^2\delta_1/6}} \tag{226}$$

对所有 $\lambda < \lambda_\eta^*$ 均成立，因为我们可以应用

$$\mathbb{E}[Z]^2 \geqslant (1-\delta_1/2)^2\lambda\mathbb{E}[Y] \geqslant (1-\delta_1)\lambda\mathbb{E}[Y] \quad \text{and} \quad \mathrm{Var}[Z] \leqslant (1+\delta_1)\mathrm{Var}[Y] \tag{227}$$

（由于 $\mathrm{Var}[Z] > 0$ 项的缘故，分子和分母中的第一次代换会使分数变小，因此负分数的指数会变大。）□

但这意味着，给定 CBO 界并应用 (189)（以及使用 $1+\delta_1 < (1+\delta_1/2)^2$），以极高概率

$$\sum_{i=1}^n \ell_{j(i)} > (1-\delta_1/2)\lambda n\mathbb{E}[Y] \tag{228}$$

$$\implies \ell(\pi) \geqslant \frac{1-\delta_1/2}{\beta\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}}\sum_{i=1}^n \ell_{j(i)} > (1-\delta_1)\beta^{-1}n^{1-\frac{1}{\gamma}}\mathbb{E}[Y] \tag{229}$$

以极高概率。具体而言（考虑到 CBO 界成立的概率），我们有

$$\mathbb{P}\big[\mathrm{TSP}_\Pi(\{X_i\}) \geqslant (1-\delta_1)\beta^{-1}n^{1-\frac{1}{\gamma}}\mathbb{E}[Y]\big] \tag{230}$$

$$\geqslant 1 - e^{-\frac{4}{5}\frac{\log(b)\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}}{1-\delta_1/2}} - e^{-\frac{n(1-\delta_1/2)\mathbb{E}[Y]^2\delta_1^2/32}{(1+\delta_1/2)\mathrm{Var}[Y]+(1-\delta_1/2)\mathbb{E}[Y]^2\delta_1/12}} \tag{231}$$

接着，我们对最终项的指数做一些简化（忽略 n 的常数倍以及负号，使表达式更简洁）：

$$\frac{(1-\frac{\delta_1}{2})\mathbb{E}[Y]^2\frac{\delta_1^2}{32}}{(1+\frac{\delta_1}{2})\mathrm{Var}[Y]+(1-\frac{\delta_1}{2})\mathbb{E}[Y]^2\frac{\delta_1}{12}} = \frac{(1-\frac{\delta_1}{2})\mathbb{E}[Y]^2\frac{\delta_1^2}{32}}{(1+\frac{\delta_1}{2})(\mathbb{E}[Y^2]-\mathbb{E}[Y]^2)+(1-\frac{\delta_1}{2})\mathbb{E}[Y]^2\frac{\delta_1}{12}} \tag{232}$$

$$= \left(\frac{(1+\frac{\delta_1}{2})(\mathbb{E}[Y^2]-\mathbb{E}[Y]^2)+(1-\frac{\delta_1}{2})\mathbb{E}[Y]^2\frac{\delta_1}{12}}{(1-\frac{\delta_1}{2})\mathbb{E}[Y]^2\frac{\delta_1^2}{32}}\right)^{-1} \tag{233}$$

$$= \left(\frac{1+\frac{\delta_1}{2}}{(1-\frac{\delta_1}{2})\frac{\delta_1^2}{32}}\frac{\mathbb{E}[Y^2]}{\mathbb{E}[Y]^2}+\frac{(1-\frac{\delta_1}{2})\frac{\delta_1}{12}-(1+\frac{\delta_1}{2})}{(1-\frac{\delta_1}{2})\frac{\delta_1^2}{32}}\right)^{-1} \tag{234}$$

可以保持原样，但如果 $\mathbb{E}[Y^2]/\mathbb{E}[Y]^2$ 且 δ_1 非常小，我们可以将其写成仅保留最主要项的形式:

$$\left(\frac{1+\frac{\delta_1}{2}}{(1-\frac{\delta_1}{2})\frac{\delta_1^2}{32}}\frac{\mathbb{E}[Y^2]}{\mathbb{E}[Y]^2}+\frac{(1-\frac{\delta_1}{2})\frac{\delta_1}{12}-(1+\frac{\delta_1}{2})}{(1-\frac{\delta_1}{2})\frac{\delta_1^2}{32}}\right)^{-1} = \frac{\delta_1^2}{32(\mathbb{E}[Y^2]/\mathbb{E}[Y]^2-1)}+o(\delta_1^3) \tag{235}$$

$$= \frac{\delta_1^2}{32(\mathrm{Var}[Y]/\mathbb{E}[Y]^2)}+o(\delta_1^3) \tag{236}$$

然后，给定所需的近似因子 $1-\delta$，我们选择 $\delta=\delta_1/2$和正则化项$\zeta>0$ ，得到

$$\mathbb{E}[Y] \geqslant (1-\delta_2)\int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}}g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\,dx \tag{237}$$

其中 $\delta_2 = 1-(1-\delta)/(1-\delta/2),$, 即满足

$$1-\delta=(1-\delta/2)(1-\delta_2)=(1-\delta_1)(1-\delta_2) \tag{238}$$

因此，我们的界变为

$$(1-\delta_1)\beta^{-1}n^{1-\frac{1}{\gamma}}\mathbb{E}[Y] = (1-\delta)\beta^{-1}n^{1-\frac{1}{\gamma}}\int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}}g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\,dx \tag{239}$$

并将 $\delta_1=\delta/2$ 代入极高概率界可得

$$\mathbb{P}\left[\mathrm{TSP}_\Pi(\{X_i\}) \geqslant (1-\delta)\beta^{-1}n^{1-\frac{1}{\gamma}}\int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}}g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\,dx\right] \tag{240}$$

$$\geqslant 1-e^{-\frac{4}{5}\frac{\log(b)\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}}{1-\delta/4}}-e^{-\frac{n(1-\delta/4)\mathbb{E}[Y]^2\delta^2/128}{(1+\delta/4)\mathrm{Var}[Y]+(1-\delta/4)\mathbb{E}[Y]^2\delta/24}} \tag{241}$$

$$\geqslant 1-e^{-\frac{4}{5}\log(b)\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}}-e^{-\left(\frac{\delta^2}{128(\mathrm{Var}[Y]/\mathbb{E}[Y]^2)}+o(\delta^3)\right)n} \tag{242}$$

当 n 足够大时。当 $\gamma \geqslant 2$时，可以使其任意接近

$$\mathbb{P}\left[\mathrm{TSP}_{\Pi}(\{X_i\}) \geqslant (1-\delta)\beta^{-1}n^{1-\frac{1}{\gamma}}\int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}}g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\,dx\right] \tag{243}$$

$$\geqslant 1 - e^{-\frac{4}{5}\frac{\log(b)\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}}{1-\delta/2}} - e^{-\frac{n(1-\delta/2)\mathbb{E}[Y^*]^2\delta^2/32}{(1+\delta/2)\mathrm{Var}[Y^*]+(1-\delta/2)\mathbb{E}[Y^*]^2\delta/12}} \tag{244}$$

$$\geqslant 1 - e^{-\frac{4}{5}\log(b)\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}} - e^{-\left(\frac{\delta^2}{32(\mathrm{Var}[Y^*]/\mathbb{E}[Y^*]^2)}+o(\delta^3)\right)n} \tag{245}$$

其中， $\mathbb{E}[Y^*]$和 $\mathrm{Var}[Y^*]$分别为 $\int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}}g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\,dx$和 $\int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{2}{\gamma}}g(x)^{-\frac{2}{\gamma}}\,dx$，但其缺点是，这可能会增大 n 达到“充分大”所需的程度（具体而言，这是通过取 $\delta_1 \to \delta$ 和 $\delta_2 \to 0$ 进行补偿来实现的，这要求成本正则化因子 ζ 趋于 0）。当 n 充分大时，主导误差项始终是$_{-}e^{-\frac{4}{5}\log(b)\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}}$，因为另一个误差项的指数随 n缩放；但当 δ非常小时，该项开始占主导时对应的 n 值可能会极大。

最后，我们可以用以下最简单的形式表述：对于任意 $\delta > 0$，都存在某个充分小的 $\lambda > 0$ 和充分大的 $n^{(\delta)}$ ，使得对于所有 $n \geqslant n^{(\delta)}$,

$$\mathbb{P}\left[\mathrm{TSP}_{\Pi}(\{X_i\}) \geqslant (1-\delta)\beta^{-1}n^{1-\frac{1}{\gamma}}\int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}}g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\,dx\right] \geqslant 1-(1+\delta)e^{-\frac{4}{5}\frac{\log(b)\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}}{1-\delta/2}} \tag{246}$$

$$\geqslant 1-(1+\delta)e^{-\frac{4}{5}\log(b)\lambda n^{\frac{1}{\gamma}}} \tag{247}$$

但需注意，随着 $\delta \to 0$， $n^{(\delta)}$ 可能趋于 ∞。

VI. 对称系统的 DSTSP 上界

与 [18]，中一样，我们通过一种算法给出一个上界。该算法以极高概率生成一条轨迹 $\pi \in \Pi$，成功访问目标点 X_1、.....、 X_n，且轨迹长度至多为 $\Theta(n^{1-\frac{1}{\gamma}})$。然而，尽管 $\Theta(n^{1-\frac{1}{\gamma}})$ 的增长率普遍成立，更精确的增长率为

$$\mathrm{TSP}_{\Pi}(X_1,\ldots,X_n) \approx cn^{1-\frac{1}{\gamma}}\left(\int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}}g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\,dx\right) \quad wvhp \tag{248}$$

对于非对称系统，通常并不成立。因此，本节仅讨论 Π 具有对称性的情况。

A. 分层收集问题

然而，与一般的 DSTSP 算法不同，控制系统的对称性使得算法可以在移动到下一个瓦片之前，完全清除一个瓦片中的目标点，因为系统访问一个目标点后，可以返回锚点，再前往下一个目标点，依此类推。

对于任意 $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon^*$（其中 ε^* 为假设 8 中给定的值）、 $\boldsymbol{q}_0 \in \mathcal{Q}$和 $\delta > 0$，我们将以 $\boldsymbol{q}_0$ 为根、尺度为 ε_0的层次单元结构定义为无限根树 $T(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0)$，具体如下：

1) 节点表示可达集/单元，每个节点都有一个锚点 $\boldsymbol{q}$ 和半径 ε。我们将节点记为 $v_{(\boldsymbol{q},\varepsilon)}$，它表示可达集 $R_\varepsilon(\boldsymbol{q})$。

2) $v_{(\boldsymbol{q},\varepsilon)}$ 的子节点为

$$C(v_{(\boldsymbol{q},\varepsilon)}) = \{v_{(\boldsymbol{q}^{(1)},\varepsilon/2)}, \ldots, v_{(\boldsymbol{q}^{(b)},\varepsilon/2)}\} \quad \text{satisfying} \quad R_\varepsilon(\boldsymbol{q}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{b} R_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{q}^{(j)}) \tag{249}$$

如假设 8 所述。我们还假设不失一般性，

$$R_\varepsilon(\boldsymbol{q}) \cap R_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{q}^{(j)}) \neq \varnothing \quad \text{for all} \quad j \tag{250}$$

（如果不是这样，我们就从树中移除 $v_{(\boldsymbol{q}^{(j)},\varepsilon/2)}$。）

如果 $v' \in C(v)$ 我们称 $v = P(v')$（父节点）。

我们以通常方式定义树的层：根节点 $v_{(\boldsymbol{q}_0,\ \varepsilon_0)}$ 为第 0 层，其子节点为第 1 层，依此类推（请注意，第 k 层的所有节点都表示半径为 $\varepsilon_0/2^k$ 的可达集）。我们将这些层记作

$$T_k := \{v_{(\boldsymbol{q},\varepsilon)} \in T(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0) : \varepsilon = \varepsilon_0/2^k\}. \tag{251}$$

对于任意 $x \in \mathcal{X}$ 和 $v_{(\boldsymbol{q},\ \varepsilon)} \in T(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0)$，如果 $x \in R_\varepsilon(\boldsymbol{q})$，我们称之为“$x \in v_{(\boldsymbol{q},\ \varepsilon)}$”（这里稍微滥用了记号，将节点 v 与其表示的区域混为一谈）。

引理 18. 对于任意 $T(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0)$，以下结论成立：

i. $|T_k| \leqslant b^k$。

ii. 对于任意 $v_{(\boldsymbol{q},\ \varepsilon)} \in T(\boldsymbol{q}_0,\ \varepsilon_0)$ 以及任意 $v_{(\boldsymbol{q}',\ \varepsilon/2)} \in C(v_{(\boldsymbol{q},\varepsilon)})$（任意父节点-子节点对），

$$d_\Pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}') \leqslant 3\varepsilon/2\,. \tag{252}$$

iii. 对于任意 $v_{(\boldsymbol{q},\ \varepsilon)} \in T(\boldsymbol{q}_0,\ \varepsilon_0)$,

$$d_\Pi(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{q}) \leqslant 3\varepsilon_0 \tag{253}$$

证明。我们依次证明:

(i) $T_k = \bigcup_{v\in T_{k-1}} C(v)$ 和 $|C(v)| \leqslant b$，因此 $|T_k| \leqslant b|T_{k-1}|$；回溯至 $|T_0| = |\{\boldsymbol{q}_0\}| = 1$即可得到结果。

(ii) 注意到 $R_\varepsilon(\boldsymbol{q}) \cap R_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{q}') \neq \varnothing$（由 (252) 可知），令 $\boldsymbol{q}'' \in R_\varepsilon(\boldsymbol{q}) \cap R_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{q}')$。根据定义$d_\Pi(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{q}'') \leqslant \varepsilon$ 且 $d_\Pi(\boldsymbol{q}',\ \boldsymbol{q}'') \leqslant \varepsilon/2$（由于控制系统 Π 是对称的，d_Π 是一个度量），由三角不等式可得

$$d_\Pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}') \leqslant d_\Pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}'') + d_\Pi(\boldsymbol{q}', \boldsymbol{q}'') \leqslant 3\varepsilon/2 \tag{254}$$

(iii) 这可由 (ii) 得出：令 $v_{(\boldsymbol{q},\ \varepsilon)} \in T_k$，于是 $\varepsilon = \varepsilon_0/2^k$。这意味着，令 $\boldsymbol{q}_k := \boldsymbol{q}$，我们可以找到 $\boldsymbol{q}_1$、.....、$\boldsymbol{q}_{k-1}$，使得对所有 j =1、2、.....、k，均有 $v_j := v_{(\boldsymbol{q}_j,\ \varepsilon_0/2^j)} \in C(v_{(\boldsymbol{q}_{j-1},\varepsilon_0/2^{j-1})}) = C(v_{j-1})$（沿着从根节点 $v_0 = v_{(\boldsymbol{q}_0,\ \varepsilon_0)}$ 到 $v_{(\boldsymbol{q},\ \varepsilon)}$的路径追踪）。于是由 (ii) 得

$$d_\Pi(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{q}_k) \leqslant \sum_{j=1}^{k} d_\Pi(\boldsymbol{q}_{j-1}, \boldsymbol{q}_j) \leqslant \sum_{j=1}^{k} 3\varepsilon_0 2^{-j} \leqslant 3\varepsilon_0 \tag{255}$$

因此，我们就完成了。 □

设 n 目标点 $X_1, \ldots, X_n$ 位于 $R_{\varepsilon_0}(\boldsymbol{q}_0)$（本质上是这棵树所覆盖的区域）。每个目标点 $X_1, \ldots, X_n$ 至少包含在层 k 上的一个节点中（对每个 k）。具体而言，对于任意 $i \in [n], k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，令 $v_k(X_i) := v_{(\boldsymbol{q}_k(X_i),\varepsilon_0/2^k)} \in T(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0)$ 满足以下性质:

- $X_i \in v_k(X_i)$ 对于所有 i, k（即 $X_i \in R_{\varepsilon_0/2^k}(\boldsymbol{q}_k(X_i))$）；
- $v_0(X_i) = v_{(\boldsymbol{q}_0,\varepsilon_0)}$ 对于所有 i都是根节点;
- $v_k(X_i) \in C(v_{k-1}(X_i))$ 对于所有 $i \in [n]$ 和 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$。

注意，这意味着 $v_k(X_i) \in T_k$。由于 $T(\boldsymbol{q}_0$ 的结构，这样一组节点确实存在；具体而言，$C(v)$ 中各节点的可达集覆盖了 v 的可达集。

这表明一种 用于访问 X_1、.....、X_n 的“深度优先搜索”类型算法。对于任意 $v \in T_k$le t

$$n(v) := |\{i : v_k(X_i) = v\}| \tag{256}$$

即其第 k 层节点为 v 的目标点数量 X_i。我们沿着树 $T(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0)$ 从一个节点移动到另一个节点。如果我们将系统描述为位于节点 $v_{(\boldsymbol{q},\ \varepsilon_0/2^k)} \in T_k$, 则表示位于 $\boldsymbol{q}$, 此时我们可以做三件事:

1) 移动到其父节点 $P(v)$（最多耗时 $3\varepsilon_0 2^{-k}$）；2) 移动到一个子节点 $v' \in C(v)$（最多耗时 $3\varepsilon_0 2^{-(k+1)}$）；3) 访问某个目标点 $X_i \in v$ 后返回（由于 $X_i \in R_{\varepsilon_0/2^k}(\boldsymbol{q})$，最多耗时 $\varepsilon_0 2^{-(k-1)}$）。

这使我们能够将旅行商问题表述为一个抽象问题，类似于图上的经典旅行商问题（但略有不同）；由于上述所有距离上界都是 ε_0 的倍数，因此我们暂且忽略它（找到解后再将其乘回去）。

定义15。单元分支因子为 b 、缩放因子为 s 的分层收集问题（HCP），是定义在无限根树 $T = (V、E)$ 上的一个抽象问题，其中每个 $v \in V$ 都有 b 个子节点。我们定义：

1) $\gamma = \log_s(b)$，它定义了 s 与 b 之间的关系（在此问题所建模的分层单元结构中，将单元缩小 s 倍，会使覆盖同一区域所需的数量增加 b 倍）。

2) T 的根节点是 v_0；$v \in V$ 的子节点记作集合 $C(v)$，其父节点是 $P(v)$，与 v 相连的边记作 E_v。

3) 节点的层是其到 v_0 的距离，记作 $k(v)$（因此 $k(v_0) = 0$，并且对于所有$v \in V$和 $v' \in C(v)$，都有 $k(v') = k(v) + 1$）；层级为 k 的节点集合记作$L_k := \{v \in V : k(v) = k\}$。

4) 每条边 $e = (v, v') \in E$ 都有一个成本

$$w(e) = s^{-\min(k(v),k(v'))} \tag{257}$$

也就是说，如果 e 连接第 k 层与第 $k+1$ 层，那么它的成本为 s^{-k}。

最后，我们有 n 个目标点 $\tau_1, \ldots, \tau_n$；它们不是树上的节点，而是从根节点出发并沿树向下延伸的无限长路径。若 v 位于路径 τ_i上，我们称 $v \in \tau_i$；并且 $v_k(\tau_i)$是 τ_i的第k 层节点。我们假设，对于所有 $i, j \in [n]$，都有 $\tau_i \neq \tau_j$（也就是说，它们不代表同一条无限路径）。

该问题由一名玩家解决，该玩家在 T 周围移动并收集目标点。当位于 $v \in V$时，玩家会选择两个动作之一，并承担相应的成本：

1) 沿着某个 $e \in E_v$ 移动，成本为 $w(e)$（即向上移动的成本为 $s^{-(k-1)}$，向下移动的成本为 s^{-k}）；2) 收集一个目标点 τ_i，使得 $v \in \tau_i$，成本为 $2 \cdot s^{-k}$。

然后，从 v_0出发，目标是收集所有 n 目标点 τ_i 并返回 v_0，使总成本最小。¯我们将收集 $\tau_1, \ldots, \tau_n$ 的最小成本记为 HCP$(\tau_1, \ldots, \tau_n;\ b、\ s)$，而收集 n 个目标点的最大成本（即 $\tau_1, \ldots, \tau_n$ 由对手选择）记为

$$\mathrm{HCP}^*(n; \bar{b}, s) := \max_{\tau_1,\ldots,\tau_n} \mathrm{HCP}(\tau_1, \ldots, \tau_n; \bar{b}, s)\,. \tag{258}$$

HCP 中的目标点 $\tau_1, \ldots, \tau_n$ 表示对称动态旅行商问题中目标点 $X_1, \ldots, X_n$ 所属的单元（此处我们讨论的是 DTSP，而非 DSTSP，因为目前将目标点视为给定而非随机分布）。

注释 10. HCP 并不完全等同于原始的对称动态旅行商问题，因为

a. 所有成本均根据 DTSP 中相应成本的上界推导而来；b. DTSP 不要求从任何特定点出发或在任何特定点结束；并且（最重要的是）c. 它将可能的解限制为仅能遵循层次结构的解。

该问题探讨的一般权衡是：玩家沿树 T 向下移动时，收集目标点的成本会降低，但这一移动本身有成本，而且随着树不断分支，目标点可能变得更加分散（注意，所有目标点在根节点处都存在，但在那里收集它们的成本最高）。这与单元结构上的旅行商问题有如下对应关系：

命题 10. 设 $S\colon \mathcal{Q} \times (0, \varepsilon^*]$ 是一种层次单元结构，其单元分支因子为b，缩放因子为 s，效率因子为 α（见定义 7），并设 $X_1, \ldots, X_n$ 是$S(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0)$ 中的目标点。我们据此构造一棵无限有根树 $T = (V, E)$，每个节点有 b 个子节点，并建立如下对应关系：每个节点 $v \in V$ 对应一个单元 $S(\boldsymbol{q}, \varepsilon)$，其中 $\boldsymbol{q}, \varepsilon$ 取适当的值，使得

i. 根节点 v_0 对应于 $S(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0)$;

ii. 若 v 对应于 $S(\boldsymbol{q}, \varepsilon)$，则其子节点 $v_1, \ldots, v_{\bar{b}} \in C(v)$（顺序任意）分别对应集合$S(\boldsymbol{q}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{q}^{(\bar{b})}, \varepsilon/s)$，这些集合覆盖 $S(\boldsymbol{q}, \varepsilon)$（如定义 7 所述）。

设 $\boldsymbol{q}(v)$ 为由 v表示的单元的锚点，$\varepsilon(v)$ 为其半径。

每个对应于 X_i 的目标 τ_i 都是一条从根节点 v_0 出发、沿树向下的路径，并且始终选择表示包含 X_i 的 $S(\boldsymbol{q}$的节点 $\varepsilon)$（如果有多条这样的路径，则任意选择一条）。

因此，以下界成立：

$$\mathrm{TSP}_\Pi(X_1, \ldots, X_n) \leqslant \varepsilon_0 \mathrm{HCP}(\tau_1, \ldots, \tau_n; b, s) \leqslant \varepsilon_0 \mathrm{HCP}^*(n; b, s)\,. \tag{259}$$

证明。第一个不等式成立是因为 $\varepsilon(v) = \varepsilon_0 s^{-k(v)}$ （在每一层，尺度都除以 s）。因此，我们可以将层次收集问题实例的一个解（沿树移动并收集目标点）与旅行商问题上的等价解对应起来：在每一步中，如果我们在层次收集问题实例中位于 $v \in V$，那么在旅行商问题中就位于 $\boldsymbol{q}(v) \in \mathcal{Q}$。如果 $v' \in C(v)$，那么

$$d_\pi(\boldsymbol{q}(v), \boldsymbol{q}(v')) \leqslant \varepsilon(v) = \varepsilon_0 s^{-k(v)} \tag{260}$$

也就是说，从 $\boldsymbol{q}(v)$ 移动到 $\boldsymbol{q}(v')$ 所需的时间至多为 $\varepsilon_0 w(e)$，其中 $e = (v、\ v') \in E$。此外，

$$v \in \tau_i \implies X_i \in S(\boldsymbol{q}(v), \varepsilon(v)) \implies d_\pi(\boldsymbol{q}(v), X_i) \leqslant \varepsilon_0 s^{-k(v)} \tag{261}$$

因此，从 $\boldsymbol{q}(v)$ 访问 X_i 后再返回，所需时间至多为 $2\varepsilon_0 s^{-k(v)}$，换句话说，至多为 HCP 中对应成本的 ε_0 倍。因此，HCP 的每个解都对应一个长度至多为成本 ε_0 倍的旅行商问题轨迹，由此证明了第一个不等式。

¯第二个不等式则直接由 HCP 的定义$^*(n$得出；b、$s)$。 □

现在我们定义几个概念，以便讨论 HCP。

定义16。对于 $v \in T$，$n_v := |\{i : v \in \tau_i\}|$，也就是说，经过$v \in T$的目标点数量为 τ_i。

HCP 实例 τ_1，.....，τ_n的一个计划 θ，是从根节点 v_0出发执行的一系列动作，这些动作会收集所有目标点 τ_i 并返回 v_0。该计划的成本为 $c_{\text{cost}}(\theta)$，进入的顶点集合为 V_θ；若不存在满足以下条件的计划 θ'，则 θ 为最优计划：

i. $c_{\text{cost}}(\theta') < c_{\text{cost}}(\theta)$；或 ii. $c_{\text{cost}}(\theta') = c_{\text{cost}}(\theta)$ 和 $|V_{\theta'}| < |V_\theta|$。

“最优性”（尽可能少地进入顶点）的附加条件并不是一般情况下由 HCP 所表示的优化问题的真正特征，而是为了方便，尤其是为了引理20。现在我们考虑两个问题：(i) HCP 的最优算法是什么？；(ii) HCP$^*(n;\ b, s)$ 的上界是多少?

引理19。在任何最优计划中，每条边 $e \in E$ 要么被跨越 0 次，要么被跨越 2 次。

证明。设 $e = (v, v')$，其中 v 与根节点 v_0 位于 e 的同一侧，而 v' 位于另一侧。首先，由于玩家必须从 v_0出发并最终返回，因此每条边都会被经过偶数次

。然后，如果一条边被经过超过两次，那么超过两次的次数必定为偶数 $2m$ 次。设这些经过发生在步骤 $s_1 < s_2 < \cdots < s_{2m}$，并用 S_i 表示在 s_i 和s_{i+1} 之间采取的动作（而 S_0、S_{2m} 分别表示从 v_0 开始的 s_1 之前的动作，以及在 v_0结束的 s_{2m} 之后的动作）。注意，S_1、S_3、……、S_{2m-1} 都从 v' 出发并返回 v'，而 S_2、S_4、……、S_{2m-2} 都从 v出发并返回 v；最后，S_0 从 v_0 出发并在 v 结束，S_{2m} 从 v 出发并在 v_0结束。于是，我们可以构造一个修改后的解：先执行 S_0，穿过 e，执行 S_1、S_3、……、S_{2m-1}而不穿过 e，然后再穿过 e 返回，执行 S_2、S_4、……、S_{2m}，最后到达 v_0。由于成本与执行动作的步骤无关，S_0、S_1、……、S_{2m} 的成本都保持不变，且所有目标点都能收集到；但原本要经过 e 共 $2m$ 次，现在只需经过两次，因此降低了计划的成本。

□

引理20. 在最优计划中，当且仅当 $n_v \geqslant \frac{s}{s-1}$ 时，才会进入顶点 $v \neq v_0$。

证明。我们先证明，如果 $n_v < \frac{s}{s-1}$，那么最优计划绝不会进入 v。假设有一个计划 θ 会进入 v；它必定从 $P(v)$ 进入，令 $k = k(P(v))$。接着考虑对该计划的一种修改 θ'：它不进入 v，而是在 $P(v)$ 收集所有经过 v 的 τ_i。θ 与 θ' 之间唯一的区别是，θ 前往 v 并绕行其子树，在那里收集目标点；而 θ' 则在 $P(v)$ 收集所有目标点，因此我们只需比较这些动作的成本。于是：

- θ' 收集所有相关目标点的成本为 $2s^{-k}n_v$；
- 令 $k' \geqslant 1$ 表示比 k 深 θ 所经过的层级数，其成本至少为

$$2s^{-(k+k')}n_v + 2\sum_{j=0}^{k'-1} s^{-(k+j)} \tag{262}$$

（收集成本在层数最大时最小，以及到达层 $k+k'$ 并返回所需的最低移动成本）。

不过随后

$$n_v < \frac{s}{s-1} \implies n_v < 1 + \frac{n_v}{s} \tag{263}$$

然后我们可以将（262）合并，因为:

$$2s^{-(k+k')}n_v + 2\sum_{j=0}^{k'-1} s^{-(k+j)} = 2s^{-k}\Big(s^{-k'}n_v + \sum_{j=0}^{k'-1} s^{-j}\Big) \tag{264}$$

$$> 2s^{-k}\Big(s^{-(k'-1)}n_v + \sum_{j=0}^{k'-2} s^{-j}\Big) \tag{265}$$

$$> \ldots > 2s^{-k}n_v \tag{266}$$

其中每一步都取和式中的最后一项和 n_v 项，并应用 (263)。但这意味着 θ' 是一个成本低于 θ的计划，因此，任何进入 v 的计划都可以通过避开v 并更早收集目标点来改进。

现在假设 $n_v \geqslant \frac{s}{s-1}$，并设我们有一个不进入 n_v的计划 θ ，且令$k = k(v)$。令 v' 为 v的最近祖先节点，且 θ会进入该节点，并令 $k' = k(v) - k(v')$（计划 θ 比 v 高多少层）。那么，所有经过 v 的目标点 τ_i ，在 v' 收集最有效，且产生的成本为

$$2s^{-k(v')} = 2s^{-(k-k')} \tag{267}$$

或者，我们可以考虑计划 θ' ：不在 v' 收集，而是前往 v 并在那里收集。这样产生的成本为

$$2s^{-k(v)}n_v + 2\sum_{j=0}^{k'-1} s^{-(k(v')+j} = 2s^{-k}n_v + 2\sum_{j=0}^{k'-1} s^{-(k-k'+j)} \tag{268}$$

$$= 2s^{-k}\Big(n_v + \sum_{j=1}^{k'} s^{-j}\Big) \tag{269}$$

$$\leqslant 2s^{-k}s^{k'} = 2s^{-(k-k')} \tag{270}$$

其中，由于每一步都应用

$$n_v \geqslant \frac{s}{s-1} \implies s\,n_v \geqslant s + n_v \tag{271}$$

因此，与之前一样，修改后的计划 θ' 的成本至多与 θ 相同（且访问的顶点更多），所以 θ 不可能是最优的。 □

因此，我们得到了最优算法：假设 $n \geqslant \frac{s}{s-1}$ （否则，最优算法就是直接在根节点收集所有目标点），我们考虑顶点子集

$$V_{\geqslant \frac{s}{s-1}} := \Big\{v \in V : n_v \geqslant \frac{s}{s-1}\Big\} \tag{272}$$

该子集必须包含根节点，并且必须是连通的，因为

$$n_v \geqslant \frac{s}{s-1} \implies n_{P(v)} \geqslant n_v \geqslant \frac{s}{s-1}\,. \tag{273}$$

那么，最优计划就是对这个子图（它是一棵有限树）进行深度优先搜索遍历，每条边恰好经过两次，并在每个目标点所在的最深顶点 τ_i 处收集该目标点。

命题 11. 对任意 n, b, s，使得 $s \geqslant 2$ 且 $\gamma = \log_s(b) \geqslant 2$,

$$\mathrm{HCP}^*(n; \bar{b}, s) \leqslant 6sn^{1-\frac{1}{\gamma}} \tag{274}$$

证明. 考虑如下计划：巡回经过某一层级k^*的每个顶点；在每个 $v \in L_{k^*}$，收集所有目标点 $\tau_i \in v$。注意，此计划的成本是固定的：必须两次经过前 k^* 层级内的所有边，而收集每个目标点的成本为 $2s^{-k^*}$。

因此，移动的总成本为

$$2\sum_{k=0}^{k^*-1} \bar{b}(\bar{b}/s)^k = 2\bar{b}\frac{(\bar{b}/s)^{k^*}-1}{(\bar{b}/s)-1} = 2\frac{(\bar{b}/s)^{k^*}-1}{(1/s)-(1/\bar{b})} \tag{275}$$

因为层级 k 和 $k+1$ 之间有 $\bar{b}^{k+1}$ 条边，每条边的成本为 s^{-k}，且必须经过两次；收集的总成本为 $2ns^{-k^*}$，因为我们需要收集 n 个目标点，每个的成本为 $2s^{-k^*}$。

现在令 $k^* = \lceil \log_{\bar{b}} n \rceil - 1$。这是仍然必定存在至少两个目标点位于同一顶点的最深层。在这种情况下，我们有

$$(\bar{b}/s)^{k^*} \leqslant (\bar{b}/s)^{\log_{\bar{b}} n} = ns^{-\log_{\bar{b}} n} = n^{1-\frac{1}{\gamma}} \tag{276}$$

因为 $s^{-\log_{\bar{b}} n} = s^{-\log_{s^\gamma} n} = n^{-\frac{1}{\gamma}}$。此外，由于 $s \geqslant 2$和 $\gamma \geqslant 2$，我们知道 $\bar{b} \geqslant 2s$，因此 $(1/s) - (1/b) \geqslant 1/(2s)$，所以我们的移动成本有界于

$$2\frac{(\bar{b}/s)^{k^*}-1}{(1/s)-(1/\bar{b})} \leqslant 4sn^{1-\frac{1}{\gamma}}\,. \tag{277}$$

我们的收集成本另外为

$$2ns^{-k^*} \leqslant 2sns^{-\log_{\bar{b}} n} = 2sn^{1-\frac{1}{\gamma}}\,. \tag{278}$$

将这些相加，得到总成本 $\leqslant 6sn^{1-\frac{1}{\gamma}}$。 □

注 11. 尽管 HCP 提供的抽象有助于为对称动态旅行商问题提供上界和算法，但针对最常见的控制系统，还可以做出一些符合常理的改进，包括以下几点：

- 这种抽象忽略了一种可能性：在结构中相距很远的单元（也就是说，从一个单元到另一个单元需要沿树向上走很远，再向下走）在空间中可能彼此非常接近。这些“水平”连接使得穿过多个同一层的单元成为可能， k 而无需返回靠近根节点的较大单元。• 如注释 10 所述，可以忽略必须从根节点出发并返回根节点的要求（我们提出这一要求是为了使定理和证明更加简洁）。• 如果你有一个性能良好的点到点运动规划器（具体而言，是构型到构型的规划器），可以先使用 HCP 算法确定访问目标点的顺序，以及访问每个目标点时所处的构型， $\boldsymbol{q} \in [X_i]^{\mathrm{o}}$ 然后针对每一对相邻构型使用点到点运动规划器。 X_i 如果点到点运动规划器的计算效率足够高，你甚至可以利用单元结构确定每个目标点对应的构型（取决于目标点最终落入哪个单元，每个目标点必须处于某一组构型中，才能从该单元的锚点到达），然后在完全图上使用标准的旅行商问题近似算法，其中边权重为点到点距离。

B. 分层收集问题与旅行商问题

现在考虑以下相关问题：假设有 m 个箱，将按照某个概率向量 $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots\ldots, p_m)$, 独立同分布地向其中投掷 n 个球；令 n_j 表示投进第 j 个箱的球数，并注意其分布为 $\mathrm{Bin}(p_j, n)$。令

$$\nu := 1 - \frac{1}{\gamma} \in (0,1) \quad \text{and} \quad Y_j := n_j^{\nu} \text{ and } Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j \tag{279}$$

这以如下方式为对称 DSTSP 建立上界：我们用 m ε_0 尺度的层次单元结构 S_1、……、S_m 覆盖空间，其缩放因子为 s，单元分支因子为 $b = s^{\gamma}$；对每个 S_j，令 $S'_j \subseteq S_j$，使得 S'_1、……、S'_m 将 $\mathcal{X}_f$ 划分为若干部分（每个 $x \in \mathcal{X}_f$ 恰好属于一个 S'_j）。接着令 $p_j := \mathbb{P}_{X\sim f}[X \in S'_j]$；因此，每个目标点 $X_i \sim f$ 都落入其中一个 m 「箱」中

根据概率向量 $\boldsymbol{p}$，因此我们可以令 n_j 表示 $S'_j \subseteq S_j$ 中目标点的数量。于是，根据命题 11，访问 S'_j 中全部 n_j 个目标点所需的时间至多为

$$6s\varepsilon_0 n^{1-\frac{1}{\gamma}} = 6s\varepsilon_0 n_j^{\nu} = 6s\varepsilon_0 Y_j \tag{280}$$

因此，访问所有 n 目标点至多需要

$$C + \sum_{j=1}^{m} 6s\varepsilon_0 Y_j = C + 6s\varepsilon_0 Y \tag{281}$$

其中，C 是一个常数（以 n 为单位），取决于 S_j 的选择，表示系统巡回访问分层单元结构的根节点所需的时间。这是对对称 DSTSP 轨迹长度的一个上界，因为它表示层次化单元算法生成的路径长度（或其上界），但该算法不一定是最优的。

现在我们来证明 Y 的几个性质：

引理 21。 $\mathbb{E}[Y_j] \leqslant (p_j n)^{\nu}$ 和 $\mathbb{E}[Y] \leqslant \sum_{j=1}^{m} (p_j n)^{\nu} = \left(\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu}\right) n^{\nu}$

证明。注意，$\cdot^{\nu}$ 是一个凹函数，因为 $\nu \in (0、1)$，并且 $\mathbb{E}[n_j] = p_j n$。因此，根据 Jensen 不等式，

$$\mathbb{E}[Y_j] = \mathbb{E}[n_j^{\nu}] \leqslant (\mathbb{E}[n_j])^{\nu} = (p_j n)^{\nu} \tag{282}$$

将 $\mathbb{E}[Y]$ 的结果求和，即可得到 $\mathbb{E}[Y_j]$。 □

根据上述逻辑（以及对 m 和 $\boldsymbol{p}$ 作为 $\varepsilon_0 \to 0$ 的分析），仅此便可得到对称 DSTSP 中期望轨迹长度期望值的一个上界。不过，我们还希望得到集中界。

我们将 Y 视为 Doob鞅：对于任意 $i = 0, 1, \ldots, n$，令 $Z_i \in [m]$ 为球 i 落入的箱，并按索引顺序逐个放置它们（即先确定 Z_1，再确定 Z_2，依此类推）。然后定义我们的（中心化）Doob鞅：

$$_mY_j(i) = \mathbb{E}[Y_j \mid Z_1, \ldots\ldots, Z_i] - \mathbb{E}[Y_j] \text{和 } Y(i) = \sum_{j=1} Y_j(i) = \mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots\ldots, Z_i] - \mathbb{E}[Y] \tag{283}$$

接着注意，根据定义，$Y_j(0) = 0$ 和 $Y_j(n) = Y_j - \mathbb{E}[Y_j]$（$Y$也类似），并且$Y(i)$ 是关于 i 的鞅，即

$$\mathbb{E}[Y(i) \mid Y(i-1)] = Y(i-1) \tag{284}$$

（众所周知，这是由某个过程的条件期望构造而来，该过程称为 Doob鞅）。为方便起见，我们还用 $n_j(i)$ 表示在 Z_i 已确定之后，箱 j 中球的数量，即

$$n_j(i) = \sum_{i'=1}^{i} \mathbf{1}\{Z_{i'} = j\}\,. \tag{285}$$

接下来，我们给出几个关于 $Y(i)$ 的结果：

引理 22. $|Y(i) - Y(i-1)| \leqslant 1$。

证明。首先考虑将 Z_i 改为 Z_i' 时会发生什么。令 $Z^{(n)} = (Z_1, \ldots, Z_n)$，并令 $Z_{-i}^{(n)}(Z_i') = Z_1, \ldots, Z_{i-1}, Z_i', Z_{i+1}, Z_n$，也就是说，令 $Z^{(n)}$，其中用 Z_i 替换 Z_i。然后，令 $Y(Z^{(n)})$ 为给定 $Z_1, \ldots, Z_n$ 时 Y 的值。为简便起见，令 $Z_i = j$ 且 $Z_i' = j'$。

$$|Y(Z^{(n)}) - Y(Z_{-i}^{(n)}(Z_i'))| = |n_j^\nu + n_{j'}^\nu - (n_j - 1)^\nu - (n_{j'} + 1)^\nu| \tag{286}$$

$$= |(n_j^\nu - (n_j - 1)^\nu) - ((n_{j'} + 1)^\nu - n_{j'}^\nu)| \leqslant 1 \tag{287}$$

这两个差值都属于 $[0, 1]$，因此它们的差属于 $[-1, 1]$。因此，改变任意 Z_i 的值最多只会使最终值改变 1（向任一方向）。于是，对于任意 Z_i, Z_i',

$$|\mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_i] - \mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_{i-1}, Z_i']| = \mathbb{E}_{Z_{i+1}, \ldots, Z_n}[|Y(Z^{(n)}) - Y(Z_{-i}^{(n)}(Z_i'))|] \tag{288}$$

$$\leqslant 1 \tag{289}$$

但接下来我们得到

$$|Y(i) - Y(i-1)| = |\mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_i] - \mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_{i-1}]| \tag{290}$$

$$= |\mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_i] - \mathbb{E}_{Z_i'}\big[\mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_{i-1}, Z_i']\big]| \tag{291}$$

$$\leqslant \mathbb{E}_{Z_i'}\big[|\mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_i] - \mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_{i-1}, Z_i']|\big] \tag{292}$$

$$\leqslant 1 \tag{293}$$

□

因此，我们可以立即应用 Azuma-Hoeffding不等式 得到一个界；遗憾的是，要获得良好的结果，必须满足 $\gamma > 2$（即 $\nu = 1 - \frac{1}{\gamma} > \frac{1}{2}$）。不过，我们先给出结果，之后再对其加以改进：

引理 23. 根据上述定义，

$$\mathbb{E}\left[Y(n) \geqslant n^{\nu}\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu}\right] \leqslant e^{-\frac{n^{2\nu}(\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu})^2}{2n}} = e^{-\frac{1}{2}n^{2\nu-1}(\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu})^2} \tag{294}$$

此外，$\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu} \geqslant 1$，因此我们甚至可以找到一个与 $\boldsymbol{p} = (p_1、\ldots\ldots、p_m)$ 无关的界：

$$\mathbb{E}\left[Y(n) \geqslant n^{\nu}\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu}\right] \leqslant e^{-\frac{1}{2}n^{2\nu-1}} \tag{295}$$

证明。这是 Azuma-Hoeffding 不等式的直接应用，其中有界差分如引理 22 所示。

我们知道 $\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu} \geqslant 1$，因为 $\boldsymbol{p}$ 是一个概率向量，因此可以表示为基向量 $\mathbf{1}_1、\ldots\ldots、\mathbf{1}_m$ 的凸组合。接着注意到函数 $\theta(\boldsymbol{p}) = \sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu}$ 是凹函数，并且对所有 j 都有 $\theta(\mathbf{1}_j) = 1$，因此根据 Jensen 不等式

$$\theta(\boldsymbol{p}) \geqslant \sum_{j=1}^{m} p_j \theta(\mathbf{1}_j) = 1 \tag{296}$$

从而我们得到了所需的结果。 □

命题 12。给定 $Y = \sum_{j=1}^{m} n_j^{\nu}$，我们有

$$\mathbb{P}\left[Y \geqslant 2n^{\nu}\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu}\right] \leqslant e^{-\frac{1}{2}n^{2\nu-1}(\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu})^2} \tag{297}$$

这意味着存在以下与 $\boldsymbol{p}$ 无关的界：

$$\mathbb{P}\left[Y \geqslant 2n^{\nu}\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu}\right] \leqslant e^{-\frac{1}{2}n^{2\nu-1}} \tag{298}$$

证明。根据中心化鞅 $Y(i)$ 的定义，我们得到 $Y(n) = Y - \mathbb{E}[Y]$，从而有：

$$Y \geqslant 2n^{\nu}\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu} \implies Y - n^{\nu}\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu} \geqslant n^{\nu}\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu} \tag{299}$$

$$\implies Y - \mathbb{E}[Y] \geqslant n^{\nu}\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu} \tag{300}$$

$$\implies Y(n) \geqslant n^{\nu}\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu} \tag{301}$$

这又意味着，根据引理 23

$$\mathbb{P}\left[Y \geqslant 2n^{\nu}\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu}\right] \leqslant \mathbb{P}\left[Y(n) \geqslant n^{\nu}\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu}\right] \leqslant e^{-\frac{1}{2}n^{2\nu-1}(\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu})^2} \tag{302}$$

第二个与 $\boldsymbol{p}$ 无关的界可由引理 23 的证明同理得出。 □

由于指数中有 $-\frac{1}{2}n^{2\nu-1}$，当 $\nu > 1/2$, 时，这是一个极高概率的集中界；而这恰好在且仅在 $\gamma > 2$ 时成立。当 $\gamma \leqslant 2$ 时，这个界并非高概率界（更不用说极高概率界了），因此我们需要更精确的方法。

我们损失了一部分潜在收益的地方之一是引理 22：虽然这是在所有情况下都成立的最佳单一常数界，但它忽略了这样一个事实：当 i 与 n 相距不近时，对于 $i < i'$，仍有许多 $Z_{i'}$ 需要分配；这又意味着每个箱中仍有一定数量的球预期会被加入，因此现在向任意给定的箱中加入一个球，不会使 $\mathbb{E}[n_j^\nu \mid Z_1$、.....、$Z_i]$ 有太大变化（因为随着 k 增大， k^ν 与 $(k+1)^\nu$ 之间的差距会越来越小）。首先，我们需要以下引理：

引理 24. 设 $W \sim \mathsf{Bin}(p, n)$ 对于某个 $p \in (0,1)$ 和 n，且 $\nu \in (0,1)$；则

$$\mathbb{E}[(W+1)^\nu] - \mathbb{E}[W^\nu] \leqslant e^{-\frac{3}{28}np} + 2\nu(np)^{\nu-1} \tag{303}$$

证明. 由于 $\nu \in (0,1)$, $\cdot^\nu$ 是凹函数，因此一阶近似是一个上界，从而得到

$$(W+1)^\nu - W^\nu \leqslant W^\nu + \nu W^{\nu-1} - W^\nu = \nu W^{\nu-1} \tag{304}$$

虽然这对 $W > 0$适用，但对于 $W = 0$的情况必须谨慎，因为指数$\nu - 1$ 为负；然而，当 $W = 0$时，我们有 $(W+1)^\nu - W^\nu = 1$，因此得到以下界

$$(W+1)^\nu - W^\nu \leqslant \min(\nu W^{\nu-1}, 1) \tag{305}$$

因为对于 $W \geqslant 1$，我们有 $\nu W^{\nu-1} \leqslant \nu < 1$。

接下来注意以下几点：对于 $W \leqslant np/2,$，我们有 $(W+1)^\nu - W^\nu \leqslant 1$；对于 $W > np/2,$，我们有 $(W+1)^\nu - W^\nu \leqslant \nu(np/2)^{\nu-1}$。因此，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(W+1)^\nu] - \mathbb{E}[W^\nu] &= \mathbb{E}[(W+1)^\nu - W^\nu] && (306)\\
&\leqslant \mathbb{P}[W \leqslant np/2] + \mathbb{P}[W > np/2](\nu(np/2)^{\nu-1}) && (307)\\
&\leqslant \mathbb{P}[W \leqslant np/2] + 2\nu(np)^{\nu-1} && (308)
\end{aligned}$$

接下来，我们可以使用伯恩斯坦不等式对 $\mathbb{P}[W \leqslant np/2]$，进行界定，因为 W 是一个二项随机变量，因而是独立同分布伯努利随机变量之和。具体而言，我们令这些独立同分布的伯努利随机变量为 W_i （$i \in [n]$），并令

$$W_i' = p - W_i \quad \text{(which also means } W_i = p - W_i') \tag{309}$$

它们的均值为零，并且始终满足 $|W_i'| \leqslant 1$。因此，

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = np - \sum_{i=1}^{n} W_i' \tag{310}$$

即 $W \leqslant np/2 \iff \sum_{i=1}^{n} W_i' \geqslant np/2$。因此，由于 W_i' 的方差为 $p(1-p)$，我们有

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n} W_i' \geqslant \frac{np}{2}\right] \leqslant e^{-\frac{(np)^2/8}{np(1-p)+np/6}} = e^{-\frac{np/8}{(1-p)+1/6}} \leqslant e^{-\frac{3}{28}np} \tag{311}$$

因此，我们可以将这些结果综合起来，得到

$$\mathbb{E}[(W+1)^\nu] - \mathbb{E}[W^\nu] \leqslant e^{-\frac{3}{28}np} + 2\nu(np)^{\nu-1} \tag{312}$$

□

引理25。对于上文定义的鞅，不失一般性，设 $\boldsymbol{p}$ 已排序，即 $0 < p_1 \leqslant \cdots \leqslant p_m$（可以忽略任何值为 0 的项，并将 $\boldsymbol{p}$ 缩减）。那么

$$|Y(i) - Y(i-1)| \leqslant \min(e^{-\frac{3}{28}(n-i)p_1} + 2\nu((n-i)p_1)^{\nu-1}, 1) \tag{313}$$

证明。我们考虑即将确定 Z_i 的情形，即已知 Z_1、……、Z_{i-1}，而 Z_{i+1}、……、Z_n 尚未确定。$\mathbb{E}[Y \mid Z_1$、……、$Z_{i-1}]$ 与 $\mathbb{E}[Y \mid Z_1$、……、$Z_i]$ 最多能相差多少？注意到

$$\left|\mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_i] - \mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_{i-1}]\right| \tag{314}$$

$$= \left|\mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_i] - \mathbb{E}_{Z \sim \boldsymbol{p}}[\mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_{i-1}, Z]]\right| \tag{315}$$

$$\leqslant \max_{Z \in [m]} \mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_{i-1}, Z] - \min_{Z' \in [m]} \mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_{i-1}, Z'] \tag{316}$$

（注意，我们处理的是未中心化的 Y，但中心化会从两边减去 $\mathbb{E}[Y]$，因此可以忽略）。也就是说，给定 $Z_1, \ldots, Z_{i-1}$ 后，我们可以通过计算使 $Y(i)$ 最大的 Z_i 选择与使 $Y(i)$ 最小的 Z_i 选择之间的差，来界定 $|Y(i) - Y(i-1)|$。由于 $Z_1, \ldots, Z_{i-1}$ 未知，我们还必须对它们取最大值，即我们要界定

$$\max_{Z_1, \ldots, Z_{i-1}} \left(\max_{Z \in [m]} \mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_{i-1}, Z] - \min_{Z' \in [m]} \mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_{i-1}, Z']\right) \tag{317}$$

我们现在进一步分解：设定 $Z = j$ 确实会使最终的 n_j 增加 1，而 $Z' = j'$ 对 $n_{j'}$ 也有同样的作用；其余的 $j'' \neq j, j'$ 不受影响，并会相互抵消。还要注意， $Z_1, \ldots, Z_{i-1}$ 只有在影响 $n_1(i-1), \ldots, n_m(i-1)$ 时才有意义，因此我们将改为以这些量为条件。于是，令 $W_j \sim$ 箱$(p_j, n-i)$，我们有：

$$\max_{Z_1,\ldots,Z_{i-1}} \left(\max_{Z\in[m]} \mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_{i-1}, Z] - \min_{Z'\in[m]} \mathbb{E}[Y \mid Z_1, \ldots, Z_{i-1}, Z']\right) \tag{318}$$

$$= \max_{n_j(i), n_{j'}(i)} \left(\mathbb{E}[(W_j + n_j(i) + 1)^\nu] - \mathbb{E}[(W_j + n_j(n))^\nu]\right. \tag{319}$$

$$\left. - \left(\mathbb{E}[(W_{j'} + n_{j'}(i) + 1)^\nu] - \mathbb{E}[(W_{j'} + n_{j'}(n))^\nu]\right)\right) \tag{320}$$

$$\leqslant \max_{n_j(i)} \mathbb{E}[(W_j + n_j(i) + 1)^\nu] - \mathbb{E}[(W_j + n_j(n))^\nu] \tag{321}$$

$$= \max_j \mathbb{E}[(W_j + 1)^\nu] - \mathbb{E}[W_j^\nu] \tag{322}$$

其中，期望是针对尚未确定的 $n-i$ 值 Z_{i+1}、……、Z_n 而言的。这成立是因为 $(a_1+1)^\nu - a_1^\nu \geqslant (a_2+1)^\nu - a_2^\nu$ 若 $a_1 \leqslant a_2$；这也意味着，当选择 j 使得 p_j 最小化时，该值达到最大，也就是说，我们使用 p_1。

于是，根据引理 24（以及先前推导出的 1 的上界），结论得证，其中$n-i$ 是尚待确定的 $Z_{i'}$ 的数量。 □

现在，我们针对新的差值界调整 Azuma-Hoeffding不等式的论证：

命题 13. 给定上述定义，令 $\nu \leqslant 2/3$，并且（不失一般性地）令 p_1 为 $\boldsymbol{p} = (p_1$、……、$p_m)$中的最小非零值。那么，对于所有

$$n \geqslant \frac{280}{3} \log(1/\nu) p_1^{-1} \tag{323}$$

我们有以下集中界：

$$\mathbb{E}\left[Y(n) \geqslant 2n^\nu \sum_{j=1}^m p_j^\nu\right] \leqslant \begin{cases} e^{-\frac{p_1 n^{2\nu} (\sum_{j=1}^m p_j^\nu)^2}{13 + \frac{8}{2\nu-1} n^{2\nu-1}}} & \textit{for } \nu \in (1/2, 2/3) \\ e^{-\frac{(2/9) p_1 n (\sum_{j=1}^m p_j^{1/2})^2}{127 - \log(1/p_1) + \log(n)}} & \textit{for } \nu = 1/2 \\ e^{-\frac{p_1 n^{2\nu} (\sum_{j=1}^m p_j^\nu)^2}{\frac{560}{3}\log(1/\nu) + 4 + 18\nu^2 \frac{1}{1-2\nu} (\frac{280}{3}\log(1/\nu))^{2\nu-1}}} & \textit{for } \nu \in (0, 1/2) \end{cases} \tag{324}$$

与之前一样， $\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu} \geqslant 1$，因此我们可以将其去掉，而界仍然有效（尽管可能稍微宽松一些）。用渐近符号表示（但要注意，根据上述结果，我们有确定的常数），即

$$\mathbb{E}\left[Y(n) \geqslant n^{\nu} \sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu}\right] \leqslant \begin{cases} e^{-\Theta(p_1 n(2\nu-1)(\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu})^2)} & \textit{for } \nu \in (1/2, 2/3) \\ e^{-\Theta(p_1 (n/\log(n))(\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu})^2)} & \textit{for } \nu = 1/2 \\ e^{-\Theta(p_1 n^{2\nu}(\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu})^2(\log(1/\nu)+(1-2\nu)^{-1})^{-1})} & \textit{for } \nu \in (0, 1/2) \end{cases} \tag{325}$$

证明。令

$$c_i = \min(e^{-\frac{3}{28}(n-i)p_1} + 2\nu((n-i)p_1)^{\nu-1}, 1) \tag{326}$$

现在我们希望计算 $\sum_{i=1}^{n} c_i^2$。首先定义

$$a_i = c_{n-i} = \min(e^{-\frac{3}{28}ip_1} + 2\nu(i\,p_1)^{\nu-1}, 1) \tag{327}$$

其中 i 现在从 0 取到 $n-1$。于是我们知道

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \tag{328}$$

令 $z = ip_1$；那么我们希望比较 $e^{-\frac{3}{28}z}$ 与 $2\nu z^{\nu-1}$。特别地，我们希望找到充分大的 z^*，使得

$$e^{-\frac{3}{28}z} \leqslant 2\nu z^{\nu-1} \text{ for all } z \geqslant z^* \tag{329}$$

我们计算：

$$e^{-\frac{3}{28}z} \leqslant 2\nu z^{\nu-1} \tag{330}$$

$$\iff -\frac{3}{28}z \leqslant (\nu-1)\log(z) + \log(2\nu) \tag{331}$$

$$\iff \frac{3}{28}z \geqslant (1-\nu)\log(z) - \log(2\nu) \tag{332}$$

然后注意到，如果 $z \geqslant \frac{28}{3}\frac{1}{1-\nu}$，

$$\frac{d}{dz}\frac{3}{28}z = \frac{3}{28} \geqslant (1-\nu)\frac{1}{z} = \frac{d}{dz}(1-\nu)\log(z) - \log(2\nu) \tag{333}$$

因此，如果 $z^* \geqslant \frac{28}{3}\frac{1}{1-\nu}$ 并且

$$\frac{3}{28}z^* \geqslant (1-\nu)\log(z^*) - \log(2\nu) \tag{334}$$

那么我们可以得出结论：对于所有 $z \geqslant z^*$,

$$e^{-\frac{3}{28}z} \leqslant 2\nu z^{\nu-1}\,. \tag{335}$$

注意到 $1 < \frac{28}{3}\frac{1}{1-\nu} \leqslant 28$ （因为 $\nu \leqslant 2/3$），令 $z^* = \frac{280}{3}\log(1/\nu)$。于是

$$\frac{3}{28}z^* = 10\log(1/\nu) \geqslant (1-\nu)\log\left(\frac{280}{3}\log(1/\nu)\right) - \log(2\nu) \tag{336}$$

在此范围内，对于 $\nu \in (0、\ 2/3)$，和 $z^* \geqslant 28$，该结论同样成立。这意味着，对于所有 $z \geqslant z^*$（以及 $\nu \in (0、\ 2/3)$），我们有

$$e^{-\frac{3}{28}z} \leqslant 2\nu z^{\nu-1}\,. \tag{337}$$

于是，回想起 $z = ip_1$，对于所有 $i \geqslant z^*/p_1 = \frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1}$,，我们有

$$e^{-\frac{3}{28}ip_1} \leqslant 2\nu(i\,p_1)^{\nu-1} \implies e^{-\frac{3}{28}ip_1} + 2\nu(i\,p_1)^{\nu-1} \leqslant 3\nu(i\,p_1)^{\nu-1} \tag{338}$$

因此，我们得到如下结论:

$$a_i = \min(e^{-\frac{3}{28}ip_1} + 2\nu(i\,p_1)^{\nu-1}, 1) \leqslant \begin{cases} 1 & \text{if } i \leqslant \frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1} \\ 3\nu(i\,p_1)^{\nu-1} & \text{if } i \geqslant \frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1} \end{cases} \tag{339}$$

现在假设 $n \geqslant \frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1}$。在这种情况下,

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 \leqslant \frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1} + \sum_{i=\frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1}}^{n-1} 9\nu^2(i\,p_1)^{2\nu-2} \tag{340}$$

$$\leqslant \frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1} + 2 + 9\nu^2 p_1^{2\nu-2}\int_{\frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1}}^{n-1} t^{2\nu-2}\,dt \tag{341}$$

现在需要根据 $\nu > 1/2, \nu = 1/2,$ 和 $\nu < 1/2$ 对其进行分类。由此得到：对于 $\nu \in (1/2, 2/3)$,

$$9\nu^2 p_1^{2\nu-2}\int_{\frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1}}^{n-1} t^{2\nu-2}\,dt \tag{342}$$

$$= 9\nu^2 p_1^{2\nu-2}\frac{1}{2\nu-1}\left((n-1)^{2\nu-1} - \left(\frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1}\right)^{2\nu-1}\right) \tag{343}$$

$$\leqslant 4p_1^{-1}\frac{1}{2\nu-1}\left(n^{2\nu-1} - \left(\frac{280}{3}\log(1/\nu)\right)^{2\nu-1}\right) \tag{344}$$

因此我们可以得出结论（再次，对于 $\nu \in (1/2, 2/3)$）

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 \leqslant p_1^{-1}\left(\frac{280}{3}\log(1/\nu) - \frac{4}{2\nu-1}\left(\frac{280}{3}\log(1/\nu)\right)^{2\nu-1}\right) + 2 + \frac{4}{2\nu-1}p_1^{-1}n^{2\nu-1} \tag{345}$$

$$= O(p_1^{-1}\log(1/\nu) + 1) + O(p_1^{-1}(2\nu-1)^{-1})n^{2\nu-1} \tag{346}$$

那么，对于 $\nu = 1/2,$ ，我们有

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 \leqslant \frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1} + 2 + 9\nu^2 p_1^{2\nu-2}\int_{\frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1}}^{n-1} t^{2\nu-2}\,dt \tag{347}$$

$$= \frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1} + 2 + (9/4)p_1^{-1}\left(\log(n-1) - \log\left(\frac{280}{3}\log(2)\right) + \log\frac{3}{(1/p_1)}\right) \tag{348}$$

$$\leqslant \left(\frac{280}{3}\log(2) - (9/4)\log\left(\frac{280}{3}\log(2)\right)\right)p_1^{-1} + 2 + (9/4)p_1^{-1}\big(\log(n) - \log(1/p_1)\big) \tag{349}$$

$$< (56 - (9/4)\log(1/p_1))p_1^{-1} + 2 + (9/4)p_1^{-1}\log(n) \tag{350}$$

最后，对于 $\nu \in (0,\ 1/2),$ ，我们有

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 \leqslant \frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1} + 2 + 9\nu^2 p_1^{2\nu-2}\int_{\frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1}}^{n-1} t^{2\nu-2}\,dt \tag{351}$$

$$\leqslant \frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1} + 2 + 9\nu^2 p_1^{2\nu-2}\int_{\frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1}}^{\infty} t^{2\nu-2}\,dt \tag{352}$$

$$= \frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1} + 2 + 9\nu^2 p_1^{2\nu-2}\frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{280}{3}\log(1/\nu)p_1^{-1}\right)^{2\nu-1} \tag{353}$$

$$= \left(\frac{280}{3}\log(1/\nu) + 2 + 9\nu^2\frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{280}{3}\log(1/\nu)\right)^{2\nu-1}\right)p_1^{-1} \tag{354}$$

（注意，这在 n中是常数）。

然后我们将其代入 Azuma-Hoeffding不等式（请记住， $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2$。我们得到：对于$\nu \in (1/2, 2/3)$,

$$\mathbb{E}\left[Y(n) \geqslant 2n^\nu \sum_{j=1}^{m} p_j^\nu\right] \leqslant e^{-\frac{n^{2\nu}(\sum_{j=1}^m p_j^\nu)^2}{2\sum_{i=1}^n a_i^2}} \tag{355}$$

$$\leqslant e^{-\frac{n^{2\nu}(\sum_{j=1}^m p_j^\nu)^2}{2p_1^{-1}(\frac{280}{3}\log(1/\nu) - \frac{4}{2\nu-1}(\frac{280}{3}\log(1/\nu))^{2\nu-1}) + 4 + \frac{8}{2\nu-1}p_1^{-1}n^{2\nu-1}}} \tag{356}$$

$$= e^{-\frac{p_1 n^{2\nu}(\sum_{j=1}^m p_j^\nu)^2}{2(\frac{280}{3}\log(1/\nu) - \frac{4}{2\nu-1}(\frac{280}{3}\log(1/\nu))^{2\nu-1}) + 4p_1 + \frac{8}{2\nu-1}n^{2\nu-1}}} \tag{357}$$

$$\leqslant e^{-\frac{p_1 n^{2\nu}(\sum_{j=1}^m p_j^\nu)^2}{9 + 4p_1 + \frac{8}{2\nu-1}n^{2\nu-1}}} \tag{358}$$

$$\leqslant e^{-\frac{p_1 n^{2\nu}(\sum_{j=1}^m p_j^\nu)^2}{13 + \frac{8}{2\nu-1}n^{2\nu-1}}} \tag{359}$$

$$= e^{-\Theta(p_1 n(2\nu-1)(\sum_{j=1}^m p_j^\nu)^2)} \tag{360}$$

其中，倒数第二个步骤只是通过数值计算取

$$\frac{280}{3}\log(1/\nu) - \frac{4}{2\nu-1}\left(\frac{280}{3}\log(1/\nu)\right)^{2\nu-1} \tag{361}$$

在域 $\nu \in (1/2, 2/3)$ 上的最大值。

对于 $\nu = 1/2,$ ，我们有

$$\mathbb{E}\left[Y(n) \geqslant 2n^{1/2}\sum_{j=1}^{m} p_j^{1/2}\right] \leqslant e^{-\frac{n(\sum_{j=1}^{m} p_j^{1/2})^2}{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} \tag{362}$$

$$\leqslant e^{-\frac{n(\sum_{j=1}^{m} p_j^{1/2})^2}{2((56-(9/4)\log(1/p_1))p_1^{-1}+2+(9/4)p_1^{-1}\log(n))}} \tag{363}$$

$$= e^{-\frac{p_1 n(\sum_{j=1}^{m} p_j^{1/2})^2}{(28-(9/2)\log(1/p_1))+4p_1+(9/2)\log(n)}} \tag{364}$$

$$\leqslant e^{-\frac{(2/9)p_1 n(\sum_{j=1}^{m} p_j^{1/2})^2}{(126-\log(1/p_1))+p_1+\log(n)}} \tag{365}$$

$$\leqslant e^{-\frac{(2/9)p_1 n(\sum_{j=1}^{m} p_j^{1/2})^2}{127-\log(1/p_1)+\log(n)}} \tag{366}$$

$$= e^{-\Theta(p_1(n/\log(n))(\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu})^2)} \tag{367}$$

最后，对于 $\nu \in (0,\ 1/2)$ ，我们有

$$\mathbb{E}\left[Y(n) \geqslant 2n^{\nu}\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu}\right] \leqslant e^{-\frac{n^{2\nu}(\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu})^2}{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} \tag{368}$$

$$\leqslant e^{-\frac{n^{2\nu}(\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu})^2}{(\frac{560}{3}\log(1/\nu)+4+18\nu^2\frac{1}{1-2\nu}(\frac{280}{3}\log(1/\nu))^{2\nu-1})p_1^{-1}}} \tag{369}$$

$$= e^{-\frac{p_1 n^{2\nu}(\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu})^2}{\frac{560}{3}\log(1/\nu)+4+18\nu^2\frac{1}{1-2\nu}(\frac{280}{3}\log(1/\nu))^{2\nu-1}}} \tag{370}$$

$$= e^{-\Theta(p_1 n^{2\nu}(\sum_{j=1}^{m} p_j^{\nu})^2(\log(1/\nu)+(1-2\nu)^{-1})^{-1})} \tag{371}$$

□

请注意，在上述界中，对 n （固定 ν、p_1 ）的依赖关系如下：$e^{-\Theta(n)}$，当 $\nu \in (1/2, 2/3)$ 时；$e^{-\Theta(n/\log(n))}$，当 $\nu = 1/2$ 时；以及 $e^{-\Theta(n^{2\nu})}$，当 $\nu \in (0$、$1/2)$ 时。

除分形情形（留待未来研究）外，我们有整数 $\gamma \geqslant 2$ ，因此$1 - \frac{1}{\gamma} = \nu \in (0,$ $2/3) \implies \nu = 1/2,$；也就是说，在考虑控制仿射系统和目标点的满维连续分布时 f ，我们主要关注的是 $\nu = 1/2$。对于$\nu \geqslant 2/3,$，命题 12 给出了一个简洁得多的极高概率集中界（其对 n 的依赖为 $e^{-\Theta(n^{2\nu-1})} \geqslant e^{-\Theta(n^{1/6})}$），无需费心考虑 n 必须有多大，也无需处理 p_1 项。

C. HCS 覆盖算法

现在，我们将 $\mathcal{X}_f$ 划分为 m 个不同的 ε_0 尺度层次单元结构，如假设 10 所述；我们将它们的根节点分别称为 $\boldsymbol{q}_1$、……、$\boldsymbol{q}_m$。令 $x_j = [\boldsymbol{q}_j]_{\mathcal{X}}$。在目标点数量 $n \to \infty$ 时，这些结构将保持不变。令 S_1、S_2、……、S_m 为覆盖 $\mathcal{X}_f$（尺度为 ε_0）的 HCS 的顶层单元，并令所有 j 均有 $x_j = [\boldsymbol{q}_j]_{\mathcal{X}}$；我们定义

$$p_j := \mathbb{P}_{X\sim f}[X \in S(\boldsymbol{q}_j, \varepsilon_0)] \tag{372}$$

注意，p_j 取决于我们使用哪些 HCS，而这又取决于 ε_0。在此证明中，我们假设集合 $S(\boldsymbol{q}_j、\varepsilon_0)$ 互不相交（见附录 E）。因此，$\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$，并将 $X \sim f$ 分配到单元 S_j 中，其依据是概率向量 $\boldsymbol{p} = (p_1、……、p_m)$。令$j(X)$ 表示 X 所在单元的索引。

接下来，我们希望证明，每个 HCS 都覆盖一定量的概率质量，只有可忽略的一小部分除外：

引理 26. 对任意 $\rho_1 > 0$，将一个 ρ_1-良好细胞 S_j 定义为满足以下条件的单元

$$p_j \geqslant (1-\rho_1)\alpha \check{f}^{(\zeta)}(x_j)\check{g}^{(\zeta)}(x_j)\varepsilon_0^{\gamma}\,. \tag{373}$$

那么，对于任意 ρ_1、$\rho_2 \geqslant 0$，对于任意充分小的 $\zeta < 0$，存在某个 ε_0^*，使得对于任意 $0 < \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon_0^*$，存在 $\boldsymbol{q}_1$、……、$\boldsymbol{q}_m$ 满足假设 10 的条件，并且

$$\mathbb{P}_{X\sim f}[S_{j(X)} \textit{ is } \rho_1\textit{-good}] \geqslant 1-\rho_2\,. \tag{374}$$

证明。考虑某个阈值 $\rho^* > 0$，并将满足 $\check{f}^{(\zeta)}(x_j) \geqslant \rho^*$ 的单元 S_j ρ^* 称为充分单元。我们断言如下：

i. 对于任意 $\rho_2 > 0$，都存在某个 $\rho^* > 0$，使得对于所有充分小的 $\zeta > 0$，$\mathbb{P}_{X\sim f}[\check{f}^{(\zeta)}(X) \leqslant (3/2)\rho^*] \leqslant \rho_2$。ii. 对任意 $\rho^* > 0$，存在某个 ε_0^*，使得若 $\check{f}^{(\zeta)}(X) > (3/2)\rho^*$，，则 $S_{j(X)}$ 必须是 ρ^*- 充分的。iii. 对任意 ρ^*、ρ_1、$\zeta > 0$，存在一个足够小的 ε_0^*，使得对于所有 $0 < \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon_0^*$，任何$\rho^*$-充足细胞都是 ρ_1-良好的。

断言 (i) 成立，因为 f 几乎处处连续，因此 $\lim_{\zeta\to 0}\check{f}^{(\zeta)}(x)=f(x)$ 几乎处处成立；于是我们取足够小的 ρ^*，使得 $\mathbb{P}_{X\sim f}[f(X)\leqslant(3/2)\rho^*]\leqslant p_2/2$，然后令 $\zeta\to 0$，得到

$$\lim_{\zeta\to 0}\mathbb{P}_{X\sim f}[\check{f}^{(\zeta)}(X)\leqslant(3/2)\rho^*]=\mathbb{P}_{X\sim f}[f(X)\leqslant(3/2)\rho^*]\leqslant p_2/2 \tag{375}$$

这意味着，当 $\zeta>0$ 足够小时，我们有 $\mathbb{P}_{X\sim f}[\check{f}^{(\zeta)}(X)\leqslant(3/2)\rho^*]\leqslant\rho_2$。

断言 (ii) 成立，因为根据定义

$$X\in S_{j(X)}\subseteq\bar{R}_{\varepsilon_0}(\boldsymbol{q}_j)\subseteq\mathcal{B}_{c_\Pi\varepsilon_0}(x_j) \tag{376}$$

其中 $\mathcal{B}$ 表示度量 $\mathcal{X}$ 下的一个球（给定半径和中心）。由于根据定义 $\check{f}^{(\zeta)}$ 是 $(1/\zeta)$-利普希茨连续的，只要 $c_\Pi\varepsilon_0/\zeta\leqslant\rho^*/2$（即 $\varepsilon_0\leqslant\rho^*\zeta/(2c_\Pi)$），我们就有

$$|\check{f}^{(\zeta)}(X)-\check{f}^{(\zeta)}(x_j)|\leqslant\rho^*/2 \tag{377}$$

$$\implies \check{f}^{(\zeta)}(x_j)\geqslant\rho^* \tag{378}$$

对于任意满足 $\check{f}^{(\zeta)}(X)>(3/2)\rho^*$，的 X，根据定义，这意味着 $S_{j(X)}$ 是 ρ^*-充分的。

断言 (iii) 成立，因为 $\check{f}^{(\zeta)}$ 是利普希茨连续的，$S_j\subseteq\mathcal{B}_{c_\Pi\varepsilon_0}(x_j)$，且 $\check{f}^{(\zeta)}(x_j)\geqslant\rho^*$；因此，只要令 ε_0 足够小，对于每个 $X\in\mathcal{B}_{c_\Pi\varepsilon_0}(x_j)$，就有 $\check{f}^{(\zeta)}(X)\geqslant(1-\rho_1/2)\check{f}^{(\zeta)}(x_j)$，并且 $\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(S_j)\geqslant(1-\rho_1/2)\alpha\check{g}^{(\zeta)}(x_j)\varepsilon_0^\gamma$。因此，

$$\mathbb{P}_{f\sim X}[X\in S_j]=\int_{S_j}f(x)\,dx \tag{379}$$

$$\geqslant\int_{S_j}\check{f}^{(\zeta)}(x)\,dx \tag{380}$$

$$\geqslant\int_{S_j}(1-\rho_1/2)\check{f}^{(\zeta)}(x_j)\,dx \tag{381}$$

$$=(1-\rho_1/2)\check{f}^{(\zeta)}(x_j)\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(S_j) \tag{382}$$

$$\geqslant(1-\rho_1/2)^2\alpha\check{f}^{(\zeta)}(x_j)\check{g}^{(\zeta)}(x_j)\varepsilon_0^\gamma \tag{383}$$

$$\geqslant(1-\rho_1)\alpha\check{f}^{(\zeta)}(x_j)\check{g}^{(\zeta)}(x_j)\varepsilon_0^\gamma\,. \tag{384}$$

最后，断言 (i)–(iii) 表明我们的结果成立，因为

$$\mathbb{P}_{X\sim f}[S_{j(X)}\text{ is }\rho_1\text{-good}]\geqslant\mathbb{P}_{X\sim f}[S_{j(X)}\text{ is }\rho^*\text{-sufficient}] \tag{385}$$

$$\geqslant\mathbb{P}_{X\sim f}[\check{f}^{(\zeta)}(X)>(3/2)\rho^*] \tag{386}$$

$$\geqslant\rho_2 \tag{387}$$

至此，我们的工作就完成了。 □

在本证明的其余部分，我们将假设所有单元都是 ρ_1-良好的。我们将在附录 E 中说明，可以不失一般性地作出这一假设，即仍然能够达到相同的极高概率界。

给定根节点为 $\boldsymbol{q}_1$、……、$\boldsymbol{q}_m$ 的覆盖 HCS，我们定义

$$C_{\varepsilon_0} = \mathrm{TSP}_\Pi(\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_m) \tag{388}$$

也就是说，这是访问所有单元根节点所需的旅行商问题巡回路线时间，它取决于 ε_0，但相对于 n 是常数。请注意，这要求系统访问特定构型，而不仅仅是目标点；此外，精确计算该值可能难以处理。不过，我们只需要任意一个常数长度；如果系统具备良好的点到点（或构型到构型）运动规划能力，我们甚至可以通过计算所有 $\boldsymbol{q}_{j_1}$、$\boldsymbol{q}_{j_2}$ 对之间的距离，并应用标准的旅行商问题近似算法，得到一个良好的常数近似。

现在我们希望应用命题 12 或命题 13（取决于 $\gamma \geqslant 3$ 是否成立，因为 $\nu = 1 - \frac{1}{\gamma}$）。为此，我们需要计算 $\sum_{j=1}^m p_j^{1-\frac{1}{\gamma}}$。注意，如果我们在 $[m]$ 中定义离散随机变量 $Z \sim \boldsymbol{p}$，这就等价于

$$\sum_{j=1}^m p_j^{1-\frac{1}{\gamma}} = \mathbb{E}_{Z\sim\boldsymbol{p}}\left[p_Z^{-\frac{1}{\gamma}}\right] \tag{389}$$

设 $X \sim f$；那么我们可以将 $Z = j(X)$ 解释为。对于任意 $\delta > 0$，我们可以选择足够小的 $\rho_1 > 0$、$\zeta > 0$ 和 ε_0，使得引理 26 适用，并且

$$\int_{\mathcal{X}_f} f(x)\check{f}^{(\zeta)}(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\check{g}^{(\zeta)}(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\,dx \approx \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\,dx \tag{390}$$

（通过将 ζ 设置得很小，可以使这种近似任意接近）从而得到

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m p_j^{1-\frac{1}{\gamma}} &= \mathbb{E}_{Z\sim\boldsymbol{p}}\left[p_Z^{-\frac{1}{\gamma}}\right] && (391)\\
&= \mathbb{E}_{X\sim f}\left[p_{j(X)}^{-\frac{1}{\gamma}}\right] && (392)\\
&\leqslant \mathbb{E}_{X\sim f}\left[(1-\rho_1)^{-\frac{1}{\gamma}}\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}\varepsilon_0^{-1}\check{f}^{(\zeta)}(X)^{-\frac{1}{\gamma}}\check{g}^{(\zeta)}(X)^{-\frac{1}{\gamma}}\right] && (393)\\
&= (1-\rho_1)^{-\frac{1}{\gamma}}\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}\varepsilon_0^{-1}\int_{\mathcal{X}_f} f(x)\check{f}^{(\zeta)}(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\check{g}^{(\zeta)}(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\,dx && (394)\\
&\leqslant (1+\delta)\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}\varepsilon_0^{-1}\int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\,dx && (395)
\end{aligned}$$

根据命题 11，如果 n_j 是落入 S_j 的目标点数量，那么访问所有这些目标点所需的时间（从根节点 $\boldsymbol{q}_j$ 出发并返回）至多为 $6s\varepsilon_0 n_j^{1-\frac{1}{\gamma}}$。因此，可以通过组合一条经过根 $\boldsymbol{q}_1$、…、$\boldsymbol{q}_m$ 的旅行商问题轨迹（耗时常数 C_{ε_0}）以及各单元内的这些巡回路线，构造出一条旅行商问题轨迹；每次到达一个 $\boldsymbol{q}_j$ 时，就执行一条巡回路线，访问 S_j 内的 n_j 个目标点。因此，

$$\mathrm{TSP}_{\Pi}(X_1,\dots,X_n) \leqslant C_{\varepsilon_0} + 6s\varepsilon_0 \sum_{j=1}^{m} n_j^{1-\frac{1}{\gamma}} \tag{396}$$

$$wvhp \quad \leqslant C_{\varepsilon_0} + 12s\varepsilon_0 n^{1-\frac{1}{\gamma}} \sum_{j=1}^{m} p_j^{1-\frac{1}{\gamma}} \tag{397}$$

$$wvhp \quad \leqslant C_{\varepsilon_0} + 12s\varepsilon_0 n^{1-\frac{1}{\gamma}} (1-\rho_1)^{-\frac{1}{\gamma}} \alpha^{-\frac{1}{\gamma}} \varepsilon_0^{-1} \int_{\mathcal{X}_f} f(x) \check{f}^{(\zeta)}(x)^{-\frac{1}{\gamma}} \check{g}^{(\zeta)}(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \tag{398}$$

$$wvhp \quad \leqslant C_{\varepsilon_0} + (1+\delta)12s\alpha^{-\frac{1}{\gamma}} n^{1-\frac{1}{\gamma}} \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \tag{399}$$

这里的“wvhp”具体含义取决于指数 $\nu = 1-\frac{1}{\gamma}$ 属于命题 12 和 13 中的哪个情形，但在所有情况下，失败概率在极限下都以上界 $c_1 e^{-c_2 x^{c_3}}$ 为界，其中 $c_1, c_2, c_3 > 0$。注意，随着 ε_0 变小，C_{ε_0} 会增大；而且，为了达到近似误差 $\delta > 0$，可能需要将ε_0 设得较小，但它相对于 n 是常数，因此当 $n \to \infty$时可以忽略不计。

注 12. 这一论证的一个有趣推论是：对于定义在 $\mathbb{R}^d$上的欧几里得旅行商问题，如果目标点 $X_1, \dots, X_n$取自豪斯多夫维数为$\gamma \geqslant 1$的有界集合 $\mathcal{X}^* \subseteq \mathbb{R}^d$，那么最坏情况巡回路线长度会按 $\Theta(n^{1-\frac{1}{\gamma}})$的规律缩放。

要求 $\gamma > 1$ 源于这样一个事实：如果 $\gamma < 1$，则在层次单元结构之间移动所需的时间（即 $O(1)$）会超过 $n^{1-\frac{1}{\gamma}}$。因此，如果 $\gamma < 1$，欧几里得旅行商问题轨迹长度便会退回到 $O(1)$，也就是说，即使 $n \to \infty$，它仍有一个常数上界。

VII. 对抗性目标

现在证明定理 2，该定理讨论了在目标点被布置于有界 $\mathcal{X}^* \subseteq \mathcal{X}$ 内、以最大化巡回路径长度时的巡回路径长度。我们将此称为对抗性目标点布置。尽管我们的对抗性目标下界对于非对称动力学也成立，但与第六节一样，这里我们关注的是对称 Π。

注13。当 Π 为非对称时，存在一些反例，其中对抗性目标点布置会导致巡回路径长度为 $\Theta(n)$；例如，若我们有一辆转弯半径为 1 的Dubins车，可以将目标点均匀分布在半径为 $1/100$ 的圆的边界上。这样，系统每次‘穿过’该圆时至多可以访问 2 个目标点，并且需要$\approx 2\pi$ 时间返回，从而得到长度为 $\approx \pi n$ 的巡回路线。

如第 III 节所述，我们考虑两个由定理 1 自然引出的相关问题：

1) 给定对称动力学 Π 和有界（但维度完整的）目标区域 $\mathcal{X}^*$，当 X_1，.....，$X_n \overset{iid}{\sim} f$ 趋于 $n \to \infty$ 时，$\mathcal{X}^*$ 上什么样的目标点密度 f 能使最优旅行商路径的长度最大?

2) 给定对称动力学 Π、有界集合 $\mathcal{X}^* \subseteq \mathcal{X}_f$ 和数量为 n 的目标点，$_{X_1,\ldots,X_n \in \mathcal{X}^*}$ $\mathrm{TSP}_\Pi(X_1$，.....，$X_n)$ 的上确界是多少?

尽管对于所有 f，我们都有关于巡回路径长度的下界和上界，且二者相差至多一个固定常数因子，但我们无法断言究竟什么样的 f 能使 DSTSP 巡回路线长度最大（无论是按期望还是以高概率而言）。不过，我们知道巡回路径长度的下界和上界均具有以下形式

$$cn^{1-\frac{1}{\gamma}} \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \tag{400}$$

其中 c 在两种情况下都是一个与 f 无关的常数。因此，我们不回答问题 1，而是回答一个相关问题：给定对称动力学 Π 和有界（但维度完整的）目标区域 $\mathcal{X}^*$，$\mathcal{X}^*$ 上什么样的目标点密度 f 能使

$$\int_{\mathcal{X}^*} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \tag{401}$$

这个最大值是多少?

问题 2 接着要求给出巡回路径长度的确定性上界，其中目标点由对手选择，以使巡回路径长度最大。按定义，对抗性选择的目标点会产生比任何随机分布都更长的巡回路径长度；但我们感兴趣的是，作为 $n \to \infty$，能否比问题 1 中的最坏情况 f 显著更好。请注意，问题 1 要求对 n as$n \to \infty$ 的所有取值都使用同一个概率分布，而问题 2 则允许根据 n 选择不同的一组点。虽然这似乎让对抗性目标点有了更大的灵活性，但我们将证明，对抗性目标点适用的界大致相同。

A. 对抗性随机性

为了证明定理 2 中的下界，我们将寻找在 $\mathcal{X}^*$ 上的密度 f_g，使定理 1 中的下界最大化；这等价于使 $\int_{\mathcal{X}^*} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx$ 最大化。显然，这也构成了非随机目标点所产生的最长巡回路线的下界。由于存在常数因子差距，它也使定理 1 中的上界最大化。

因此，我们必须解决以下问题：

$$\text{maximize} \int_{\mathcal{X}^*} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}} dx \quad (\text{where } f : \mathcal{X}^* \to \mathbb{R} \text{ is integrable}) \tag{402}$$

$$\text{subject to} \int_{\mathcal{X}^*} f(x)dx = 1, \text{ and } f(x) \geqslant 0 \text{ for all } x \in \mathcal{X}^* \tag{403}$$

（即约束条件是 f 在 $\mathcal{X}^*$ 上为概率密度函数。）

引理 27. 在约束条件 (403) 下，目标函数 (402) 在 $f^*(x) \propto g(x)^{-1}$ 处取得最大值，即

$$f^*(x) := \frac{g(x)^{-1}}{\int_{\mathcal{X}^*} g(y)^{-1} dy}. \tag{404}$$

证明. 首先，我们注意到 f^* 显然满足 (403) 中的约束：它经过归一化，因此在 $\mathcal{X}^*$ 上的积分为 1；并且它是非负的，因为 $g(x)$（进而 $g(x)^{-1}$）是非负的。我们还注意到它确实存在，因为 $g(x) \geqslant g_{\min}$ 在 $\mathcal{X}^*$ 上且 $\mathcal{X}^*$ 具有有限体积（因为它有界），所以 $\int_{\mathcal{X}^*} g(y)^{-1}\, dy \leqslant g^{-1}{}_{\min} \mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}^*) < \infty$。

接着我们注意到，将 $g(x)$ 缩放一个常数 c 可得

$$\int_{\mathcal{X}^*} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} (c\, g(x))^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx = c^{-\frac{1}{\gamma}} \int_{\mathcal{X}^*} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \tag{405}$$

因此，这不会影响 f 使目标函数达到最大值的结果；所以我们不失一般性地假设 $\int_{\mathcal{X}^*} g(x)^{-1}\, dx = 1$（当然，在计算最优值时，我们必须采用正确的尺度）。

现在我们将利用 H¨older 不等式证明引理 27。首先定义：

$$\tilde{f}(x) := f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} \text{ and } \tilde{g}(x) = g(x)^{-\frac{1}{\gamma}} \tag{406}$$

˜并注意到，根据定义 $f(x), g(x) \geqslant 0$ 对所有 x 都成立，我们知道 $f(x), \tilde{g}(x) \geqslant 0$ 对所有 x 都成立，因此可以忽略 H¨older 不等式表述中的绝对值函数。接着定义常数 $\eta := \frac{\gamma}{\gamma-1}$。注意，$\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\gamma} = 1$，这符合 H¨older 不等式的要求。因此：

$$\int_{\mathcal{X}^*} \tilde{f}(x)\, \tilde{g}(x) dx \leqslant \Big(\int_{\mathcal{X}^*} \tilde{f}(x)^{\eta} dx \Big)^{\frac{1}{\eta}} \Big(\int_{\mathcal{X}^*} \tilde{g}(x)^{\gamma} dx \Big)^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{407}$$

但是，利用上述定义，

$$\tilde{f}(x)^{\eta} = \left(f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = f(x) \text{ and } \tilde{g}(x)^{\gamma} = \left(g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\right)^{\gamma} = g(x)^{-1} \tag{408}$$

因此，我们可以将不等式改写为

$$\int_{\mathcal{X}^*} \tilde{f}(x)\,\tilde{g}(x)dx \leqslant \Big(\int_{\mathcal{X}^*} f(x)dx\Big)^{\frac{1}{\eta}} \Big(\int_{\mathcal{X}^*} g(x)^{-1}dx\Big)^{\frac{1}{\gamma}}; \tag{409}$$

然而，根据 f 是概率密度函数这一条件，以及关于 $g(x)^{-1}$的假设（不失一般性），我们知道

$$\int_{\mathcal{X}^*} f(x)dx = \int_{\mathcal{X}^*} g(x)^{-1}dx = 1 \tag{410}$$

这意味着表达式 (409) 右侧恰好为 1。因此，

$$\int_{\mathcal{X}^*} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}}\, g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}dx = \int_{\mathcal{X}^*} \tilde{f}(x)\,\tilde{g}(x)dx \leqslant 1 \tag{411}$$

对于任意概率密度函数 f，但根据引理 27 中 f^*的定义，不难看出

$$\int_{\mathcal{X}^*} f^*(x)^{1-\frac{1}{\gamma}}\, g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}dx = 1 \tag{412}$$

由此可知， f^* 是最大化密度函数。 □

备注14. D　　密度 f^*使收益函数在 $\mathcal{X}^*$上为常数，因为对于所有 $x \in \mathcal{X}^*$,

$$\mathfrak{c}^*(x) = (f^*(x)g(x))^{\frac{1}{\gamma}} = \Big(\int_{\mathcal{X}^*} g(y)^{-1}\,dy\Big)^{-\frac{1}{\gamma}}. \tag{413}$$

引理28。式 (402) 和 (403) 中给出的问题的最优值为

$$\max_f \int_{\mathcal{X}^*} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\,dx = \Big(\int_{\mathcal{X}^*} g(x)^{-1}\,dx\Big)^{-\frac{1}{\gamma}} \tag{414}$$

证明。将 f^* 代入表达式 (402)，得到

$$\int_{\mathcal{X}^*} f^*(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}dx = \int_{\mathcal{X}^*} \Big(\frac{g(x)^{-1}}{\int_{\mathcal{X}^*} g(y)^{-1}dy}\Big)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}dx \tag{415}$$

$$= \int_{\mathcal{X}^*} \frac{g(x)^{-1}}{\big(\int_{\mathcal{X}^*} g(y)^{-1}dy\big)^{1-\frac{1}{\gamma}}}dx \tag{416}$$

$$= \frac{\int_{\mathcal{X}^*} g(x)^{-1}dx}{\big(\int_{\mathcal{X}^*} g(y)^{-1}dy\big)^{1-\frac{1}{\gamma}}} \tag{417}$$

$$= \Big(\int_{\mathcal{X}^*} g(x)^{-1}dx\Big)^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{418}$$

□

因此，如果我们按照 f^*（独立同分布）分布点 X_1、X_2、.....、X_n，根据定理 1，对于任意 $\delta > 0$

$$\mathrm{TSP}_{\Pi}(X_1, \ldots, X_n) \leqslant (1+\delta)\beta^{-1} n^{1-\frac{1}{\gamma}} \Big(\int_{\mathcal{X}^*} g(x)^{-1} dx \Big)^{\frac{1}{\gamma}} \quad wvhp \tag{419}$$

当 n 足够大时成立。因此，在 $\mathcal{X}^*$ 中使巡回路径长度最大的确定性 $X_1, \ldots X_n$ 至少能达到这一长度，从而得到定理 2 中的下界。

B. 对抗性目标上界

现在我们证明定理 2 中的上界。考虑一个定义在 $\mathcal{X}^*$ 上、缩放参数为 s 、尺度为 ε_0 时重叠参数为 α 的层次单元结构，我们知道这样的结构存在。HCS 导出一个特定的算法，根据命题 11，该算法生成的巡回路线长度有上界：

$$6s\varepsilon_0 \sum_{j=1}^{m} n_j^{1-\frac{1}{\gamma}} + C_{\varepsilon_0} \tag{420}$$

其中， n_j 是落入单元 j 的目标点数量， C_{ε_0} 是表示在单元之间移动所需时间的常数。记 $p_j = n_j/n$ 和 $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_m)$；由于 $\sum_j n_j = n$，我们知道 $\boldsymbol{p}$ 是一个概率向量。忽略常数 C_{ε_0}，可将上式改写为

$$6s\varepsilon_0 \sum_{j=1}^{m} n_j^{1-\frac{1}{\gamma}} = 6s\varepsilon_0 n^{1-\frac{1}{\gamma}} \sum_{j=1}^{m} p_j^{1-\frac{1}{\gamma}} \tag{421}$$

请注意，与第六节不同，这里我们可以直接按照 $n_1, \ldots, n_m$ 分配目标点，因此无需进行概率分析。不过，将 $\boldsymbol{p}$ 视为概率向量仍然有用，并且像之前一样，令 $Z \sim \boldsymbol{p}$ ，并考虑

$$\sum_{j=1}^{m} p_j^{1-\frac{1}{\gamma}} = \mathbb{E}_{Z\sim\boldsymbol{p}}[p_Z^{-\frac{1}{\gamma}}] \tag{422}$$

接下来，我们考虑由 $X \sim f^*$ 在各单元上诱导出的概率分布，其中 f^* 是 $\mathcal{X}^*$ 上的最坏情况概率分布，即 $f^*(x) \propto g(x)^{-1}$。令 $j(x)$ 为 $x \in \mathcal{X}^*$ 所属单元的索引；如果 $\boldsymbol{p}^*$ 以这种方式诱导得到，那么 $Z \sim \boldsymbol{p}^*$ 等价于 $Z = j(X)$ ，其中 $X \sim \boldsymbol{p}^*$。这是

$$p_j^* = \mathbb{P}_{X\sim f^*}[X \in S_j] = \int_{S_j} f^*(x)\, dx = \frac{\int_{S_j} g(x)^{-1}\, dx}{\int_{\mathcal{X}^*} g(y)^{-1}\, dy} \tag{423}$$

因此，我们可以改写为

$$\mathbb{E}_{Z\sim \boldsymbol{p}^*}[(p_Z^*)^{-\frac{1}{\gamma}}] = \mathbb{E}_{Z\sim \boldsymbol{p}^*}\left[\left(\frac{\int_{S_Z} g(x)^{-1}\,dx}{\int_{\mathcal{X}^*} g(y)^{-1}\,dy}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right] \tag{424}$$

$$= \Big(\int_{\mathcal{X}^*} g(y)^{-1}\,dy\Big)^{\frac{1}{\gamma}} \mathbb{E}_{Z\sim \boldsymbol{p}^*}\left[\Big(\int_{S_Z} g(x)^{-1}\,dx\Big)^{-\frac{1}{\gamma}}\right] \tag{425}$$

最后，我们将分析 $\int_{S_j} g(x)^{-1}\,dx$ 对于任意 $j \in [m]$。注意，我们可以使 ε_0 任意小，因为通过将子单元作为新的单元，可以把尺度为 ε_0 、尺度因子为 s 且重叠参数为 α 的 HCS 转换为尺度为 ε_0/s 且参数相同的 HCS（之后还可以转换为尺度为 ε_0/s^2 的 HCS，依此类推）。因此，令 $\check{}g^{(\eta)}$ 为 g的 η-正则化下近似。对于任意 δ_1、$\delta_2 > 0$，我们可以将 ε_0 设得充分小，使得对于任意单元中心$\boldsymbol{q}_j$ 和满足 $d_\Pi(\boldsymbol{q}$、 $\boldsymbol{q}') \leqslant \varepsilon_0$的构型 $\boldsymbol{q}'$，

$$\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(S_j) \geqslant (1-\delta_1)\alpha \mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\bar{R}_{\varepsilon_0}(\boldsymbol{q}_j)) \geqslant (1-\delta_2)(1-\delta_1)\alpha \check{g}^{(\eta)}([\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}})\varepsilon_0^{\gamma} \tag{426}$$

$$\Longrightarrow \check{g}^{(\eta)}(x) \leqslant (1-\delta_1)^{-1}(1-\delta_2)^{-1}\alpha^{-1}\varepsilon_0^{-\gamma}\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(S_j) \tag{427}$$

$$\Longrightarrow \check{g}^{(\eta)}(x)^{-1} \geqslant (1-\delta_1)(1-\delta_2)\alpha\varepsilon_0^{\gamma}\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(S_j)^{-1} \tag{428}$$

¯对于所有 $x \in S_j$ （因为 $S_j \subseteq R_{\varepsilon_0}(\boldsymbol{q})$）。此外，对于任意 $\delta_3 > 0$，我们可以将 η 设得充分小，使得对于所有 j,

$$\int_{S_j} g(x)^{-1}\,dx \geqslant (1-\delta_3)\int_{S_j} \check{g}^{(\eta)}(x)^{-1}\,dx \tag{429}$$

但由此我们可以得出，对于任意 j,

$$\int_{S_j} g(x)^{-1}\,dx \geqslant (1-\delta_3)\int_{S_j} \check{g}^{(\eta)}(x)^{-1}\,dx \tag{430}$$

$$\geqslant (1-\delta_1)(1-\delta_2)(1-\delta_3)\alpha\varepsilon_0^{\gamma}\int_{S_j}\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(S_j)^{-1}\,dx \tag{431}$$

$$= (1-\delta_1)(1-\delta_2)(1-\delta_3)\alpha\varepsilon_0^{\gamma} \tag{432}$$

因此，我们可以将其反过来，从而得到

$$\Big(\int_{S_j} g(x)^{-1}\,dx\Big)^{-\frac{1}{\gamma}} \leqslant (1-\delta_1)^{-\frac{1}{\gamma}}(1-\delta_2)^{-\frac{1}{\gamma}}(1-\delta_3)^{-\frac{1}{\gamma}}\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}\varepsilon_0^{-1}\,. \tag{433}$$

由于这对所有 j 都成立，因此我们知道

$$\mathbb{E}_{Z\sim \boldsymbol{p}^*}\left[\Big(\int_{S_Z} g(x)^{-1}\,dx\Big)^{-\frac{1}{\gamma}}\right] \leqslant (1-\delta_1)^{-\frac{1}{\gamma}}(1-\delta_2)^{-\frac{1}{\gamma}}(1-\delta_3)^{-\frac{1}{\gamma}}\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}\varepsilon_0^{-1}\,. \tag{434}$$

然后，我们可以代入此式，得到 $\mathbb{E}_{Z\sim \boldsymbol{p}}[(p_Z^*)^{-\frac{1}{\gamma}}] = \sum_{j=1}^m (p_j^*)^{1-\frac{1}{\gamma}}$ 的一个界。再将这个界代入表达式 (421)，得到

$$6s\varepsilon_0 n^{1-\frac{1}{\gamma}} \sum_{j=1}^m (p_j^*)^{1-\frac{1}{\gamma}} \leqslant 6s\alpha^{-\frac{1}{\gamma}} n^{1-\frac{1}{\gamma}} \Big(\int_{\mathcal{X}^*} g(y)^{-1}\, dy \Big)^{\frac{1}{\gamma}} \big((1-\delta_1)(1-\delta_2)(1-\delta_3)\big)^{-\frac{1}{\gamma}} \tag{435}$$

一个细节问题是，虽然这对由 f^*诱导的 $\boldsymbol{p}^*$成立，但我们的 n_j必须是整数，这意味着它们通常无法精确表示 $\boldsymbol{p}^*$。不过，正如 $n \to \infty$所示，它们 $p_j = n_j/n$ 可以任意接近；对于任意 δ_4，都存在某个 $n^{(\delta_4)}$，使得对于所有 $n \geqslant n^{(\delta_4)}$，都存在一些 n_1、……、n_m，满足若 $p_j = n_j/n$，则

$$\sum_{j=1}^m p_j^{1-\frac{1}{\gamma}} \leqslant (1+\delta_4) \sum_{j=1}^m (p_j^*)^{1-\frac{1}{\gamma}} \tag{436}$$

于是，对于任意 $\delta_5 > 0$，我们可以设定 δ_1、δ_2、δ_3、$\delta_4 > 0$，使得

$$1+\delta_5 = (1-\delta_1)^{-\frac{1}{\gamma}} (1-\delta_2)^{-\frac{1}{\gamma}} (1-\delta_3)^{-\frac{1}{\gamma}} (1+\delta_4) \tag{437}$$

由此可得，对于 $n \geqslant n^{(\delta_4)}$，按照对 $p_j^* n$的这一近似来分配 n_j，我们得到

$$6s\varepsilon_0 \sum_{j=1}^m n_j^{1-\frac{1}{\gamma}} \leqslant (1+\delta_5) 6s\alpha^{-\frac{1}{\gamma}} n^{1-\frac{1}{\gamma}} \Big(\int_{\mathcal{X}^*} g(y)^{-1}\, dy \Big)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{438}$$

因此，当 n足够大时，HCS 会诱导出一种算法，能够在至多 $(1+\delta_5) 6s\alpha^{-\frac{1}{\gamma}} n^{1-\frac{1}{\gamma}} \big(\int_{\mathcal{X}^*} g(y)^{-1}\, dy \big)^{\frac{1}{\gamma}} + C_{\varepsilon_0}$的长度内收集所有目标点；对于任意 $\delta > 0$，我们可以选择$0 < \delta_5 < \delta$，并选择足够大的 n，使得

$$(1+\delta_5) 6s\alpha^{-\frac{1}{\gamma}} n^{1-\frac{1}{\gamma}} \Big(\int_{\mathcal{X}^*} g(y)^{-1}\, dy \Big)^{\frac{1}{\gamma}} + C_{\varepsilon_0} \leqslant (1+\delta) 6s\alpha^{-\frac{1}{\gamma}} n^{1-\frac{1}{\gamma}} \Big(\int_{\mathcal{X}^*} g(y)^{-1}\, dy \Big)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{439}$$

由于我们的特定算法总能在至多这么长的时间内收集目标点，因此最优算法的表现至少同样好，所以

$$\sup_{X_1,\ldots,X_n \in \mathcal{X}^*} \mathrm{TSP}_\Pi(X_1,\ldots,X_n) \leqslant (1+\delta) 6s\alpha^{-\frac{1}{\gamma}} n^{1-\frac{1}{\gamma}} \Big(\int_{\mathcal{X}^*} g(y)^{-1}\, dy \Big)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{440}$$

至此，我们就完成了定理 2 的上界证明。

注 15. 由于根据定义 $\sum_j p_j = 1$，且 $1 - \frac{1}{\gamma} < 1$，要使 $\sum_{j=1}^m p_j^{1-\frac{1}{\gamma}}$ 最大化时，$p_1, \ldots, p_m$ 的最优值实际上是 $p_1 = \cdots = p_m = \frac{1}{m}$，由此可得

$$\sum_{j=1}^m p_j^{1-\frac{1}{\gamma}} = m^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{441}$$

这符合直觉：若要让目标点难以到达，就应使它们在各单元（给定尺度下）均匀分布。虽然分析中没有用到这一点，因为 m 难以直接计算，但了解这一点有助于找到足够大的 n，使得每个 $p_j = \frac{n_j}{n}$ 都能逼近 $\frac{1}{m}$。这个“足够大”的值会随着 m 增大而增大；而 m 会随着尺度 ε_0 减小而增大。

VIII. 结论

在本文中，我们对动态随机旅行商问题（DSTSP）给出了一个非常通用的表述，涵盖了广泛的动态系统（特别关注控制仿射系统，但不限于此），并将以往针对欧几里得工作空间的系统表述扩展到了流形工作空间。为此，我们提出了一种新的工作空间离散化技术，该技术改编自 Arias-Castro 等人（[17], 2005）以及 Adler、Karaman（[18], 2016）的工作；此外，我们还提出了一种基于层次单元结构、适用于对称动态约束系统的新型动态旅行商问题算法。我们还证明，即使系统良好运行所需的自然性质仅近似成立，我们的方法依然有效。

在这一扩展后的表述下，我们给出了新的结果，不仅描述了巡回路径长度如何随独立同分布目标点的数量 n 变化，也揭示了目标点分布的密度函数f 对巡回路径长度的影响。具体而言，我们定义了由工作空间上的动力学所诱导的机动性函数 g，并证明，对于我们表述中的所有动力学，巡回路径长度都存在一个极高概率下界，其尺度同时取决于

$$n^{1-\frac{1}{\gamma}} \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \tag{442}$$

其中 $\mathcal{X}_f$ 是 f的支撑集；对于对称动力学，还有一个按 (442) 缩放的匹配上界。对于对称动力学，这给出了关于 f 和 n的、以极高概率成立的下界和上界，二者仅相差一个常数。

接着，我们利用这些结果分析对抗性目标点的情形：对手将目标点分布在某个有界区域 $\mathcal{X}^*$ 中，以最大化巡回路径长度。对于对称系统，我们证明了类似的（但具有确定性的）匹配下界和上界，其缩放关系为

$$n^{1-\frac{1}{\gamma}} \left(\int_{\mathcal{X}^*} g(x)^{-1}\, dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{443}$$

下界也适用于非对称系统。

A. 未来工作

虽然我们为 DSTSP 和对抗性 DTSP 的巡回路径长度建立了上下界，且这两个界在 f 和 n 中都仅相差一个常数因子，但仍有许多值得探索的未来研究方向。

[1]我们的工作确立了下界与上界之间的 $12s\alpha^{-\overline{\gamma}}\beta$ 乘法间隙，其中 s （对于控制仿射系统，通常为 $s = 2$ ），而 α 是衡量我们的单元铺砌算法有效性的参数， β 则是描述在小尺度下用较小可达集覆盖较大可达集难度的参数。具体而言，根据动力学的不同，$\alpha \leqslant 1$ 表示铺砖填充其所内接的可达集的程度，并且通常衡量利用可达集铺砌工作空间的效率。然而，尚不确定 α 是否真正代表系统执行旅行商问题的效率，还是我们特定的分层单元结构算法所产生的结果。

定理 1 几乎完整地将 Beardwood等人（[6], 1959）关于欧几里得随机旅行商问题的结果推广到了具有一般对称动态约束的情形。具体而言，
Beardwood-Halton-Hammersley 定理指出，对于定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的欧几里得随机旅行商问题，其目标点为X_1、 X_2、 $\ldots \overset{iid}{\sim} f$，存在某个常数 β_d（仅取决于 d），使得

$$\mathrm{TSP}(X_1, \ldots, X_n) \to \beta_d n^{1-\frac{1}{d}} \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{d}}\, dx \tag{444}$$

几乎必然地，如 $n \to \infty$。我们的结果将 $n^{1-\frac{1}{d}}$推广到 $n^{1-\frac{1}{\gamma}}$（ $\mathbb{R}^d$中的欧几里得路径可以表述为具有 $\gamma = d$ 的动态系统），并将 $\int f(x)^{1-\frac{1}{d}}\, dx$推广到 $\int f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx$（仅考虑欧几里得路径的长度时， g 为常数，因此可以移至积分号外作为常数）；然而，这并未排除积分号外的常数在我们推导出的下界和上界之间波动，而不趋向范围 $[\beta^{-1}, 12s\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}]$内某个特定值的可能性。证明对于任意对称动态约束 Π 和 $X_1, X_2, \ldots \overset{iid}{\sim} f$，存在某个常数 β_Π

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{TSP}_\Pi(X_1, \ldots, X_n)}{n^{1-\frac{1}{\gamma}} \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx} = \beta_\Pi \tag{445}$$

这将完成 Beardwood-Halton-Hammersley定理在我们所研究情形下的扩展，不过也有可能只有当 Π 满足更强的正则性条件时，这种扩展才有可能实现。

此外，本文所发展的技术（分层单元铺设策略和成本平衡定向越野问题）可能会为以下关于 DSTSP 或随机定向越野问题的扩展或相关问题带来结果：

- 如附录 F 所述，我们的方法可以为欧几里得旅行商问题给出有力的上界，其中目标点分布在一个分形维数较低的子集上；尤其是，层次单元结构适用于此类情况。然而，目标点呈分形分布且巡回路线受动态约束时的问题，以及相应的匹配下界，仍有待研究。
- 另一项有趣的拓展是，将空间中的集合而非点作为目标。虽然当目标是固定大小的球时，极限情况下通常是显而易见的（固定长度的轨迹可以“扫过”整个空间，从而访问所有可能的 ε-球），但诸如将随机的 k 维仿射子空间嵌入 d 维工作空间作为目标之类的问题，或许可以用我们的方法求解。• 定向越野问题也可以理解为：在满足约束的条件下，让一条长度有限的曲线尽可能经过更多目标，这在图像处理中有应用 [17], ；该问题的一个重要拓展是，让一个大小有限且满足动态约束的高维区域穿过目标。• 另一个与定向越野问题相关的问题是：寻找一个满足局部约束（例如利普希茨连续性）的函数，使其拟合目标点，并以损失函数衡量效果（而非要求函数尽可能精确地经过更多目标）。
- 最后，旅行商问题还与许多其他问题相关，在这些问题中，移动代理必须访问无序排列的目标点，例如旅行维修人员问题 [16]：目标点会随机出现（例如按照泊松过程随时间出现），且必须以每个目标点的最短延迟进行访问。

最后，对于一般情形下的动态旅行商问题，是否存在保证近似算法仍是一个悬而未决的问题。定理 1 表明，我们的分层收集问题算法以极高概率实现了最短巡回路线的常数因子近似；这进而说明，该算法也实现了最短巡回路线期望长度的常数因子近似（见推论 1 和附录 A）。最后，定理 2 表明，我们的 HCP 算法能够对经过对抗性分布的目标点的最短巡回路线实现常数因子近似。然而，我们的分析并未排除这样一种可能：目标点可能经过精心布置，使得巡回路线极短，而算法找到的路线却更长（不过，当目标点随机分布时，这种情况发生的概率会趋近于零）。

从而允许存在一条极短的巡回路线，而算法只能找到更长的路线（不过，当目标点随机分布时，这种情况发生的概率会趋近于零）。保证近似算法（与 HCP 算法这类以极高概率或按期望找到近似解的算法相对）能够针对任意一组 n 目标点，找到一条长度不超过最短巡回路线长度常数乘法因子的巡回路线。

参考文献

[1] Richard M. Karp，《组合问题之间的可归约性》，第85–103页，Springer US，波士顿，马萨诸塞州，1972年。[2] Christos H. Papadimitriou，“欧几里得旅行推销员问题是 NP 完全的”，《理论计算机科学》，第4卷第3期，第237–244页，1977年。[3]S. M. LaValle，《规划算法》，剑桥大学出版社，剑桥，英国，2006年，网址：http://planning.cs.uiuc.edu/。[4] Jerome Ny、Eric Feron 和 Emilio Frazzoli，“关于 Dubins 旅行商问题”，《IEEE 自动控制汇刊》，第57卷第1期，第265–270页，2012年。[5] A. M. Frieze 和 J. E. Yukich，《TSP 的概率分析》，第257–307页，Springer US，波士顿，马萨诸塞州，2007年。[6] Jillian Beardwood、J. H. Halton 和 J. M. Hammersley，“经过许多点的最短路径”，《剑桥哲学学会数学学报》，第55卷第4期，第299–327页，1959年。[7] Richard M. Karp，“平面旅行商问题划分算法的概率分析”，《运筹学数学》，第2卷第3期，第209–224页，1977年。[8] Dimitris Bertsimas、Philippe Chervi 和 Michael Peterson，“随机车辆路径问题的计算方法”，《交通科学》，第29卷第4期，第342–352页，1995年。[9] Ludger R¨uschendorf Birgit Anthes，“关于 r^d 中的加权欧几里得匹配问题”，《数学应用》，第28卷第2期，第181–190页，2001年。[10] John J. Enright 和 Emilio Frazzoli，“Reeds-Shepp车和差速驱动机器人的旅行商问题”，载于第45届 IEEE 决策与控制会议论文集，2006年，第3058–3064页。[11] K. Savla、E. Frazzoli 和 F. Bullo，“关于 Dubins 车辆的点对点问题和旅行推销员问题”，载于2005年美国控制会议论文集，2005年，第786–791页，第2卷。[12] Ketan Savla、Francesco Bullo 和 Emilio Frazzoli，“关于双积分器的旅行推销员问题”，载于第45届 IEEE 决策与控制会议论文集，2006年，第5305–5310页。[13] Ketan Savla、Emilio Frazzoli 和 Francesco Bullo，“关于 Dubins 旅行推销员问题：新颖的近似算法”，载于《机器人学：科学与系统》，2006年。[14] Ketan Savla、Emilio Frazzoli 和 Francesco Bullo，“Dubins 车辆的旅行推销员问题”，《IEEE 自动控制汇刊》，第53卷第6期，第1378–1391页，2008年。[15] Sleiman Itani、Emilio Frazzoli 和 Munther A Dahleh，“动态系统的旅行推销员问题”，《IFAC 会议论文集》，第41卷第2期，第13318–13323页，2008年，IFAC 第17届世界大会。[16] Sleiman Itani，《动态系统与次可加泛函》，博士论文，麻省理工学院，2012年。[17] Ery Arias-Castro、David L. Donoho、Xiaoming Huo 和 Craig A. Tovey，“连点成线：一条正则曲线能经过多少随机点？”，《应用概率进展》，第37卷第3期，第571–603页，2005年。

[18] Aviv Adler 和 Sertac Karaman，“运动学与动力学车辆的随机旅行商问题与定向越野问题”，载于2016年IEEE国际机器人与自动化会议（ICRA），2016年，第2788–2795页。[19] Fr´ed´eric Jean，《非完整系统控制：从次黎曼几何到运动规划》，Springer数学讲义丛书。Springer国际出版公司，2014年。[20] Patrick Rebeschini，“学习的算法基础，第7讲笔记”，2020年9月。

附录 A

以极高概率

回顾一下，如果存在c_1、 c_2、 $c_3 > 0$，使得对所有充分大的 n，$\mathbb{P}[A_n] \geqslant 1 - c_1 e^{-c_2 n^{c_3}}$，那么事件序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 以极高概率发生。我们将探讨这一性质的重要推论，以及它与更常见的“以高概率”定义的区别（在该定义中，如果 $\lim_{n\to 0}\mathbb{P}[A_n] = 1$，且不对收敛速度施加任何额外条件，则称 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 以高概率发生）。

本质上，以极高概率（wvhp）收敛到 1 的速度快于任何多项式倒数，因此可以得到一些“以高概率”并不足以提供的额外信息：

引理 29. 如果 $\{A_n\}$ 以极高概率发生，那么

$$\mathbb{P}[(\max n : \neg A_n) < \infty] = 1 \tag{446}$$

也就是说，几乎必然存在某个有限的 n^*，使得对所有 $n > n^*$， A_n 都成立。

证明。我们利用博雷尔-坎特利引理来证明这一点。该引理指出，若事件序列 $\{E_n\}$ 具有 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}[E_n] < \infty$，则

$$\mathbb{P}[(\max n : E_n) < \infty] = 1 \tag{447}$$

但令 $E_n = \neg A_n$，我们有

$$\mathbb{P}[E_n] \leqslant c_1 e^{-c_2 n^{c_3}} \tag{448}$$

对于充分大的 n （例如， $n > n'$），有。当然，对于 $n \leqslant n'$，显然有界 $\mathbb{P}[E_n] \leqslant 1$。因此，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}[E_n] \leqslant n' + \sum_{n>n'} c_1 e^{-c_2 n^{c_3}} < \infty \tag{449}$$

因为 $c_1 e^{-c_2 n^{c_3}}$ （其递减速度快于任何 n^{-k}）是一个收敛级数。

因此， $\mathbb{P}[(\max n : A_n) < \infty] = 1$，这正是我们想要的。 □

我们还定义一个 随机变量“以极高概率”增长这一相关概念：

定义 17. 如果 $\{Z_n\}$ 是一个随机变量序列，且 $\alpha(n) : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 是任意函数，那么如果存在一个常数 $c > 0$，使得事件序列 $A_n = \{Z_n \leqslant c\alpha(n)\}$ 以极高概率发生，我们就称“$Z_n \overset{wvhp}{=} O(\alpha(n))$”。

类似地，如果存在一个常数 $c > 0$ ，使得 $A_n = \{Z_n \leqslant c\alpha(n)\}$ 以极高概率发生，我们就称 $Z_n \overset{wvhp}{=} \Omega(\alpha(n))$ ；如果存在常数 $c_2 > c_1 > 0$ ，使得 $A_n = \{c_1\alpha(n) \leqslant Z_n \leqslant c_2\alpha(n)\}$ 以极高概率发生，我们就称 $Z_n \overset{wvhp}{=} \Theta(\alpha(n))$ 。

最后，如果存在一个非负序列δ_n 满足 $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ ，使得“$Z_n \overset{wvhp}{\to} \alpha(n)$”以（乘法意义上的）方式成立，我们就称之为

$$B_n = \{1 - \delta_n \leqslant Z_n/\alpha(n) \leqslant 1 + \delta_n\} \tag{450}$$

以极高概率发生。

于是有以下结论：

引理30. 如果 $Z_1, Z_2, \ldots$ 和 $Z'_1, Z'_2, \ldots$ 是以n 为参数的随机变量序列，且对所有 n 都有 $Z_n \geq Z'_n$ ，那么

$$Z_n \overset{wvhp}{=} O(\alpha(n)) \implies Z'_n \overset{wvhp}{=} O(\alpha(n)) \tag{451}$$

$$\textit{and} \quad Z'_n \overset{wvhp}{=} \Omega(\alpha(n)) \implies Z_n \overset{wvhp}{=} \Omega(\alpha(n)) \tag{452}$$

证明. 这由定义可得：如果 $Z_n \overset{wvhp}{=} O(\alpha(n))$ ，那么存在某个 $c > 0$ 以及$c_1, c_2, c_3 > 0$ ，使得

$$\mathbb{P}[Z_n > c\alpha(n)] \leqslant c_1 e^{-c_2 n^{c_3}} \tag{453}$$

由于 $Z_n \geq Z'_n$ 蕴含 $\mathbb{P}[Z'_n > c\alpha(n)] \leqslant \mathbb{P}[Z_n > c\alpha(n)]$，式 (451) 得证。式 (452) 的证明类似。 □

引理31. 如果 $Z_n \overset{wvhp}{\to} \alpha(n)$，那么 $Z_n/\alpha(n) \to 1$ 几乎必然。

证明. 根据引理 29，以概率 1 存在某个有限的 n^* ，使得对所有$n > n^*$， B_n 都会发生。因此，对于 $n > n^*$，我们有

$$1 - \delta_n \leqslant Z_n/\alpha(n) \leqslant 1 + \delta_n \tag{454}$$

并且由于 $\delta_n \to 0$ 如 $n \to \infty$，结论得证。 □

下一个引理（连同定理 1）表明，我们关于 DSTSP 极高概率行为的主要结果可直接转化为期望值。

引理 32. 若 $\{Z_n\}$ 是一列非负随机变量，满足 $Z_n = \Theta(n^k)$ 以极高概率成立，且 $Z_n = O(n^\ell)$ （非概率上界），其中 $0 < k \leqslant \ell$，则 $\mathbb{E}[Z_n] = \Theta(n^k)$。

证明。我们通过根据以下事件将 $\mathbb{E}[Z_n]$ 分成三部分，给出其上界和下界：令 $A_n^{(1)} = \{Z_n < c_1 n^k\}$； $A_n^{(2)} = \{c_1 n^k \leqslant Z_n \leqslant c_2 n^k\}$ （其中 $0 < c_1 < c_2$ 如定义 17 所示）；以及 $A_n^{(3)} = \{c_2 n^k < Z_n\}$。于是：

$$\mathbb{E}[Z_n] = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}[A_n^{(i)}]\, \mathbb{E}[Z_n \mid A_n^{(i)}] \tag{455}$$

然后我们可以为这些量确定上界和下界，因为： $\mathbb{P}[A_n^{(2)}] \geqslant 1 - b_1 e^{-b_2 n^{b_3}}$ （对于 b_1、 b_2、 $b_3 > 0$，如定义 4 所示），我们知道 $\mathbb{P}[A_n^{(1)}]$、 $\mathbb{P}[A_n^{(3)}] \leqslant b_1 e^{-b_2 n^{b_3}}$；并且 $\mathbb{E}[Z_n \mid A_n^{(i)}] = O(n^\ell)$ （且它们非负），以及 $\mathbb{E}[Z_n \mid A_n^{(2)}] = \Theta(n^k)$ （根据定义）。

然后，由于 $b_1 e^{-b_2 n^{b_3}} \to 0$ 比 $n^{-\ell}$ 更快，项 $i = 1$ 和 3 在 $n \to \infty$ 时趋于零，而项 $i = 2$ 趋于 $\Theta(n^k)$，因此结论成立。 □

Th这表明推论 1 可直接由定理 1 和命题 1 得出 .

附录 B

等正则控制仿射动力学

在本附录中，我们将说明，若 Π 是对称的，且元假设 1 成立（即 Π是控制仿射且等正则的，并且 $[\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}}$ 包含于 $\mathcal{Q}$的一个紧子集中），则第 IV 节中的许多假设都可直接得出，或可由其他一些更简单、更易验证的条件推出。我们将大量借鉴 Frederic Jean 所著《非完整系统控制》 [19]中的符号和术语。我们将用到以下概念：

- 我们有控制向量场 h_1^{cont}、……、 h_m^{cont}（见第二节 C），它们定义在 d 维流形 $\mathcal{Q}$ 上，并定义了我们的控制仿射系统。对于向量场 h （不一定是控制向量场之一），我们用 $\exp(zh)$ 表示沿着 h 运动的函数，运动时间为 z；也就是说，它接受 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$ 并返回一个新点 $\exp(zh)(\boldsymbol{q})$ ，该点是从 $\boldsymbol{q}$ 沿着 h 运动 z 个时间单位后到达的点。- h_1^{cont}、……、 h_m^{cont} 的李代数表示通过线性组合和李括号可以生成的方向集合，我们假设它们在每个 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$ 处都张成切空间（Chow 条件， [19] 定义 1.6）。一个来自自由李

代数、作用于 $[m]$ 上的李括号表示对 m 个未指定元素进行的一系列李括号运算；随后可将其应用于我们的控制向量场集合。我们用 h_I 表示 h_1^{cont}、……、h_m^{cont} 上的李代数中与 I 对应的向量，并用 $|I|$ 表示李括号 I 的长度（即生成它所需的括号运算次数）。

- 适配标架（[19], 第 36 页）指一组向量场，用于在某个 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$ 周围生成坐标映射（并张成 $T_{\boldsymbol{q}}(\mathcal{Q})$），且与李代数相容；一致球盒定理中的盒通过该坐标映射定义。• 正则点（[19], 定义 2.4）是指构型 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$，在这些构型处，李代数在 $\boldsymbol{q}$周围的邻域内表现为光滑。

这使我们能够使用主要工具：

一致球盒定理（[19], 定理 2.4）。若 $\mathcal{Q}^* \subseteq \mathcal{Q}$ 是紧致的，则存在常数$0 < c < C$ 和 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}^*$ 和 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$，以及任意适配标架$\boldsymbol{H} = (h_{I_1}, \ldots\ldots, h_{I_d})$（控制向量场的李代数中的一组元素），在 ($\boldsymbol{q}$处，$\varepsilon$),

$$\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, c\varepsilon) \subset R_\varepsilon(\boldsymbol{q}) \subset \mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, C\varepsilon) \tag{456}$$

其中，$\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, \varepsilon) = \{\exp(z_1 h_{I_1}) \circ \cdots \circ \exp(z_d h_{I_d})(\boldsymbol{q}) \colon |z_i| \leqslant \varepsilon^{|I_i|} \ \forall i\}$。

这表明，在较小尺度下，ε 构型 ε-可达集 $R_\varepsilon(\boldsymbol{q})$ 包含一个具有特定维度和方向的盒，而它又包含在一个维度和方向相同、但按某个常数放大的盒内。定义这些盒所用的坐标系由 $\boldsymbol{H}$给出：坐标为 $(z_1, \ldots\ldots, z_d)$ 的点，是从 $\boldsymbol{q}$ 出发，沿着 h_{I_d}行进z_d，再沿着 $h_{I_{d-1}}$行进 z_{d-1}，依此类推所到达的点。$|z_i|$ 的取值范围给出了 $\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, \varepsilon)$的维度。直观而言，这便提供了一种覆盖 $R_\varepsilon(\boldsymbol{q})$ 的方法：选取一组恰当的 $\boldsymbol{q}'$，用 $R_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{q}')$的内接盒铺满 $R_\varepsilon(\boldsymbol{q})$ 的外接盒，从而以若干个构型$(\varepsilon/2)$-可达集完成覆盖。

我们从引理 4 开始。该引理指出，如果对称的 Π 满足元假设 1，那么假设8也成立。

引理 4 的证明。我们将证明，假设 8 的一个稍强版本成立，其中存在某个 $b > 1$，使得存在某个 $\varepsilon^* > 0$，对于任意 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$ 以及

$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$ 存在一个由构型组成的集合 $Q_\varepsilon(\boldsymbol{q})$，使得

$$R_{2\varepsilon}(\boldsymbol{q}) \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{q}' \in Q_\varepsilon(\boldsymbol{q})} R_\varepsilon(\boldsymbol{q}') \text{ and } |Q_\varepsilon(\boldsymbol{q})| \leqslant b\,. \tag{457}$$

这比假设 8 更强，因为它省去了 $\rho > 0$ 近似因子，因此若该条件成立，假设 8 也显然成立（我们只需令 $Q_{\rho,\varepsilon}(\boldsymbol{q}) = Q_\varepsilon(\boldsymbol{q})$对所有 $\rho > 0$都成立）。需要说明的是，假设 8 采用了更一般的表述，因为在某些情形下，这样可以得到更小的 b，从而改进定理 1 中的下界。

我们选取某个正则的 $\boldsymbol{q} \in [\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}}$，它包含在 $\mathcal{Q}$的某个紧子集中。因此，我们可以找到一个适配标架 $\boldsymbol{H}$，它位于 $\boldsymbol{q}$ 处，并且对 $\boldsymbol{q}$的某个邻域内的所有 $\boldsymbol{q}'$ 都是适配标架；令 ε 充分小，使得所有 $\boldsymbol{q}' \in R_\varepsilon(\boldsymbol{q})$ 都处于该邻域内，并且满足一致球盒定理中的 $\varepsilon < \varepsilon_0$。然后，若 $0 < c < C$ 如一致球盒定理中所定义，

$$R_\varepsilon(\boldsymbol{q}) \subset \mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, C\varepsilon)\,. \tag{458}$$

这是一个盒，其沿维度 $i \in [d]$ 的大小为 $2(C\varepsilon)^{|I_i|}$。此外，对于任意 $\boldsymbol{q}' \in R_\varepsilon(\boldsymbol{q})$，我们知道

$$\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}', c\varepsilon/2) \subset R_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{q}')\,. \tag{459}$$

但这些盒与盒 $_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, C\varepsilon)$ 位于同一坐标系中，后者沿维度 $i \in [d]$ 的大小为 $2(c\varepsilon/2)^{|I_i|}$；这意味着它是盒 $_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, \varepsilon)$ 沿维度 i 大小的 $(c/(2C))^{|I_i|}$ 分数，而这个大小显然是关于 ε 的常数。因此，我们可以使用

$$b = \prod_{i=1}^{d} \lceil (2C/c)^{|I_i|} \rceil \tag{460}$$

这样的盒来覆盖盒 $_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, C\varepsilon)$。将它们的中心称为 $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_b$。于是我们有

$$R_\varepsilon(\boldsymbol{q}) \subset \mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, C\varepsilon) \subseteq \bigcup_{j=1}^{b} \mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}_j, c\varepsilon/2) \subseteq \bigcup_{j=1}^{b} R_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{q}_j) \tag{461}$$

这样就完成了。 □

接下来我们考虑引理 5，它断言：如果对称的 Π 满足元假设 1，那么假设 9 就成立。

引理 5 的证明。为简便起见，我们假设 $[\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}}$ 本身是紧致的（否则，我们取一个紧超集；如果 $P(1/\varepsilon)$ 个构型的 ε 可达集能够覆盖它，那么它也显然能被这些可达集覆盖）。

根据一致球盒定理，存在常数 $0 < c < C$ 和 $0 < \varepsilon_0$，使得任意 $\boldsymbol{q}$ 都有一个适配标架 $\boldsymbol{H} = (h_{I_1}, \ldots, h_{I_d})$，并且对于任意 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 和 $\boldsymbol{q} \in [\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}}$,

$$\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, c\varepsilon) \subset R_{\varepsilon}(\boldsymbol{q}) \subset \mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, C\varepsilon)\,. \tag{462}$$

我们令 $\varepsilon^*(\boldsymbol{q})$ 表示可达集的任意一个充分小的半径，使得 $R_{\varepsilon^*(\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{q})$ 包含在 $\boldsymbol{q}$ 的邻域内；在该邻域上，$\boldsymbol{H}$ 在所有其他 $\boldsymbol{q}'$处也都是一个适配标架。不失一般性，我们可以假设 $\varepsilon^*(\boldsymbol{q}) \leqslant \varepsilon_0$。接下来考虑 $R_{\varepsilon^*(\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{q})$的开版本，它是一个包含 $\boldsymbol{q}$ 的开集（因为满足 Chow 条件的控制仿射动力学会在 $\boldsymbol{q}$ 周围诱导出可达集，且这些可达集包含 $\boldsymbol{q}$的一个邻域）。因此（对于开可达集）

$$[\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}} \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{q} \in [\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}}} R_{\varepsilon^*(\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{q}) \tag{463}$$

并且由于 $[\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}}$ 是紧致的，存在一个有限子覆盖。令 S 为该有限子覆盖中集合的数量，并令 $\boldsymbol{q}_1$，……，$\boldsymbol{q}_S$为这些集合中心处的构型，于是

$$[\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{S} R_{\varepsilon^*(\boldsymbol{q}_i)}(\boldsymbol{q}_i) \tag{464}$$

根据上文引理 4 的证明，我们知道，对于任意 $\boldsymbol{q}' \in R_{\varepsilon^*(\boldsymbol{q}_i)}(\boldsymbol{q}_i)$ 和任意 $\varepsilon < \varepsilon^*(\boldsymbol{q}_i)$，集合 $R_{\varepsilon}(\boldsymbol{q}')$ 可以由 b 个构型 $(\varepsilon/2)$-可达集覆盖，而每个这样的集合又可以由 b 个构型 $(\varepsilon/4)$-可达集覆盖，依此类推。因此，对于任意整数 $k \geqslant 1$，$R_{\varepsilon}(\boldsymbol{q}')$ 可以由 b^k 个构型 $(2^{-k}\varepsilon)$-可达集覆盖。特别地，$R_{\varepsilon^*(\boldsymbol{q}_i)}(\boldsymbol{q}_i)$ 可以由 b^k 个构型 $(2^{-k}\varepsilon^*(\boldsymbol{q}_i))$-可达集覆盖。

令 $\varepsilon^*_{\min} := \min_i \varepsilon^*(\boldsymbol{q}_i)$ 和 $\varepsilon^*_{\max} := \max_i \varepsilon^*(\boldsymbol{q}_i)$。那么给定 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*_{\min}$，需要多少个构型 ε-可达集才能覆盖 $[\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}}$? 我们令

$$k_{\varepsilon} := \min(k : \varepsilon \leqslant 2^{-k}\varepsilon^*_{\max}) = \lceil \log_2(\varepsilon^*_{\max}/\varepsilon) \rceil \leqslant \log_2(\varepsilon^*_{\max}/\varepsilon) + 1 \tag{465}$$

这也意味着

$$\varepsilon \geqslant 2^{-k_{\varepsilon}}\varepsilon^*_{\max} \tag{466}$$

那么，每个 $R_{\varepsilon^*(\boldsymbol{q}_i)}(\boldsymbol{q}_i)$ 都可以由 $b^{k_{\varepsilon}}$ 个构型 $2^{-k_{\varepsilon}}\varepsilon^*_{\max}$-可达集覆盖；使用相同的锚点，这意味着每个 $R_{\varepsilon^*(\boldsymbol{q}_i)}(\boldsymbol{q}_i)$ 都可以由 $b^{k_{\varepsilon}}$ 个构型 ε-可达集覆盖。但我们可以给出上界

$$b^{k_{\varepsilon}} \leqslant b^{\log_2(\varepsilon^*_{\max}/\varepsilon)+1} = b(\varepsilon^*_{\max}/\varepsilon)^{\log_2 b} = c^*\varepsilon^{-\log_2 b} \tag{467}$$

其中 $c^* = b(\varepsilon^*_{\max})^{\log_2 b}$ 是关于 ε 的常数。注意，我们必须对所有 S 个盒 $R_{\varepsilon^*(\boldsymbol{q}_i)}(\boldsymbol{q}_i)$ 都这样做（其中 S 也不依赖于 ε），于是可得，$[\mathcal{X}_f]^{\mathcal{Q}}$ 可以由 $\leqslant Sc^*\varepsilon^{-\log_2 b}$ 个构型 ε-可达集覆盖；该数量关于 $1/\varepsilon$，是多项式数量，因此证明完毕。

□

A. 等正则条件下的层次单元结构

在本附录中，我们将说明，在元假设 1（以及关于函数 $[\cdot]_{\mathcal{X}}$ 性质的若干附加假设）下，如何保证任意给定的、满足 $s = 2$ 的 $x \in \mathcal{X}_f$ 附近存在层次单元结构（HCS），即证明引理 6。我们沿用本附录第一部分中的记号，包括令 $d = \dim(\mathcal{Q})$；并令 $d' = \dim(\mathcal{X}) \leqslant d$。

我们希望定义与李代数等价的概念，但针对的是投影到 $\mathcal{X}$ 上的动力学；如果李括号向量场在 $\boldsymbol{q}$ 处到 $\mathcal{X}$ 的投影（或者说，$h_I(\boldsymbol{q}) \in T_{\boldsymbol{q}}\mathcal{Q}$ 到 $T_x\mathcal{X}$ 的投影 $[h_I(\boldsymbol{q})]_{\mathcal{X}}$，其中 $x = [\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}$）表现得光滑，我们就称 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$ 是投影正则的。在这种情况下，γ 在 $\boldsymbol{q}$ 周围的一个邻域内是一致的。我们作如下假设：

假设 11. 对任意 $x \in \mathcal{X}_f$ 和任意 $\delta > 0$，存在一个投影正则的 $\boldsymbol{q}$，使得$[\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}} = x$ 且 $g(\boldsymbol{q}) \geqslant (1-\delta)g(x)$。

为方便起见，我们定义局部层次单元结构（LHCS），它是 HCS 的一个修改版本：

定义18. 一个以$\boldsymbol{q}_0 \in \mathcal{Q}$ 为根节点、半径为 $\varepsilon_0 > 0$、效率参数为 $\alpha \leqslant 1$、缩放参数为 s 的 ζ-正则局部层次单元结构 $\mathrm{LHCS}(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0, \alpha, s, \zeta)$，由以下元素组成：

- 一个若尔当可测单元 $S(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0) \subseteq \mathcal{X}$，满足

$$S(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0) \subseteq \bar{R}_{\varepsilon_0}(\boldsymbol{q}_0) \text{ and } \mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(S(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0)) \geqslant \alpha \breve{g}^{(\zeta)}(\boldsymbol{q}_0)\varepsilon_0^{\gamma} \tag{468}$$

其中 $\breve{g}^{(\zeta)}$ 是 g 的下 ζ-正则化近似。

- 一组具有半径为 $\varepsilon_0/s,$ 、效率参数为 α、缩放参数为 s，并以 $\boldsymbol{q}_1$，……，$\boldsymbol{q}_{s^\gamma}$为根节点的 s^γ 两两不相交的 ζ正则层次单元结构，满足

$$S(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon_0) \subseteq \bigcup_{j=1}^{s^\gamma} S(\boldsymbol{q}_j, \varepsilon_0/s) \quad \text{and} \quad \boldsymbol{q}_j \in \bar{R}_{\varepsilon_0}(\boldsymbol{q}_0) \text{ for all } j \tag{469}$$

定义18与定义 7之间的区别在于：相对于 $\check{}g^{(\zeta)}(\boldsymbol{q}_0)\varepsilon_0^\gamma$ （当 ε_0 较小时，它界定了 $\boldsymbol{q}_0$ 处工作空间可达集的体积），单元的体积只需达到某个特定大小，而不是相对于 $\check{}g^{(\zeta)}([\boldsymbol{q}_0]_{\mathcal{X}})\varepsilon_0^\gamma$；也就是说，与其说单元需要相对于 $x_0 = [\boldsymbol{q}_0]_{\mathcal{X}}$周围最大的此类单元足够大，不如说只需相对于从锚点 $\boldsymbol{q}_0$ 可达的工作空间可达集足够大。

请注意，在每个 $\boldsymbol{q}_0 \in \mathcal{Q}$ 周围都有 LHCS 的条件，实际上比在每个 $x_0 \in \mathcal{X}_f$周围都有 HCS 更强；这是因为根据定义 $g(x) = \sup_{\boldsymbol{q}:[\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}=x} g(\boldsymbol{q})$，我们知道可以找到 $\boldsymbol{q}$，使得 $[\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}} = x_0$，从而使 $g(\boldsymbol{q})$ 任意接近 $g(x_0)$，然后直接将其用作我们的 $\boldsymbol{q}_0$ （采用近似$\check{}^{(\zeta)}$ 不会影响这一点，因为 $\zeta \to 0$ 只在一个零测闭集之外成立，见 D 节）。

我们希望像 B 节中那样，结合一致球盒定理使用元假设 1，从而在 $\boldsymbol{q}_0$ 周围的一个邻域中创建一个坐标映射，使可达集能够内接于具有给定维度的矩形中（并被一个矩形外接，该矩形的维度是内接矩形维度的固定倍数）。引理 4 关注的是用数量固定的、构型为 $(\varepsilon/2)$ 的可达集 $R_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{q}_1), \ldots, R_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{q}_b)$ 的内接矩形，覆盖构型为 ε 的可达集 $R_\varepsilon(\boldsymbol{q})$ 的外接矩形（从而证明 $R_\varepsilon(\boldsymbol{q}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{b} R_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{q}_j)$）；而在我们的情形中，我们将以内接矩形作为单元，因此，我们要用较小可达集（子单元）的内接矩形覆盖可达集（单元）的内接矩形。

另一个需要注意的问题是，在引理 4 中，我们需要对构型可达集执行这种覆盖；然而，HCS 和 LHCS 涉及工作空间中的单元。因此，我们需要仔细考察投影函数 $[\cdot]_{\mathcal{X}}$。此外，在引理 4 中，只需用任意固定数量 b 的较小矩形实现覆盖即可；对于 HCS 和 LHCS，则必须恰好用 2^γ 个较小单元实现覆盖（因为 $s = 2$ 对后续内容而言）。

我们首先考虑一个简化情形，其中 $\mathcal{Q} = \mathcal{X}$（例如，Dubins车需要访问一些目标点，且每个目标点都有一个随机方向，车辆需要沿该方向访问该点）；在这种情形下，投影函数为恒等函数。固定一些 $\boldsymbol{q}_0 \in \mathcal{Q}$，并令$\boldsymbol{H} = (h_{I_1}, \ldots\ldots, h_{I_d})$为 $\boldsymbol{q}$ 处的一个适配标架，尺度为 ε，其中 I_1 是李代数的元素；我们令 $r_i = |I_i|$和$r = \sum_{i=1}^{d} r_i$；由于 $\mathcal{Q} = \mathcal{X}$，在这种情形下 $\gamma = r$ （因为这个盒的体积与 ε^r 成正比，当 $\varepsilon \to 0$时）。于是，$\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}_0, \varepsilon)$ 是由适配标架生成的坐标映射中的一个盒，其边平行于坐标轴，并且沿坐标映射中维度 i 的长度为 $2\varepsilon^{r_i}$。

于是，存在 $\boldsymbol{q}_0$ 的一个邻域 $\mathcal{R}$ 以及某个 $\varepsilon_0^* > 0$ （我们加上 $\cdot^*$ 以将其与HCS和LHCS定义中的 ε_0 区分开来）和一些常数 $0 < c < C$ ，使得对于 $\boldsymbol{q}_0$ 的某个邻域中的任意 $\boldsymbol{q}$ 以及任意 $\varepsilon < \varepsilon_0^*$

$$\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, c\varepsilon) \subset R_\varepsilon(\boldsymbol{q}) \subset \mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, C\varepsilon) \tag{470}$$

（参见一致球盒定理）。

给定盒$_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, c\varepsilon)$，我们注意到，可以用 2^r 个盒$_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}', c(\varepsilon/2))$,覆盖它，因为这些是长度为 $2(c\varepsilon/2)^{r_i} = 2^{-r_i} \cdot 2(c\varepsilon)^{r_i}$, 的更小盒，因此其长度恰好是盒$_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, c\varepsilon)$ 在维度 i上的长度的 2^{-r_i}。由于 $r_i = |I_i|$ 是一个整数（李括号 I_i的长度），这意味着 2^{r_i} 也是一个整数，因此我们可以将盒$_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, c\varepsilon)$的长度划分为 2^{r_i} 段，每段长度恰好为 2^{-r_i}。对每个 $i = 1.....d$ 重复这一过程，就能将盒$_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, c\varepsilon)$划分为恰好 $\prod_{i=1}^{d} 2^{r_i} = 2^r = 2^\gamma$个形如盒$_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}', c(\varepsilon/2))$的盒。因此，在此情况下，以 $S(\boldsymbol{q}, \varepsilon) =$ 盒$_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, c\varepsilon)$ 作为我们的单元，我们就得到了局部层次单元结构；由于外接盒盒$_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, C\varepsilon)$的存在，我们知道存在一个充分小的$\varepsilon^* > 0$ ，使得当HCS的尺度为 $\leqslant \varepsilon^*$时，效率参数 α （单元体积与其所内接的可达集体积之比）满足 $\alpha \geqslant \frac{1}{2}(c/C)^r$。

注 16. 流形上“盒”的体积与其在坐标映射中的表示的体积并不相同；首先， $\boldsymbol{H}$ 中的向量可能具有不同的大小，而流形 $\mathcal{Q}$ 的曲率也会产生影响。不过，当 $\varepsilon \to 0$时，盒 $_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}', c\varepsilon)$ 的体积与盒 $_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}', C\varepsilon)$的体积之比趋近于 $(c/C)^r$。因此，存在一个 $\varepsilon^* > 0$ ，使得对于 $\boldsymbol{q}$的邻域中的所有 $\varepsilon \leqslant \varepsilon^*$ 和 $\boldsymbol{q}'$

$$\frac{\mathrm{Vol}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, c\varepsilon))}{\mathrm{Vol}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, C\varepsilon))} \geqslant \frac{1}{2}(c/C)^r \tag{471}$$

不过，我们还希望将其扩展到 $\mathcal{X} \neq \mathcal{Q}$的情形；尽管相同的单元结构可以实现覆盖（只需将所有单元投影到工作空间），但问题在于，当 $\mathcal{X} \neq \mathcal{Q}$时，我们会得到 $\gamma < r$ ，因此用 2^r 个子单元进行覆盖数量过多。我们将改为从构型空间的子单元中选取一个大小为 2^γ的子集，使其在 $\mathcal{X}$ 上的投影能够覆盖盒 $_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, c\varepsilon)$ 的投影（近似因子会随着 $\varepsilon \to 0$而减小）。

如第 II 节所述，我们假设 $[\cdot]_{\mathcal{X}}$ 在局部表现为从一个（d 维）欧几里得空间到一个（d' 维）子空间的投影。令我们固定某个 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$，并令 $x = [\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}$。现在，我们可以将 $\boldsymbol{q}$ 的一个足够小的邻域 $\mathcal{V}$ 及其投影 $[\mathcal{V}]_{\mathcal{X}}$

到 $\mathcal{X}$ 上都视为线性的（以 $\boldsymbol{H}$ 作为 $\mathcal{Q}$ 中的基）。注意，对于任意 $\boldsymbol{q}' \in \mathcal{V}$ 和任意足够小的 ε，根据一致球盒定理，我们可以在 $R_\varepsilon(\boldsymbol{q}')$ 中内接盒 $\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}', c\varepsilon)$；如前所述，可以将其划分为 2^r 个形如 $\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}'', c(\varepsilon/2))$ 的子盒。现在考虑这些盒在 $\mathcal{X}$ 上的投影：我们将证明，适当选取 2^r 个子盒中的一组 2^γ（并稍微放大一点，且随着 $\varepsilon \to 0$ 增大，这种放大将逐渐减小），便可覆盖盒 $\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}', c\varepsilon)]_{\mathcal{X}}$ 的投影[。

h 在 $\mathcal{Q}$上的向量场对任意 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$ 都会产生一个切向量 $h(\boldsymbol{q}) \in T_{\boldsymbol{q}}\mathcal{Q}$。将其投影到 $\mathcal{X}$ 上（并令 $x = [\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}$），我们便得到 $[h(\boldsymbol{q})]_{\mathcal{X}} \in T_x\mathcal{X}$ 上的一个切向量（沿着 $h(\boldsymbol{q})$ 从 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$ 出发的移动，投影后对应于沿着 $[h(\boldsymbol{q})]_{\mathcal{X}}$ 从 $x = [\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}} \in \mathcal{X}$出发的移动）。注意，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) = \{h_{I_1}(\boldsymbol{q}), \ldots, h_{I_d}(\boldsymbol{q})\}$ 是 $T_{\boldsymbol{q}}\mathcal{Q}$的一组基；因此

$$[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})]_{\mathcal{X}} = \{[h_{I_1}(\boldsymbol{q})]_{\mathcal{X}}, \ldots, [h_{I_d}(\boldsymbol{q})]_{\mathcal{X}}\} \tag{472}$$

¯张成 $T_x\mathcal{X}$。我们记 $h_i(\boldsymbol{q}) := [h_{I_i}(\boldsymbol{q})]_{\mathcal{X}}$，并记

$$\bar{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}) := [\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})]_{\mathcal{X}} = \{\bar{h}_1(\boldsymbol{q}), \ldots, \bar{h}_d(\boldsymbol{q})\}\,. \tag{473}$$

对于任意 $A \subseteq [d]$，令 $\boldsymbol{H}_A := \{h_{I_i}\colon\ i \in A\}$（并令 $\boldsymbol{H}_A(\boldsymbol{q}) := \{h_{I_i}(\boldsymbol{q})\colon\ i \in A\}$），同理 _ _$\boldsymbol{H}_A := \{h_i(\boldsymbol{q})\colon\ i \in A\}$。

¯注 17。请务必记住，尽管符号如此表示，$h_i(\boldsymbol{q})$ 是_$T_x\mathcal{X}$ 在 $x = [\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}$处的一个切向量；其中的 $\boldsymbol{q}$ 用于说明我们指的是哪个切向量。同样，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$ 是 $T_x\mathcal{X}$中的一组 d 切向量。

然后，对于任意满足 $|A| = d'$ 的 $A \subset [d]$，我们定义以下内容，对任意 $\boldsymbol{q}' \in \mathcal{V}$ 和 $x' = [\boldsymbol{q}']_{\mathcal{X}}$:

$$\text{盒}_{\boldsymbol{H}_A}(\boldsymbol{q}',\ \varepsilon) = \{\exp(z_1 h_{I_1}) \circ \cdots \circ \exp(z_d h_{I_d})(\boldsymbol{q}')\colon\ |z_i| \leqslant \varepsilon^{|I_i|}\ \ \forall i \in A \text{和}\ \ z_i = 0\ \ \forall i \notin A\} \tag{474}$$

这与盒$_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}',\ \varepsilon)$ 类似，但我们只能使用 $\boldsymbol{H}_A$ 中的向量场；注意，盒$_{\boldsymbol{H}_A}(\boldsymbol{q}',\ \varepsilon) \subseteq$¯盒$_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}',\ \varepsilon)$。我们还记 $r_A\colon = \sum_{i\in A} r_i$。那么，当 ε 充分小时，若 $\boldsymbol{H}_A$ 线性无关，

$$\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}([\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}_A}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)]_{\mathcal{X}}) = \Theta(\varepsilon^{r_A})\,. \tag{475}$$

¯我们首先考虑一个简化情形：对于任意大小为 d' 的子集 $A \subseteq [d]$，$\boldsymbol{H}_A(\boldsymbol{q})$ 都线性无关。由于我们的向量场和投影函数都是光滑的，这一性质将会成立

在 $\boldsymbol{q}$ 周围的某个邻域内；我们假设该性质在上文讨论的邻域 $\mathcal{V}$ 内成立（否则，只需取 $\mathcal{V}$ 与该性质成立的邻域的交集）。

注 18. 请注意，这种特殊情形并非总是适用：例如， $\mathbb{R}^2$ 上的 Reeds-Shepp车不满足该条件，因为向量场 $h_2 = [0; 0; 1]$ （请注意， $h_1 = [\cos(\theta), \sin(\theta), 0]$）用于控制车辆转向，但在 $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ 上的投影为零（也就是说，它与任何其他向量场都不线性无关）。沿着该向量场行驶会使车辆旋转，但不会影响其在 $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$中的位置。

在这种情况下，不失一般性，令 $r_1 \leqslant \cdots \leqslant r_d$。然后令 $A^* = [d']$，显然它满足 $A^* = \arg\min_A r_A$。我们首先断言 $r_{A^*} = \gamma$。

对于任意满足 $|A| = d'$ 的 $A \subseteq [d]$，考虑一个序列 $\boldsymbol{a} = (a_i : i \in [d]\backslash A)$ ，其中 $a_i \in \{-1, 1\}$ 对所有 $i \in [d]\backslash A$ 均成立；也就是说，对于每个不属于 A 的指标，我们赋值为 -1 或 1。然后定义：

$$\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}_A^{(\boldsymbol{a})}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon) = \tag{476}$$

$$\{\exp(z_1 h_{I_1}) \circ \cdots \circ \exp(z_d h_{I_d})(\boldsymbol{q}') : |z_i| \leqslant \varepsilon^{|I_i|} \ \ \forall i \in A, z_i = a_i \varepsilon^{|I_i|} \ \ \forall i \notin A\} \tag{477}$$

这表示 $\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)$ 的一个 d' 维面，其维度沿着 h_{I_i} 延伸 $i \in A$；序列 $\boldsymbol{a}$ 表示这是哪个面（即，对于其余维度，它位于盒子的哪一侧）。注意，对于每个 A，这类面有固定数量 $2^{d-d'}$ 个；大小为 d' 的集合 A 也有固定数量 $\binom{d}{d'}$ 个，因此这类面总共有 $2^{d-d'}\binom{d}{d'}$ 个。现在我们注意到

$$[\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)]_{\mathcal{X}} = \bigcup_{A \subseteq [d] : |A| = d'} \ \bigcup_{\boldsymbol{a} \in \{-1,1\}^{[d]\backslash A}} [\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}_A^{(\boldsymbol{a})}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)]_{\mathcal{X}} \tag{478}$$

这就是说，$\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)$ 在 $\mathcal{X}$ 上的投影，等于其所有维度为 d' 的面在 $\mathcal{X}$ 上的投影之并。这意味着

$$\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}([\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)]_{\mathcal{X}}) \leqslant \sum_{A \subseteq [d] : |A| = d'} \ \sum_{\boldsymbol{a} \in \{-1,1\}^{[d]\backslash A}} \mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}([\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}_A^{(\boldsymbol{a})}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)]_{\mathcal{X}}) \tag{479}$$

$$= \Theta(\varepsilon^{r_{A^*}}) \tag{480}$$

因为它是若干个（有界数量的） ε^{r_A} 阶项之和，其中涉及不同的 A，且 $r_{A^*} = \min_A r_A$。此外，由于盒$_{\boldsymbol{H}_{A^*}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon) \subseteq$盒$_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)$，我们有

$$\Theta(\varepsilon^{r_{A^*}}) = \mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}([\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}_{A^*}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)]_{\mathcal{X}}) \leqslant \mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}([\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)]_{\mathcal{X}}) \tag{481}$$

因此我们有

$$\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}([\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)]_{\mathcal{X}}) = \Theta(\varepsilon^{r_{A^*}}) \tag{482}$$

但是，由于小时间约束因子被定义为满足以下条件的值 γ

$$\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}([\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)]_{\mathcal{X}}) = \Theta(\varepsilon^{\gamma}) \tag{483}$$

因此 $\gamma = r_{A^*}$。这并不令人意外，因为二者都反映了将盒 $_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)$ 投影到 $\mathcal{X}$ 上所得的体积。

现在，我们将局部层次单元结构中位于 $\boldsymbol{q}'$ 附近、尺度为 ε 的一个单元取为 $S(\boldsymbol{q}', \varepsilon) = [$盒 $_{\boldsymbol{H}_{A^*}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)]_{\mathcal{X}}$。我们检查可知，它确实是一个 LHCS（缩放因子为 2）。我们可以按照一致球盒定理对盒 $_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)$ 所采用的相同方式，将盒 $_{\boldsymbol{H}_{A^*}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)$ 划分为 $2^{r_{A^*}} = 2^{\gamma}$ 个子盒 $_{\boldsymbol{H}_{A^*}}(\boldsymbol{q}'', \varepsilon/2)$；随后，这些子盒的投影便成为子单元。有一点需要注意：它可能没有较好的效率参数 α，并且还有可能做得更好；但我们在这里只是证明 LHCS 的存在性。

当对于所有 A，$\boldsymbol{H}_A(\boldsymbol{q})$ 并非线性无关时，会发生什么？仍有可能存在一个 A'，使得即使 $\boldsymbol{H}_{A'}(\boldsymbol{q})$ 不独立，仍然具有

$$\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}([\mathrm{Box}_{\boldsymbol{H}_{A'}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)]_{\mathcal{X}}) > 0 \tag{484}$$

尽管体积必须为 $o(\varepsilon^{r_{A'}})$。然而，如果它具有体积，那只能是通过李括号作用；因此，其体积为 $\Theta(\varepsilon^{r'_{A'}})$，其中 $r'_{A'} > r_{A'}$ 是一个整数，并且

$$\min(r_A : A \subseteq [d] \text{ s.t. } |A| = d' \text{ and } \bar{\boldsymbol{H}}_A(\boldsymbol{q}') \text{ is linearly independent}) \leqslant r'_{A'}. \tag{485}$$

因此，我们可以选择

$$A^* := \arg\min(r_A : A \subseteq [d] \text{ s.t. } |A| = d' \text{ and } \bar{\boldsymbol{H}}_A(\boldsymbol{q}') \text{ is linearly independent}) \tag{486}$$

那么，上述论证（尤其是方程 (478) 至 (483)）仍然成立，这表明 $r_{A^*} = \gamma$。接着，我们可以像之前一样使用 $S(\boldsymbol{q}', \varepsilon) = [$盒 $_{\boldsymbol{H}_{A^*}}(\boldsymbol{q}', \varepsilon)]_{\mathcal{X}}$ 作为我们的单元。

于是，对于几乎处处的 $\mathcal{X}_f$，任意给定 $\delta > 0$，我们都可以选择 $\boldsymbol{q}$，使得 $[\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}} = x$ 且 $\check{}g^{(\zeta)}(\boldsymbol{q}) \geqslant (1-\delta)\check{}g^{(\zeta)}(x) \geqslant (1-\delta)g_{\min}$；此时，$\boldsymbol{q}$ 周围的局部层次单元结构就是 x 周围的 HCS。存在一个效率参数 $\alpha > 0$，当 ε 充分小时，该参数对所有子层次单元结构都成立，因为 $\check{}g^{(\zeta)}(\boldsymbol{q})$ 远离零且利普希茨连续，也就是说，在小尺度下可以将其视为常数。

附录 C

精确 HCS 覆盖的存在性

在本附录中，我们将正式证明 ρ-精确 HCS 覆盖的存在性，即从假设 10 推出引理 7 和引理 8。回顾一下，假设 10 指出，$\mathcal{X}_f$ 中的每个点都包含在某个 HCS 内；引理 7 指出，因此我们可以用有限个尺度为 ε_0 的 HCS 覆盖 $\mathcal{X}_f$；引理 8 则指出，我们可以在任意小的尺度 ε_0 下做到这一点，并使精度参数 $\rho > 0$ 任意小。

引理 7 的证明。根据假设 10，每个 $x \in \mathcal{X}_f$ 都包含在某个 HCSS_x的内部。因此，令 S_x^{int} 为 S_x的内部，我们知道 $\mathcal{X}_f \subseteq \bigcup_x S_x^{\text{int}}$。但是根据假设2，$\mathcal{X}_f$ 是紧致的，因此存在这些 S_x 中的一个有限子集，其内部覆盖 $\mathcal{X}_f$。 □

引理 8 的证明。我们利用这样一个事实：根据定义，ε_0尺度的层次单元结构由 s^γ 个更小的 ε_0/s尺度（子）层次单元结构组成，而这些结构又各自可以继续细分，依此类推。我们还利用这样一个事实：在每个 HCS 中，子层次单元结构彼此不相交，并且任何尺度为 ε 的 HCS 都包含在 $\mathcal{X}$ 中的某个半径为 $c_\Pi\varepsilon$的球内。

根据引理 7，我们有一个 HCS 覆盖 $S_1^{(\text{start})}, \ldots, S_{m^{(\text{start})}}^{(\text{start})}$，其尺度为 $\varepsilon_0^{(\text{start})}$，且为 ζ-正则，效率参数和缩放参数分别为 α, s；它的精度参数 $\rho > 0$ 可能非常大，但由于它是一个覆盖，我们知道 $\mathcal{X}_f \subseteq \bigcup_{j=1}^{m^{(\text{start})}} S_j^{(\text{start})}$。接下来，我们将利用它构造另一种覆盖 $S_1, \ldots, S_m$（尺度更小，为 ε_0），这种覆盖除了是 ζ-正则之外，还是 ρ-精确的。对于任意若尔当可测子集 $A \subseteq \mathcal{X}_f$，令 $\text{Int}(A)$ 表示其内部，并且

$$\text{Int}_\eta(A) := \{x \in A : d_{\mathcal{X}}(x, x') \geqslant \eta \text{ for all } x' \notin A\} \tag{487}$$

即 η 的 A 内部（距离 A 外部的任何点至少 η 距离的点）。接下来注意以下结论（涉及的所有集合都是若尔当可测的）：

a. 体积$_{\mathcal{X}}(A) =$ 体积$_{\mathcal{X}}(\text{Int}(A)) = \lim_{\eta\to 0}$ 体积$_{\mathcal{X}}(\text{Int}_\eta(A))$.

b. 对任意 $A_1, \ldots, A_k \subseteq \mathcal{X}$，令 $A = \bigcap_{j=1}^k A_j$，则有 $\text{Int}_\eta(A) = \bigcap_{j=1}^k \text{Int}_\eta(A_j)$，且 $\text{Int}(A) = \bigcap_{j=1}^k \text{Int}(A_j)$。由于有限个若尔当可测集的交集仍为若尔当可测集，因此也有 $\text{Vol}_{\mathcal{X}}(A) = \text{Vol}_{\mathcal{X}}(\text{Int}(A))$。

现在，对于任意整数 k，我们将每个 $S_j^{(\text{start})}$ 细分 k 次，从而得到一个对 m 的覆盖：$= m^{\text{start}} s^{\gamma k}$个尺度为 ε_0 的 HCS：$= \varepsilon_0^{(\text{start})} s^{-k}$。将这些 HCS 记为 S_1、.....、S_m；将通过细分 $S_j^{(\text{start})}$ 而创建的 HCS 记为 $S_1^{(j)}$、.....、$S_{s^{\gamma k}}^{(j)}$。对于每个 $S_i^{(j)}$，如果存在某个 $j' < j$ 使得 $S_i^{(j)} \subseteq S_{j'}^{(\text{start})}$，即如果它完全包含于另一个 HCS 中，则将其移除

该 HCS 来自我们初始覆盖中索引较小的部分。这是一种移除冗余 HCS 的简单方法，同时保留覆盖性质；为说明这一点，我们可以先从 $S^{(\mathrm{start})}_{m^{(\mathrm{start})}}$ 的后代开始执行此操作，然后处理 $S^{(\mathrm{start})}_{m^{(\mathrm{start})}-1}$ 的后代，依此类推。现在我们断言，只要将 k 设得充分大，就可以将冗余（即包含于多个 HCS 中的区域）减少到任意小的集合。令

$$S_k(j,j') := \{x : x \in S_i^{(j)} \cap S_{i'}^{(j')} \text{ for some } i,i'\} \tag{488}$$

即 $S_j^{(\mathrm{start})}$ 和 $S_{j'}^{(\mathrm{start})}$ 的后代相重叠的区域，以及在给定 k细分的情况下该区域的体积（按照上述步骤移除冗余后代之后）。不失一般性，令 $j' < j$。注意，$S_0(j、j') = S_j^{(\mathrm{start})} \cap S_{j'}^{(\mathrm{start})}$，并且

$$S_k(j,j') \subseteq S_{k'}(j,j') \text{ for all } k > k' . \tag{489}$$

现在令

$$\eta := 2c_\Pi \varepsilon_0 = 2c_\Pi \varepsilon_0^{(\mathrm{start})} s^{-k} \tag{490}$$

并断言

$$S_k(j,j') \cap \mathrm{Int}_\eta(S_0(j,j')) = \varnothing \tag{491}$$

也就是说，删除冗余单元将逐步“掏空” $S_0(j、j')$的内部。这是因为对于单元 $S_i^{(j)}$ 在 x 处的根 $\boldsymbol{q}$（即 $x = [\boldsymbol{q}]_{\mathcal{X}}$）

$$S_i^{(j)} \subseteq \bar{R}_{\varepsilon_0}(\boldsymbol{q}) \subseteq \mathcal{B}_{c_\Pi \varepsilon_0}(x) \tag{492}$$

这意味着，任何以 x 为根的单元 $S_i^{(j)}$，如果 $x \in \mathrm{Int}_{c_\Pi\varepsilon_0}(S_0(j、j'))$，就必然会被删除；此外，这还意味着，如果 $S_i^{(j)}$ 包含 x，其中 $x \in \mathrm{Int}_{2c_\Pi\varepsilon_0}(S_0(j、j')) = \mathrm{Int}_\eta(S_0(j、j'))$，那么 $S_i^{(j)}$ 也会被移除。因此我们得到（491），这进一步意味着

$$S_k(j,j') \subseteq S_0(j,j') \backslash \mathrm{Int}_\eta(S_0(j,j')) . \tag{493}$$

但由于 $S_0(j,j') = S_j^{(\mathrm{start})} \cap S_{j'}^{(\mathrm{start})}$，它是若尔当可测的，因此上述集合的体积在 $\eta \to 0$ 时趋于 0，而这发生在 $k \to \infty$ 时。但这意味着，如果我们令重叠区域的总体积为

$$S'_k := \{x \in \mathcal{X}_f : x \in S_i^{(j)} \cap S_{i'}^{(j')} \text{ for some } i,j,i',j' \text{ where } j \neq j'\} \tag{494}$$

我们得到

$$S'_k = \bigcup_{j \neq j'} S_k(j, j') \tag{495}$$

$$\implies \mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(S'_k) \leqslant \sum_{j \neq j'} \mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(S_k(j, j')) \tag{496}$$

$$\implies \lim_{k\to\infty} \mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(S'_k) \leqslant \lim_{k\to\infty} \sum_{j \neq j'} \mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(S_k(j, j')) = 0 \tag{497}$$

因此，对于任意 $\rho > 0$，我们都可以将 k 设得足够大，使得

$$\mathbb{P}_{X\sim f}[X \in S'_k] \leqslant \rho \tag{498}$$

这意味着我们得到了一个 ρ-精确覆盖。

最后，一旦我们在尺度 ε_0 上得到它，就可以将其缩小任意多个 s 倍，尤其是可以一直缩小到半径小于给定的 ε_0^*。 □

附录 D

几乎处处

现在我们证明命题 4。该命题指出，即使我们的假设仅几乎处处成立（定义 9），而非处处成立，我们的主要结果（命题 2 和命题 3）仍然成立。

命题 4 的证明。首先注意，我们有有限个 k 假设，可将其标记为 $1, \ldots, k$。然后对于 $\eta > 0$，令 $\mathcal{X}_\eta^{(i)}$表示 $\mathcal{X}_f$的 η-近似器；再令$\mathcal{X}_\eta := \bigcap_{i=1}^k \mathcal{X}_\eta^{(i)}$，并令 $\mathcal{X}'_\eta$为其 η-内部。我们断言：

i. 所有假设在 $\mathcal{X}_\eta$上均成立。
ii. $\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}_f \backslash \mathcal{X}'_\eta) \leqslant k\eta$。

为证明 (i)，我们注意到所有假设都具有备注 8 中讨论的形式，即“对于所有$\zeta > 0$，都存在一个 $\varepsilon_\zeta^* > 0$，使得对于所有 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\zeta^*$，某个条件在该集合上成立”。接着固定 $\zeta > 0$，并令 $\varepsilon_{\zeta,\eta}^{(i)} > 0$ 为对应于假设 i 在$\mathcal{X}_\eta^{(i)}$上的值；然后令 $\varepsilon_{\zeta,\eta}^* = \min_i \varepsilon_{\zeta,\eta}^{(i)}$。在这种情况下，$\varepsilon < \varepsilon_{\zeta,\eta}^* \implies \varepsilon < \varepsilon_{\zeta,\eta}^{(i)}$，因此对于这样的 ε，各条件都在其各自的 $\mathcal{X}_\eta^{(i)}$ 上成立，进而在 $\mathcal{X}_\eta$ 上成立。

为证明 (ii)，我们首先证明 $\mathcal{X}'_\eta = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{X}_\eta^{(i)'}$，其中 $\mathcal{X}_\eta^{(i)'}$ 是 $\mathcal{X}_\eta^{(i)}$ 的 η-内部。这是因为

$$x \in \mathcal{X}'_\eta \iff \inf_{x' \notin \mathcal{X}_\eta} d_{\mathcal{X}}(x, x') \geqslant \eta \tag{499}$$

$$\iff \inf_{i \in [k]} \inf_{x' \notin \mathcal{X}_\eta^{(i)}} d_{\mathcal{X}}(x, x') \geqslant \eta \tag{500}$$

$$\iff x \in \mathcal{X}_\eta^{(i)} \text{ for all } i \in [k] \tag{501}$$

$$\iff x \in \bigcap_{i=1}^k \mathcal{X}_\eta^{(i)'} \tag{502}$$

于是我们可以计算：

$$\mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}_f \backslash \mathcal{X}'_\eta) = \mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}\Big(\mathcal{X}_f \backslash \bigcap_{i=1}^k \mathcal{X}_\eta^{(i)'}\Big) \tag{503}$$

$$= \mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}\Big(\bigcup_{i=1}^k (\mathcal{X}_f \backslash \mathcal{X}_\eta^{(i)'})\Big) \tag{504}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^k \mathrm{Vol}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}_f \backslash \mathcal{X}_\eta^{(i)'}) \tag{505}$$

$$\leqslant k\eta \tag{506}$$

因此，特别地，我们知道任意点 $x \in \mathcal{X}'_\eta$ 周围都存在一个半径为 η的球，其中所有假设均成立；并且当 $\eta \to 0$时，集合 $\mathcal{X}'_\eta$ 之外的 $\mathcal{X}_f$ 的体积趋于 0，这反过来表明

$$\lim_{\eta \to 0} \mathbb{P}_{X \sim f}[X \in \mathcal{X}'_\eta] = 1 \text{ and } \lim_{\eta \to 0} \int_{\mathcal{X}'_\eta} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx = \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \tag{507}$$

因为 f 表示一个连续概率分布，且 g 有下界。

现在我们来考察主要定理，尤其是这些定理的证明方法 .

首先，我们考察命题 2（DSTSP 的极高概率下界）。接着固定 $\eta > 0$，并注意到对于任意 X_1，.....，X_n，

$$\mathrm{TSP}_\Pi(\{X_1, \ldots, X_n\} \cap \mathcal{X}'_\eta) \leqslant \mathrm{TSP}_\Pi(X_1, \ldots, X_n) \tag{508}$$

因此，对于 DSTSP 中轨迹只需访问 $\mathcal{X}'_\eta$ 中目标点的情形，任何极高概率下界也适用于原问题。此外，由于 $\lim_{\eta \to 0} \mathbb{P}_{X \sim f}[X \in \mathcal{X}'_\eta] = 1$，对于任意 $\delta_1 > 0$，我们可以将 η 设得足够小，使得

$$\mathbb{P}_{X \sim f}[X \notin \mathcal{X}'_\eta] \leqslant \delta_1/2 \tag{509}$$

根据切尔诺夫界，随后 $\{X_1$、.....、$X_n\} \cap \mathcal{X}'_\eta$ 将以极高概率拥有 $\geqslant (1-\delta_1)n$ 个目标点。

因此，我们可以修改问题，使 $(1-\delta_1)n$ 目标点以与 f成比例的密度分布在 $\mathcal{X}'_\eta$ 上；这样得到的 TSP 巡回路线长度至多与按照 f 分布 n 目标点、并只保留落在 $\mathcal{X}'_\eta$中的目标点时的长度一样长（以极高概率），而后者又至多与必须访问所有 n 目标点时的长度一样长。

我们注意到， f 在 $\mathcal{X}'_\eta$ 上的缩放版本为

$$f|_{\mathcal{X}'_\eta}(x) = \begin{cases} f(x)/\mathbb{P}_{X\sim f}[X \in \mathcal{X}'_\eta] & \text{if } x \in \mathcal{X}'_\eta \\ 0 & \text{if } x \notin \mathcal{X}'_\eta \end{cases} \tag{510}$$

并且，对于所有 $x \in \mathcal{X}'_\eta$，该值都可以界定为

$$f(x) \leqslant f|_{\mathcal{X}'_\eta}(x) \leqslant (1-\delta_1/2)^{-1} f(x) \tag{511}$$

这进而意味着

$$\int_{\mathcal{X}'_\eta} f|_{\mathcal{X}'_\eta}(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \leqslant (1-\delta_1/2)^{-(1-\frac{1}{\gamma})} \int_{\mathcal{X}'_\eta} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \tag{512}$$

$$\leqslant (1-\delta_1/2)^{-(1-\frac{1}{\gamma})} \int_{\mathcal{X}_f} f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx \tag{513}$$

接下来我们转向定向越野问题，特别是定义12中的成本平衡定向越野问题，以及我们为其推导出的命题 6 中的极高概率上界。我们可以考虑在 $(1-\delta_1)n$ 个随机目标点上求解该问题，近似因子为 δ_2。我们按照命题 6 的证明固定成本下界 ζ，并设

$$\lambda < \frac{\eta\zeta}{c_\Pi} \tag{514}$$

其中， c_Π 是 Π的速度上限。因此，任何成本为λ 的轨迹长度都必须为 $\leqslant \lambda/\zeta < \eta/c_\Pi$，在 $\mathcal{X}$上的度量中最多只能覆盖距离 η 。但由于该问题中的所有目标点 X_i 都位于 $\mathcal{X}'_\eta$中，而 $\mathcal{X}'_\eta$是 $\mathcal{X}_\eta$的 η-内部，因此，任何访问目标点（也是我们唯一关心的点）的轨迹都必须完全留在 $\mathcal{X}_\eta$中，而这恰好是我们已知假设成立的区域。因此，命题 6 的证明仍然成立，我们得到以下界

$$\mathbb{P}[\mathrm{CBO}_\Pi(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n;\ \lambda,\ f) \leqslant (1+\delta_2)\beta\lambda\,(1-\delta_1)^{\frac{1}{\gamma}} n^{\frac{1}{\gamma}}] \geqslant 1 - e^{-\frac{4}{5}(1+\delta_2)\log(b)\lambda(1\delta_1)^{\overline{\gamma}}\, n^{\overline{\gamma}}}{}^{1}{}^{1} \tag{515}$$

最后，我们以同样的方式将其应用于 TSP下界。在这种情况下，我们需要访问的不是n 个目标点，而是 $(1-\delta_1)n$，但论证相同。然后，通过将 δ_1、δ_2设得足够小，对于任意 $\delta>0$ ，我们都能以极高概率为 TSP 达到近似因子 δ 。

□

附录 E

良好目标 不良目标

我们现在断言，尽管我们的 HCS 覆盖可能并非完全无重叠，但由于它可以做到任意接近无重叠（见引理 8），我们可以像在第六节中一样推导出主要结果。回顾一下，我们已经证明， $X\sim f$ 落入多个 HCS 的概率可以任意小，即小于任意 $\rho>0$。此外，在引理 26 中，我们将 HCS 覆盖中的单元区分为 ρ_1-良好单元和非 ρ_1-良好单元，并证明对于任意 ρ_1、 $\rho_2>0$ ，我们都可以找到足够精细的尺度，使得一个目标点未落入 ρ_1-良好单元的概率至多为 ρ_2。

这使我们能够定义两类目标点 X_i：落入单个 ρ_1-良好单元的目标点，以及未落入此类单元的目标点（或者落入非-ρ_1-良好单元，或者落入多个单元）；我们分别将它们称为良好目标点和不良目标点。每个目标点成为不良目标点的概率至多为 $\rho^*\leqslant\rho+\rho_2$，其中 ρ^* 可以任意小，并且它们彼此独立。现在我们证明，可以通过忽略不良目标点来简化问题。我们首先固定一个 $\mathcal{X}_f$ 的 HCS 覆盖，其尺度为$\varepsilon^{(\mathrm{bad})}$ ，包含 $m^{(\mathrm{bad})}$ 个不同的 HCS，如引理 7 中所述；该覆盖允许存在任意程度的重叠，但请注意，它与 ρ^*无关，是预先固定的。

设 $n^{(\mathrm{bad})}$ 为不良目标点的数量， $n_j^{(\mathrm{bad})}$ 为固定 HCS 覆盖中尺度为 $\varepsilon^{(\mathrm{bad})}$ 且包含 $m^{(\mathrm{bad})}$ 个单元的第 j 个单元内不良目标点的数量。根据命题 11 以及 $x^{1-\frac{1}{\gamma}}$ 的凹性，注意到这意味着

$$\sum_{j=1}^{m^{(\mathrm{bad})}}\mathrm{HCP}^*(n^{(\mathrm{bad})};\hat{b},s)\leqslant\sum_{j=1}^{m^{(\mathrm{bad})}}6s(n^{(\mathrm{bad})}/m^{(\mathrm{bad})})^{1-\frac{1}{\gamma}}=6s(m^{(\mathrm{bad})})^{\frac{1}{\gamma}}(n^{(\mathrm{bad})})^{1-\frac{1}{\gamma}}\tag{516}$$

因此，令 $\boldsymbol{q}_1^{(\mathrm{bad})}$、.....、$\boldsymbol{q}_{m^{(\mathrm{bad})}}^{(\mathrm{bad})}$ 为该 HCS 覆盖的根，并令

$$C^{(\mathrm{bad})}:=\mathrm{TSP}_\Pi(\boldsymbol{q}_1^{(\mathrm{bad})},\ldots,\boldsymbol{q}_{m^{(\mathrm{bad})}}^{(\mathrm{bad})})\,.\tag{517}$$

与之前一样，我们不一定需要知道它的确切值；重要的是，它相对于 n 是固定的。

因此，我们知道

$$\mathrm{TSP}_{\Pi}(\{X_i : X_i \text{ is bad}\}) \leqslant C^{(\mathrm{bad})} + 6s(m^{(\mathrm{bad})})^{\frac{1}{\gamma}}\varepsilon^{(\mathrm{bad})}(n^{(\mathrm{bad})})^{1-\frac{1}{\gamma}}. \tag{518}$$

这是一个确定性的界，而非概率界。接着注意到， $n^{(\mathrm{bad})}$ 本身是一个二项随机变量，进行了 n 次试验，且每次试验成功的概率为 $\leqslant \rho^*$ 。因此，以极高概率（对于任意固定的 $\rho^* > 0$），我们有 $n^{(\mathrm{bad})} \leqslant 2\rho^* n$，这意味着

$$\mathrm{TSP}_{\Pi}(\{X_i : X_i \text{ is bad}\}) \leqslant C^{(\mathrm{bad})} + 6s(m^{(\mathrm{bad})})^{\frac{1}{\gamma}}\varepsilon^{(\mathrm{bad})}2^{1-\frac{1}{\gamma}}(\rho^*)^{1-\frac{1}{\gamma}}n^{1-\frac{1}{\gamma}} \tag{519}$$

由引理 26，对于任意 $\delta^* > 0$，我们可以将 ρ^* 取充分小，使得当n充分大时，

$$C^{(\mathrm{bad})}/n^{1-\frac{1}{\gamma}} + 6s(m^{(\mathrm{bad})})^{\frac{1}{\gamma}}\varepsilon^{(\mathrm{bad})}2^{1-\frac{1}{\gamma}}(\rho^*)^{1-\frac{1}{\gamma}} \leqslant \delta^* \tag{520}$$

也就是说，虽然上述量随 $n^{1-\frac{1}{\gamma}}$ 变化，但我们可以将常数项取为所需的任意小值，使其相较于正文中推导出的整体常数可忽略不计。

最后，我们可以将这一结果与正文中的结果结合起来（其中剩余的 $\leqslant n$个目标点都是良性目标点），从而得到相同的界；这是因为我们可以先收集良性目标点，再收集不良目标点，且只需额外增加一个常数（用于连接最后访问的良性目标点与第一个不良目标点之间的弧）。

附录 F
分形分布目标点的欧几里得旅行商问题

对于控制仿射系统和连续目标点分布， γ 是整数；但从理论上讲，考虑非整数的 γ也很有意思。当目标点分布在一个具有分形维数的集合上时，就可能出现这种情况。由于本附录旨在说明我们的方法（尤其是分层单元结构）如何应用于不同场景，因此我们会作出一些简化假设。

首先，我们将研究范围限定为：目标点分布在 $\mathbb{R}^d$ 中的严格自相似分形集上，且只有一个缩放因子（例如谢尔宾斯基三角形、门格海绵或科赫曲线）；同时考虑最高速度可变的欧几里得旅行商问题。请注意，在这种情况下 $\mathcal{X} = \mathcal{Q} = \mathbb{R}^d$，因此 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$ 与 $x \in \mathcal{X}$之间没有区别。[2] 因此，我们将构型称为 $x \in \mathbb{R}^d$，而可达集 $R_\varepsilon(x)$ 在工作空间和构型空间中相同。

[2]这意味着可以应用 Christofides算法等标准旅行商问题近似算法，但仍需通过我们的分析来确定 $n \to \infty$时的巡回路径长度。

ˆ形式上，我们假设 $\mathcal{X}_f$ （目标点分布所在的集合）由自身的 b个副本组成，这些副本位于 s^{-1} 尺度（经过平移和/或旋转和/或反射），因此采用欧几里得动力学的层次单元结构很容易构建。利用 ˆ HCS 所揭示的 γ ，我们发现 $\gamma = \log_s b$ 是 $\mathcal{X}_f$的豪斯多夫维数；我们假设 $\gamma \geqslant 1$ （否则，在 HCS 覆盖中各 HCS 之间的行进 $O(1)$ 时间将超过分层收集问题中的 $O(n^{1-\frac{1}{\gamma}})$ 巡回路线时间）。此外，可以通过迭代选择子副本来随机选择一个 $X \in \mathcal{X}_f$ 。

我们还仅考虑具有最高速度函数 h 的此类分布上的欧几里得旅行商问题，即我们的控制律为

$$\dot{x} = h(x)\boldsymbol{u} \tag{521}$$

其中控制集为 $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d : \|\boldsymbol{u}\|_2 \leqslant 1\}$。我们假设 h 是利普希茨连续的，且 $h_{\min} := \inf_x h(x) > 0$， $h_{\max} := \sup_x h(x) < \infty$。形式上， h 的利普希茨连续性使我们能够对任意 $\zeta > 0$ 得到一个 ζ-近似 HCS 覆盖（局部而言， h 近似为常数，因此只需在较小尺度 ε_0 下使用嵌套单元）。

我们不再使用“密度 f”和“敏捷性 g”，而改为令

$$\phi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbb{P}_{X\sim f}[X \in \bar{R}_\varepsilon(x)]}{\varepsilon^\gamma} \tag{522}$$

（其中 $X \sim f$ 表示给定的、定义在分形上的分布，尽管 f 已不再是概率密度函数）。然后，我们用其等价形式 $\mathbb{E}_{X\sim f}[\phi(x)^{-\frac{1}{\gamma}}]$ 替换积分 $\int f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}} g(x)^{-\frac{1}{\gamma}}\, dx$ 。

我们的上界仍然能说明这种情况：

命题14. 对于非整数 γ，我们得到以下界：如果 $\gamma \geqslant 3$ 是非整数，那么命题 3 中的界 (29)、(30) 和 (32) 仍然成立。如果 $\gamma \in (2,3)$，那么对于所有充分大的 n，

$$\mathbb{P}\big[\mathrm{TSP}_\Pi(\{X_i\}) \leqslant (1+\delta)\big(12s\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}\big)n^{1-\frac{1}{\gamma}}\mathbb{E}_{X\sim f}[\phi(x)^{-\frac{1}{\gamma}}]\big] \tag{523}$$

$$\geqslant 1 - e^{-\frac{(\gamma-2)p_1 n(\sum_{j=1}^m p_j^{1-1/\gamma})^2}{13\gamma}} \tag{524}$$

最后，如果 $\gamma \in (1、2)$，那么对于所有充分大的 n，

$$\mathbb{P}\big[\mathrm{TSP}_\Pi(\{X_i\}) \leqslant (1+\delta)\big(12s\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}\big)n^{1-\frac{1}{\gamma}}\mathbb{E}_{X\sim f}[\phi(x)^{-\frac{1}{\gamma}}]\big] \tag{525}$$

$$\geqslant 1 - e^{-\frac{p_1 n^{2(1-1/\gamma)}(\sum_{j=1}^m p_j^{1-1/\gamma})^2}{\frac{560}{3}\log(\gamma/(\gamma-1))+4+18(1-1/\gamma)^2\frac{\gamma}{\gamma-2}(\frac{280}{3}\log(\gamma/(\gamma-1)))^{1-2/\gamma}}} \tag{526}$$

证明。其证明方法与第六节中的上界相同，使用 HCS 覆盖和集合问题。

□