arXiv:2302.00259v1 [math.AP] 1 Feb 2023

On the Schrödinger-Poisson system with (p,q)–Laplacian

Yueqiang Song[a], Yuanyuan Huo[a], and Dušan D. Repovš[b, c, d*†]

a长春师范大学数学学院，长春，130032，中国 b 卢布尔雅那大学教育学院，卢布尔雅那，1000，斯洛文尼亚 c 卢布尔雅那大学数学与物理学院，卢布尔雅那，1000，斯洛文尼亚 d 数学、物理与力学研究所，卢布尔雅那，1000，斯洛文尼亚

摘要

我们研究一类具有（p,q）–拉普拉斯算子的薛定谔–泊松系统。利用不动点理论，我们获得了非平凡解存在性的新结果。本文的主要创新在于将双相算子与非局部项相结合。我们的结果推广了一些已知结果。

关键词：双相算子；薛定谔–泊松系统；（p,q）–拉普拉斯算子；不动点理论。2020年数学主题分类：35J47；35J60；35R11。

1 引言

本文将研究　以下带有 (p,q)–拉普拉斯算子的 Schr¨odinger-Poisson 系统

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u + (|u|^{p-2} + |u|^{q-2})u - \phi|u|^{q-2}u = h(x,u) + \lambda g(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = |u|^q \quad \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$\Delta_\varsigma = \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ 是 ς-拉普拉斯算子 $(\varsigma = p,q)$，$\frac{3}{4} < p < q < 3$, λ 是一个正参数，非负函数 $g \in L^{\frac{3q}{4q-3}}(\mathbb{R}^3)$ 是一个扰动项，而 $g(x) \not\equiv 0$。这里，$h: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个 Carath´eodory 函数，并满足某些假设。

我们对问题 (1.1) 的研究主要受两个原因驱动。一方面，当 $p = q = 2$和 $\lambda \equiv 0$时，问题 (1.1) 化为以下非线性 Schr¨odinger-Poisson 系统

$$\begin{cases} -\Delta u + u - \phi u = h(x,u) \quad \text{in } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = |u|^2 \quad \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1.2}$$

* 通讯作者
†电子邮箱：songyq16@mails.jlu.edu.cn（Song），hyy13353223575@163.com（Huo），dusan.repovs@guest.arnes.si（Repovˇs）

系统（1.2）描述了带电粒子与运动电磁场之间的相互作用。非局部项 ϕu 描述了与电场的相互作用，而非线性项则刻画粒子之间的相互作用。由于具有深厚的物理背景，系统（1.2）近几十年来受到了广泛关注。对于 $p = q \neq 2$，Du 等人[6] 首次研究了系统（1.1），并运用山路定理得到了该系统非平凡解的存在性。关于拟线性 Schr¨odinger-Poisson 系统，可参阅 Du 等人 [7]。对于利用变分方法研究 Schr¨odinger-Poisson 系统所得结果，感兴趣的读者可参阅 Ambrosetti-Ruiz [1], D'Aprile-Mugnai [5], Ruiz [10] 及其中的参考文献。

另一方面，当 $p \neq q$ 时，问题 (1.1) 由具有非平衡增长的微分算子驱动。当问题 (1.1) 不含非局部项 ϕu 时，它将成为一个 p&q-拉普拉斯方程

$$-\Delta_p u - \Delta_q u + (|u|^{p-2} + |u|^{q-2})u - \phi|u|^{q-2}u = h(x,u) \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \tag{1.3}$$

这个问题具有丰富的物理背景，因为双相算子已被用于描述生物物理学、等离子体物理学和化学反应分析中的反应扩散问题的稳态解。利用变分方法，Bartolo 等人 [2], 、Figueiredo [8], 、Papageorgiou 等人 [9], 以及其中的参考文献给出了问题（1.3）的一些结果。

受上述文献启发，本文利用不动点理论证明问题 (1.1) 存在非平凡解。尽管已有一些作者使用过不动点理论，参见 Carl-Heikkil¨a [4], 、de Souza [11] 和 Tao-Zhang [12, 13], ，据我们所知，问题 (1.1) 此前尚未得到研究。由于存在非齐次项，我们可以利用不动点理论证明问题 (1.1) 存在弱解。本文的结果可视为 Du 等人 [6, 7] 和 Tao-Zhang [12, 13] 结果的推广。从某种意义上说，即使在 $p = q$ 情形下，我们的结果也是新的。

我 们的存在性结果是本文的主要结果，可表述如下。

定理 1.1. 假设 $h(x,u) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ 是关于 u 的非递减函数，并且$h(x,u) = 0$ 当 $u < 0$ 时。此外，假设它满足以下条件

$$|h(x,t)| \leq d_1(x)|t|^{\tau-1} + d_2(x)|t|^{q^*-1}, \ for\ all\ (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

其中 $q \leq \tau < q^* := \frac{3p}{3-p}$, $0 \leq d_1 \in L^{\eta}(\mathbb{R}^3)$, $0 \leq d_2 \in L^{\infty}(\mathbb{R}^3)$，且 $\eta = \frac{6}{6-\tau}$。那么存在 $\lambda_0 > 0$，使得对每个 $0 < \lambda \leqslant \lambda_0$，问题 (1.1) 都有一个正解。

注 1.1. 我们指出，有许多函数满足定理 1.1 的假设。例如，我们可以取 $h(x,t) = \frac{1}{1+x^2}|t|^{q^*-1}$。

2 预备知识

本节将给出一些预备结果，以及一些记号和有用的结果。为此，设 W 为 $W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ 和 $W^{1,q}(\mathbb{R}^3)$ 的子空间，由 $W = W^{1,p}(\mathbb{R}^3) \bigcap W^{1,q}(\mathbb{R}^3)$ 定义，其范数为 $\|u\| = \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|u\|_{W^{1,q}(\mathbb{R}^3)}$。由于 $W^{1,r}(\mathbb{R}^3)$（其中 $1 < r < \infty$）是可分自反巴拿赫空间，我们可推知 W 是可分自反巴拿赫空间。此外，我们还知道嵌入 $W \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ $L^q(\mathbb{R}^3)$ 是连续的。另一方面，根据 Du 等人 [7], ，对于任意给定的 $u \in W^{1,q}(\mathbb{R}^3)$，存在唯一的

$$\phi_u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^q}{|x-y|}\mathrm{d}y, \quad \phi_u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3),$$

满足 $-\Delta\phi_u = |u|^q$。

现在总结 ϕ_u 的性质，后文将会用到这些性质。

引理 2.1.（Du 等人 *[7]*）设 $u \in W^{1,q}(\mathbb{R}^3)$。则以下性质成立：

(1) $\phi_u \geqslant 0$，对所有 $x \in \mathbb{R}^3$ 均成立；**(2)** 对任意 $t \in \mathbb{R}^+, \phi_{tu} = t^q\phi_u$，以及满足 $u_t(x) = t^k u(tx)$ 的 $\phi_{u_t} t^{kq-2}\phi_u(tx)$；**(3)** $\|\phi_u\|_{D^{1,2}} \leqslant C\|u\|^q$，其中 C 与 u 无关；**(4)** 若 $u_n \rightharpoonup u$ 属于 $W^{1,q}(\mathbb{R}^3)$，则 $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u$ 属于 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$，且 $\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}|u_n|^{q-2}u_n\varphi \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u|u|^{q-2}u\varphi \mathrm{d}x$，对所有 $\varphi \in W^{1,q}(\mathbb{R}^3)$ 均成立。

将 $\phi = \phi_u$ 代入系统（1.1），可将（1.1）改写为一个单独的方程

$$-\Delta_p u - \Delta_q u + (|u|^{p-2}u + |u|^{q-2}u) - \phi_u|u|^{q-2}u = h(x,u) + \lambda g(x), \text{ for all } u \in W. \tag{2.1}$$

我们在 W 上定义能量泛函 I：

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}\big(|\nabla u|^p + |u|^p\big)\mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^3}\big(|\nabla u|^q + |u|^q\big)\mathrm{d}x - \frac{1}{2q}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u|u|^q\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}\Big(H(x,u) + \lambda g(x)\Big)\mathrm{d}x,$$

where $H(x,t) = \int_0^t h(x,s)ds$. 显然可证明 $I \in C^1(W,\mathbb{R})$，并且

$$\begin{aligned}\langle I'(u), \psi\rangle = &\int_{\mathbb{R}^3}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\psi + |u|^{p-2}u\psi\big)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}\big(|\nabla u|^{q-2}\nabla u\nabla\psi + |u|^{q-2}u\psi\big)\mathrm{d}x \\ &- \int_{\mathbb{R}^3}\phi_u|u|^{q-2}u\psi\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}\Big(h(x,u) + \lambda g(x)\Big)\psi\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

容易验证，$(u,\phi_u) \in W \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 是系统（1.1）的解，当且仅当 $u \in W$ 是 I 的临界点。

现在，我们介绍 Carl-Heikkil¨a [4], 提出的必要的不动点定理，该定理在证明我们的结论时起着关键作用。为此，设 $\mathcal{E}$ 为实巴拿赫空间。若非空子集 $\mathcal{E}_+ \neq \{0\} \subset \mathcal{E}$ 满足以下条件，则称其为序锥：*(a)* $\mathcal{E}_+$ 是闭凸的；*(b)* 若 $v \in \mathcal{E}_+$ 且 $\delta \geqslant 0$，则 $\delta v \in \mathcal{E}_+$；*(c)* 若 $v \in \mathcal{E}_+$ 且 $-v \in \mathcal{E}_+$，则 $v = 0$。序锥 $\mathcal{E}_+$ 以如下方式在 W 中诱导出偏序：当且仅当 $y - x \in \mathcal{E}_+$ 时，$x \preceq y$；并且 $(W, \preceq)$ 称为有序巴拿赫空间。若对于关于 $\preceq$ 的任意 $x, y \in W$，$\inf\{x,y\}$ 和 $\sup\{x,y\}$ 均存在，则称 $(W, \|\cdot\|)$ 为格。此外，若对每个 $x \in W$ 均有 $\|x^{\pm}\| \leqslant \|x\|$，其中 $x^+ := \sup\{0,x\}$ 且 $x^- := -\inf\{0,x\}$，则 $(W, \|\cdot\|)$ 是巴拿赫半格。我们还注意到，W 的对偶空间 W' 具有如下偏序：

$$\varphi_1, \varphi_2 \in W', \varphi_1 \lhd \varphi_2 \Leftrightarrow \langle\varphi_1, v\rangle \leqslant \langle\varphi_2, w\rangle, \text{ for all } w \in \mathcal{E}_+.$$

接下来，我们给出不动点性质的定义。根据 Carl-Heikkil¨a [4], ，其定义如下：如果每个递增映射 $G\colon P \to P$ 都有不动点，则称 P 具有不动点性质。

命题 2.1。（Carl-Heikkil¨a *[4,* 推论 2.*2]*）设 W 为自反巴拿赫半格。则 W 中的每个闭球都具有不动点性质。

3 定理 1.1 的证明

为了证明定理 1.1，我们首先证明一些关键引理。首先，我们定义泛函$\mathcal{B}$： $W \to W'$，其定义为 $\langle \mathcal{B}u,\ v\rangle = \int_{\mathbb{R}^3}($ $|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v + |u|^{p-2}uv)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^{q-2}\nabla u\nabla v + |u|^{q-2}uv)\mathrm{d}x$. 显然，对于所有 $u \in W$，$\mathcal{B}u$ 都是线性的。这意味着 Hölder 不等式成立

$$|\langle \mathcal{B}u, v\rangle| \leqslant C_1\|u\|^{p-1}\|v\| + C_2\|u\|^{q-1}\|v\|, \quad \text{for some} \ \ C_1, C_2 > 0.$$

因此， $\mathcal{B}u \in W'$ 和 $\mathcal{B}$ 是定义良好的。此外，我们有关于 $\mathcal{B}$的以下性质。

引理 3.1. 算子 $\mathcal{B}: W \to W'$ 是连续且可逆的。

证明。设 $\{u_k\}$ 属于 W，且满足 $u_k \to u$ 属于 W。利用 Hölder 不等式，对于满足 $\|v\| \leqslant 1$的 $v \in W$，我们有

$$\|\mathcal{B}u_k - \mathcal{B}u\|_{W'} = \sup_{v\in W, \|v\|\leqslant 1} |\langle \mathcal{B}u_k - \mathcal{B}u, v\rangle| \leqslant \|u_k - u\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|u_k - u\|^q_{W^{1,q}(\mathbb{R}^3)} \to 0.$$

这意味着算子 $\mathcal{B}$是连续的。考虑对所有$u \in W$的 p、 $q \geqslant 2$和 $\langle \mathcal{B}u$、 $u\rangle = \|u\|^p + \|u\|^q$，我们有 $\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle \mathcal{B}u,\ u\rangle}{\|u\|} = \infty$。众所周知，

$$(|a|^{s-2}a - |b|^{s-2}b|)(a - b) \geqslant C_p|a - b|^{s-2}, \ \text{for all} \ s \geq 2, a, b \in \mathbb{R},$$

并且对于所有 u_1、 $u_2 \in W$、 $u_1 \neq u_2$，我们有 $\langle \mathcal{B}u_1 - \mathcal{B}u_2$、 $u_1 - u_2\rangle > 0$。因此，根据 Minty-Browder 定理（见 [3, 定理 5.16]），我们得到算子 W 是可逆的。至此，引理 3.1 得证。 □

类似于 [12], 中引理 3.2 的证明，我们可以证明 $\mathcal{B}^{-1}: (W', \lhd) \to (W, \preceq)$ 是递增的。接下来，受 [14], 的启发，令算子 $\mathcal{T}$： $W \to W'$ 定义为

$$\langle \mathcal{T}u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \Big(\phi_{u^+}|u^+|^{q-2}u^+ + h(x, u^+) + \lambda g(x)\Big)v\mathrm{d}x, \ \text{for all} \ u, v \in W,$$

其中 $u^+ := \max\{u, 0\}$，且 $u^- := -\min\{u, 0\}$.。根据 H¨older 不等式、Sobolev 嵌入定理和 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，存在一些正常数 C^*、 C^{**}和 C^{***}，使得

$$|\langle \mathcal{T}u, v\rangle| \leq \Big(C^*\|u^+\|^{2q-1} + C^{**}\|d_1\|_\eta\|u^+\|^{\tau-1} + C^{***}\|d_2\|_\infty\|u^+\|^{q^*-1} + \lambda\|g\|_{\frac{3q}{4q-3}}\Big)\|v\|. \tag{3.1}$$

令 $\mathcal{G} := \mathcal{B}^{-1} \circ \mathcal{T}$。则有以下结果。

引理 3.2。在定理 1.1 的假设下，对任意 $0 < \lambda \leqslant \lambda_0$，存在 $R > 0$，使得$\mathcal{G}(\mathbb{B}_W[0, R]) \subset \mathbb{B}_W[0, R]$，其中 $\mathbb{B}_W[0, R] = \{u \in W: \ \|u\| \leqslant R\}$。

证明。设 $u \in W, v = (\mathcal{B}^{-1} \circ \mathcal{T})u = \mathcal{G}u$。注意到 $\langle \mathcal{B}v, v\rangle = \|v\|^p_{W^{1,\ p}(\mathbb{R}^3)} + \|v\|^q_{W^{1,\ q}(\mathbb{R}^3)}$。我们考虑以下 3 种可能的情形:
情形 1。$\|v\|_{W^{1,q}(\mathbb{R}^3)} \geq 1$. 于是 $\|v\|^q_{W^{1,q}(\mathbb{R}^3)} \geq \|v\|^p_{W^{1,q}(\mathbb{R}^3)}$, 因此

$$\langle \mathcal{B}v, v\rangle \geqslant \|v\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|v\|^p_{W^{1,q}(\mathbb{R}^3)} \geqslant 2^{1-p}(\|v\|_{W^{1,q}(\mathbb{R}^3)} + \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)})^p = 2^{1-p}\|v\|^p. \tag{3.2}$$

情形 2。$\|v\|_{W^{1,q}(\mathbb{R}^3)}<1$ 且 $\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)}\geq 1$. 于是 $\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)}\geq 1>\|v\|_{W^{1,q}(\mathbb{R}^3)}$。由于 $\|v\|=\|v\|_{W^{1,q}(\mathbb{R}^3)}+\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)}$，我们得到 $2\|v\|_{W^{1,q}(\mathbb{R}^3)}\leq\|v\|\leq 2\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)}$, 因此

$$\langle\mathcal{B}v,v\rangle=\|v\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)}+\|v\|^q_{W^{1,q}(\mathbb{R}^3)}\geqslant\|v\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)}\geqslant\frac{1}{2^p}\|v\|^p. \tag{3.3}$$

情形 3。 $\|v\|_{W^{1,\ q}(\mathbb{R}^3)}<1$ 并且 $\|v\|_{W^{1,\ p}(\mathbb{R}^3)}<1$. 于是 $\|v\|^q_{W^{1,\ p}(\mathbb{R}^3)}\leqslant\|v\|^p_{W^{1,\ p}(\mathbb{R}^3)}$，因此

$$\langle\mathcal{B}v,v\rangle\geqslant\|v\|^q_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)}+\|v\|^q_{W^{1,q}(\mathbb{R}^3)}\geqslant 2^{1-q}(\|v\|_{W^{1,q}(\mathbb{R}^3)}+\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)})^q=2^{1-q}\|v\|^q. \tag{3.4}$$

由 (3.2)、(3.3) 和 (3.4)，可得

$$\langle\mathcal{B}v,v\rangle\geqslant 2^{-p}\|v\|^p\quad\text{or}\quad\langle\mathcal{B}v,v\rangle\geqslant 2^{1-q}\|v\|^q. \tag{3.5}$$

另一方面，我们有

$$\|\mathcal{G}u\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)}+\|\mathcal{G}u\|^q_{W^{1,q}(\mathbb{R}^3)}=\langle\mathcal{T}u,\mathcal{G}u\rangle\leq\|\mathcal{T}u\|_{W'}\|\mathcal{G}u\|. \tag{3.6}$$

若 $\|u\|\leqslant R$，则由 (3.1)、(3.5) 和 (3.6)，可得

$$\begin{aligned}2^{-p}\|\mathcal{G}u\|^{p-1}&\leqslant\|\mathcal{T}u\|_{W'}\leqslant C^*\|u\|^{2q-1}+C^{**}\|d_1\|_\eta\|u\|^{\tau-1}+C^{***}\|d_2\|_\infty\|u\|^{q^*-1}+\lambda\|g\|_{\frac{3q}{4q-3}}\\&\leqslant C^*R^{2q-1}+C^{**}\|d_1\|_\eta R^{\tau-1}+C^{***}\|d_2\|_\infty R^{q^*-1}+\lambda\|g\|_{\frac{3q}{4q-3}}\end{aligned}$$

and

$$2^{1-q}\|\mathcal{G}u\|^{q-1}\leqslant C^*R^{2q-1}+C^{**}\|d_1\|_\eta R^{\tau-1}+C^{***}\|d_2\|_\infty R^{q^*-1}+\lambda\|g\|_{\frac{3q}{4q-3}}.$$

由此可得

$$\frac{\|\mathcal{G}u\|^{p-1}}{R^{p-1}}\leqslant 2^pC^*R^{2q-p}+2^pC^{**}\|d_1\|_\eta R^{\tau-p}+2^pC^{***}\|d_2\|_\infty\|d_2\|_\infty R^{q^*-p}+2^p\lambda\frac{\|g\|_{\frac{3q}{4q-3}}}{R^{p-1}}. \tag{3.7}$$

同样，我们还可以得到

$$\frac{\|\mathcal{G}u\|^{q-1}}{R^{q-1}}\leqslant 2^{q-1}C^*R^q+2^{q-1}C^{**}\|d_1\|_\eta R^{\tau-q}+2^{q-1}C^{***}\|d_2\|_\infty R^{q^*-q}+2^{q-1}\lambda\frac{\|g\|_{\frac{3q}{4q-3}}}{R^{q-1}}. \tag{3.8}$$

现在取 $R>0$ 足够小，使得

$$2^pC^*R^{2q-p}+2^pC^{**}\|d_1\|_\eta R^{\tau-p}+2^pC^{***}\|d_2\|_\infty\|d_2\|_\infty R^{q^*-p}\leqslant\frac{1}{2}$$

and

$$2^{q-1}C^*R^q+2^{q-1}C^{**}\|d_1\|_\eta R^{\tau-q}+2^{q-1}C^{***}\|d_2\|_\infty R^{q^*-q}<\frac{1}{2}.$$

Let

$$\lambda_0:=\min\left\{\frac{R^{p-1}}{2^{p+1}\|g\|_{\frac{3q}{4q-3}}},\ \frac{R^{q-1}}{2^q\|g\|_{\frac{3q}{4q-3}}}\right\}.$$

于是，对于所有 $0<\lambda\leqslant\lambda_0$，由 (3.7) 和 (3.8) 可得 $\|\mathcal{G}u\|\leqslant R$。引理 3.2 得证。

□

定理 1.1 的证明。只需证明 $\mathcal{G}:(W,\preceq)\to(W,\preceq)$ 是一个递增算子，因为由命题 2.1 和引理 3.2，便可得到弱解的存在性。下面证明算子 $\mathcal{T}:(W,\preceq)\to(W',\trianglelefteq)$ 是递增的。事实上，取 $u_1,u_2\in W$，使得 $u_1\leqslant u_2$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上几乎处处成立。根据定理 1.1 中关于 h 的假设以及算子 $\mathcal{T}$ 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{T}u_1,v\rangle&=\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\phi_{u_1^+}|u_1^+|^{q-2}u_1^+ + h(x,u_1^+)+\lambda g(x)\Big)v\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\phi_{u_2^+}|u_2^+|^{q-2}u_2^+ + h(x,u_2^+)+\lambda g(x)\Big)v\mathrm{d}x=\langle\mathcal{T}u_2,v\rangle,\ \text{for all } v\in\mathcal{E}_+.\end{aligned}\tag{3.9}$$

因此，算子 $\mathcal{G}:(W,\preceq)\to(W,\preceq)$ 确实是递增的。由命题 2.1 和引理 3.2 可知，算子 $\mathcal{G}$ 有一个不动点，即存在 $u_0\in B_W[0,R]$ 使得 $\mathcal{G}u_0=u_0$。由于 $\mathcal{G}=\mathcal{B}^{-1}\circ\mathcal{T}$，对于所有 $v\in W$，我们有 $\langle\mathcal{B}u_0,v\rangle=\langle\mathcal{T}u_0,v\rangle$。也就是说，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\nabla v+|u_0|^{p-2}u_0v)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_0|^{q-2}\nabla u_0\nabla v+|u_0|^{q-2}u_0v)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_0^+}|u_0^+|^{q-2}u_0^+v\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\Big(h(x,u_0^+)+\lambda g(x)\Big)v\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{3.10}$$

在（3.10）中令 $v=u_0^-$，可得 $\|u_0^-\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)}+\|u_0^-\|^q_{W^{1,q}(\mathbb{R}^3)}=0$，这意味着 $u_0^-=0$，且其是问题 (1.1) 的非平凡非负弱解。根据众所周知的强最大值原理，u_0 是问题 (1.1) 的一个正解。定理 1.1 的证明至此完成。□

致谢

Song 获得了国家自然科学基金（编号：12001061）、吉林省教育厅科研基金（JJKH20220822KJ）和吉林省自然科学基金（项目编号：YDZJ202201ZYTS582，222614JC010793935）的资助。Repov˘s 获得了斯洛文尼亚研究署项目 P1-0292、J1-4031、J1-4001、N1-0278、N1-0114 和 N1-0083 的资助。我们衷心感谢审稿人提出的宝贵意见和建议。

参考文献

[1] A. Ambrosetti，R. Ruiz，Schr ¨odinger-Poisson 问题的多个束缚态，《当代数学通讯》10 (2008) 391–404。[2] R. Bartolo，A.M. Candela，A. Salvatore，关于定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的一类超线性 (p,q)-Laplacian 型方程，《数学分析及其应用杂志》438 (1) (2016) 29–41。[3] H. Br´ezis，《泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程》，施普林格，纽约，2011。[4] S. Carl，S. Heikkil¨a，通过一种新的不动点定理研究缺乏紧性的椭圆问题，《微分方程杂志》186 (2002) 122–140。[5]T. D'Aprile，D. Mugnai，非线性 Klein-Gordon-Maxwell 方程和 Schr ¨odingerMaxwell 方程的孤立波，《爱丁堡皇家学会学报 A 辑》134 (2004) 893–906。

[6] Y. Du，J. Su，C. Wang，带有 p-Laplacian 的 Schr ¨odinger-Poisson 系统，《应用数学快报》120 (2021) 107286。[7] Y. Du，J.B. Su，C. Wang，关于一个拟线性 Schr ¨odinger-Poisson 系统，《数学分析及其应用杂志》505 (1) (2022) 125446。[8] G.M. Figueiredo，关于一类在 $\mathbb{R}^N$ 上具有临界增长的 p&q 椭圆问题的正解存在性，《数学分析及其应用杂志》378 (2011) 507–518。[9] N.S. Papageorgiou，V.D. Rˇadulescu，D.D. Repovˇs，具有任意增长反应项的双相问题，《应用数学与物理学杂志》69 (4) (2018) 108。[10] D. Ruiz，非线性局部项作用下的 Schr ¨odinger-Poisson 方程，《泛函分析杂志》237 (2006) 655–674。[11] M. deSouza，关于 RN 上一类具有指数增长的非齐次分数阶拟线性方程，《非线性微分方程与应用》22 (2015) 499–511。[12] M. Tao，B. Zhang，通过不动点定理求解非齐次奇异分数阶 p-Laplacian 方程，《复变函数与椭圆方程》(2022) 1–21。https://doi.org/10.1080/17476933.2021.2021894。[13] M. Tao，B. Zhang，具有临界非线性项的非齐次分数阶 (p, q)-Laplacian 系统的解，《非线性分析进展》11 (2022) 1332–1351。[14] M. Tao，B. Zhang，具有给定质量的平面 Schr ¨odinger-Poisson 系统的正解，《应用数学快报》137 (2023) 108488。