arXiv:2302.00249v1 [math.AP] 1 Feb 2023

关于¨× $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$上的三次非线性薛定谔方程高阶 Sobolev 范数的增长

邓明明和杨凯龙

Abstract. 我们研究乘积流形 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$上的三次非线性薛定谔方程。在本文中，我们获得了解的高 Sobolev 范数随时间增长的多项式界。证明的主要关键是建立一个迭代界，其依据是 Bourgain 在 [3]中采用的思路。

1. Introduction

本文研究如下形式的乘积流形上的三次非线性薛定谔方程 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$:

$$\begin{cases} i\partial_t u+\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}u=|u|^2u,\\ u(0)=u_0\in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中， $\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}$ 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，且 $u:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ 是一个复值函数。

方程（1.1）是波导 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m$ 上一般非线性薛定谔方程 ¨ 的特例:

$$\begin{cases} i\partial_t u+\Delta_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m}u=|u|^{p-1}u,\\ u(0)=u_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $1<p<\infty$、 m、 $n\in\mathbb{Z}^+$ 和 $\mathbb{T}^m$ 是一个 m 维环面。这类方程作为模型出现在非线性光学的研究中（激光束在大气中或等离子体中的传播），尤其是在电信非线性光学中 [34, 40]。

方程（1.2）具有以下守恒量:

$$\text{mass:}\quad M(u(t))=\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m}|u(t,x)|^2\,\mathrm{d}x, \tag{1.3}$$

$$\text{energy:}\quad E(u(t))=\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m}\frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2+\frac{1}{p+1}|u(t,x)|^{p+1}\,\mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

近年来，关于 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m$ 上方程 (1.2) 的适定性理论和解的长时间行为，已有大量研究。对于欧氏情形，即 $m=0$，许多研究者对方程 (1.2) 进行了研究，例如

Date: 2023 年 2 月 2 日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 35B40; 35Q55。
Key words and phrases. 非线性薛定谔方程，整体适定性，高阶 Sobolev 范数的增长。

[3, 12, 24, 30, 38, 39, 43]。这些结果主要基于 Strichartz 不等式

$$\|e^{it\Delta_{\mathbb{R}^n}}u_0\|_{L^{\frac{2(n+2)}{n}}(\mathbb{R}^{n+1})}\leqslant C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.5}$$

然而，对于环面情形 $\mathbb{T}^m$，由于自由演化在时间上具有周期性，(1.2) 的 Strichartz 不等式 (1.5) 的精确对应形式并不成立。在 [2, 3], ，Bourgain 首次运用与数论相关的格点计数论证，在周期区域 $\mathbb{T}^m$ 上证明了某些尺度不变的 Strichartz 估计。此后，Burq-Gérard-Tzvetkov 在 [6, 7, 8] 研究了一般的紧流形。读者也可参阅 [9, 20, 22, 23, 25, 35]。近年来，研究 (1.2) 在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m$ 上的解的行为引起了广泛关注。Takaoka-Tzvetkov 在[41] 借助 L^4-L^2 Strichartz 不等式，在 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$为充分小的初值建立了 L^2 整体适定性结果

$$\|e^{it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}}u_0\|_{L^4(I\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\leqslant C(I)\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}.$$

这里采用的论证 [41] 源自 Bourgain 在周期情形中的思路 [2]。
Cheng-Guo-Zhao 在 [15] 证明了聚焦五次非线性 Schr¨odinger 方程在 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$上的整体适定性与散射，并且还证明了 Hani-Pausader 在 [27] 提出的五次非线性 Schr¨odinger 方程组在 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}$上的散射猜想。至于一般情形 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m$，Barron 最近在 [1] 基于 Bourgain-Demeter 的 [5] l^2 解耦方法证明了全时间 Strichartz 型估计。关于乘积空间中的更多结果，参见 [14, 16, 28, 29, 42, 45] 。

本文运用 [3] 周期情形的方法，并证明方程 (1.1) 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ 上的 H^s, $s\geqslant 0$适定性。我们的一个结果具体表述如下:

定理1.1（整体适定性）。柯西问题 (1.1) 对于 $u_0\in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$、 $s>0$是局部适定的，因此对于 $u_0\in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$、$s\geqslant 1$是整体适定的。

注 1.2. Takaoka 和 Tzvetkov 得到了 (1.1) 在 [41] 中小初值下的 L^2 适定性结果。因此，在本文余下部分，我们只考虑$u_0\in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$、 $s>0$ 的适定性。为了证明定理1.1，我们将在 Bourgain空间 $X^{s,\,b}([0,\delta])$ 中，对等价积分方程 (1.1) 应用不动点论证，其中 $b>\frac{1}{2}$、 $s>0$和 $\delta>0$都足够小。接下来的关键在于非线性估计（三线性估计）

$$\|u_1\bar{u}_2u_3\|_{X_\delta^{s,b'-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\leqslant C\|u_1\|_{X_\delta^{s,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\|u_2\|_{X_\delta^{s,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\|u_3\|_{X_\delta^{s,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}, \tag{1.6}$$

其中 $s>0$ 和$b'>b>\frac{1}{2}$。我们在第3节中利用 [3] 中的傅里叶乘子方法以及 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ 上局部化的斯特里卡茨不等式推导出该结果

$$\|e^{it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}}P_{\leqslant N}u\|_{L^4(I\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\lesssim N^{\varepsilon}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}, \tag{1.7}$$

该结果由 Barron [1] 基于 l^2 解耦方法建立。这给出了相应空间中的局部适定性。随后进一步讨论 δ 的大小，我们证明了 $u_0\in H^s$（$\mathbb{R}\times\mathbb{T}$）的整体适定性， $s\geqslant 1$。

定理1.1意味着，对于具有 $s\geqslant 1$的 $u_0\in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$，存在一个唯一的整体解 $u\in C(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$，满足(1.1)。利用质量与能量守恒，可以看出该解的 H^1-范数受某些

常数控制。自然会问，当$|t| \gg 1$时，随着 $s > 1$变化， H^s-范数会发生什么?

当然，这个问题具有物理意义，因为它量化了低频到高频级联，即 $\widehat{|u|^2}$ 的支集有多少从低频移向了高频。因此，高阶 Sobolev 范数的增长为低频到高频级联提供了定量估计。色散波模型中的这种级联现象自 20 世纪 60 年代以来一直受到研究，例如参见 [10, 26, 44]。

设 u 是方程 (1.1) 的一个解，那么通过在 [2, 3, 43]，中迭代局部适定性方案，可以立即得到 Sobolev 范数增长的指数界。也就是说，存在 $T = T(\|u_0\|_{H^s})$，使得

$$\|u(t)\|_{H^s} \leqslant C\|u(\tau)\|_{H^s}, \tag{1.8}$$

只要 $t \in [\tau, \tau + T]$。然后利用 Picard 迭代，可以推得

$$\|u(t)\|_{H^s} \leqslant Ce^{|t|}. \tag{1.9}$$

后来，Bourgain [4] 首先观察到，(1.8) 可以改进为

$$\|u(t)\|_{H^s} \leqslant \|u(\tau)\|_{H^s} + C\|u(\tau)\|_{H^s}^{1-\delta}, \qquad \delta^{-1} = (s-1)+ \tag{1.10}$$

对于 Schr¨odinger 方程，采用傅里叶乘子方法，因此（1.9）可进一步改进为

$$\|u(t)\|_{H^s} \leqslant C|t|^{2(s-1)+}. \tag{1.11}$$

此后，Staffilani [32, 33] 通过精细的多线性估计，证明了某类 KdV 方程和 Schr¨odinger 方程在 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^2$ 上的解，其 H^s 范数随时间增长具有多项式上界。Colliander-Keel-Staffilani-Takaoka-Tao 在 [18] 中提出了一种利用修正能量的新方法，称为“倒置 I 方法”，并据此证明了 NLS 方程在 $s \in (0, 1)$ 上低阶 Sobolev 范数的多项式上界。随后，Sohinger 在 [36, 37] 中发展了倒置 I 方法，得到了圆周 $\mathbb{S}$ 和 $\mathbb{R}$ 上 NLS 方程高 Sobolev 范数增长的多项式上界。此外，关于这一主题的进一步进展，也可参见 [11, 19, 31, 46] 及其中的参考文献。

本文的主要结果如下所示:

定理 1.3. 假设 $u_0 \in H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$， $s > 1$。则方程 (1.1) 的整体解 u 满足

$$\|u(t)\|_{H^s} \leqslant C|t|^{2(s-1)+}, \quad \textit{for } |t| \gg 1, \tag{1.12}$$

其中常数 C 依赖于 $M(u_0)$ 和 $E(u_0)$。

定理 1.3 的证明思路受到 Bourgain 在 [3] 中工作的启发。与 $\mathbb{R}^2$ 情形相比，我们无法期待 $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ 上的色散效应，因此自然会出现不同的问题和方法。我们仅尝试将其与 [3] 中周期性 $\mathbb{T}^2$ 的情形联系起来。

为了获得定理 1.3 中的多项式界，只需证明对于 $T = T(\|u_0\|_{H^1})$

$$\|u(t)\|_{H^s} \leqslant \|u(\tau)\|_{H^s} + C\|u(\tau)\|_{H^s}^{1-\gamma}. \tag{1.13}$$

对任意 $t \in [\tau, \tau + T]$ 以及某个 $\gamma = \gamma(s)$。事实上，利用方程 (1.1) 的特殊结构，(1.13) 可化为对 (1.1) 的非线性项进行估计。然后，我们可以通过非线性上界估计 (1.6) 得到迭代界 (1.13)。建立这一迭代界后，经典约化论证便可导出多项式增长。

最后，本文其余部分安排如下：第2节介绍一些记号和已知结果，供后文使用。在第3节中，我们将在 Bourgain空间 $X^{s,\,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ 中证明一个非线性估计，并给出定理1.1的证明。最后，我们将在第4节证明定理 1.3。

2. PRELIMINARIES

按照惯例，我们用 $A\lesssim B$ 表示命题 $A\leqslant CB$ 成立，其中 C 是某个较大的无关紧要的常数，并且其取值可随行而变化。我们用 $A\sim B$ 表示命题 $A\lesssim B\lesssim A$成立。我们用 $a\pm$ 表示 $a\pm\varepsilon$，对任意$\varepsilon\ll 1$均成立。我们采用标准的 Lebesgue 范数

$$\|u\|_{L_x^p(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}=\left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}|u(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},\qquad \|u\|_{L_t^qL_x^p(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}=\big\|\|u(x)\|_{L_x^p(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\big\|_{L_t^q(\mathbb{R})},$$

以及 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$上的傅里叶变换

$$\hat{u}(\xi,n)=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}e^{-2\pi i(x_1,x_2)\cdot(\xi,n)}u(x)\mathrm{d}x,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}.$$

此外，我们还注意到傅里叶逆变换

$$u(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\xi\in\mathbb{R}}e^{2\pi i(\xi,n)\cdot(x_1,x_2)}\hat{u}(\xi,n)\mathrm{d}\xi,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}.$$

定义 2.1. 设 $X^{s,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ 为与二维薛定谔方程相关的 Bourgain空间，其初值定义在 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ 上，并赋予范数

$$\|u\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}=\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{2b}(1+|\xi|+|n|)^{2s}|\hat{u}(\tau,\xi,n)|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.\tag{2.1}$$

那么对于 $0<T\leqslant 1$，我们用 $X^{s,\,b}_T(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ 表示赋予范数的 $X^{s,\,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ 中的元素空间

$$\|u\|_{X^{s,b}_T(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}=\inf\big\{\|\tilde{u}\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})},\ \tilde{u}|_{(-T,T)\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}}=u\big\}.\tag{2.2}$$

我们先简要回顾 Bourgain空间的一些基本性质。

命题2.2。

(1) $u\in X^{s,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})\Longleftrightarrow e^{it\Delta}u(t,\cdot)\in H^b(\mathbb{R};H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$.

(2) For $b>\frac{1}{2}$, $X^{s,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})\hookrightarrow C(\mathbb{R};H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$, *and* $X^{s,b}_T(\mathbb{R}\times\mathbb{T})\hookrightarrow C((-T,T);H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$.

(3) For $s_1\leqslant s_2, b_1\leqslant b_2$, $X^{s_2,b_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})\hookrightarrow X^{s_1,b_1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})$.

接下来，我们给出 $\|\chi_{[c,d]}(t)u\|_{X^{s,\,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}$ 的一个界。类似结果已在[17]和 [36], 中证明，但所用空间不同。

引理 2.3. 设 $c,d\in\mathbb{R}$ 满足 $c<d$。若 $b\in(0,\frac{1}{2})$，且$-s\in\mathbb{R}$，则有

$$\|\chi_{[c,d]}(t)u\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\lesssim\|u\|_{X^{s,b+}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}$$

其中隐含常数不依赖于 c,d。

现在我们定义 Littlewood-Paley 分解。对于二进整数 $N=2^j,j\in\mathbb{Z}$，令

$$\mathcal{F}(P_{\leqslant N}u)(\xi,n)=\psi(\xi/N)\psi(n/N)\hat{u}(\xi,n),$$

其中 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 是一个光滑凸起函数，满足

$$\psi(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leqslant 1, \\ 0, & |\xi| \geqslant 2. \end{cases}$$

我们再来看命题 3.4 中的一个局部 Strichartz 估计，参见 Barron [1]。

引理 2.4. 对任意有界时间区间 I，有

$$\|e^{it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}} P_{\leqslant N} u\|_{L^4(I\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \lesssim N^{\varepsilon} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}. \tag{2.3}$$

选取一个以某点为中心、大小为 N 的 Q 内的球 $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$，并作变量变换 e 为 (ξ, n)，我们可以将 (2.3) 改写为

$$\|e^{it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}} u\|_{L^4(I\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \lesssim N^{\varepsilon} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}, \tag{2.4}$$

其中 $supp\, \hat{} u \in Q$。

因此，Burq-Gérard-Tzvetkov [7], (2.4) 等价于以下引理。

引理 2.5. 对任意 $b_1 > \frac{1}{2}$ 和 $u,\ v \in X^{0,\, b_1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ 满足 $supp\, \hat{} u \in Q_1$, $supp\, \hat{} v \in Q_2$，其中球 Q_j 的大小为 $N_j,\ j = 1,\ 2$。则有

$$\|uv\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \leqslant C(N_1 N_2)^{\varepsilon} \|u\|_{X^{0,b_1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \|v\|_{X^{0,b_1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}. \tag{2.5}$$

证明. 假设 $u(t)$ 和 $v(t)$ 的支集包含于时间区间 (0,1)，并记

$$u(t) = e^{-it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}} e^{it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}} u(t) := e^{-it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}} U(t),$$

and

$$v(t) = e^{-it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}} e^{it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}} v(t) := e^{-it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}} V(t).$$

于是我们得到

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} e^{-it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}} \hat{U}(\tau) \mathrm{d}\tau, \quad v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} e^{-it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}} \hat{V}(\tau) \mathrm{d}\tau$$

and

$$(uv)(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{it(\tau_1+\tau_2)} e^{-it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}} \hat{U}(\tau_1) e^{-it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}} \hat{V}(\tau_2) \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\tau_2.$$

由 (2.4) 以及关于 (τ_1, τ_2) 的柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned} \|uv\|_{L^2((0,1)\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \leqslant & C(N_1 N_2)^{\varepsilon} \int_{\tau_1,\tau_2} \|\hat{U}(\tau_1)\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \|\hat{V}(\tau_2)\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\tau_2 \\ \leqslant & C(N_1 N_2)^{\varepsilon} \|(1 + |\tau_1 - \xi_1^2 - n_1^2|)^b \hat{U}(\tau_1)\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \\ & \times \|(1 + |\tau_2 - \xi_2^2 - n_2^2|)^b \hat{V}(\tau_2)\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \\ \leqslant & C(N_1 N_2)^{\varepsilon} \|u\|_{X^{0,b_1}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \|v\|_{X^{0,b_1}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

对于 $b_1 > \frac{1}{2}$。最后，将 $\mathbb{R}_t = \mathbb{Z} + (0, 1)$ 和 $u(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \psi(t - \frac{m}{2}) u(t)$ 以及 $v(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \psi(t - \frac{m}{2}) v(t)$ 分解，并取一个适当的 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$，其支集包含于 (0, 1)，则对于 $u(t)$ 和 $v(t)$ 的一般情形，可由所考察的特例推出： $u(t)$ 和 $v(t)$ 的支集在时间上包含于区间 (0, 1)。□

此外，通过简单计算，我们还可以得到以下额外的局部估计。

引理 2.6. 对于 $b_2 > \frac{1}{4}$。假设 $supp\, \hat{} u \in Q$，且球 Q 的大小为 N，则下列不等式成立:

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \leqslant C N^{\frac{1}{4}} \|u\|_{X^{0,b_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}. \tag{2.7}$$

证明. 根据 Hausdorff–Young 不等式和 H¨older 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \lesssim& \Big(\sum_{n\in Q}\int_{\xi\in Q}\int |\hat{u}(\tau,\xi,n)|^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{3}{4}}\\ \lesssim& \Big(\sum_{n\in Q}\int_{\xi\in Q}\big(\int(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{2b_2}|\hat{u}(\tau,\xi,n)|^2\mathrm{d}\tau\big)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{3}{4}}\\ \lesssim& N^{\frac{1}{4}}\Big(\sum_{n\in Q}\int_{\xi\in Q}\int(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{2b_2}|\hat{u}(\tau,\xi,n)|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

对于 $b_2>\frac{1}{4}$。 □

对引理 2.5 和引理 2.6 进行插值，可得到以下引理。

引理 2.7. 对于任意 $0<s_0<\frac{1}{4}$。假设 $supp\hat{}u\in Q$ 与大小为 N 的球 Q，存在某个 $b_3\in(\frac{1-2s_0}{2},12)$ 满足

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\leqslant CN^{s_0}\|u\|_{X^{0,b_3}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}. \tag{2.8}$$

3. GLOBAL WELL-POSEDNESS

定理1.1 的证明思路受 Bourgain 在 [3] 中的启发。在证明这一点之前，我们先陈述 $X^{s,b}$ 中的非线性估计。

3.1. $X^{s,b}$ 中的非线性估计。

定理 3.1。设 $s>0$。存在 $\frac{1}{2}<b\leqslant b'$ 和 $C>0$，使得对于u_j、$j=1$，2、3 属于 $X^{s,\,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})$，满足

$$\|u_1\bar{u}_2u_3\|_{X^{s,b'-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\leqslant C\|u_1\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\|u_2\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\|u_3\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}. \tag{3.1}$$

证明。由对偶性可得

$$\begin{aligned}&\|u_1\bar{u}_2u_3\|_{X^{s,b'-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\\ =&\Big(\sum_n\int\int(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{2(b'-1)}(1+|\xi|+|n|)^{2s}\big|\widehat{(u_1\bar{u}_2u_3)}(\tau,\xi,n)\big|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\\ =&\sup_{\|\hat{v}\|_{L^2}=1}\sum_n\int\int\sum_{n_1}\int\int\sum_{n_2}\int\int(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{(b'-1)}(1+|\xi|+|n|)^s\\ &\times\hat{u}_1(\tau_1,\xi_1,n_1)\bar{\hat{u}}_2(-\tau_2,-\xi_2,-n_2)\hat{u}_3(\tau-\tau_1-\tau_2,\xi-\xi_1-\xi_2,n-n_1-n_2)\\ &\times\bar{\hat{v}}(\tau,\xi,n)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\\ \leqslant&\sup_{\|\hat{v}\|_{L^2}=1}\sum\int\int\frac{|\bar{\hat{v}}(\tau,\xi,n)|}{(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{(1-b')}}(1+|\xi|+|n|)^s|\hat{u}_1(\tau_1,\xi_1,n_1)|\\ &\times|\bar{\hat{u}}_2(-\tau_2,-\xi_2,-n_2)||\hat{u}_3(\tau_3,\xi_3,n_3)|\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\tau_3\mathrm{d}\xi_3,\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 $n=n_1-n_2+n_3$、$\xi=\xi_1-\xi_2+\xi_3$ 和 $\mathrm{d}\tau=\tau_1-\tau_2+\tau_3$。

注意到

$$|\xi|+|n|\leqslant C\max\{|\xi_1|+|n_1|,|\xi_2|+|n_2|,|\xi_3|+|n_3|\},$$

and

$$(1+|\xi|+|n|)^s\leqslant C\max\{(1+|\xi_1|+|n_1|)^s,(1+|\xi_2|+|n_2|)^s,(1+|\xi_3|+|n_3|)^s\}.$$

由于对称性，我们可以假设 $(1+|\xi|+|n|)^s \lesssim (1+|\xi_1|+|n_1|)^s$。于是，(3.2) 有如下界：

$$\begin{aligned}&\sup_{\|\hat{v}\|_{L^2}=1}\sum_{n_1,n_2,n_3}\int\int\frac{|\bar{\hat{v}}(\tau,\xi,n)|}{(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{(1-b')}}(1+|\xi_1|+|n_1|)^s\\&\times|\hat{u}_1(\tau_1,\xi_1,n_1)||\bar{\hat{u}}_2(-\tau_2,-\xi_2,-n_2)||\hat{u}_3(\tau_3,\xi_3,n_3)|\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\tau_3\mathrm{d}\xi_3.\end{aligned}\tag{3.3}$$

对于每个 (ξ_i,n_i)-指标 $i=1$，2，3，按照 Littlewood–Paley 理论中的标准二进划分，可将 $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$-指标集划分为二进区域，

$$\mathbb{R}\times\mathbb{Z}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}D_k,\quad\text{and}\quad D_k=\big\{(\xi,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}:(1+|\xi|+|n|)\sim 2^k\big\}.$$

记

$$\sum\int_{(\xi_i,n_i)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}}=\sum_{k_1\geqslant k_2\geqslant k_3}\sum\int_{(\xi_i,n_i)\in D_{k_i}}\qquad\text{for } i=1,2,3.$$

对于 $k_1\geqslant k_2\geqslant k_3$，我们进一步将 $D_{k_1}=\bigcup_\alpha Q_\alpha$ 限制在大小为 2^{k_2} 的球内。可以写为

$$\begin{aligned}&2^{k_1 s}\sum\int_{(\xi_i,n_i)\in D_{k_i}}\int\frac{|\bar{\hat{v}}(\tau,\xi,n)|}{(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{(1-b')}}|\hat{u}_1(\tau_1,\xi_1,n_1)||\bar{\hat{u}}_2(-\tau_2,-\xi_2,-n_2)|\\&\qquad\times|\hat{u}_3(\tau_3,\xi_3,n_3)|\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\tau_3\mathrm{d}\xi_3\sim\\&2^{k_1 s}\sum_\alpha\sum\int_{(\xi,n),(\xi_1,n_1)\in Q_\alpha,(\xi_2,n_2)\in D_{k_2},(\xi_3,n_3)\in D_{k_3}}\int\frac{|\bar{\hat{v}}(\tau,\xi,n)|}{(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{(1-b')}}\\&\qquad\times|\hat{u}_1(\tau_1,\xi_1,n_1)||\bar{\hat{u}}_2(-\tau_2,-\xi_2,-n_2)||\hat{u}_3(\tau_3,\xi_3,n_3)|\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\tau_3\mathrm{d}\xi_3.\end{aligned}\tag{3.4}$$

接下来回顾一个傅里叶分析中的事实。为简单起见，我们假设 f_1、f_2、f_3、f_4 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数，且所有满足 $j=1$ 的 $\widehat{f}_j$，2，3，4 都是实值函数。则有

$$\int f_1\bar{f}_2 f_3\bar{f}_4\mathrm{d}x=\int_{\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4=0}\widehat{f}_1(\xi_1)\widehat{\bar{f}}_2(\xi_2)\widehat{f}_3(\xi_3)\widehat{\bar{f}}_4(\xi_4)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3\mathrm{d}\xi_4.\tag{3.5}$$

利用 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ 上时空傅里叶变换的 (3.5) 的类似结果，于是得到

$$(3.4)\leqslant\int\int F_\alpha(x,t)G_\alpha(x,t)H_2(x,t)H_3(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\tag{3.6}$$

其中

$$\begin{aligned}F_\alpha(x,t)&=\sum\int_{(\xi,n)\in Q_\alpha}\int\frac{|\bar{\hat{v}}(\tau,\xi,n)|}{(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{(1-b')}}e^{i((\xi,n)x+\tau t)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi,\\G_\alpha(x,t)&=\sum\int_{(\xi,n)\in Q_\alpha}\int|\hat{u}_1(\tau,\xi,n)|e^{i((\xi,n)x+\tau t)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi,\\H_2(x,t)&=\sum\int_{(\xi,n)\in D_{k_2}}\int|\hat{\bar{u}}_2(\tau,\xi,n)|e^{i((\xi,n)x+\tau t)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi,\\H_3(x,t)&=\sum\int_{(\xi,n)\in D_{k_3}}\int|\hat{u}_3(\tau,\xi,n)|e^{i((\xi,n)x+\tau t)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

因此，(3.6) 有界于

$$(3.6)\leqslant C\|F_\alpha\|_{L^4}\|G_\alpha\|_{L^4}\|H_2\|_{L^4}\|H_3\|_{L^4}.\tag{3.7}$$

选取满足引理 2.7 的 $0<s_0<\frac{1}{4}$ 和 $\frac{2-s_0}{2}<b_3<\frac{1}{2}$。于是

$$\|G_\alpha\|_{L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\leqslant C2^{k_2s_0}\Big(\sum\int_{(\xi,n)\in Q_\alpha}\int(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{2b_3}|\hat{u}_1(\tau,\xi,n)|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|H_i\|_{L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\leqslant C2^{k_is_0}\Big(\sum\int_{(\xi,n)\in D_{k_i}}\int(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{2b_3}|\hat{u}_i(\tau,\xi,n)|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}$$

for $i=2,3$. And

$$\|F_\alpha\|_{L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\leqslant C2^{k_2s_0}\Big(\sum\int_{(\xi,n)\in Q_\alpha}\int(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{2b_3}|\widehat{F}(\tau,\xi,n)|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.8}$$

因此，对 α 求和，并假设 $1-b'>b_3$，可得

$$\begin{aligned}(3.7)\ &\leqslant C2^{2k_2s_0}\|v|_{D_{k_1}}\|_{L^2}\\ &\times\Big(\sum\int_{(\xi,n)\in D_{k_1}}\int(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{2b_3}(1+|\xi|+|n|)^{2s}|\hat{u}_1(\tau,\xi,n)|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\times\Big(\sum\int_{(\xi,n)\in D_{k_2}}\int(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{2b_3}(1+|\xi|+|n|)^{2s_0}|\hat{u}_2(\tau,\xi,n)|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\times\Big(\sum\int_{(\xi,n)\in D_{k_3}}\int(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{2b_3}(1+|\xi|+|n|)^{2s_0}|\hat{u}_3(\tau,\xi,n)|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

注意到 $k_1\geqslant k_2\geqslant k_3$，由此得到

$$\begin{aligned}(3.9)\ &\leqslant C\|v_{D_{k_1}}\|_{L^2}\\ &\times\Big(\sum\int_{(\xi,n)\in D_{k_1}}\int(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{2b_3}(1+|\xi|+|n|)^{2s}|\hat{u}_1(\tau,\xi,n)|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\times\Big(\sum\int_{(\xi,n)\in D_{k_2}}\int(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{2b_3}(1+|\xi|+|n|)^{6s_0}|\hat{u}_2(\tau,\xi,n)|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\times\Big(\sum\int_{(\xi,n)\in D_{k_3}}\int(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{2b_3}(1+|\xi|+|n|)^{2s_0}|\hat{u}_3(\tau,\xi,n)|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

这里，对 $k_1\geqslant k_2\geqslant k_3$ 求和可将 (3.2) 的上界估计为

$$\begin{aligned}(3.2)\leqslant C&\Big(\sum_n\int\int(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{2b_3}(1+|\xi|+|n|)^{2s}|\hat{u}(\tau,\xi,n)|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\times\Big(\sum_n\int\int(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{2b_3}(1+|\xi|+|n|)^{8s_0}|\hat{u}_2(\tau,\xi,n)|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}},\\ &\times\Big(\sum_n\int\int(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{2b_3}(1+|\xi|+|n|)^{8s_0}|\hat{u}_3(\tau,\xi,n)|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

固定 $s>0$ 并令 $s_0=$最小值$\{\frac{s}{4},\frac{1}{4}\}$，我们可以取 $b=b'=b(s)>\frac{1}{2}$ 使得 $1-b(s)>\frac{1-2s_0}{2}$ 其中 $b_3\in(\frac{1-2s_0}{2},\frac{1}{2})$。因此，由 (3.10) 可得

$$\begin{aligned}\|u_1\bar{u}_2u_3\|_{X^{s,b'-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}&\leqslant C\|u_1\|_{X^{s,b_3}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\|u_2\|_{X^{s_0,b_3}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\|u_3\|_{X^{s_0,b_3}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\\ &\leqslant C\|u_1\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\|u_2\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\|u_3\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

至此，证明完成。 □

3.2. 定理1.1的证明。事实上，Takaoka 和 Tzvetkov 在 [41] 中确定了小初值下方程 (1.1) 的 L^2 整体适定性结果。本小节将简要陈述 $u_0 \in H^s, s > 0$ 的适定性。

首先，我们对方程 (1.1) 对应的积分方程应用不动点论证

$$u(t) = e^{it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}}(|u|^2u)(s)\mathrm{d}s. \tag{3.12}$$

回忆一下，$\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 是一个截断函数，使得 $supp\ \phi \subset (-2,2)$，$\phi \equiv 1$ 在区间 $[-1,1]$ 上成立，并且对于 $\delta > 0$，有 $\phi_\delta(t) = \phi(t/\delta)$。考虑 (3.12) 的一个截断版本

$$u(t) = \phi(t)e^{it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}}u_0 - i\phi_\delta(t)\int_0^t e^{i(t-s)\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}}(|u|^2u)(s)\mathrm{d}s. \tag{3.13}$$

我们在适当的 $s > 0$ 下，利用 $X^{s,b}_\delta(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ 中的不动点论证求解 (3.13)，并取充分小的 $\delta > 0$。我们先陈述 [21] 中的引理 3.1 和引理 3.2 给出的一些估计。

引理 3.2。对于 $b' \geqslant b > \frac{1}{2}$ 和 $0 < \delta \leqslant 1$，有

$$\|\phi(t)e^{it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}}u_0\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \leqslant C\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})},$$

$$\Big\|\phi_\delta(t)\int_0^t e^{i(t-s)\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}}(|u|^2u)(s)\mathrm{d}s\Big\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \leqslant C\delta^{b'-b}\||u|^2u\|_{X^{s,b'-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})},$$

若 $s \in \mathbb{R}$，且存在某些常数 $C > 0$，则

定义算子 Φ 为

$$\Phi(u(t)) := \phi(t)e^{it\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}}u_0 - i\phi_\delta(t)\int_0^t e^{i(t-s)\Delta_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}}(|u|^2u)(s)\mathrm{d}s. \tag{3.14}$$

由引理 3.2、定理 3.1 和引理 2.3 可得

$$\|\Phi(u)\|_{X^{s,b}_\delta(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \leqslant C\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} + C\delta^{b'-b}\|u\|^3_{X^{s,b}_\delta(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \tag{3.15}$$

对于 $b' \geqslant b > \frac{1}{2}$。类似地

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{X^{s,b}_\delta(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \leqslant C\delta^{b'-b}\big(\|u\|^2_{X^{s,b}_\delta(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} + \|v\|^2_{X^{s,b}_\delta(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\big)\|u-v\|_{X^{s,b}_\delta(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}. \tag{3.16}$$

因此，取 $C\delta^{b'-b} = \frac{1}{2}$ $(C\|u_0\|^2_{H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})})$，由压缩映射原理可证明，对于数据 $u_0 \in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$，在空间 $X^{s,b}_\delta$ 中具有局部适定性。

接下来证明整体适定性。只需证明：已知局部适定性成立的时间区间的长度 δ 仅取决于一个守恒量。对于 $s = 1$，能量守恒给出了 $u(t)$ 的 H^1-范数上界，因此对于 H^1 数据，整体适定性成立。对于 $s > 1$，在 (3.11) 的第二个因子中选取 $s_0 = \frac{1}{4}$，从而得到

$$\|u\|_{X^{s,b}_\delta(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \leqslant C\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} + C\delta^{b'-b}\|u\|^2_{X^{1,b_3}_\delta(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\|u\|_{X^{s,b_3}_\delta(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \tag{3.17}$$

对于 $u_0 \in H^s$。因此，在长度为 δ 的时间区间内，$\|u\|_{X^{s,b}_\delta(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}$ 的界仅依赖于 $\|u_0\|_{H^1}$。这就完成了定理1.1的证明。

4. GROWTH OF SOBOLEV NORM $\|u(t)\|_{H^s}$ WITH $s > 1$

本节主要证明定理 1.3。不失一般性，我们只考虑 $t \to +\infty$的情形。根据第3节，可以在一系列连续的区间 $I = I_j = [t_j, t_{j+1}]$ 上建立解 u 的局部适定性，这些区间的长度 $|I_j| = t_{j+1} - t_j$有上界$\|u_0\|_{H^1}$。

关键在于证明一个不等式

$$\|u(t_{j+1})\|_{H^s}^2 \leqslant \|u(t_j)\|_{H^s}^2 + C\|u(t_j)\|_{H^s}^{2-\gamma} \tag{4.1}$$

对于某个固定的 $\gamma = \gamma(s) > 0$。由 (4.1) 并通过归纳法，我们得到

$$\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \leqslant C|t|^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \text{for} \quad |t| \gg 1, \tag{4.2}$$

其中 $s > 1$。详情可参见 Chen 和第一作者在 [13] 中的论述。

现在我们将在 $s \in \mathbb{N}$ 的条件下证明 (4.1)，为简便起见。记 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 L^2 中的内积，并记 $\dot{u}(t) = \partial_t u(t)$，则可写为

$$\begin{aligned}
\|u(t_{j+1})\|_{H^s}^2 - \|u(t_j)\|_{H^s}^2 =& \int_{t_j}^{t_{j+1}} \big(\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H^s}^2\big)\mathrm{d}t \\
=& 2\,\mathrm{Re}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \sum_{|\alpha_1|\leqslant s}\sum_{|\alpha_2|\leqslant s} \langle \partial^{\alpha_1}\dot{u}(t), \partial^{\alpha_2}u(t)\rangle \mathrm{d}t \\
=& 2\,\mathrm{Im}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \sum_{|\alpha_1|\leqslant s}\sum_{|\alpha_2|\leqslant s} \langle \partial^{\alpha_1}(|u|^2u)(t), \partial^{\alpha_2}u(t)\rangle \mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

式 (4.3) 中的各项贡献总结如下：

(1) $I = \mathrm{Im}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} |\sum_{|\alpha|\leqslant s} \partial^\alpha u(t)|^2 |u(t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$

(2) $II = \mathrm{Im}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} \big(\sum_{|\alpha|\leqslant s} \partial^\alpha \bar{u}(t)\big)^2 (u(t))^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$

(3)

$$\begin{aligned}
III =& \mathrm{Im}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} \sum_{|\alpha|\leqslant s} \big(\partial^\alpha \bar{u}(t)\big) \\
& \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|\leqslant s} \big(\partial^{\alpha_1}u_1(t)\partial^{\alpha_2}u_2(t)\partial^{\alpha_3}u_3(t)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

这里，偏导数是关于空间变量 x 的，它是 $u_i = u$ 或 $\bar{u}$ 之一； $|\alpha_i| < s$、$\sum_{i=1}^3 |\alpha_i| = s$ 以及至多一个 $|\alpha_i| = 0$。

4.1. (3) 的贡献。不失一般性，我们设 $|\alpha_1| \geqslant |\alpha_2| \geqslant |\alpha_3|$。因此，(3) 可分为两种情况：

(a) $|\alpha_3| > 0$。 (b) $|\alpha_1| \geqslant |\alpha_2| > 0$ 和 $|\alpha_3| = 0$。

因此， $III \leqslant III_1 + III_2$, III_1 对应于（a），而 III_2 对应于（b）。我们首先考虑 III_1 的情形。H¨older 不等式和定理 3.1 给出

$$\begin{aligned} III_1 \lesssim & \sum_{|\alpha|\leqslant s} \left\|\partial^\alpha \bar{u}\right\|_{X_{I_j}^{-\varepsilon_1,1-b'}} \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|\leqslant s} \left\|\partial^{\alpha_1}u_1\partial^{\alpha_2}u_2\partial^{\alpha_3}u_3\right\|_{X_{I_j}^{\varepsilon_1,b'-1}} \\ \lesssim & \|u\|_{X_{I_j}^{s-\varepsilon_1,1-b'}} \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|\leqslant s} \prod_{i=1}^{3} \left\|\partial^{\alpha_i}u_i\right\|_{X_{I_j}^{\varepsilon_1,b}} \\ \lesssim & \|u\|_{X_{I_j}^{s-\varepsilon_1,b}} \prod_{i=1}^{3} \|u_i\|_{X_{I_j}^{|\alpha_i|+\varepsilon_1,b}}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中 $\varepsilon_1 > 0$ 和 $b' \geqslant b > \frac{1}{2}$。对于 $1 \leqslant s-\varepsilon_1 < s$，通过插值

$$\begin{aligned} \|u\|_{X_{I_j}^{s-\varepsilon_1,b}} \lesssim & \|u\|_{X_{I_j}^{s,b}}^{1-\frac{\varepsilon_1}{s-1}} \|u\|_{X_{I_j}^{1,b}}^{\frac{\varepsilon_1}{s-1}} \lesssim \|u(t_j)\|_{H^s}^{1-\frac{\varepsilon_1}{s-1}} \|u(t_j)\|_{H^1}^{\frac{\varepsilon_1}{s-1}} \\ \lesssim & \|u(t_j)\|_{H^s}^{1-\frac{\varepsilon_1}{s-1}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

同理，由于 $\varepsilon_1 < 1$, $0 < |\alpha_i| + \varepsilon_1 < s$，于是

$$\begin{aligned} \|u_i\|_{X_{I_j}^{|\alpha_i|+\varepsilon_1,b}} \lesssim & \|u_i\|_{X_{I_j}^{s,b}}^{\frac{|\alpha_i|+\varepsilon_1}{s}} \|u_i\|_{X_{I_j}^{0,b}}^{1-\frac{|\alpha_i|+\varepsilon_1}{s}} \\ \lesssim & \|u(t_j)\|_{H^s}^{\frac{|\alpha_i|+\varepsilon_1}{s}}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

将 (4.5) 和 (4.6) 代入 (4.4) 得到

$$III_1 \lesssim \|u(t_j)\|_{H^s}^{1-\frac{\varepsilon_1}{s-1}+\frac{\sum_{i=1}^3|\alpha_i|+3\varepsilon_1-3}{s-1}} = \|u(t_j)\|_{H^s}^{2-2\frac{1-\varepsilon_1}{s-1}}. \tag{4.7}$$

与情形 (a) 类似，我们得到

$$\begin{aligned} III_2 \lesssim & \|u\|_{X_{I_j}^{s-\varepsilon_1,b}} \prod_{i=1}^{2} \|u_i\|_{X_{I_j}^{|\alpha_i|+\varepsilon_1,b}} \|u_3\|_{X^{\varepsilon,b}} \\ \lesssim & \|u(t_j)\|_{H^s}^{1-\frac{\varepsilon_1}{s-1}+\frac{\sum_{i=1}^2|\alpha_i|+2\varepsilon_1}{s-1}} = \|u(t_j)\|_{H^s}^{2-\frac{1-\varepsilon_1}{s-1}}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

因此，(4.7) 和 (4.8) 推出

$$III \leqslant III_1 + III_2 \lesssim \|u(t_j)\|_{H^s}^{2-\frac{1-\varepsilon_1}{s-1}}. \tag{4.9}$$

4.2. (2) 的贡献。由 H¨older 不等式，我们得到

$$II \lesssim \| \sum_{|\alpha|\leqslant s} \partial^\alpha \bar{u}\|_{X_{I_j}^{0,b}} \| \sum_{|\alpha|\leqslant s} \partial^\alpha \bar{u}(u)^2\|_{X_{I_j}^{0,-b}} \lesssim \|u(t_j)\|_{H^s} \| \sum_{|\alpha|\leqslant s} \partial^\alpha \bar{u}(u)^2\|_{X_{I_j}^{0,-b}}.$$

为了估计 $\| \sum_{|\alpha|\leqslant s} \partial^\alpha \bar{u}(u)^2\|_{X^{0,}{}_{I_j}{}^{-b}}$，我们利用对偶性进行考察 (4.10)

$$\begin{aligned} \| \sum_{|\alpha|\leqslant s} \partial^\alpha \bar{u}(u)^2\|_{X_{I_j}^{0,-b}} = & \sup_{\|\hat{w}\|_{L^2}=1} \sum \int\int \frac{\bar{\hat{w}}(\tau,\xi,n)}{(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^b}(1+|\xi|+|n|)^s \\ & \times |\bar{\hat{u}}(-\tau_1,-\xi_1,-n_1)||\hat{u}(\tau_2,\xi_2,n_2)||\hat{u}(\tau_3,\xi_3,n_3)|\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\tau_3\mathrm{d}\xi_3, \end{aligned} \tag{4.11}$$

其中 $n = n_1 + n_2 + n_3$、$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ 和 $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$。

情形 1. 假设 $(1+|\xi_2|+|n_2|) \geqslant C(1+|\xi_1|+|n_1|)^\theta$ 或 $(1+|\xi_3|+|n_3|) \geqslant C(1+|\xi_1|+|n_1|)^\theta$，其中 $0<\theta<1$ 是一个小参数， C 将在稍后确定。

不失一般性，举 $(1+|\xi_3|+|n_3|) \geqslant C(1+|\xi_1|+|n_1|)^\theta$ 为例，另一种情形可用同样的方法处理。与估计式 (3.3) 类似，我们也可以估计 (4.11)：

$$(4.11) \lesssim \|u\|_{X^{s,b_3}_{I_j}} \|u\|^2_{X^{s_0,b_3}_{I_j}} \tag{4.12}$$

对任意 $0<s_0<\frac{1}{4}$ 和 $b_3<\frac{1}{2}<b$。由 $(1+|\xi_3|+|n_3|)^{s_0-1} \leqslant C^{s_0-1}(1+|\xi_1|+|n_1|)^{\theta(s_0-1)}$、公式 (3.10) 以及 $\|u\|_{X^{1,b}} \lesssim \|u_0\|_{H^1}$，可得

$$\begin{aligned}(4.11) \lesssim & \|u\|_{X^{s-\theta(1-s_0),b_3}_{I_j}} \|u\|_{X^{s_0,b_3}_{I_j}} \|u\|_{X^{1,b_3}_{I_j}} \lesssim \|u\|_{X^{s-\theta(1-s_0),b}_{I_j}} \|u\|^2_{X^{1,b}_{I_j}} \\ \lesssim & \|u\|^{1-\frac{\theta(1-s_0)}{s-1}}_{X^{s,b}_{I_j}} \lesssim \|u(t_j)\|^{1-\frac{\theta(1-s_0)}{s-1}}_{H^s}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

情形 2. 假设 $(1+|\xi_2|+|n_2|) < C(1+|\xi_1|+|n_1|)^\theta$ 且 $(1+|\xi_3|+|n_3|) <C(1+|\xi_1|+|n_1|)^\theta$。

子情形 1. 假设 $|\tau_2| \geqslant C_1(1+|\xi_1|+|n_1|)^2$ 或 $|\tau_3| \geqslant C_1(1+|\xi_1|+|n_1|)^2$,，其中 C_1稍后确定。

不失一般性，以 $|\tau_3| \geqslant C_1(1+|\xi_1|+|n_1|)^2$ 为例。由于

$$\begin{aligned}1+|\tau_3-\xi_3^2-n_3^2| \geqslant & |\tau_3|-(1+|\xi_3|+|n_3|)^2 \\ \geqslant & C_1(1+|\xi_1|+|n_1|)^2 - C(1+|\xi_1|+|n_1|)^{2\theta} \\ = & C_1(1+|\xi_1|+|n_1|)^2\big(1-\frac{C}{C_1}(1+|\xi_1|+|n_1|)^{2\theta-2}\big) \\ \geqslant & C'(1+|\xi_1|+|n_1|)^2.\end{aligned} \tag{4.14}$$

In particular, if $|\xi_1| = |n_1| = 0$, choose $C < C_1$. Hence, (4.14) implies $\frac{1}{(1+|\tau_3-\xi_3^2-n_3^2|)^{b-\frac{1}{4}}} \leqslant \frac{1}{(C'(1+|\xi_1|+|n_1|)^2)^{b-\frac{1}{4}}}$. By the formula (3.10), we get

$$\begin{aligned}(4.11) \lesssim & \|u\|_{X^{s-2(b-\frac{1}{4}),b_3}_{I_j}} \|u\|_{X^{s_0,b_3}_{I_j}} \|u\|_{X^{s_0,b_3+(b-\frac{1}{4})}_{I_j}} \lesssim \|u\|_{X^{s-2(b-\frac{1}{4}),b}_{I_j}} \|u\|^2_{X^{1,b}_{I_j}} \\ \lesssim & \|u\|^{1-\frac{2(b-\frac{1}{4})}{s-1}}_{X^{s,b}_{I_j}} \lesssim \|u(t_j)\|^{1-\frac{2(b-\frac{1}{4})}{s-1}}_{H^s}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

子情形 2. 现在我们只需考虑 $|\tau_2| \geqslant C_1(1+|\xi_1|+|n_1|)^2$ 且$|\tau_3| \geqslant C_1(1+|\xi_1|+|n_1|)^2$的情形。记

$$(1+|\xi_1|+|n_1|)^s(1+|\tau_1+\xi_1^2+n_1^2|)^b|\bar{\hat{u}}(-\tau_1,-\xi_1,-n_1)| = \tilde{u}(-\tau_1,-\xi_1,-n_1),$$

将 (4.11) 改写为

$$\begin{aligned}\sup_{\|\hat{w}\|_{L^2}=1} \sum \int\int & \frac{|\bar{\tilde{w}}(\tau,\xi,n)|}{(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^b} \frac{|\tilde{u}(-\tau_1,-\xi_1,-n_1)|}{(1+|\tau_1+\xi_1^2+n_1^2|)^b} \\ & \times |\hat{u}(\tau_2,\xi_2,n_2)||\hat{u}(\tau_3,\xi_3,n_3)|\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\tau_3\mathrm{d}\xi_3,\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}\text{where } \tau=\tau_1+\tau_2+\tau_3, \xi=\xi_1+\xi_2+\xi_3 \text{ and } n=n_1+n_2+n_3. \text{ Since}\\ 1+|\tau-\xi^2-n^2|+1+|\tau_1+\xi_1^2+n_1^2| \geqslant & 1+|\xi_1^2+n_1^2|+1+|\xi^2+n^2|-|\tau-\tau_1|\\ \geqslant & (1+|\xi_1|+|n_1|)^2-2C_1(1+|\xi_1|+|n_1|)^2\\ \geqslant & C''(1+|\xi_1|+|n_1|)^2\end{aligned} \tag{4.17}$$

对于 $C_1<\frac{1}{2}$。并将 (4.16) 改写为

$$\begin{aligned}\sup_{\|\hat{w}\|_{L^2}=1}\sum\int\int & \frac{|\bar{\hat{w}}(\tau,\xi,n)|}{(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{\frac{1}{4}}}(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{\frac{1}{4}-b}\frac{|\tilde{u}(-\tau_1,-\xi_1,-n_1)|}{(1+|\tau_1+\xi_1^2+n_1^2|)^{\frac{1}{4}}}\\ & \times(1+|\tau_1+\xi_1^2+n_1^2|)^{\frac{1}{4}-b}|\hat{u}(\tau_2,\xi_2,n_2)||\hat{u}(\tau_3,\xi_3,n_3)|\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\tau_3\mathrm{d}\xi_3,\end{aligned} \tag{4.18}$$

其中 $\tau=\tau_1+\tau_2+\tau_3$、$\xi=\xi_1+\xi_2+\xi_3$ 和 $n=n_1+n_2+n_3$。利用 (4.17)，我们得到

$$(1+|\tau-\xi^2-n^2|)^{\frac{1}{4}-b}(1+|\tau_1+\xi_1^2+n_1^2|)^{\frac{1}{4}-b}\lesssim(1+|\xi_1|+|n_1|)^{2(\frac{1}{4}-b)}$$

对于 $b_3<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<b$。由此可得

$$\begin{aligned}(4.18)\lesssim & \|u\|_{X_{I_j}^{s-2(b-\frac{1}{4}),b}}\|u\|^2_{X_{I_j}^{s_0,b_3}}\lesssim\|u\|_{X_{I_j}^{s-2(b-\frac{1}{4}),b}}\|u\|^2_{X_{I_j}^{1,b}}\\ \lesssim & \|u\|^{1-\frac{2(b-\frac{1}{4})}{s-1}}_{X_{I_j}^{s,b}}\lesssim\|u(t_j)\|^{1-\frac{2(b-\frac{1}{4})}{s-1}}_{H^s}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

结合 (4.13)、(4.19) 和 (4.15)，(4.10) 可化为

$$II\lesssim\|u(t_j)\|_{H^s}\|u(t_j)\|^{1-\frac{\eta}{s-1}}_{H^s}, \tag{4.20}$$

其中 η 满足

$$\eta=\min\{\theta(1-s_0),2(b-\frac{1}{4})\}.$$

为了使这两项等价，我们有 $\theta=\frac{2}{(b-\frac{1}{4})}\frac{}{1-s_0}\leq 1$，对于 $0<s_0<\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<b$。将 (4.20) 与 III 的结果进行比较，可知存在 $\gamma=\frac{1}{2}-$ 使得

$$(4.3)\lesssim\|u(t_j)\|_{H^s}\|u(t_j)\|^{1-\frac{\gamma}{s-1}}_{H^s}. \tag{4.21}$$

因此，我们完成了断言（4.1）的证明。

致谢。我们衷心感谢 Jiqiang Zheng 教授和 Qionglei Chen 教授的有益讨论，以及 Fanfei Meng、Ying Wang 对本文提出的宝贵建议。

K. Yang 获得了重庆师范大学博士基金和重庆市科学技术委员会（21XLB025,ncamc2022- msxm04）的资助，并获得北京应用物理与计算数学研究所计算物理实验室的资助（6142A0521Q06,HX02021-36）。

References

[1] A. Barron, 《半周期 Schr¨odinger 方程的全局时间 Strichartz 估计》, 《分析与偏微分方程》, 14（2021）, 第 4 期, 1125-1152。[2] J. Bourgain, 《某些格点子集的傅里叶变换限制现象及其在非线性演化方程中的应用 I: Schr¨odinger 方程》, Geom. funct. Anal., 3（1993）, 107-156。

[3] J. Bourgain, 《非线性 Schr¨odinger 方程的整体解》, Colloq. Publications, Amer. Math. Soc., 1999。[4] J. Bourgain, 《哈密顿偏微分方程光滑解的高阶 Sobolev 范数随时间的增长》, Int. Math. Res. Not., IMRN 6（1996）, 277-304。[5] J. Bourgain 和 C. Demeter, 《解耦猜想的证明》, Ann. of Math., 182（2015）, 第 1 期, 351-389。[6] N. Burq、P. Gérard 和 N. Tzvetkov, 《紧流形上的 Strichartz 不等式与非线性 Schr¨odinger 方程》, Amer. J. Math., 126（2004）, 第 3 期, 569-605。[7] N. Burq、P. Gérard 和 N. Tzvetkov, 《曲面上的双线性特征函数估计与非线性 Schr¨odinger 方程》, Invent. Math., 159（2005）, 187-223。[8] N. Burq、P. Gérard 和 N. Tzvetkov, 《多线性特征函数估计与三维非线性 Schr¨odinger 方程的整体存在性》, Ann. Sci. école Norm. Sup., 38（2005）, 第 2 期, 255-301。[9] N. Burq、P. Gérard 和 N. Tzvetkov, 《三维紧流形上非线性 Schr¨odinger 方程的整体解》, 《非线性色散方程的数学方面》, Ann. of Math. Stud., 第 163 卷, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007, 第 111-129 页。[10] D. Benney 和 A. Newell, 《随机波闭合》, Stud. Appl. Math., 48（1969）, 29-53。[11] F. Catoire 和 W.-M. Wang, 《一般平坦环面上散焦非线性 Schr

¨ 9 2010 2, 483 491

odinger 方程的 Sobolev 范数界》, Commun. Pure. App. Anal., （）, 第 - 期, -。[12] T. Cazenave 和 F. Weissler, 《H^s 中临界非线性 Schr¨odinger 方程的柯西问题》, Nonlinear Anal., 14（1990）, 807-836。[13] Q. Chen 和 M. Deng, 《四阶 Schr¨odinger 方程高阶 Sobolev 范数的增长》。预印本。[14] X. Cheng、Z. Guo、K. Yang 和 L. Zhao, 《波导上三次散焦非线性 Schr¨odinger 方程的散射》, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$, Rev. Mat. Iberoam., 36（2020）, 第 4 期, 985-1011。[15] X. Cheng、Z. Guo 和 Z. Zhao, 《二维圆柱面上五次散焦非线性 Schr¨odinger 方程的散射》, 《工业与应用数学学会数学分析杂志》, 52（2020）, 第 5 期, 4185-4237。[16] X. Cheng、Z. Zhao 和 J. Zheng, 《波导流形上能量临界非线性 Schr¨odinger 方程的适定性》, J. Math. Anal. Appl., 494(2): 论文编号 124654, 14 页, 2021。[17] J. Colliander、M. Keel、G. Staffilani、H. Takaoka 和 T. Tao, 《周期性 KdV 方程的多线性估计及其应用》, 《泛函分析杂志》, 211（2004）, 第 1 期, 173-218。[18] J. Colliander、M. Keel、G. Staffilani、H. Takaoka 和 T. Tao, 《能量范数以下三次非线性薛定谔方程轨道不稳定性的多项式上界》, Disc. Cont. Dyn. Syst., 9（2003）, 31-54。[19] J.-M. Delort, 《具有谐振子势的时变 Schr¨odinger 算子解的 Sobolev 范数增长》, Comm. PDE., 39（2014）, 1-33。[20] Y. Deng、P. Germain 和 L. Guth, 《无理环面上的 Schr¨odinger 方程的 Strichartz 估计》, 《泛函分析杂志》, 273（2017）, 第 9 期, 2846-2869。[21] J. Ginibre, 《空间变量周期性半线性偏微分方程的柯西问题》, Sèm. Bourbaki, 796（1995）, 163-187。[22] M. Grillakis, 《关于非线性 Schr¨odinger 方程》, Commun. Partial Differential Equations, 25（2000）, 第 9-10 期, 1827-1844。[23] P. Gérard 和 V. Pierfelice, 《四维紧流形上的非线性 Schr¨odinger 方程》, Bull. Soc. Math. France 138（2010）, 119-151。[24] J. Ginibre 和 G. Velo, 《一类非线性 Schr¨odinger 方程》, 《泛函分析杂志》, 32（1979）, 1-71。[25] Z. Hani, 《闭流形上三次非线性 Schr¨odinger 方程的整体适定性》, Communications in Partial Differential Equations, 37（2012）, 第 7 期, 1186-1236。[26] K. Hasselmann, 《重力波谱中的非线性能量传递（第一部分: 一般理论）》, J. Fluid. Mech., 12（1962）, 481-500。[27] Z. Hani 和 B. Pausader, 《$\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ 上五次散焦非线性 Schr¨odinger 方程的散射》, Com. on Pure and Applied Math., 67（2014）, 第 9 期, 1466-1542。[28] S. Herr、D. Tataru 和 N. Tzvetkov, 《四维部分周期 Schr¨odinger 方程解的 Strichartz 估计及其应用》, J. Reine Angew. Math., 690（2014）, 65-78。

[29] A. D. Ionescu 和 B. Pausader，能量临界散焦非线性薛定谔方程在 $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$ 上的整体适定性，《数学物理通讯》，312 (2012)，第 3 期，781-831。[30] C. Miao 和 B. Zhang，非线性薛定谔型方程柯西问题的整体适定性，《离散与连续动力系统》，17 (2007)，181-200。[31] F. Planchon、N. Tzvetkov 和 N. Visciglia，二维和三维流形上非线性薛定谔方程 Sobolev 范数的增长，《分析与偏微分方程》，10 (2017)，第 5 期，1123-1147。[32] G. Staffilani，科尔莫戈罗夫–彼得罗夫斯基–皮斯库诺夫方程和薛定谔方程解的高阶 Sobolev 范数增长，《杜克数学杂志》，86 (1997)，第 1 期，109-142。[33] G. Staffilani，二维半线性薛定谔方程的二次型，《杜克数学杂志》，86 (1997)，第 1 期，79-107。[34] T. Schneider，电信中的非线性光学，施普林格，柏林，2004。[35] D. Silva、N. Pavlović、G. Staffilani 和 N. Tzirakis，一维和二维周期性非线性薛定谔方程的整体适定性，《离散与连续动力系统》，19 (2007)，第 1 期，37-65。[36] V. Sohinger，非线性薛定谔方程解的高阶 Sobolev 范数增长的界，《微分积分方程》，24 (2011)，第 7-8 期，653-718。[37] V. Sohinger，非线性薛定谔方程解的高阶 Sobolev 范数增长的界，《印第安纳大学数学杂志》，60 (2011)，1487-1516。[38] W. Strauss，低能量下的非线性散射理论，《泛函分析杂志》，41 (1981)，110-133。[39] W. Strauss，低能量下的非线性散射理论：续篇，《泛函分析杂志》，43 (1981)，281-293。[40] A. W. Snyder 和 J. Love，光波导理论，施普林格，美国，1983。[41] H. Takaoka 和 N. Tzvetkov，具有 $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ 上数据的二维非线性薛定谔方程，《泛函分析杂志》，182 (2001)，427-442。[42] N. Tzvetkov 和 N. Visciglia，乘积空间上非线性薛定谔方程的小初值散射，《偏微分方程通讯》，37 (2012)，第 1 期，125-135。[43] T. Tao，《非线性色散方程：局部与整体分析》，CBMS 数学区域会议系列，106。美国数学会，普罗维登斯，R.I.，2006。[44] V.E. Zakharov，深水流体表面有限振幅周期波的稳定性，《应用力学与技术物理》，9 (1968)，190-194。[45] Z. Zhao 和 J. Zheng，三维乘积空间上散焦三次非线性薛定谔方程的长时间动力学，《工业与应用数学学会数学分析杂志》，53 (2021)，第 3 期，3644-3660。[46] S. Zhong，紧黎曼流形上薛定谔方程解的高阶 Sobolev 范数随时间的增长，《微分方程杂志》，245 (2008)，第 2 期，359-376。

Mingming DengGraduate School of China Academy of Engineering Physics, Beijing, China, 100089, *Email address*: dengmingming18@gscaep.ac.cn

Kailong YangChongqing National Center for Applied Mathematics, Chongqing Normal UniversityChongqing, China*Email address*: ykailong@mail.ustc.edu.cn