arXiv:2302.00245v1 [math.AP] 1 Feb 2023

Gross-Neveu模型的量子格子玻尔兹曼格式在 $1+1$ 维中向非线性狄拉克方程的收敛性

NINGNING LI, JING ZHANG AND YONGQIAN ZHANG

SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
FUDAN UNIVERSITY, SHANGHAI 200433, CHINA

Abstract. 本文研究了 $1+1$ 维Gross-Neveu模型非线性狄拉克方程的量子格子玻尔兹曼格式。假设该格式的初始数据在 L^2中收敛。随后证明，对于任意 $T \geq 0$ ，当网格尺寸趋于零时，相应的量子格子玻尔兹曼格式解在$C([0,T];\, L^2(R^1))$中收敛到非线性狄拉克方程的强解。在证明中，首先引入一个Glimm型泛函，以建立相应量子格子玻尔兹曼格式两个解之差的稳定性估计，从而得到该格式解集的紧性。最后证明，量子格子玻尔兹曼格式解的任意收敛子序列的极限，都与非线性狄拉克方程柯西问题的强解一致。

1. Introduction

Gross-Neveu模型的非线性狄拉克方程在 R^{1+1} 中可写为

$$\begin{cases} u_t + u_x = imv + iN_1(u,v), \\ v_t - v_x = imu + iN_2(u,v), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$(t,x) \in R^2$，$(u,v) \in \mathbb{C}^2$。非线性项具有以下形式

$$N_1 = \partial_{\overline{u}} W(u,v), \quad N_2 = \partial_{\overline{v}} W(u,v) \tag{1.2}$$

with

$$W(u,v) = \alpha |u|^2 |v|^2 + \beta(\overline{u}v + u\overline{v})^2,$$

见 [24]。这里， α、 $\beta \in R^1$ 和 $\overline{u}$、 $\overline{v}$ 分别是 u 和 v的复共轭。初始数据如下：

$$(u,v)|_{t=0} = (u_0(x), v_0(x)). \tag{1.3}$$

通讯作者：Yongqian Zhang，yongqianz@fudan.edu.cn 日期：2023年2月2日。2010年数学主题分类。主要分类：35Q41；次要分类：35L60、35Q40。关键词与短语：格子玻尔兹曼格式、非线性狄拉克方程、Gross-Neveu模型、整体强解、Glimm型泛函。

当参数为 $\alpha = 1$ 和 $\beta = 0$时，(1.1) 称为 Thirring 方程；当参数为 $\alpha = 0$和 $\beta = 1/4$时，则称为 Gross-Neveu 方程；例如参见 [28, 15, 24]。这类模型源于量子力学和广义相对论的研究（[15] 和 [28]）。许多研究致力于探讨不同 Sobole夫空间中 (1.1) 的柯西问题的局部和整体适定性，例如参见 [4, 6, 7, 10, 12, 17, 19, 18, 24, 25, 29, 30]及其中的参考文献。对于初始数据 $(u_0(x)\ v_0(x)) \in L^2(R^1)$，文献 [30] 已证明，(1.1) 和 (1.3) 在 L^2中存在唯一的整体强解。

本文研究一种用于 (1.1) 和 (1.3) 的差分格式，称为量子格子玻尔兹曼格式，其中 $(u_0, v_0) \in L^2(R^1)$。这种格式简称为 QLB，由 S. Palpacelli、P. Romatschke 和 S. Succi [23] 针对 (1.1) 提出；关于线性狄拉克方程的量子格子玻尔兹曼格式，另见 Succi 和 Benzi [26, 27] 。 [23]中给出的 (1.1) 对应格式如下：

$$\begin{cases} \dfrac{\widehat{u}^{(h)} - u^{(h)}}{h} = im\dfrac{\widehat{v}^{(h)} + v^{(h)}}{2} + i\alpha\dfrac{\widehat{u}^{(h)} + u^{(h)}}{2}|v^{(h)}|^2 + i\beta\dfrac{\widehat{v}^{(h)} + v^{(h)}}{2}G^{(h)} \\ \dfrac{\widehat{v}^{(h)} - v^{(h)}}{h} = im\dfrac{\widehat{u}^{(h)} + u^{(h)}}{2} + i\alpha\dfrac{\widehat{v}^{(h)} + v^{(h)}}{2}|v^{(h)}|^2 + i\beta\dfrac{\widehat{u}^{(h)} + u^{(h)}}{2}G^{(h)}, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中

$$(u^{(h)}, v^{(h)}) = (u^{(h)}(x,t), v^{(h)}(x,t)),$$
$$(\widehat{u}^{(h)}, \widehat{v}^{(h)}) = (u^{(h)}(x+h, t+h), v^{(h)}(x-h, t+h))$$

and

$$G^{(h)} = G(u^{(h)}, v^{(h)})(x,t) := u^{(h)}(x,t)\overline{v^{(h)}(x,t)} + \overline{u^{(h)}(x,t)}v^{(h)}(x,t).$$

Here

$$G(u, v) = \overline{u}v + u\overline{v},$$

函数 $(u^{(h)}, v^{(h)})$ 为分段常值函数，并满足

$$(u^{(h)}(x,t), v^{(h)}(x,t)) = (u_n^k, v_n^k),\ (x,t) \in [nh, (n+1)h) \times [kh, (k+1)h) \tag{1.5}$$

对于任意整数 n 和 $k \geq 0$，其中

$$(u_n^k, v_n^k) = (u^{(h)}(nh, kh), v^{(h)}(nh, kh)).$$

方程 (1.4) 等价地可写为

$$\begin{cases} u_{n+1}^{k+1} - u_n^k = \dfrac{imh}{2}(v_{n-1}^{k+1} + v_n^k) + \dfrac{i\alpha h(u_{n+1}^{k+1} + u_n^k)}{2}|v_n^k|^2 + \dfrac{ih\beta}{2}(v_{n-1}^{k+1} + v_n^k)G(u_n^k, v_n^k), \\ v_{n-1}^{k+1} - v_n^k = \dfrac{imh}{2}(u_{n+1}^{k+1} + u_n^k) + \dfrac{i\alpha h(v_{n-1}^{k+1} + v_n^k)}{2}|u_n^k|^2 + \dfrac{ih\beta}{2}(u_{n+1}^{k+1} + u_n^k)G(u_n^k, v_n^k). \end{cases} \tag{1.6}$$

在此及下文中，我们将（1.4）或（1.6）简称为 QLB 格式。

文献 [22, 26, 27]中给出了数值实验，以说明格式 (1.6) 的数值解收敛到非线性狄拉克方程的证据。据我们所知，尚无关于格式 (1.6) 或 (1.4) 收敛结果的严格证明。

本文旨在证明，当 h 趋于 0 时，由格式 (1.4)（或 (1.6)）给出的解 $(u^{(h)}, v^{(h)})$ 收敛到方程 (1.1) 的强解。主要结果陈述如下。

定理 1.1. 设 $(u_0, v_0) \in L^2(R^1)$ 且 $\sup_{h\in(0,1)} ||(u_0^{(h)}, v_0^{(h)})||_{L^2(R^1)} < \infty$，使得

$$\lim_{h\to 0+} (||u_0^{(h)} - u_0||_{L^2(R^1)} + ||v_0^{(h)} - v_0||_{L^2(R^1)}) = 0. \tag{1.7}$$

则，对于 $(u^{(h)}, v^{(h)})(\cdot, t = 0) = (u_0^{(h)}, v_0^{(h)})$，QLB 格式 (1.4) 具有唯一的整体解 $(u^{(h)}, v^{(h)})$，其中 $h \in (0, 1)$。此外，有

$$\lim_{h\to 0+} (||u^{(h)} - u_*||_{C([0,T];L^2(R^1))} + ||v^{(h)} - v_*||_{C([0,T];L^2(R^1))}) = 0. \tag{1.8}$$

对于任意 $T > 0$，其中 (u_*, v_*) 是 (1.1) 和 (1.3) 的唯一强解。

这里，(1.1) 和 (1.3) 的强解定义如下。

定义 1.1. 若函数对 $(u, v) \in C([0, \infty); L^2(R^1))$ 在 $R^1 \times [0, \infty)$ 上被称为 (1.1) 和 (1.3) 的强解，意味着存在一列 (1.1) 在 $R^1 \times [0, \infty)$ 上的光滑解 $(u_{(n)}, v_{(n)})$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \left(||u_{(n)}(\cdot, 0) - u_0||_{L^2(R^1)} + ||v_{(n)}(\cdot, 0) - v_0||_{L^2(R^1)}\right) = 0$$

and

$$\lim_{n\to\infty} \left(||u_{(n)} - u||_{L^2(R^1\times[0,T])} + ||v_{(n)} - v||_{L^2(R^1\times[0,T])}\right) = 0$$

对任意 $T > 0$。

QLB 格式 (1.4) 及其等价形式 (1.6) 是含有三次项的隐式非线性方程，这使得难以在 L^2 范数下获得解的稳定性。为克服这些困难，我们利用其特殊的非线性结构，并引入一些非线性泛函来处理非线性项。具体而言，首先从隐式齐次格式 (1.6) 和非齐次格式 (2.12) 推导出演化规律从 $(|u_n^k|^2, |v_n^k|^2)$ 到 $(|u_{n+1}^{k+1}|^2, |v_{n-1}^{k+1}|^2)$ 的显式估计 (2.9) 和 (2.10)，以及演化规律从 $(|U_n^k|^2, |V_n^k|^2)$ 到 $(|U_{n+1}^{k+1}|^2, |V_{n-1}^{k+1}|^2)$ 的显式估计 (3.7) 和 (3.8)。这里，(U_n^k, V_n^k) 表示两个解的 (n, k) 分量 (u_n^k, v_n^k) 与 $(\widetilde{u}_n^k, \widetilde{v}_n^k)$ 之差，见第 3 节。注意到 (2.9)、(2.10)、(3.7) 和 (3.8) 含有具有特殊结构的四次项，且类似于 [13] 中关于波的相互作用的 Glimm估计（另见 [5], [9]），我们借鉴 [30] 的思路，引入 Bony型泛函 Q_1 和 Glimm型泛函 $F_1(k; \Delta)$，见定义 3.3 和定义 3.4。随后，我们可以建立关于 F_1 的估计，从而证明 QLB 格式 (1.6) 的解 $(u^{(h)}, v^{(h)})$ 在 L^2 中的一致连续性。此外，基于特征线上解 $(u^{(h)}, v^{(h)})$ 的估计，也证明了解沿特征线的一致连续性。这两个结果意味着解集 $(u^{(h)}, v^{(h)})$ 的相对紧性；也就是说，随着网格尺寸 h 趋于零，任意解序列

$(u^{(h)}, v^{(h)})$ 在 L^2 中都有一个收敛子序列。最后，我们估计方程 (1.1) 的光滑解与通过 (1.6) 得到的解 $(u^{(h)}, v^{(h)})$ 之间的差异，进而证明解 $(u^{(h)}, v^{(h)})$ 的收敛子序列的每个极限都是方程 (1.1) 的强解。我们指出，Glimm型泛函最初由 Glimm [13] 使用，后来其他人也用它来建立某些非线性双曲系统小解的整体存在性；而 Bony 泛函则曾用于研究离散玻尔兹曼方程，参见例如 [3, 5, 9, 16] 及其中的参考文献。此外，关于格子玻尔兹曼方法在其他类型偏微分方程中的稳定性和收敛性，也已有许多研究，例如参见 [20, 21] 及其中的参考文献。关于格子玻尔兹曼方法及其应用，参见例如 [27]。

其余部分安排如下。第 2 节中，我们建立关于该格式近似解的一些点态估计。第 3 节中，我们给出两个近似解之差的一些局部时空估计。第 4 节中，我们证明由 (1.6) 得到的任意近似解序列在L^2中都有一个收敛子序列。第 5 节中，我们证明近似解收敛序列的每个极限都与 (1.1) 的强解一致。

2. Estimates on the solutions to the QLB scheme

2.1. 齐次差分格式。我们考虑用于 $h \in$ (0,1)的齐次格式 (1.6)，并假设存在一个与 h 无关的常数 $C_0 > 0$ ，使得

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} (|u_l^0|^2 + |v_l^0|^2)h \le C_0. \tag{2.1}$$

引理 2.1. 对任意 $h \in$ (0, 1)，格式 (1.6) 在每个时间步上都唯一可解。此外，对任意满足 $k \ge 0$的整数 n 和 k ，有

$$|u_{n+1}^{k+1}|^2 + |v_{n-1}^{k+1}|^2 = |u_n^k|^2 + |v_n^k|^2 \tag{2.2}$$

and

$$\frac{|u_{n+1}^{k+1}|^2 - |u_n^k|^2}{h} = \Re\big\{im(\overline{u_{n+1}^{k+1} + u_n^k})(v_{n-1}^{k+1} + v_n^k)\big\} + e_n^{k,1}, \tag{2.3}$$

$$\frac{|v_{n-1}^{k+1}|^2 - |v_n^k|^2}{h} = \Re\big\{im(\overline{v_{n-1}^{k+1} + v_n^k})(u_{n+1}^{k+1} + u_n^k)\big\} + e_n^{k,2}, \tag{2.4}$$

其中余项为

$$e_n^{k,1} = \Re\big\{i\beta(\overline{u_{n+1}^{k+1} + u_n^k})(v_{n-1}^{k+1} + v_n^k)(\overline{u_n^k} v_n^k + u_n^k \overline{v_n^k})\big\}$$

and

$$e_n^{k,2} = \Re\big\{i\beta(\overline{v_{n-1}^{k+1} + v_n^k})(u_{n+1}^{k+1} + u_n^k)(\overline{u_n^k} v_n^k + u_n^k \overline{v_n^k})\big\}.$$

此处及下文中， $\Re z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ 表示 z 对于 $z \in C$的实部。

证明。在时间步 $t=(k+1)h$，对于每一对 (n,k)，系统 (1.6) 都是关于 $(u_{n+1}^{k+1},v_{n-1}^{k+1})$ 的线性系统。为了从方程 (1.6) 中得到项 $(u_{n+1}^{k+1},v_{n-1}^{k+1})$，我们计算项 $(u_{n+1}^{k+1},v_{n-1}^{k+1})$ 的系数行列式 J_n^k，如下所示,

$$\begin{aligned} J_n^k &= \det\begin{pmatrix} 1-\frac{i\alpha}{2}|v_n^k|^2h & -\frac{ih}{2}[m+\beta(\overline{u_n^k}v_n^k+u_n^k\overline{v_n^k})] \\ -\frac{ih}{2}[m+\beta(\overline{u_n^k}v_n^k+u_n^k\overline{v_n^k})] & 1-\frac{i\alpha}{2}|u_n^k|^2h \end{pmatrix} \\ &= 1-\frac{\alpha^2h^2|u_n^k|^2|v_n^k|^2}{4}+\frac{h^2}{4}[m+\beta(\overline{u_n^k}v_n^k+u_n^k\overline{v_n^k})]^2-i\alpha\frac{|u_n^k|^2+|v_n^k|^2}{2}h^2. \end{aligned}$$

直接计算可得

$$|J_n^k|^2=1+\big(-\frac{\alpha^2h^2|u_n^k|^2|v_n^k|^2}{4}+\frac{(m+G_n^k)^2h^2}{4}\big)^2+\frac{h^2(m+\beta G_n^k)^2}{2}+\frac{\alpha^2h^2(|u_n^k|^4+|v_n^k|^4)}{4}\geq 1,$$

其中 $G_n^k=(\overline{u_n^k}v_n^k+u_n^k\overline{v_n^k})\in R^1$。

因此，根据克拉默法则，方程 (1.6) 有唯一解 $(u_{n+1}^{k+1},v_{n-1}^{k+1})$，从而证明了方程 (1.6) 的可解性。

现在，分别用 $\overline{u_{n+1}^{k+1}+u_n^k}$ 和 $\overline{v_{n-1}^{k+1}+v_n^k}$ 乘以 (1.6) 中的第一和第二个方程，并取其实部，可得 (2.3) 和 (2.4)。

最后，将 (2.3) 和 (2.4) 相加，得到 (2.2)。证明完毕。 □。

根据引理 2.1，格式 (1.6) 存在整体解。下文令 $\{(u_n^k,v_n^k)\}$ 为 (1.6) 的解，并有如下结论。

推论 2.1. 对任意整数 $k\geq 0$，有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(|u_n^k|^2+|v_n^k|^2)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(|u_n^0|^2+|v_n^0|^2).$$

证明. 将 (2.2) 对 n 求和，得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(|u_n^{k+1}|^2+|v_n^{k+1}|^2)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(|u_n^k|^2+|v_n^k|^2),$$

由此，通过对 n 作归纳法即可得到所需结果，并完成证明。□

我们在三角形区域上考虑格式 (1.6)。对于满足 $0\leq k_0\leq k_1$ 的任意整数 n_1、k_1 和 k_0，记

$$\Delta(n_1,k_1;\,k_0)=\{(n,k)\big|n\text{ 是整数，且 }k\text{ 和 }n_1-k_1+k\leq n\leq n_1+k_1-k,$$

见图 1。

对 $\Delta(n_1,k_1;\,k)$ 对 (2.2) 求和，得到以下结果。

引理 2.2. 对于 $0\leq k_0+1\leq k\leq k_1$ 和 $-\infty<n_1<\infty$，有

$$\sum_{k_1-k\leq j\leq k_1-k_0}|v_{n_1-1-j}^{k_1+1-j}|^2+\sum_{k_1-k\leq j\leq k_1-k_0}|u_{n_1+1+j}^{k_1+1-j}|^2\leq\sum_{l=n_1-k_1+k_0}^{n_1+k_1-k_0}(|u_l^{k_0}|^2+|v_l^{k_0}|^2)$$

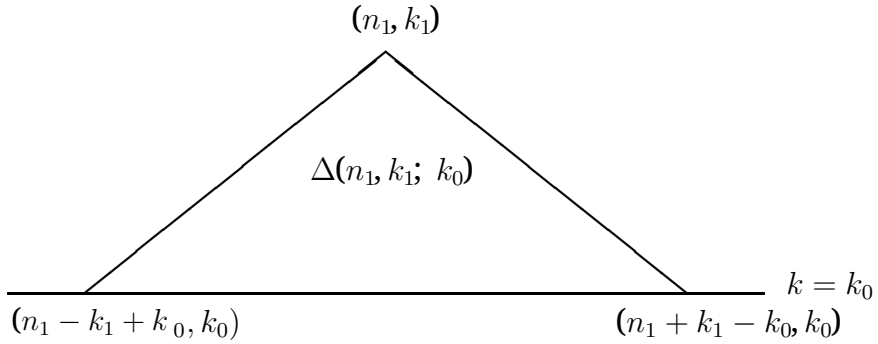

图 1. 集合 $\Delta(n_1, k_1;\ k_0)$

and

$$\sum_{l=n_1-k_1+k+1}^{n_1+k_1-k+1} |u_l^{k+1}|^2 + \sum_{l=n_1-k_1+k-1}^{n_1+k_1-k-1} |v_l^{k+1}|^2 \le \sum_{l=n_1-k_1+k_0}^{n_1+k_1-k_0} (|u_l^{k_0}|^2 + |v_l^{k_0}|^2).$$

因此,

$$\sum_{0\le j\le k_1} |v_{n_1-1-j}^{k_1+1-j}|^2 + \sum_{0\le j\le k_1} |u_{n_1+1+j}^{k_1+1-j}|^2 \le \sum_{l=-\infty}^{\infty} (|u_l^{k_0}|^2 + |v_l^{k_0}|^2).$$

证明。由 (2.2)，可得

$$\sum_{(n,j)\in\Delta(n_1,k_1;k)} (|u_{n+1}^{j+1}|^2 + |v_{n-1}^{j+1}|^2 - |u_n^j|^2 - |v_n^j|^2) = 0,$$

其中， $\Delta(n_1, k_1;\ k)$内部关于 (n, j) 的项相互抵消，从而得到该引理的证明。证明完毕。□

于是，我们得到如下逐点估计。

引理 2.3。存在一个与 h 和 (n, k) 无关的常数 $C_1 > 0$，使得

$$|u_{n+1}^{k+1}| \le C_1|u_{n-k}^0| + C_1\sqrt{kh} \tag{2.5}$$

and

$$|v_{n-1}^{k+1}| \le C_1|v_{n+k}^0| + C_1\sqrt{kh} \tag{2.6}$$

对于 $k \ge 0$ 和 $-\infty < n < \infty$。

证明。对于 $0 \le j \le k$，(1.6) 给出

$$\begin{aligned} |(1 - \frac{i\alpha h|v_{n-j}^{k-j}|^2}{2})||u_{n+1-j}^{k+1-j}| &\le |u_{n-j}^{k-j}| + \frac{mh}{2}(|v_{n-1-j}^{k+1-j}| + |v_{n-j}^{k-j}|) \\ &\quad + h|\beta||u_{n-j}^{k-j}||v_{n-j}^{k-j}|(|v_{n-1-j}^{k+1-j}| + |v_{n-j}^{k-j}|) \\ &\le |u_{n-j}^{k-j}| \exp\{4|\beta|h(|v_{n-1-j}^{k+1-j}|^2 + |v_{n-j}^{k-j}|^2)\} \\ &\quad + \frac{mh}{2}(|v_{n-1-j}^{k+1-j}| + |v_{n-j}^{k-j}|). \end{aligned}$$

Then

$$|u_{n+1-j}^{k+1-j}| \le |u_{n-j}^{k-j}| \exp\{4|\beta|h(|v_{n-1-j}^{k+1-j}|^2 + |v_{n-j}^{k-j}|^2)\} + \frac{mh}{2}(|v_{n-1-j}^{k+1-j}| + |v_{n-j}^{k-j}|),$$

由此得到以下结果,

$$\begin{aligned} |u_{n+1}^{k+1}| &\le \{|u_{n-k}^0| + mh \sum_{0\le j\le k} (|v_{n-1-j}^{k+1-j}| + |v_{n-j}^{k-j}|)\} \exp\{4|\beta|h \sum_{0\le j\le k} (|v_{n-1-j}^{k+1-j}|^2 + |v_{n-j}^{k-j}|^2)\} \\ &\le \Big\{|u_{n-k}^0| + mh \sqrt{\sum_{0\le j\le k} 4(|v_{n-1-j}^{k+1-j}|^2 + |v_{n-j}^{k-j}|^2)} \sqrt{\sum_{0\le j\le k} 1}\Big\} \exp(8|\beta|C_0) \\ &\le \{|u_{n-k}^0| + 4m\sqrt{C_0}\sqrt{kh}\} \exp(8|\beta|C_0), \end{aligned}$$

其中，利用引理 2.2 和假设 (2.1) 可得最后两个不等式。因此，(2.5) 得证。

v_{n-1}^{k+1} 的不等式 (2.6) 可用同样的方法证明。因此，证明完成。□

由此可得以下结论。

引理 2.4. 设 $T \in [0, \infty)$。若 $0 < k_0 \le k_1 \le T/h$，则

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{-\infty}^{\infty} |u_n^k|^2 |v_n^k|^2 h^2 \le 4C_1^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big(|u_n^0|^2 h \sum_{l=n+k_0}^{n+k_1} |v_l^0|^2 h\big) \\ +(4C_1^4 + 2C_1^2) T(k_1 - k_0) h \sum_{-\infty}^{\infty} (|u_n^0|^2 + |v_n^0|^2) h. \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{k=0}^{k_1} \sum_{-\infty}^{\infty} |u_n^k|^2 |v_n^k|^2 h^2 \le 4C_1^2 C_0^2 + (4C_1^4 + 2C_1^2) C_0 T^2.$$

其中， C_0 和 C_1 是由（2.1）和引理 2.3 给出的常数。

$k_1 \quad \infty$证明。设 $D_0(k_0, k_1) = \sum \sum |u_n^k|^2 |v_n^k|^2$。则根据引理 2.3,

有$k=k_0 \ -\infty$

$$\begin{aligned} D_0(k_0, k_1) &\le \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{-\infty}^{\infty} 2C_1(|u_{n-k}^0|^2 + kh)|v_n^k|^2 \\ &\le \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{-\infty}^{\infty} 2C_1 |u_{n-k}^0|^2 |v_n^k|^2 + 2C_1 T \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{-\infty}^{\infty} |v_n^k|^2 \\ &\le \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{-\infty}^{\infty} 4C_1^2 |u_{n-k}^0|^2 (|v_{n+k}^0|^2 + kh) + 2C_1 T \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{-\infty}^{\infty} |v_n^k|^2 \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=k_0}^{k_1}\sum_{-\infty}^{\infty} 4C_1^2|u_{n-k}^0|^2|v_{n+k}^0|^2 + (4C_1^2+2C_1)T\sum_{k=k_0}^{k_1}\sum_{-\infty}^{\infty}(|u_n^k|^2+|v_n^k|^2),$$

其中我们使用了以下结果,

$$\sum_{k=k_0}^{k_1}\sum_{-\infty}^{\infty}|u_{n-k}^0|^2|v_{n+k}^0|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\big(|u_n^0|^2\sum_{l=n+k_0}^{n+k_1}|v_l^0|^2\big)$$

and

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(|u_n^k|^2+|v_n^k|^2) = \sum_{-\infty}^{\infty}(|u_n^0|^2+|v_n^0|^2).$$

因此，我们可以得出结论，证明完毕。□

现在我们考虑 $(|u_n^k|^2, |v_n^k|^2)$ 的演化律。首先，我们处理引理 2.1 给出的余项 $e^{k,\ }{}_n{}^1$ 和 $e^{k,\ }{}_n{}^2$。

由 (2.3) 和 (2.4) 直接计算可得如下结果。

引理 2.5. 有如下结论:

$$|e_n^{k,1}| \leq |\beta|e_n^k, \quad |e_n^{k,2}| \leq |\beta|e_n^k,$$

对于 $k \geq 0$ 和 $-\infty < n < \infty$，其中

$$e_n^k = (|u_{n+1}^{k+1}|^2+|u_n^k|^2)|v_n^k|^2 + (|v_{n+1}^{k+1}|^2+|v_n^k|^2)|u_n^k|^2.$$

因此,

$$\Big|\frac{|u_{n+1}^{k+1}|^2-|u_n^k|^2}{h}\Big| \leq 8m(|u_n^k|^2+|v_n^k|^2)+|\beta|e_n^k \tag{2.7}$$

and

$$\Big|\frac{|v_{n-1}^{k+1}|^2-|v_n^k|^2}{h}\Big| \leq 8m(|u_n^k|^2+|v_n^k|^2)+|\beta|e_n^k. \tag{2.8}$$

该引理使我们能够得到 $(|u^{(h)}|^2, |v^{(h)}|^2)$ 演化的局部估计如下。

引理 2.6. 若 $(|u_n^k|^2+|v_n^k|^2)h \leq \min\{\frac{1}{4|\beta|}, \frac{1}{2}\}$，则

$$0 \leq e_n^k \leq 8|u_n^k|^2|v_n^k|^2 + 8m(|u_n^k|^2+|v_n^k|^2).$$

因此,

$$\Big|\frac{|u_{n+1}^{k+1}|^2-|u_n^k|^2}{h}\Big| \leq C_\beta(|u_n^k|^2+|v_n^k|^2)+C_\beta|u_n^k|^2|v_n^k|^2 \tag{2.9}$$

and

$$\Big|\frac{|v_{n-1}^{k+1}|^2-|v_n^k|^2}{h}\Big| \leq C_\beta(|u_n^k|^2+|v_n^k|^2)+C_\beta|u_n^k|^2|v_n^k|^2. \tag{2.10}$$

这里是 $C_\beta = 8m+16|\beta|m+16|\beta|$。

证明。由引理 2.5,

$$|u_{n+1}^{k+1}|^2 \le |u_n^k|^2 + 8mh(|u_n^k|^2 + |v_n^k|^2) + 2|\beta|he_n^k$$

and

$$|v_{n-1}^{k+1}|^2 \le |v_n^k|^2 + 8mh(|u_n^k|^2 + |v_n^k|^2) + 2|\beta|he_n^k,$$

由此得到如下结果,

$$\begin{aligned} e_n^k &= (|u_n^k|^2 + |u_{n+1}^{k+1}|^2)|v_n^k|^2 + (|v_n^k|^2 + |v_{n-1}^{k+1}|^2)|u_n^k|^2 \\ &\le 4|u_n^k|^2|v_n^k|^2 + 8mh(|u_n^k|^2 + |v_n^k|^2)^2 + 2|\beta|e_n^k(|u_n^k|^2 + |v_n^k|^2)h. \end{aligned} \tag{2.11}$$

对于 $\beta \neq 0$，根据 (2.11)，当 $(|u_n^k|^2 + |v_n^k|^2)h \le \min\{\frac{1}{4|\beta|}, \frac{1}{2}\}$ 时，可以得到 e_n^k 的估计；而对于 $\beta = 0$，根据 (2.11)，当 $(|u_n^k|^2 + |v_n^k|^2)h \le \frac{1}{2}$ 时，可以得到 e_n^k 的估计。

此外，将关于 e_n^k 的估计代入 (2.7) 和 (2.8)，可得 (2.9) 和 (2.10)。证明完毕。□

2.2. 非齐次差分格式。设 $(\widetilde{u}^{(h)}, \widetilde{v}^{(h)})$ 是以下格式的解

$$\begin{cases} \dfrac{\widetilde{u}_{n+1}^{k+1} - \widetilde{u}_n^k}{h} = \dfrac{im}{2}(\widetilde{v}_{n-1}^{k+1} + \widetilde{v}_n^k) + \dfrac{i\alpha(\widetilde{u}_{n+1}^{k+1} + \widetilde{u}_n^k)}{2}|v_n^k|^2 + \dfrac{i\beta}{2}(\widetilde{v}_{n-1}^{k+1} + \widetilde{v}_n^k)\widetilde{G}_n^k + g_n^{k,1}, \\ \dfrac{\widetilde{v}_{n-1}^{k+1} - \widetilde{v}_n^k}{h} = \dfrac{im}{2}(\widetilde{u}_{n+1}^{k+1} + \widetilde{u}_n^k) + \dfrac{i\alpha(\widetilde{v}_{n-1}^{k+1} + \widetilde{v}_n^k)}{2}|\widetilde{u}_n^k|^2 + \dfrac{i\beta}{2}(\widetilde{u}_{n+1}^{k+1} + \widetilde{u}_n^k)\widetilde{G}_n^k + g_n^{k,2}, \end{cases} \tag{2.12}$$

对于给定数据 $g^{k,}{}_n{}^1$和 $g^{k,}{}_n{}^2$，其中整数 k 和 n 满足 $k \ge 0$ 和 $-\infty < n < \infty$。这里

$$\widetilde{G}_n^k = G(\widetilde{u}_n^k, \widetilde{v}_n^k) = \overline{\widetilde{u}_n^k}\widetilde{v}_n^k + \widetilde{u}_n^k\overline{\widetilde{v}_n^k}$$

且函数 $(\widetilde{u}^{(h)}, \widetilde{v}^{(h)})$ 是分段常值的，并满足

$$(\widetilde{u}^{(h)}(x,t), \widetilde{v}^{(h)}(x,t)) = (\widetilde{u}_n^k, \widetilde{v}_n^k),\ (x,t) \in [nh, (n+1)h) \times [kh, (k+1)h) \tag{2.13}$$

对于任意整数 n 和 $k \ge 0$，其中

$$(\widetilde{u}_n^k, \widetilde{v}_n^k) = (\widetilde{u}^{(h)}(nh, kh), \widetilde{v}^{(h)}(nh, kh)).$$

与齐次情形 (1.6) 的引理 2.5 的证明类似，我们采用相同的论证，推导出以下结果。

引理 2.7. 对任意 $h \in (0, 1)$，格式 (2.12) 在每个时间步均唯一可解。此外，对于任意满足 $k \ge 0$ 的整数 n 和 k，有

$$\left|\frac{|\widetilde{u}_{n+1}^{k+1}|^2 - |\widetilde{u}_n^k|^2}{h}\right| \le (8m+2)(|\widetilde{u}_{n+1}^{k+1}|^2 + |\widetilde{v}_{n-1}^{k+1}|^2 + |\widetilde{u}_n^k|^2 + |\widetilde{v}_n^k|^2) + |\beta|\widetilde{e}_n^k + |g_n^k|^2 \tag{2.14}$$

and

$$\left|\frac{|\widetilde{v}_{n-1}^{k+1}|^2 - |\widetilde{v}_n^k|^2}{h}\right| \le (8m+2)(|\widetilde{u}_{n+1}^{k+1}|^2 + |\widetilde{v}_{n-1}^{k+1}|^2 + |\widetilde{u}_n^k|^2 + |\widetilde{v}_n^k|^2) + |\beta|e_n^k + |g_n^k|^2, \tag{2.15}$$

其中

$$\widetilde{e}_n^k = (|\widetilde{u}_{n+1}^{k+1}|^2 + |\widetilde{u}_n^k|^2)|\widetilde{v}_n^k|^2 + (|\widetilde{v}_{n-1}^{k+1}|^2 + |\widetilde{v}_n^k|^2)|\widetilde{u}_n^k|^2$$

and

$$|g_n^k|^2 = |g_n^{k,1}|^2 + |g_n^{k,2}|^2.$$

于是我们得到 $(\widetilde{u}^{(h)}, \widetilde{v}^{(h)})$ 的以下演化估计。

引理 2.8. 存在常数 $\delta_1 > 0$ 和 $C_2 > 0$，使得若 $h \in (0, 1/2)$ 且若 $(|\widetilde{u}_n^k|^2 + |\widetilde{v}_n^k|^2)h \le \delta_1$，则

$$\Big|\frac{|\widetilde{u}_{n+1}^{k+1}|^2 - |\widetilde{u}_n^k|^2}{h}\Big| \le C_2\Big((|\widetilde{u}_n^k|^2 + |\widetilde{v}_n^k|^2) + |\widetilde{u}_n^k|^2|\widetilde{v}_n^k|^2 + |g_n^k|^2\Big) \tag{2.16}$$

and

$$\Big|\frac{|\widetilde{v}_{n-1}^{k+1}|^2 - |\widetilde{v}_n^k|^2}{h}\Big| \le C_2\Big((|\widetilde{u}_n^k|^2 + |\widetilde{v}_n^k|^2) + |\widetilde{u}_n^k|^2|\widetilde{v}_n^k|^2 + |g_n^k|^2\Big). \tag{2.17}$$

证明. 首先，与引理 2.1 的证明一样，我们将 (2.12) 中的第一个方程乘以 $\overline{\widetilde{u}_{n+1}^{k+1} + \widetilde{u}_n^k}$，将 (2.12) 中的第二个方程乘以 $\overline{\widetilde{v}_{n-1}^{k+1} + \widetilde{v}_n^k}$，并取它们的实部之和，从而得到

$$|\widetilde{u}_{n+1}^{k+1}|^2 + |\widetilde{v}_{n-1}^{k+1}|^2 = |\widetilde{u}_n^k|^2 + |\widetilde{v}_n^k|^2 + h\Re\{g_n^{k,1}(\overline{\widetilde{u}_{n+1}^{k+1} + \widetilde{u}_n^k}) + g_n^{k,2}(\overline{\widetilde{v}_{n-1}^{k+1} + \widetilde{v}_n^k})\}.$$

于是,

$$|\widetilde{u}_{n+1}^{k+1}|^2 + |\widetilde{v}_{n-1}^{k+1}|^2 \le |\widetilde{u}_n^k|^2 + |\widetilde{v}_n^k|^2 + h\{|g_n^k|^2 + |\widetilde{u}_{n+1}^{k+1}|^2 + |\widetilde{v}_{n-1}^{k+1}|^2 + |\widetilde{u}_n^k|^2 + |\widetilde{v}_n^k|^2\},$$

这给出对于 $h \in (0, 1/2)$，有

$$|\widetilde{u}_{n+1}^{k+1}|^2 + |\widetilde{v}_{n-1}^{k+1}|^2 \le 2(|\widetilde{u}_n^k|^2 + |\widetilde{v}_n^k|^2) + 2|g_n^k|^2. \tag{2.18}$$

将 (2.18) 代入 (2.14) 和 (2.15)，可得

$$\Big|\frac{|\widetilde{u}_{n+1}^{k+1}|^2 - |\widetilde{u}_n^k|^2}{h}\Big| \le 4(8m+2)(|\widetilde{u}_n^k|^2 + |\widetilde{v}_n^k|^2) + |\beta|\widetilde{e}_n^k + (16m+5)|g_n^k|^2 \tag{2.19}$$

and

$$\Big|\frac{|\widetilde{v}_{n-1}^{k+1}|^2 - |\widetilde{v}_n^k|^2}{h}\Big| \le 4(8m+2)(|\widetilde{u}_n^k|^2 + |\widetilde{v}_n^k|^2) + |\beta|e_n^k + (16m+5)|g_n^k|^2, \tag{2.20}$$

这使我们能够采用与引理 2.6 的证明中相同的论证，得到 (2.16) 和 (2.17)。证明完毕。□

3. L^2- stability Estimates on the QLB schemes

3.1. 解之差的估计。设 $\{(u_n^k, v_n^k)\}_{k,n}$ 由格式 (1.6) 给出， $\{(\widetilde{u}_n^k, \widetilde{v}_n^k)\}_{k,n}$ 由 (2.12) 给出。记

$$U_n^k = \widetilde{u}_n^k - u_n^k, \quad V_n^k = \widetilde{v}_n^k - v_n^k$$

对于整数 k 和 n，其中 $k \geq 0$ 和 $-\infty < n < \infty$。

Then

$$\frac{U_{n+1}^{k+1} - U_n^k}{h} = im\frac{V_{n-1}^{k+1} + V_n^k}{2} + i\alpha q_n^{k,1} + i\beta q_n^{k,2} + g_n^{k,1} \tag{3.1}$$

and

$$\frac{V_{n-1}^{k+1} - V_n^k}{h} = im\frac{U_{n+1}^{k+1} + U_n^k}{2} + i\alpha q_n^{k,3} + i\beta q_n^{k,4} + g_n^{k,2}, \tag{3.2}$$

where

$$q_n^{k,1} = \frac{U_{n+1}^{k+1} + U_n^k}{2}|\widetilde{v}_n^k|^2 + \frac{u_{n+1}^{k+1} + u_n^k}{2}(V_n^k\overline{\widetilde{v}_n^k} + v_n^k\overline{V_n^k}),$$

$$q_n^{k,2} = \frac{1}{2}\Big\{(V_{n-1}^{k+1} + V_n^k)G(\widetilde{u}_n^k, \widetilde{v}_n^k) + (v_{n-1}^{k+1} + v_n^k)G(U_n^k, \widetilde{v}_n^k) + (v_{n-1}^{k+1} + v_n^k)G(u_n^k, V_n^k)\Big\},$$

$$q_n^{k,3} = \frac{V_{n-1}^{k+1} + V_n^k}{2}|\widetilde{u}_n^k|^2 + \frac{v_{n-1}^{k+1} + v_n^k}{2}(U_n^k\overline{\widetilde{u}_n^k} + u_n^k\overline{U_n^k})$$

and

$$q_n^{k,4} = \frac{1}{2}\Big\{(U_{n+1}^{k+1} + U_n^k)G(\widetilde{u}_n^k, \widetilde{v}_n^k) + (u_{n+1}^{k+1} + u_n^k)G(U_n^k, \widetilde{v}_n^k) + (u_{n+1}^{k+1} + u_n^k)G(u_n^k, V_n^k)\Big\}.$$

直接计算得到关于 $(U_{n+1}^{k+1}, V_{n-1}^{k+1})$ 的以下估计。

^引理 3.1。存在一个常数 $C_3 > 0$，使得

$$|\frac{|U_{n+1}^{k+1}|^2 - |U_n^k|^2}{h}| \leq \widehat{C}_3(|U_{n+1}^{k+1}|^2 + |V_{n-1}^{k+1}|^2 + |U_n^k|^2 + |V_n^k|^2 + \widehat{E}_n^k + |g_n^k|^2) \tag{3.3}$$

and

$$|\frac{|V_{n-1}^{k+1}|^2 - |V_n^k|^2}{h}| \leq \widehat{C}_3(|U_{n+1}^{k+1}|^2 + |V_{n-1}^{k+1}|^2 + |U_n^k|^2 + |V_n^k|^2 + \widehat{E}_n^k + |g_n^k|^2) \tag{3.4}$$

对于任意 $k \geq 0$、 $-\infty < n < \infty$ 和 $h \in (0, 1)$，其中

$$\begin{aligned}\widehat{E}_n^k &= (|U_{n+1}^{k+1}|^2 + |U_n^k|^2)(|v_{n-1}^{k+1}|^2 + |v_n^k|^2 + |\widetilde{v}_{n-1}^{k+1}|^2 + |\widetilde{v}_n^k|^2) \\ &+ (|V_{n-1}^{k+1}|^2 + |V_n^k|^2)(|u_{n+1}^{k+1}|^2 + |u_n^k|^2 + |\widetilde{u}_{n+1}^{k+1}|^2 + |\widetilde{u}_n^k|^2).\end{aligned}$$

证明。事实上，分别将方程 (3.1) 和 (3.2) 乘以$\overline{U_{n+1}^{k+1} + U_n^k}$和 $\overline{V_{n-1}^{k+1} + V_n^k}$，并取实部，可得

$$\frac{|U_{n+1}^{k+1}|^2 - |U_n^k|^2}{h} = \Re\Big\{im(\overline{U_{n+1}^{k+1} + U_n^k})(V_{n-1}^{k+1} + V_n^k)\Big\} + E_n^{k,1} \tag{3.5}$$

and

$$\frac{|V_{n-1}^{k+1}|^2-|V_n^k|^2}{h}=\Re\Big\{im(\overline{V_{n-1}^{k+1}+V_n^k})(U_{n+1}^{k+1}+U_n^k)\Big\}+E_n^{k,2}, \tag{3.6}$$

其中

$$E_n^{k,1}=\Re\Big\{(\overline{U_{n+1}^{k+1}+U_n^k})(i\alpha q_n^{k,1}+i\beta q_n^{k,2}+g_n^{k,1})\Big\}$$

and

$$E_n^{k,2}=\Re\Big\{(\overline{V_{n-1}^{k+1}+V_n^k})(i\alpha q_n^{k,3}+i\beta q_n^{k,4}+g_n^{k,2}\Big\}.$$

然后分别对 (3.5) 右端应用柯西–施瓦茨不等式，得到 (3.3) 和 (3.4)。至此，证明完成。(3.6)

□

此外，上述估计还可以改写为以下更精确的形式。

引理 3.2. 存在常数 $\delta_2>0$ 和 $C_3>0$，使得如果 $h\in(0,h_1)$，且如果 $(|u_n^k|^2+|v_n^k|^2)$ $h\le\delta_2$ 和 $(|\widetilde{u}_n^k|^2+|\widetilde{v}_n^k|^2)h\le\delta_2$，并且如果 $|g_n^k|^2h\le\delta_2$，那么

$$|\frac{|U_{n+1}^{k+1}|^2-|U_n^k|^2}{h}|\le C_3(|U_n^k|^2+|V_n^k|^2+E_n^k+|g_n^k|^2) \tag{3.7}$$

and

$$|\frac{|V_{n-1}^{k+1}|^2-|V_n^k|^2}{h}|\le C_3(|U_n^k|^2+|V_n^k|^2+E_n^k+|g_n^k|^2), \tag{3.8}$$

其中

$$E_n^k=|U_n^k|^2(|v_n^k|^2+|\widetilde{v}_n^k|^2)+|V_n^k|^2(|u_n^k|^2+|\widetilde{u}_n^k|^2).$$

这里 $h_1=\min\{\frac{1}{2\widehat{C}_3},\frac{1}{4}\}$。

证明。首先，引理 3.1 给出如下结果，

$$|U_{n+1}^{k+1}|^2+|V_{n-1}^{k+1}|^2\le\widehat{C}_3(h+1)(|U_n^k|^2+|V_n^k|^2)+\widehat{C}_3h(|U_{n+1}^{k+1}|^2+|V_{n-1}^{k+1}|^2+\widehat{E}_n^k+|g_n^k|^2),$$

这意味着，对于 $h\in(0,\frac{1}{2\widehat{C}_3})$，有

$$|U_{n+1}^{k+1}|^2+|V_{n-1}^{k+1}|^2\le 2\widehat{C}_3(h+1)(|U_n^k|^2+|V_n^k|^2)+2\widehat{C}_3h(\widehat{E}_n^k+|g_n^k|^2).$$

因此，将上述不等式代入 (3.3) 和 (3.4)，可得

$$|\frac{|U_{n+1}^{k+1}|^2-|U_n^k|^2}{h}|\le C_3'(|U_n^k|^2+|V_n^k|^2+\widehat{E}_n^k+|g_n^k|^2) \tag{3.9}$$

and

$$|\frac{|V_{n-1}^{k+1}|^2-|V_n^k|^2}{h}|\le C_3'(|U_n^k|^2+|V_n^k|^2+\widehat{E}_n^k+|g_n^k|^2) \tag{3.10}$$

$\widehat{}$对于 $h\in(0,h_1)$，其中某个常数 $C_3'>0$ 仅依赖于 C_3。

接下来，我们假设 $h\in(0,h_1)$，并假设 $(|u_n^k|^2+|v_n^k|^2)h\le\delta_2$ 和 $(|\widetilde{u}_n^k|^2+|\widetilde{v}_n^k|^2)h\le\delta_2$ 以及 $|g_n^k|^2h\le\delta_2$，其中 $\delta_2\in(0,\frac{1}{(C_1+C_\beta)+1})$ 是~~一个稍后~~将指定的常数。

由 (3.9) 和 (3.10)，可得

$$|U_{n+1}^{k+1}|^2+|U_n^k|^2\le 2|U_n^k|^2+C_3'h(|U_n^k|^2+|V_n^k|^2+\widehat{E}_n^k+|g_n^k|^2) \tag{3.11}$$

and

$$|V_{n-1}^{k+1}|^2+|V_n^k|^2\le 2|V_n^k|^2+C_3'h(|U_n^k|^2+|V_n^k|^2+\widehat{E}_n^k+|g_n^k|^2); \tag{3.12}$$

由引理 2.6 和引理 2.8，可得

$$\begin{aligned}|u_{n+1}^{k+1}|^2+|u_n^k|^2+|\widetilde{u}_{n+1}^{k+1}|^2+|\widetilde{u}_n^k|^2 &\le 2|u_n^k|^2+2|\widetilde{u}_n^k|^2+C_2'h(|u_n^k|^2|v_n^k|^2+|\widetilde{u}_n^k|^2|\widetilde{v}_n^k|^2)\\ &+ C_2'h(|u_n^k|^2+|v_n^k|^2+|\widetilde{u}_n^k|^2+|\widetilde{v}_n^k|^2+|g_n^k|^2)\\ &\le 3(|u_n^k|^2+|\widetilde{u}_n^k|^2)+3\delta_2 \end{aligned}\tag{3.13}$$

and

$$|v_{n-1}^{k+1}|^2+|v_n^k|^2+|\widetilde{v}_{n-1}^{k+1}|^2+|\widetilde{v}_n^k|^2\le 3(|v_n^k|^2+|\widetilde{v}_n^k|^2)+3\delta_2, \tag{3.14}$$

其中 $C_2'=C_1+C_\beta$。

于是，(3.11-3.14) 得到如下结果，

$$\begin{aligned}\widehat{E}_n^k &\le \big\{2|U_n^k|^2+C_3'h(|U_n^k|^2+|V_n^k|^2+\widehat{E}_n^k+|g_n^k|^2)\big\}\big\{3(|v_n^k|^2+|\widetilde{v}_n^k|^2)+3\delta_2\big\}\\ &\quad+\big\{2|V_n^k|^2+C_3'h(|U_n^k|^2+|V_n^k|^2+\widehat{E}_n^k+|g_n^k|^2)\big\}\big\{3(|u_n^k|^2+|\widetilde{u}_n^k|^2)+3\delta_2\big\}\\ &\le 6E_n^k+C_3''\delta_2(|U_n^k|^2+|V_n^k|^2+|g_n^k|^2)+C_3'''\delta_2\widehat{E}_n^k \end{aligned}\tag{3.15}$$

对于 $C_3''=12+6C_3'(2+h)$ 和 $C_3'''=6C_3'(2+h)$。

现在我们选择一个合适的常数 $\delta_2>0$，使得 $C_3'''\delta_2<\frac{1}{2}$。然后 (3.15) 得到 th 估计

$$\widehat{E}_n^k\le C_3^*(|U_n^k|^2+|V_n^k|^2+E_n^k+|g_n^k|^2)$$

其中 $C_3^*=(12+4C_3''\delta_2)$ 是一个正的常数。结合 (3.9) 和 (3.10)，可得所需的估计 (3.7) 和 (3.8)。因此，证明完成。□

3.2. 特征三角形区域上解的 L^2-稳定性。令 $\Delta=\Delta(n_1,k_1;k_0)$。我们为 Δ 上的 $(u^{(h)},v^{(h)})$ 定义以下泛函。

定义 3.1. 对于 $k_0\le k\le k_1$，定义

$$L_0(k;\Delta)=\sum_{n_1-k_1+k\le n\le n_1+k_1-k}(|u_n^k|^2+|v_n^k|^2),$$

$$D_0(k;\Delta)=\sum_{n_1-k_1+k\le n\le n_1+k_1-k}|u_n^k|^2|v_n^k|^2,$$

对于方程 (2.12) 的解 $(\widetilde{u}^{(h)},\widetilde{v}^{(h)})$，我们定义如下泛函。

定义 3.2。

$$\widetilde{L}_0(k;\Delta)=\sum_{n_1-k_1+k\le n\le n_1+k_1-k}(|\widetilde{u}_n^k|^2+|\widetilde{v}_n^k|^2),$$

$$\widetilde{L}_g(k;\Delta)=\sum_{n_1-k_1+k\le n\le n_1+k_1-k}|g_n^k|^2$$

and

$$\widetilde{D}_0(k;\Delta)=\sum_{n_1-k_1+k\le n\le n_1+k_1-k}|\widetilde{u}_n^k|^2|\widetilde{v}_n^k|^2.$$

对于差值 $(U^{(h)}, V_{(h)}) = (\widetilde{u}^{(h)} - u^{(h)}, \widetilde{v}^{(h)} - v^{(h)})$，我们定义如下。

定义 3.3. 令 $\Delta = \Delta(n_1, k_1;\ k_0)$。对于 $k_0 \le k \le k_1$，定义

$$L_1(k;\Delta) = \sum_{n_1-k_1+k\le n\le n_1+k_1-k} (|U_n^k|^2 + |V_n^k|^2),$$

$$Q_1(k;\Delta) = \sum_{n_1-k_1+k\le n\le l\le n_1+k_1-k} \left\{|U_n^k|^2(|v_l^k|^2 + |\widetilde{v}_l^k|^2) + |V_l^k|^2(|u_n^k|^2 + |\widetilde{u}_n^k|^2)\right\}$$

and

$$D_1(k;\Delta) = \sum_{n_1-k_1+k\le n\le n_1+k_1-k} \left\{|U_n^k|^2(|v_n^k|^2 + |\widetilde{v}_n^k|^2) + |V_n^k|^2(|u_n^k|^2 + |\widetilde{u}_n^k|^2)\right\}.$$

定义 3.4. 对任意常数 $K > 0$ 和任意 $h > 0$，定义

$$F_1(k;\Delta) = L_1(k;\Delta)h + KQ_1(k;\Delta)h^2.$$

为处理上述泛函，给出如下技术引理。

引理 3.3. 设 $a_n^k \ge 0$, $b_n^k \ge 0$, $c_n^k \ge 0$ 和 $d_n^k \ge 0$ 对应整数 n 和 $k \ge 0$，且

$$a_{n+1}^{k+1} \le a_n^k + c_n^k$$

and

$$b_{n+1}^{k+1} \le b_n^k + d_n^k.$$

给定 $k_0 \ge 0$ 和 n_0，且对于 $0 \le k \le k_0$，令

$$Q_{n_0,k_0}(k) = \sum_{n_0-k_0+k\le n\le l\le n_0+k_0-k} a_n^k b_l^k$$

and

$$D_{n_0,k_0}(k) = \sum_{n_0-k_0+k\le n\le n_0+k_0-k} a_n^k b_n^k.$$

那么，对于 $1 \le k \le k_0$，有

$$Q_{n_0,k_0}(k) - Q_{n_0,k_0}(k-1) + D_{n_0,k_0}(k-1) \le E_{n_0,k_0}(k-1),$$

其中

$$E_{n_0,k_0}(k) = L^a_{n_0,k_0}(k)L^d_{n_0,k_0}(k) + L^b_{n_0,k_0}(k)L^c_{n_0,k_0}(k) + L^c_{n_0,k_0}(k)L^d_{n_0,k_0}(k)$$

and

$$L^a_{n_0,k_0}(k) = \sum_{n_0-k_0+k\le n\le n_0+k_0-k} a_n^k,$$

$$L^b_{n_0,k_0}(k) = \sum_{n_0-k_0+k\le n\le n_0+k_0-k} b_n^k,$$

$$L^c_{n_0,k_0}(k) = \sum_{n_0-k_0+k\le n\le n_0+k_0-k} c_n^k,$$

$$L^d_{n_0,k_0}(k) = \sum_{n_0-k_0+k\le n\le n_0+k_0-k} d^k_n.$$

证明。对于 $1 \le k \le k_0$，令

$$Q'_{n_0,k_0}(k-1) = \sum_{n_0-k_0+k\le n\le l\le n_0+k_0-k} a^{k-1}_{n-1} b^{k-1}_{l+1}.$$

然后，利用 $n' = n-1$ 和 $l' = l+1$，得到

$$\begin{aligned} Q'_{n_0,k_0}(k-1) &= \sum_{n=n_0-k_0+k}^{n_0+k_0-k} a^{k-1}_{n-1}\Big(\sum_{l'=n+1}^{n_0+k_0-k+1} b^{k-1}_{l'}\Big) \\ &= \sum_{n'=n_0-k_0+k-1}^{n_0+k_0-k-1} a^{k-1}_{n'}\Big(\sum_{l'=n'+2}^{n_0+k_0-k+1} b^{k-1}_{l'}\Big), \end{aligned}$$

由此得到

$$Q'_{n_0,k_0}(k-1) + D_{n_0,k_0}(k-1) \le Q_{n_0,k_0}(k-1).$$

因此，

$$\begin{aligned} Q_{n_0,k_0}(k) - Q_{ab}(k-1) &\le Q'_{n_0,k_0}(k-1) + E_{n_0,k_0}(k-1) - Q_{n_0,k_0}(k-1) \\ &\le -D_{n_0,k_0}(k-1) + E_{n_0,k_0}(k-1), \end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

将引理 3.3 应用于 Δ上的泛函 Q_1，得到以下估计。

引理 3.4. 存在正常数 δ_3、 h_2 和 C_4，与 k_0、 k_1 和 $\sim n_1$ 无关，使得若 $h \in (0, h_2)$ 且 $L_0(k-1;\Delta)h \le \delta_3$ 和 $L_0(k-1;\Delta)h \le \delta_3$，并且若$\sim L_g(k-1,\Delta)h \le \delta_3$，则

$$\begin{aligned} Q_1(k;\Delta) - Q_1(k-1;\Delta) + \frac{1}{2}D_1(k-1;\Delta) &\le C_4\Big(\widetilde{L}_g(k-1;\Delta) + L_1(k-1;\Delta)\Big) \\ &+ C_4\Lambda(k-1;\Delta)L_1(k-1;\Delta)h. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Here

$$\Lambda(k-1;\Delta) = D_0(k-1;\Delta) + \widetilde{D}_0(k-1;\Delta) + \widetilde{L}_g(k-1;\Delta).$$

证明. 在证明中，我们固定区域，并为简便起见，在泛函 $L_j(k;\Delta)$ 和$D_j(k,\Delta)$、 $j = 0$、1 等中省略“Δ”。

对于 $n_1 - k_1 + k \le n \le n_1 + k_1 - k$和 $k_0 + 1 \le k \le k_1$，以及对于 $h \in (0, h_1)$，引理 3.2 给出

$$|U^k_n|^2 \le |U^{k-1}_{n-1}|^2 + C_3 h(|U^{k-1}_{n-1}|^2 + |V^{k-1}_{n-1}|^2 + E^{k-1}_{n-1} + |g^{k-1}_{n-1}|^2) \tag{3.17}$$

and

$$|V^k_l|^2 \le |V^{k-1}_{l+1}|^2 + C_3 h(|U^{k-1}_{l+1}|^2 + |V^{k-1}_{l+1}|^2 + E^{k-1}_{l+1} + |g^{k-1}_{l+1}|^2) \tag{3.18}$$

~ ~对于 $L_0(k-1)h \le \delta_2$ 和 $L_0(k-1)h \le \delta_2$，以及对于 $L_g(k-1,\Delta)h \le \delta_2$；引理 2.6 和引理 2.8 给出

$$\begin{aligned} |u_n^k|^2 + |\widetilde{u}_n^k|^2 &\le |u_{n-1}^{k-1}|^2 + |\widetilde{u}_{n-1}^{k-1}|^2 + C_2'h(|u_{n-1}^{k-1}|^2 + |v_{n-1}^{k-1}|^2 + |\widetilde{u}_{n-1}^{k-1}|^2 + |\widetilde{v}_{n-1}^{k-1}|^2) \\ &\quad + C_2'h(|u_{n-1}^{k-1}|^2|v_{n-1}^{k-1}|^2 + |\widetilde{u}_{n-1}^{k-1}|^2|\widetilde{v}_{n-1}^{k-1}|^2 + |g_{n-1}^{k-1}|^2) \end{aligned} \tag{3.19}$$

and

$$\begin{aligned} |v_l^k|^2 + |\widetilde{v}_l^k|^2 &\le |v_{l+1}^{k-1}|^2 + |\widetilde{v}_{l+1}^{k-1}|^2 + C_2'h(|u_{l+1}^{k-1}|^2 + |v_{l+1}^{k-1}|^2 + |\widetilde{u}_{l+1}^{k-1}|^2 + |\widetilde{v}_{l+1}^{k-1}|^2) \\ &\quad + C_2'h(|u_{l+1}^{k-1}|^2|v_{l+1}^{k-1}|^2 + |\widetilde{u}_{l+1}^{k-1}|^2|\widetilde{v}_{l+1}^{k-1}|^2 + |g_{l+1}^{k-1}|^2) \end{aligned} \tag{3.20}$$

~对于 $L_0(k-1)h \le \delta_2$ 和 $L_0(k-1)h \le \delta_2$。这里，δ_2 和 $C_2' = C_\beta + C_1$ 如引理 3.2 的证明中所给出。

然后，分别将引理 3.3 应用于 $a_n^k = |U_n^k|^2$ 和 $b_n^k = |v_n^k|^2 + |\widetilde{v}_n^k|^2$ 的情形，以及 $a_n^k = |u_n^k|^2 + |\widetilde{u}_n^k|^2$ 和 $b_n^k = |V_n^k|^2$ 的情形，由 (3.17-3.20) 可推得

$$\begin{aligned} Q_1(k) &\le Q_1(k-1) - D_1(k-1) \\ &+ C_4'hL_1(k-1)\big\{L_0(k-1) + \widetilde{L}_0(k-1) + \Lambda(k-1)\big\} \\ &+ C_4'\Theta(h,k-1)\{D_1(k-1) + \widetilde{L}_g(k-1)\}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

其中 $C_4' = (C_2'+1)(C_3+1)$，并且

$$\Theta(h,k-1) = \{L_0(k-1) + \widetilde{L}_0(k-1)\}h + \{D_0(k-1) + \widetilde{D}_0(k-1) + \widetilde{L}_g(k-1)\}h^2.$$

现在我们选取一个 $\delta_3 \in (0,\delta_2)$，使得

$$-1 + C_4'(3\delta_3 + 2\delta_3^2) \le -\frac{1}{2},$$

~ ~并假设 $L_0(k-1)h \le \delta_3$、$L_0(k-1)h \le \delta_3$ 和 $L_g(k-1)h \le \delta_3$，则

$$-1 + C_4'\Theta(h,k-1) \le -\frac{1}{2}.$$

因此，由 (3.21) 和引理 3.3 可得：

$$\begin{aligned} Q_1(k) &\le Q_1(k-1) - \frac{1}{2}D_1(k-1) \\ &+ C_4'L_1(k-1)\big\{2\delta + \Lambda(k-1)h\big\} \\ &+ \frac{1}{2}C_4'\widetilde{L}_g(k-1), \end{aligned}$$

由此完成证明。□

现在我们可以 通过对 D_1 和 L_1 的估计，推导出关于泛函 F_1 的以下估计 .

命题 3.1. 存在与 Δ 和 h 无关的常数 $K>0$ 和 $C_*>0$，使得如果 $L_0(k_0;\Delta)h \le \delta_*$、$\sup_{k_0\le k\le k_1-1} L_0(k;\Delta)h \le \delta_*$ 且 $\sup_{k_0\le k\le k_1-1} L_g(k;\Delta)h \le \delta_*$，那么

$$F_1(k;\Delta) - F_1(k-1;\Delta) \le C_*h^2\{\widetilde{L}_g(k-1;\Delta) + L_1(k-1;\Delta)\}$$

$$+ \quad C_* h^3 \Lambda(k-1;\Delta) L_1(k-1;\Delta) \tag{3.22}$$

对于 $k_0+1 \le k \le k_1$ 和 $h \in (0, h_2)$，其中 h_2 由引理 3.4 给出，并且

$$\Lambda(k-1;\Delta) = D_0(k-1;\Delta) + \widetilde{D}_0(k-1;\Delta) + \widetilde{L}_g(k-1;\Delta).$$

此外，

$$F_1(k;\Delta) \le \big\{F_1(k_0;\Delta) + C_* \sum_{k_0 \le j \le k-1} \widetilde{L}_g(j;\Delta) h^2\big\} \exp(\Lambda_*(k_0,k,h)) \tag{3.23}$$

对于 $k_0+1 \le k \le k_1$ 和 $h \in (0, h_2)$，其中

$$\Lambda_*(k_0,k,h) = C_*(k-k_0)h + C_* \sum_{j=k_0}^{k-1} (D_0(j;\Delta) + \widetilde{D}_0(j;\Delta) + \widetilde{L}_g(j;\Delta)) h^2.$$

证明。令 $h \in (0, h_2)$。由引理 2.2 可得

$$L_0(k;\Delta) \le L_0(k_0;\Delta) \le \delta_* \tag{3.24}$$

对于 $k_0+1 \le k \le k_1$。

并且由引理 3.2 可得

$$L_1(k;\Delta)h \le L_1(k-1;\Delta)h + 2C_3 h^2 \big(L_1(k-1;\Delta) + D_1(k-1;\Delta) + \widetilde{L}_g(k-1;\Delta)\big). \tag{3.25}$$

然后我们选择一个正的常数 K，使得

$$\frac{1}{2}K - 2C_3 > 1,$$

由 (3.24)-(3.25) 以及引理 3.4 可直接得到不等式 (3.22)。

此外，(3.22) 意味着以下结论：

$$\begin{aligned} F_1(j;\Delta) &\le F_1(j-1;\Delta)\exp(\Lambda_{j-1,j,h}) + C_* h^2 \widetilde{L}_g(j-1;\Delta) \\ &\le \big(F_1(j-1;\Delta) + C_* h^2 \widetilde{L}_g(j-1;\Delta)\big)\exp(\Lambda_{j-1,j,h}) \end{aligned} \tag{3.26}$$

对于 $k_0+1 \le j \le k$，其中

$$\Lambda_{j-1,j,h} = C_* h + \big(D_0(j-1;\Delta) + \widetilde{D}_0(j-1;\Delta) + \widetilde{L}_g(j-1;\Delta)\big)h^2.$$

因此，对 j 使用归纳法，我们可以由 (3.26) 推导出 (3.23)。证明完毕。□

4. Compactness of the sequence of solutions in L^2_{loc}

令 h_2 由引理 3.4 给出。对于 $T>0$，我们考虑 $L^2(R^1 \times [0,T])$ 中的解集 $\{(u^{(h)}, v^{(h)}) \mid h \in (0, h_2)\}$。

4.1. L^2 条带区域中的稳定性估计。考虑差值

$$(u^{(h)}(x+\tau,t)-u^{(h)}(x,t), v^{(h)}(x+\tau,t)-v^{(h)}(x,t))$$

对于 $|\tau|>0$ 和 $h\in(0,h_2)$。

首先，我们给出三角形区域 $\Delta=\Delta(n_1,k_1;\ k_0)$ 中此类差异的估计如下。

引理 4.1. 假设对于某个整数 $n_0\neq 0$，有 $\tau=n_0h$，并令 $(\widetilde{u}_n^k,\widetilde{v}_n^k)=(u_{n+n_0}^k,v_{n+n_0}^k)$，其中整数 k 和 n 满足 $k\geq 0$。那么，存在常数 $C_1(T)>0$，其与$\sim\tau$和 Δ无关，使得若 $L_0(k_0;\Delta)\leq\delta_*$ 且若 $L_0(k_0;\Delta)\leq\delta_*$，则

$$F_1(k;\Delta)\leq C_1(T)F_1(k_0;\Delta)$$

对于 $k_0\leq k\leq k_1\leq\frac{T}{h}$且对于 $h\in(0,h_2)$，其中 $\Delta=\Delta(n_1,k_1;\ k_0)$。这里的常数 δ_* 由命题 3.1 给出。

证明. $\{(\widetilde{u}_n^k,\widetilde{v}_n^k)\}_{-\infty<n<\infty,\ k\geq 0}$ 满足格式 (2.12)，其中 $g^{k,\ }{}_n{}^1=g^{k,\ }{}_n{}^2=0$ 对于 $-\infty<\sim n<\infty,k\geq 0$，且 $L_g(k,\Delta)=0$对于 $k_0\leq k\leq k_1$。

根据引理 2.4，我们有

$$\sum_{k=k_0}^{k_1}D_0(k;\Delta)h^2\leq C_0(T)$$

and

$$\sum_{k=k_0}^{k_1}\widetilde{D}_0(k;\Delta)h^2\leq C_0(T)$$

其中某个常数 $C_0(T)$ 仅依赖于 T。这里 $k_1\leq\frac{T}{h}$。

Then

$$\Lambda_*(k_0,k_1,h)\leq C_*(k_1-k_0)h+2C_*C_0(T)\leq C_*T+2C_*C_0(T),$$

这与 命题 3.1 一起导出所需结果。证明完毕。□

引理 4.1 表明解在 Δ 中具有稳定性。为了将这一结果推广到条带区域 $\{(x,t)\mid x\in R^1,\ 0\leq t\leq T\}$ 对于 $T>0$，我们将条带区域划分为三个合适的子区域，并首先通过以下步骤选取无界区域 $\{(x,t)\mid |x|\geq A+t,\ 0\leq t\leq T\}$，其中某个常数 $A>0$。

Lemma 4.2. 对于 $\varepsilon>0$，存在常数 $A_{(\varepsilon)}>0$ 和 $h_{(\varepsilon)}>0$ 使得 at

$$\sup_{h\in(0,h_{(\varepsilon)})}\int_{|x|\geq A_{(\varepsilon)}+t}\left(|u^{(h)}(x,t)|^2+|v^{(h)}(x,t)|^2\right)dx\leq\varepsilon. \tag{4.1}$$

因此，存在常数 $A>0$ 和 $h_3\in(0,\ h_2]$，使得

$$\sup_{h\in(0,h_3)}\int_{|x|\geq A+t}\left(|u^{(h)}(x,t)|^2+|v^{(h)}(x,t)|^2\right)dx\leq\frac{\delta_*}{8} \tag{4.2}$$

其中 δ_* 由命题 3.1 给出。这里 A 与 h无关。

证明。选取 $A_{(\varepsilon)} > 0$ 使得

$$\int_{|x|\geq A_{(\varepsilon)}/2} \big(|u_0(x)|^2 + |v_0(x)|^2\big)dx \leq \frac{\varepsilon}{64}.$$

那么，由于收敛性,

$$\lim_{h\to 0}(||u^{(h)}(x,0) - u_0||_{L^2(R^1)} + ||v^{(h)}(x,0) - v_0||_{L^2(R^1)}) = 0,$$

我们可以选择 $h_{(\varepsilon)} > 0$ 使得

$$\sup_{h\in(0,h_{(\varepsilon)})} \int_{|x|\geq A_{(\varepsilon)}/2} \big(|u^{(h)}(x,0)|^2 + |v^{(h)}(x,0)|^2\big)dx \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

因此，将 (2.2) 在区域 $\{(x,s)\ |\ |x| \geq \frac{A_{(\varepsilon)}}{2} + s,\ 0 \leq s \leq t\}$ 上求和，可得

$$\int_{|x|\geq A_{(\varepsilon)}+t} \big(|u^{(h)}(x,t)|^2 + |v^{(h)}(x,t)|^2\big)dx \leq \int_{|x|\geq A_{(\varepsilon)}/2} \big(|u^{(h)}(x,0)|^2 + |v^{(h)}(x,0)|^2\big)dx \leq \varepsilon$$

对于 $h \in (0, h_{(\varepsilon)})$，这给出了 (4.1) 和 4.2。证明完毕。 □

根据引理 4.1，我们可以在区域 $\{(x,t)|\ |x| \geq A+2t,\ t>0\}$ 中推导出以下稳定性结果。

引理 4.3. 设 A 和 h_3 是引理 4.2 中给出的常数，且设 $T > 0$。令$n_A = [A/h] + 1$。则存在常数 $C(T) > 0$，它依赖于 $T > 0$，使得

$$\sup_{0\leq kh\leq T} \int_{|x|\geq 2n_Ah+kh} \big(|u^{(h)}(x+n_0h,kh) - u^{(h)}(x,kh)|^2 + |v^{(h)}(x+n_0h,kh) - v^{(h)}(x,kh)|^2\big)dx$$
$$\leq C_2(T) \int_{|x|\geq 2n_Ah} \big(|u^{(h)}(x+n_0h,0) - u^{(h)}(x,0)|^2 + |v^{(h)}(x+n_0h,0) - v^{(h)}(x,0)|^2\big)dx$$

对于 $|n_0| \leq \frac{n_A}{2}$和 $h \in (0, h_3)$。这里，常数 $C_2(T)$ 仅依赖于 T。

证明. 不失一般性，假设 $A = (n_A - 1)h$，并令 $\tau = n_0h$。考虑 $\Delta(2n_A + 2 + k_1, k_1, 0)$ 和 $\Delta(-2n_A - 2 - k_1, k_1, 0)$，其中 $k_1 > T/h$。

由引理 4.2 可得，对于 $|\tau| \leq A/2$，$\int_{2A+2h\pm\tau}^{2A+2h+2k_1h\pm\tau}(|u^{(h)}(x,0)|^2 + |v^{(h)}(x,0)|^2)dx \leq \frac{\delta_*}{8}$且$\int_{-2A-2h-2k_1h\pm\tau}^{-2A-2h\pm\tau}(|u^{(h)}(x,0)|^2 + |v^{(h)}(x,0)|^2)dx \leq \frac{\delta_*}{8}$。

那么，对于 $|\tau| \leq A/2$和 $h \in (0, h_1)$，由引理 4.1 可得，对于 $0 \leq k \leq T/h$，有如下结果:

$$\int_{2A+2h+kh}^{2A+2h+2k_1h-kh} \big(|u^{(h)}(x+\tau,kh) - u^{(h)}(x,kh)|^2 + |v^{(h)}(x+\tau,kh) - v^{(h)}(x,kh)|^2\big)dx$$
$$\leq C_2(T) \int_{2A+2h}^{2A+2h+2k_1h} \big(|u^{(h)}(x+\tau,0) - u^{(h)}(x,0)|^2 + |v^{(h)}(x+\tau,0) - v^{(h)}(x,0)|^2\big)dx$$

and

$$\int_{-2A-2k_1h+kh}^{-2A-2h-kh}\big(|u^{(h)}(x+\tau,kh)-u^{(h)}(x,kh)|^2+|v^{(h)}(x+\tau,kh)-v^{(h)}(x,kh)|^2\big)dx$$

$$\le C_2(T)\int_{-2A-2h-2k_1h}^{-2A-2h}\big(|u^{(h)}(x+\tau,0)-u^{(h)}(x,0)|^2+|v^{(h)}(x+\tau,0)-v^{(h)}(x,0)|^2\big)dx$$

其中某个常数 $C(T)>0$ 取决于 T，当 k_1 趋于无穷时即可得到所需结果。证明完毕。 □

现在，对于 $a\in R^1$ 和 $t_1\ge t_0\ge 0$，记

$$\Omega(a,t_1;t_0)=\{(x,t)\,|\,a-t_1+t\le x\le a+t_1-t,\ t_0\le t\le t_1\};$$

见图 2。

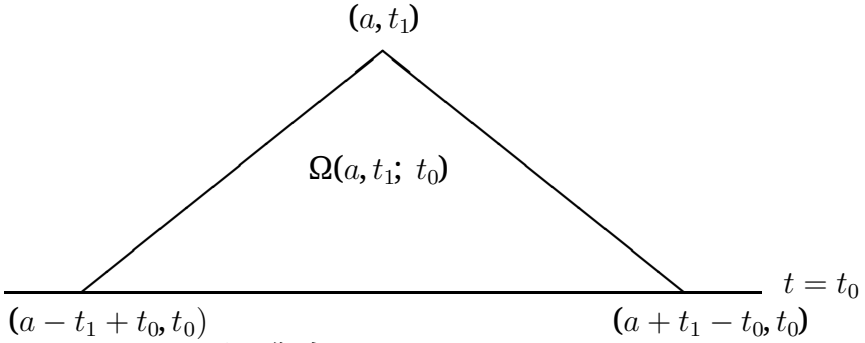

图2. 集合 $\Omega(a,t_1;\ t_0)$

我们在区域 $\Omega(0,4A+T;\ 0)\ \cap\Big(R^1\times[0,T]\Big)$中考虑 L^2–稳定性估计。为此，我们首先推导以下结果，以便在较小区间上控制 $(h^{(h)},v^{(h)})$ 的 L^2–范数。

引理4.4. 设 $T>0$，并令 δ_* 为命题 3.1 给出的常数。存在常数 $h_4>0$和 $r>0$，使得若 $0\le b-a\le 4r$ 且 $t_0=k_0h\in[0,T]$ 对某个$k_0>0$ 成立，则

$$\int\limits_{x\in[a,b]}(|u^{(h)}(x,t_0)|^2+|v^{(h)}(x,t_0)|^2)dx\le\frac{\delta_*}{8}$$

对于 $h\in(0,h_4)$。这里的常数 h_4 和 r 与 h 和 k_0无关。

证明。只需考虑两种情况：$[a,b]\in(-\infty,-t_0-A)\cup(A+t_0,\infty)$的情形，以及 $[a,b]\in(-t_0-4A,4A+t_0)$的情形。这里，A是引理 4.2 给出的常数。

对于 $[a,b]\in(-\infty,-t_0-A)\cup(A+t_0,\infty)$ 的情况，结论由引理 4.2 得出。现在我们考虑第二种情况，即 $[a,b]\in(-t_0-4A,4A+t_0)$。根据假设，

$$\lim_{h\to0}(||u^{(h)}(x,0)-u_0||_{L^2(R^1)}+||v^{(h)}(x,0)-v_0||_{L^2(R^1)})=0,$$

我们可以选择一个 $h_3 \in (0, h_1)$，使得

$$C_1^2(||u^{(h)}(x,0) - u_0||^2_{L^2(R^1)} + ||v^{(h)}(x,0) - v_0||^2_{L^2(R^1)}) \le \delta_*/64$$

对于 $h \in (0, h_3)$。此外，我们选择一个 $r \in (0, A/8)$，使得

$$C_1^2 \int_a^b (|u_0(x)|^2 + |v_0(x)|^2)dx \le \delta_*/64$$

and

$$C_2^2 T(b-a) \le \delta_*/64$$

对于任意满足 $0 < b - a \le 4r$ 的区间 $[a,b] \subset [-T - 4A, 4A + T]$。这里 h_1 是引理 4.2 给出的常数。

于是我们有

$$\sup_{h\in(0,h_3)} 2C_1^2 \int_a^b (|u^{(h)}(x,0)|^2 + |v^{(h)}(x,0)|^2)dx + 4C_2^2 T(b-a) < \delta_*/8 \tag{4.3}$$

对于任意满足 $0 < b - a \le 4r$ 的区间 $[a,b] \subset [-T - 4A, 4A + T]$。

注意到，对于满足 $0 < b - a \le 4r$ 的 $t_0 \in [0,T]$ 和 $[a,b] \subset [t_0 - T - 4A, T + 4A - t_0]$，有 $[a - t_0, b - t_0] \subset [-T - 4A, T + 4A]$ 和 $[a + t_0, b + t_0] \subset [-T - 4A, T + 4A]$。于是，由引理 2.3 和式 (4.3)，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (|u^{(h)}(x,t_0)|^2 + |v^{(h)}(x,t_0)|^2)dx \\
\le\ & \int_a^b (C_1|u^{(h)}(x - t_0, 0)| + C_2\sqrt{T})^2 dx \\
&+ \int_a^b (C_1|v^{(h)}(x + t_0, 0)| + C_2\sqrt{T})^2 dx \\
\le\ & 2C_1^2\Big\{ \int_{a+t_0}^{b+t_0} |u^{(h)}(x,0)|^2 dx + \int_{a-t_0}^{b-t_0} |v^{(h)}(x,0)|^2 dx \Big\} \\
&+ 4C_2^2 T(b-a) < \delta_*/8,
\end{aligned}$$

这就证明了第二种情况的结论。证明完毕。□

于是，我们得到区域 $\Omega(0, 4A + T; 0)$ 内的 L^2–稳定性估计如下。$\cap \Big(R^1 \times [0,T]\Big)$

引理 4.5. 对于 $T > 0$，存在一个常数 $C(T) > 0$，它仅取决于 T，使得

$$\begin{aligned}
&\int_{-4A-T+t}^{4A+T-t} \big(|u^{(h)}(x+\tau,t) - u^{(h)}(x,t)|^2 + |v^{(h)}(x+\tau,t) - v^{(h)}(x,t)|^2\big)dx \\
&\le C(T) \int_{-4A-T}^{4A+T} \big(|u_0^{(h)}(x+\tau) - u^{(h)}(x)|^2 + |v_0^{(h)}(x+\tau) - v_0^{(h)}(x)|^2\big)dx
\end{aligned} \tag{4.4}$$

对于 $h \in (0, h_4)$，$|\tau| \le \frac{A}{64}$且对于 $t \in [0, T]$。这里， A和 h_4分别由引理 4.2 和引理4.4给出。

证明。设 r 和 δ_* 是引理 4.2 和引理4.4给出的常数。不失一般性，假设 $r = n_r h$ 和 $T = n_T h$, $A = n_A h$ 对某些正整数n_r、 n_T和 n_A成立，并假设 $\dfrac{T}{4r} = N_0$ 和 $\dfrac{A}{r} = N_1$ 对某些整数 $N_0 > 0$ 和 $N_1 > 0$成立。

于是，不等式 (4.4) 的证明可通过对 k 进行归纳法来完成，其中 $0 \le k \le 4N_0$；也就是说，我们假设 (4.4) 对 $t \in [0, kr]$ 成立，并旨在证明 (4.4) 对 $t \in [0, (k+1)r]$成立。

注意

$$\overline{\Omega(0, 4A+T; 0)} \cap \{(x,t) \,|\, 0 \le t \le (k+1)r\} \subseteq \Big(\overline{\Omega(0, 4A+T; 0)} \cap \{(x,t) \,|\, 0 \le t \le kr\}\Big) \cup \cup_{k+2-4N_0-4N_1 \le n \le 4N_0+4N_1-k-2} \overline{\Omega(nr, kr+2r; kr)}.$$

由引理 4.1 和引理4.4，存在一个常数 $C(T) > 0$，使得

$$\int_{(n-k-2)r+t}^{(n+k+2)r-t} \big(|u^{(h)}(x+\tau,t) - u^{(h)}(x,t)|^2 + |v^{(h)}(x+\tau,t) - v^{(h)}(x,t)|^2\big)dx \le C(T) \int_{(n-2)r}^{(n+2)r} \big(|u_0^{(h)}(x+\tau) - u^{(h)}(x)|^2 + |v_0^{(h)}(x+\tau) - v_0^{(h)}(x)|^2\big)dx$$

对于 $k+2-4N_0-4N_1 \le n \le 4N_0+4N_1-k-2$ 和 $t \in [kr, (k+2)r]$，由此得到如下结果，

$$\int_{-4A-T+t}^{4A+T-t} \big(|u^{(h)}(x+\tau,t) - u^{(h)}(x,t)|^2 + |v^{(h)}(x+\tau,t) - v^{(h)}(x,t)|^2\big)dx \le C(T,k) \int_{-4A-T}^{4A+T} \big(|u_0^{(h)}(x+\tau) - u^{(h)}(x)|^2 + |v_0^{(h)}(x+\tau) - v_0^{(h)}(x)|^2\big)dx \tag{4.5}$$

对于 $t \in [kr, (k+2)r]$。这里，常数 $C(T,k)$仅依赖于 k、 T和 r。因此证明完毕。 □

4.2. 解集的紧性。为了证明解的紧性，我们考虑差值

$$(u^{(h)}(\cdot,t), v^{(h)}(\cdot,t)) - (u^{(h)}(\cdot-\tau, t-\tau), v^{(h)}(\cdot+\tau, t-\tau))$$

对于 $\tau \in R^1$。沿特征线，我们有 $(u^{(h)}(\cdot,t)\ v^{(h)}(\cdot,t))$ 的一致连续性如下。

引理 4.6. 设 $T > 0$。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 $\delta > 0$，使得如果$0 \le k_0 h \le (k_1+1)h \le T$，且 $|k_1 - k_0| h < \delta$，并且如果 $h \in (0, \delta)$，那么

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_{n+1}^{k_1+1} - u_{n-k_1+k_0}^{k_0}|^2 h < C(T)\big(h + \varepsilon\big)$$

and

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|v_{n-1}^{k_1+1}-v_{n+k_1-k_0}^{k_0}|^2h<C(T)\big(h+\varepsilon\big)$$

对于 $h>0$。这里 $C(T)$ 是一个仅依赖于 T 的常数。

证明。对于 $0\le j\le k_1-k_0+1$ 和 $-\infty<n<\infty$, (1.6) 中的第一个方程给出如下结果

$$\begin{aligned}(1-\frac{ih\alpha}{2}|v_{n-j}^{k_1-j}|^2)(u_{n+1-j}^{k_1+1-j}-u_{n-j}^{k_0-j}) &= \frac{imh}{2}(v_{n-1-j}^{k_1+1-j}+v_{n-j}^{k_1-j})+ih\alpha u_{n-j}^{k_1-j}|v_{n-j}^{k_1-j}|^2\\ &\quad+\frac{ih\beta}{2}(v_{n-1-j}^{k_1+1-j}+v_{n-j}^{k_1-j})G(u_{n-j}^{k_1-j},v_{n-j}^{k_1-j}),\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}|u_{n+1-j}^{k_1+1-j}-u_{n-j}^{k_1-j}| &\le \frac{mh}{2}|v_{n-1-j}^{k_1+1-j}+v_{n-j}^{k_1-j}|+h|\alpha||u_{n-j}^{k_1-j}||v_{n-j}^{k_1-j}|^2\\ &\quad+h|\beta|(|v_{n-1-j}^{k_1+1-j}|+|v_{n-j}^{k_1-j}|)|u_{n-j}^{k_1-j}||v_{n-j}^{k_1-j}|.\end{aligned}\tag{4.6}$$

现在对 j 取和（ $0\le j\le k_1-k_0+1$），得到

$$\begin{aligned}|u_{n+1}^{k_1+1}-u_{n_0}^{k_0}| &\le \sum_{0\le j\le k_1-k_0+1}\frac{mh}{2}(|v_{n-1-j}^{k_1+1-j}|+|v_{n-j}^{k_1-j}|)\\ &\quad+\sum_{0\le j\le k_1-k_0+1}h(|\alpha|+|\beta|)(|v_{n-1-j}^{k_1+1-j}|+|v_{n-j}^{k_1-j}|)|u_{n-j}^{k_1-j}||v_{n-j}^{k_1-j}|,\end{aligned}$$

其中 $n_0=n_1-k_1+k_0$。于是,

$$\begin{aligned}|u_{n+1}^{k_1+1}-u_{n_0}^{k_0}|^2 &\le m^2h^2\Big\{\sum_{0\le j\le k_1-k_0+1}(|v_{n-1-j}^{k_1+1-j}|+|v_{n-j}^{k_1-j}|)\Big\}^2\\ &\quad+2h^2(|\alpha|+|\beta|)^2\Big\{\sum_{0\le j\le k_1-k_0+1}(|v_{n-1-j}^{k_1+1-j}|+|v_{n-j}^{k_1-j}|)|u_{n-j}^{k_1-j}||v_{n-j}^{k_1-j}|\Big\}^2\\ &\le m^2h^2\sum_{j=0}^{k_1-k_0+1}(|v_{n-1-j}^{k_1+1-j}|^2+|v_{n-j}^{k_1-j}|^2)(k_1-k_0+1)\\ &\quad+C_{\alpha,\beta}h^2\sum_{j=0}^{k_1-k_0+1}(|v_{n-1-j}^{k_1+1-j}|^2+|v_{n-j}^{k_1-j}|^2)\sum_{j=0}^{k_1-k_0+1}|u_{n-j}^{k_1-j}||v_{n-j}^{k_1-j}|^2\end{aligned}\tag{4.7}$$

对于 $C_{\alpha,\ \beta}=8(|\alpha|+|\beta|)^2$。

接下来我们处理在不等式 (4.7) 的最后一项中含有三个项。首先，由推论 2.1 可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{k_1-k_0+1}(|v_{n-1-j}^{k_1+1-j}|^2+|v_{n-j}^{k_1-j}|^2)h^2 \le \sum_{j=0}^{k_1-k_0+1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(|v_{n-1-j}^{k_1+1-j}|^2+|v_{n-j}^{k_1-j}|^2)h^2$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{k_1-k_0+1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(|v_n^{k_1+1-j}|^2+|v_n^{k_1-j}|^2)h^2 \\ &\le 2(k_1-k_0+1)h\sum_{n=-\infty}^{\infty}(|u_n^0|^2+|v_n^0|^2)h, \end{aligned} \tag{4.8}$$

由引理 2.4 可得

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|u_{n-j}^{k_1-j}|^2|v_{n-j}^{k_1-j}|^2h^2 \le C_0^2+(4C_1^2+C_1)C_0T^2. \tag{4.9}$$

此外，由于序列 $\{(u^{(h)}(x,0)\ v^{(h)}(x,0))\}$ 在 $L^2(R^1)$ 中收敛，存在一个常数 $\delta>0$，使得

$$\int_{(n-k_1+k_0-2)}^{(n+k_1-k_0+2)h}(|u^{(h)}(x-k_0h,0)|^2+|v^{(h)}(x+k_0h,0)|^2)dx \le \varepsilon \tag{4.10}$$

对于 $(k_1-k_0)h<\delta$ 和 $h\in(0,\delta)$。

那么，对于 (4.7) 中的最后几项，由引理 2.2 和引理 2.3 可得

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{k_1-k_0+1}(|v_{n-1-j}^{k_1+1-j}|^2+|v_{n-j}^{k_1-j}|^2)h \\ \le &\sum_{l=n-k_1+k_0-2}^{n+k_1-k_0+2}(|u_l^{k_0}|^2+|v_l^{k_0}|^2)h \\ \le &\sum_{l=n-k_1+k_0-2}^{n+k_1-k_0+2}\{2C_1(|u_{l-k_0}^0|^2+|v_{l+k_0}^0|^2)h+4C_4k_0h^2\} \\ \le &\ 2C_1\int_{(n-k_1+k_0-2)}^{(n+k_1-k_0+2)h}(|u^{(h)}(x-k_0h,0)|^2+|v^{(h)}(x+k_0h,0)|^2)dx \\ &+8C_1C_4Th \\ \le &\ 2C_1\varepsilon+8C_1C_4Th, \end{aligned} \tag{4.11}$$

因此，根据 (4.8)、(4.9) 和 (4.11)，可由 (4.7) 推得该结果。证明完毕。 □

上述引理有一个等价形式，如下所示。

引理 4.7. 设 $T>0$。对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个常数 $\delta>0$，使得如果$0<t_0<t_1$ 满足 $|t_0-t_1|<\delta$，并且如果 $h\in(0,\delta)$，那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u^{(h)}(x,t_1)-u^{(h)}(x-t_1+t_0,t_0)|^2 \le C(T)(h+\varepsilon)$$

and

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v^{(h)}(x,t_1) - v^{(h)}(x+t_1-t_0,t_0)|^2 \le C(T)(h+\varepsilon)$$

对于 $h>0$。这里的常数 $C(T)$ 仅依赖于 T。

由引理 4.2、引理4.4、引理 4.5 和引理 4.7 可直接得到 $\{(u^{(h)},v^{(h)})\}$ 的紧性如下。

命题 4.1. 设 $(u_0,v_0)\in L^2(R^1)$。那么，对于任意满足 $h_l>0$ for$l\ge 0$ 且 $\lim_{l\to\infty} h_l=0$ 的序列 $\{h_l\}_{l=0}^{\infty}$，序列 $\{(u^{(h_l)}\ v^{(h_l)})\}$ 在任意 $T>0$ 下都在 $C([0,T];\ L^2(R^1))$ 中相对紧。

5. Uniqueness of limit and proof of the main result

我们的目标是证明，当 h 趋于零时，序列 $\{u^{(h)},v^{(h)}\}$ 在 L^2 中强收敛到问题 (1.1) 和 (1.3) 的唯一解。为此，我们首先回顾 [30] 中关于问题 (1.1) 和 (1.3) 的整体强解适定性的结果。

定理5.1. 对于 $(u_0(x)\ v_0(x))\in L^2(R^1)$，柯西问题 (1.1) 和 (1.3) 存在唯一的整体强解 $(u_*,\ v_*)\in C([0,\infty);L^2(R^1))$。此外，对于任意 $T>0$，$|u_*||v_*|\in L^2(R^1\times[0,T])$。

更确切地说，根据 [30],，存在一列光滑解 (u_j,v_j) 满足 (1.1)，且 $(u_j(x,0)\ v_j(x,0))\in C_c^{\infty}(R^1)$，使得

$$\lim_{j\to\infty}\max_{0\le t\le T}\left(||u_*(\cdot,t)-u_j(\cdot,t)||_{L^2(R^1)}+||v_*(\cdot,t)-v_j(\cdot,t)||_{L^2(R^1)}\right)=0 \tag{5.1}$$

and

$$\lim_{j\to\infty}\left(||u_*v_*-u_jv_j||_{L^2(R^1\times[0,T])}+||u_*\overline{v_*}-u_j\overline{v_j}||_{L^2(R^1\times[0,T])}\right)=0 \tag{5.2}$$

对于任意 $T>0$。

并且，由序列 $\{(u_j,v_j)\}$ 的收敛性，我们可以假设

$$\sup_j\int_{|x|\ge A}(|u_j(x,0)|^2+|v_j(x,0)|^2)dx\le\frac{\delta_*}{7},$$

其中常数 A 由引理4.4给出。然后，在 [30] 中利用电荷守恒证明了以下结论成立。

引理 5.1. 对于 $t\ge 0$，有

$$\sup_j\int_{|x|\ge A+t}(|u_j(x,t)|^2+|v_j(x,t)|^2)dx\le\frac{\delta_*}{4}.$$

引理 5.2. 设 $T>0$。存在一个 $r'>0$，使得如果 $t-(A+2T)\le a\le b\le(A+2T)-t$，且 $|a-b|\le 16r'$和 $t\in[0,T]$，则

$$\sup_j\int_a^b(|u_j(x,t)|^2+|v_j(x,t)|^2)dx\le\frac{\delta_*}{4}.$$

接下来，为简化起见，我们假设 $r' = r$ ，并考虑 QLB 解 $(u^{(h)}, v^{(h)})$ 与光滑解 (u_j, v_j) 之间的差异。L
et

$$(u_j^{(h)}, v_j^{(h)})(x,t) = (u_j, v_j)(nh, kh), \quad nh \le x < (n+1)h,\ kh \le t < (k+1)h$$

对于 $k \ge 0$ 和 $-\infty < n < \infty$，并记

$$(u_{j,n}^k, v_{j,n}^k) = (u_j, v_j)(nh, kh).$$

Then

$$\begin{aligned} u_{j,n+1}^{k+1} - u_{j,n}^k = {} & \frac{imh}{2}(v_{j,n-1}^{k+1} + v_{j,n}^k) + \frac{i\alpha h(u_{j,n+1}^{k+1} + u_{j,n}^k)}{2}|v_{j,n}^k|^2 \\ & + \frac{ih\beta}{2}(v_{j,n-1}^{k+1} + v_{j,n}^k)G(u_{j,n}^k, v_{j,n}^k) + g_{j,n}^{k,1}h \end{aligned} \tag{5.3}$$

and

$$\begin{aligned} v_{j,n-1}^{k+1} - v_{j,n}^k = {} & \frac{imh}{2}(u_{j,n+1}^{k+1} + u_{j,n}^k) + \frac{i\alpha h(v_{j,n-1}^{k+1} + v_{j,n}^k)}{2}|u_{j,n}^k|^2 \\ & + \frac{ih\beta}{2}(u_{j,n+1}^{k+1} + u_{j,n}^k)G(u_{j,n}^k, v_{j,n}^k) + g_{j,n}^{k,2}h, \end{aligned} \tag{5.4}$$

其中

$$\begin{aligned} g_{j,n}^{k,1} = {} & \int_0^1 \big(imv_j + iN_1(u_j, v_j)\big)((n+\tau)h, (k+\tau)h)d\tau - \frac{im}{2}(v_{j,n-1}^{k+1} + v_{j,n}^k) \\ & - \frac{i\alpha(u_{j,n+1}^{k+1} + u_{j,n}^k)}{2}|v_{j,n}^k|^2 - \frac{i\beta}{2}(v_{j,n-1}^{k+1} + v_{j,n}^k)G(u_{j,n}^k, v_{j,n}^k) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} g_{j,n}^{k,2} = {} & \int_0^1 \big(imu_j + iN_2(u_j, v_j)\big)((n+\tau)h, (k+\tau)h)d\tau - \frac{im}{2}(u_{j,n+1}^{k+1} + u_{j,n}^k) \\ & - \frac{i\alpha(v_{j,n-1}^{k+1} + v_{j,n}^k)}{2}|u_{j,n}^k|^2 - \frac{i\beta}{2}(u_{j,n+1}^{k+1} + u_{j,n}^k)G(u_{j,n}^k, v_{j,n}^k). \end{aligned}$$

直接计算可得如下结果。

引理 5.3. 有

$$\max_{k\ge 0, -\infty<n<\infty} |g_{j,n}^{k,l}| \le M_j(T)h$$

对于 $h > 0$, $l = 1, 2$ 和 $j = 1, 2, \cdots$，其中 $M_j(T) = C(m, \alpha, \beta)M_j^1(T)M_j^0(T)^2$和$C(m, \alpha, \beta) = 6(m + |\alpha| + |\beta|)$,

$$M_j^1(T) = \big(\max_{R^1\times[0,T]} |u_{jt}| + \max_{R^1\times[0,T]} |u_{jx}| + \max_{R^1\times[0,T]} |v_{jt}| + \max_{R^1\times[0,T]} |v_{jx}|\big)$$

and

$$M_j^0 = \big(1 + \max_{R^1\times[0,T]} |u_j| + \max_{R^1\times[0,T]} |v_j|\big).$$

此外，对于 $j \geq 0$，存在一个 $h_{*,j} > 0$，使得如果 $0 \leq kh \leq T$，那么

$$\sup_{h\in(0,h_{*,j})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|g_{j,n}^{k,1}|^2 + |g_{j,n}^{k,2}|^2) \leq \frac{\delta_*}{4}. \tag{5.5}$$

and

$$\sup_{h\in(0,h_{*,j})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{k_T} (|g_{j,n}^{p,1}|^2 + |g_{j,n}^{p,2}|^2) < \infty. \tag{5.6}$$

这里是 $k_T = [T/h] + 1$。

定理 1.1 的证明。由命题 4.1 可知，只需证明问题 (1.1) 和 (1.3) 的强解 (u_*, v_*) 是 $\{(u^{(h)}, v^{(h)})\}$ 的任意收敛子序列在 h 趋于零时的极限。

设 $\{(u^{(h_l)}, v^{(h_l)})\}$ 是 $\{(u^{(h)}, v^{(h)})\}$ 的一个子序列，且 $\lim_{l\to\infty} h_l = 0$。那么，根据命题 4.1，它有一个子序列在 $L^2(R^1 \times [0,T])$ 中收敛到一个 (u', v')，对任意 $T > 0$ 均成立。为简便起见，我们仍将这个收敛子序列记为 $\{(u^{(h_l)}, v^{(h_l)})\}$。

我们的目标是证明 $(u_*, v_*) = (u', v')$。为此，我们用点 $t = pr$, $p = 0, 1, \cdots, k_T$ 将时间区间 $[0,T]$ 划分。这里我们假设，对于某个整数 $k_T \geq 0$, $K_T r = T$。

现在我们对 p 使用归纳法，即假设对于 $(x,t) \in R^1 \times [0, pr]$ 且 $0 \leq p \leq k_T$，有 $(u_*, v_*)(x,t) = (u', v')(x,t)$。只需考虑 $p < k_T$ 的情形。

根据引理 5.1、引理 5.2 和引理 5.3，我们对 $(u^{(h)}, v^{(h)})$ 和 $(\widetilde{u}^{(h)}, \widetilde{v}^{(h)}) = (u_j^{(h)}, v_j^{(h)})$ 应用了命题 3.1，从而得到以下关于 $\Omega(a, (p+2)r; pr)$ 的结果，其中任意 $a \in R^1$ 均成立，

$$\begin{aligned}
&\sup_{pr\leq t\leq (p+2)r} \int_{a-(p+2)r+t}^{a+(p+2)r-t} \big(|(u^{(h)} - u_j^{(h)})(x,t)|^2 + |(v^{(h)} - v_j^{(h)})(x,t)|^2\big) dx \\
&\quad \leq C(T) \int_{a-2r}^{a+2r} \big(|(u^{(h)} - u_j^{(h)})(x,pr)|^2 + |(v^{(h)} - v_j^{(h)})(x,pr)|^2\big) dx \\
&+C(T)\Big(\sum_{k=0}^{k_T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|g_{j,n}^{k,1}|^2 + |g_{j,n}^{k,2}|^2) h^2\Big) \exp\big(C_*(T) + C_* \sum_{k=0}^{k_T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|g_{j,n}^{k,1}|^2 + |g_{j,n}^{k,2}|^2) h\big).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

由于 $(u_j, v_j)\big|_{R^1\times[0,T]}$ 在 $R^1 \times [0,T]$ 中具有紧支撑，因此根据引理 5.3，将 $h = h_l$ 代入 (5.7)，并令 h_l 趋于 0，可得

$$\begin{aligned}
&\sup_{pr\leq t\leq (p+2)r} \int_{a-(p+2)r+t}^{a+(p+2)r-t} \big(|(u' - u_j)(x,t)|^2 + |(v' - v_j)(x,t)|^2\big) dx \\
&\quad \leq C(T) \int_{a-2r}^{a+2r} \big(|(u' - u_j)(x,pr)|^2 + |(v' - v_j)(x,pr)|^2\big) dx
\end{aligned} \tag{5.8}$$

对于 $j \geq 1$。

然后，我们可以在 j 趋于 ∞ 时取极限（5.8），从而得出 $(u_*, v_*)(x,t) = (u', v')(x,t)$ 在 $\Omega(a, (p+2)r; pr)$ 上对任意 $a \in R^1$ 均成立。因此，$(u_*, v_*)(x,t) = (u', v')(x,t)$ 在$R^1 \times [0,(p+1)r]$上成立。

因此，完成归纳步骤可得 $(u_*, v_*)(x,t) = (u', v')(x,t)$，在 $R^1 \times [0,T]$ 上对任意 $T > 0$ 均成立。证明完毕。□

References

[1] A. Alvarez，非线性狄拉克方程的线性化 Crank-Nicholson 格式，《计算物理学杂志》99（1992），348-350。[2] A. Alvarez、P-Y Kuo 和 L. Vazquez，非线性一维狄拉克模型的数值研究，《应用数学与计算》13（1983），1-15。[3] J. M. Bony，空间一维离散玻尔兹曼方程的整体有界解，载于：《偏微分方程日》（圣让德蒙，1987），报告第 XVI 号，´巴黎综合理工学院，帕莱索，1987，第10页。´N. Bournaveas 和 G. E. Zouraris，非线性狄拉克系统的理论与数值近似，ESAIM：《数学建模与数值分析》46（4）（2012），841-874。´A. Bressan，《双曲守恒律系统：一维柯西问题》，牛津大学出版社，纽约，2000。´F. Cacciafesta，带势的临界径向狄拉克方程的小整体解，《非线性分析》74（2011），6060-6073。[4] T. Candy，一维临界非线性狄拉克方程的整体存在性，《微分方程进展》16，第7-8期（2011），643-666。 $1+1$ A. Contreras、D. Pelinovsky 和 Y. Shimabukuro，有质量 Thirring 模型中狄拉克孤子的轨道稳定性，《偏微分方程通讯》41（2）（2016），227-255。[5] C. M. Dafermos，《连续介质物理学中的双曲守恒律》，施普林格出版社，柏林，2010。[6] V. Delgado，经典耦合 Maxwell-狄拉克方程及其他非线性狄拉克方程柯西问题的整体解，《美国数学会会刊》69（2）（1978），289-296。[7] P. J. Dellar，量子格子算法：与一些经典有限差分算法的相似性和联系，ESAIM：《论文集与综述》52（2015），76-104。 L^2 M. Escobedo 和 L. Vega，([8]) 中的半线性狄拉克方程，适用于 L^2，《SIAM 数学分析杂志》28（2）（1997），338-362。[9] J. Glimm，非线性守恒律系统的大范围解，《纯粹与应用数学通讯》18（1965），695-715。[10] L. Gosse，三维线性狄拉克方程的一种平衡良好且渐近保持的格式，《BIT》55（2）（2015），433-458。[11] D. J. Gross 和 A. Neveu，渐近自由场论中的动力学对称性破缺，《物理评论 D 辑》10（1974），3235-3253。[12] S-Y Ha 和 A. E. Tzavaras，离散速度玻尔兹曼方程的李雅普诺夫泛函与 H^s-稳定性，《数学物理通讯》239（2003），65-92。R^3H. Huh，临界空间中 Thirring 模型的整体强解，《数学分析与应用杂志》381（2011），513-520。 $s > 1$H. Huh，Gross-Neveu 方程的整体解，《数学物理快报》103（8）（2013），927-931。[13] H. Huh 和 B. Moon，Gross-Neveu 方程的低正则性适定性，《纯粹与应用分析通讯》14（5）（2015），1903-1913。[14] M. Junk 和 Z. Yang，一维对流-扩散-反应方程的格子玻尔兹曼方法收敛性，《计算物理通讯》17（5）（2015），1225-1245。

[21] M. Junk 和 W. Yong，格子玻尔兹曼方法的加权稳定性，SIAM 数值分析杂志47第3期（2009），1651-1665。 L^2 D. Lapitski 和 P. J. Dellar，三维量子格子玻尔兹曼格式向狄拉克方程解的收敛性，英国皇家学会哲学汇刊 A 辑369（2011），2155-2163。[22] S. Palpaceli、P. Romatschke 和 S. Succi，非线性狄拉克方程的一维量子格子格式，国际现代物理学杂志 C 辑，24第12期（2013），1340001，10页。[23] D. Pelinovsky，一维非线性狄拉克方程整体存在性的综述，载于：《调和分析与非线性偏微分方程》（T. Ozawa 和 M. Sugimoto 编），RIMS Kˆokyˆuroku Bessatsu，B26（2011），第37-50页。[24] S. Selberg 和 A. Tesfahun，一维空间中若干非线性狄拉克方程的低正则性适定性，《微分积分方程》23（3-4）（2010），265-278。[25] S. Succi 和 R. Benzi，量子力学的格子玻尔兹曼模型，《物理学 D 辑》69第3-4期（1993），327-332。[26] S. Succi，《流体动力学及其他领域的格子玻尔兹曼方程》，克拉伦登出版社，牛津，2001。[27] W.E. Thirring，一种可解的相对论场论，《物理学年鉴》3（1958），91-112。[28] Y. Zhang，一维非线性狄拉克型方程的整体强解，《非线性分析：理论、方法与应用》80（2013），150-155。[29] Y. Zhang 和 Q. Zhao，[30] 维 Gross-Neveu 模型非线性狄拉克方程的整体解，《非线性分析：理论、方法与应用》118（2015），82-96。

（N. Li） $1+1$, Fudan University, Shanghai 200433, P.R. China电子邮箱：nnli20@fudan.edu.cn（J. Zhang） School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, P. R. China电子邮箱：zjgjzx521@163.com（Y. Zhang） School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, P. R. China电子邮箱：yongqianz@fudan.edu.cn