arXiv:2302.00265v1 [stat.ME] 1 Feb 2023

自由度大于 2 的 t–变量线性组合的分布拟合

Onel L. A. L´opez[1], Evelio G. Fern´andez[2], and Matti Latva-aho[1]

[1]奥卢大学无线通信中心，芬兰，onel.alcarazlopez@oulu.fi，matti.latva-aho@oulu.fi[2]巴拉那联邦大学电气工程系，巴西，evelio@ufpr.br

摘要

Student's t 随机变量（RV）的线性组合出现在许多统计应用中。遗憾的是，Student's t 分布在卷积下并不封闭，因此，推导 Student's K 随机变量 t线性组合的精确通用分布并不可行，这促使我们采用拟合/近似方法。本文关注的情形是，唯一的约束是每个 t–随机变量的自由度大于二。注意，由于 Student's t 分布的奇数阶矩/累积量为零，且当阶数大于自由度时，偶数阶矩/累积量不存在，因此无法使用基于一阶或高于二阶矩/累积量的传统方法。为解决这一问题，本文利用二阶矩以及一阶绝对矩或特征函数（特征函数），提出将此类分布拟合为缩放后的 Student's t 随机变量分布。对于基于绝对矩的拟合，我们先研究 Student's $K = 2$ 随机变量 t 的线性组合情形，再通过简单的迭代过程将其推广至 $K \geq 2$ 。与此同时，基于特征函数的拟合可直接进行，但其精度（以巴塔恰里亚距离度量衡量）取决于特征函数参数的配置；针对这一点，我们提出了一种简单而准确的方法。数值结果表明，基于特征函数的拟合通常优于基于绝对矩的拟合，且拟合分布的尺度参数和自由度均随 K近似线性增长。

关键词：线性组合、随机变量、分布拟合、Student's t、绝对矩、特征函数、巴塔查里亚距离

1 引言

Student's t 分布出现在众多情形中，例如：当样本数量相对较少且总体方差未知时，用于估计正态分布总体的均值；以及在正态族数据的贝叶斯分析中。此外，这种分布还在许多相关统计分析中发挥着关键作用，包括用于评估两个样本均值之差的统计显著性的 Student's t 检验、构建两个总体均值之差的置信区间，以及线性回归分析 [1–6]。

Student's t 分布的一个显著特性是其重尾。这种现象在著名的稳定分布族中也能观察到；然而，Student'st 分布在解析上更易处理，因此例如可以明确写出其似然函数 [1]。

1.1 Student's t 分布的主要统计量

自由度为 $\nu \in \mathbb{R}^+$ 的 Student's t 随机变量（RV） T （即 $T \sim \mathcal{T}(\nu)$）的概率密度函数（PDF）和累积分布函数（CDF）由 [6] 给出

$$f_T(x) = \alpha_\nu \Big(1 + \frac{x^2}{\nu}\Big)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \tag{1}$$

$$F_T(x) = 1 - \frac{1}{2}\mathcal{I}_{\frac{\nu}{x^2+\nu}}\Big(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\Big), \tag{2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$，其中 $\mathcal{I}_x(\cdot,\cdot)$ 是正则化不完全贝塔函数 [7, eq. (8.17.2)], and

$$\alpha_\nu \triangleq \frac{1}{\sqrt{\nu} B\big(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\big)} = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\nu\pi}}. \tag{3}$$

这里， $B(\cdot,\cdot)$ 和 $\Gamma(\cdot)$ 分别是贝塔 [7, eq. (5.12.1)] and 伽马 [7, eq. (5.2.1)] 函数。同时，整数阶矩为 [6]

$$\mathbb{E}[T^m] = \nu^{m/2} \prod_{i=1}^{m/2} \frac{2i-1}{\nu-2i}, \ m \text{ even}, \ m < \nu, \tag{4}$$

而当 $\mathbb{E}[T^m] = 0$ 为奇数时， m 阶及更高阶的矩不存在。注意，对于 ν （二阶矩）这一特例，(4) 可简化为 $m = 2$ (ν/)。

我们提出的方法中有两个起关键作用的统计量：绝对矩和特征函数（CF）。后者定义为 [6]

$$\mathrm{CF}_T(r) = \mathbb{E}[e^{i|r|T}] = \frac{(\sqrt{\nu}|r|)^{\nu/2} K_{\nu/2}(\sqrt{\nu}|r|)}{2^{\nu/2-1}\Gamma(\nu/2)}, \ \nu > 0, \tag{5}$$

其中， $K_\nu(\cdot)$ 是 ν [7, 阶第二类修正贝塞尔函数（见第 10.25] 节）。[1]与此同时，绝对矩可按如下方式求得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[|T|^m\big] &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^m f_T(x)\mathrm{d}x \\
&\overset{(a)}{=} 2\alpha_\nu \int_0^\infty x^m \Big(1+\frac{x^2}{\nu}\Big)^{-(\nu+1)/2} \mathrm{d}x \\
&\overset{(b)}{=} \frac{\alpha_\nu \nu^{\frac{m+1}{2}} \Gamma\big(\frac{\nu-m}{2}\big)\Gamma\big(\frac{m+1}{2}\big)}{\Gamma((\nu+1)/2)} \ (\text{for } m<\nu) \\
&\overset{(c)}{=} \frac{\nu^{m/2}\Gamma\big(\frac{\nu-m}{2}\big)\Gamma\big(\frac{m+1}{2}\big)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu/2)}, \ m < \nu,
\end{aligned} \tag{6}$$

其中，(a) 利用了 T 关于零点的对称性，并代入了 (1)；(b) 利用 [8, 式 (3.241.4)] 求解定积分；(c) 则是在代入 (3) 后经过简单的代数变换得到。

1.2 关于 Student's t 随机变量的线性组合

Student t 随机变量的线性组合，记作

$$Z \triangleq \sum_{i=1}^{K} \sigma_i T_i, \tag{7}$$

[1]注意，特征函数$_T(r) \in \mathbb{R}$，而 T 的矩母函数不存在。

其中 $T_i \sim \mathcal{T}(\nu_i)$ 且（不失一般性） $\sigma_i > 0$，在许多统计应用中都会出现。例如，

- Fairweather [9] 提出了一种基于枢轴量 Z 的方法，用于获得多个正态总体共同均值的精确置信区间。请注意，在许多实际应用中，都存在这样的问题：如何刻画从具有共同均值但方差可能不同的不同正态总体中收集的独立样本的分布。例如，使用不同的仪器/方法/实验室测量物质或产品，以评估其平均质量 [10];

- 用于检验两个方差未知的正态总体均值是否相等的检验统计量，其贝伦斯-费希尔分布是两个独立 Student's t随机变量线性组合的分布。这个问题出现在许多传统统计问题中，例如参见 [3, 11–13];

- 随机变量的分布 T_i 可以近似其他重尾对称分布，例如 $X/Y \,|\, Y \geq y_0$，其中 X 和 Y 分别服从高斯分布和瑞利分布。在这类情形下，它们的线性组合分布 Z 可能极具价值。有趣的是，形如 $X/Y \,|\, Y \geq y_0$ 的随机变量之和出现在 [14], 提出的场景中，其目标是通过协调导频传输，在不产生大量信令开销的情况下确定机器类无线通信网络中的活跃设备数量，从而便于后续的数据解码。

遗憾的是，Student 的 t分布在卷积 [15], 下并不封闭，因此，推导 Z 的精确分布一直是一项繁琐的工作，尤其是

当自由度 ν_i 和加项数量 K任意时。例如， [2–5, 15] 中提出的方法仅适用于所有 T_is 的自由度均为奇数的情况。与此同时， Z 的概率密度函数在 [16] 中以无穷级数的形式给出，但仅适用于 $K = 2$这一特定情况。

一般而言，近似方法往往更易处理，也更具吸引力，这正是本文开展这项工作的动机。具体而言，在 $\{T_i\}$ 相互独立且具有 $\nu_i > 2$、 $\forall i$的条件下，且不作其他约束，我们旨在以闭式形式准确近似 Z 的分布。[2] 据我们所知，这是首项（令人满意地）解决这一问题的研究。

1.3 我们的方法

对于近似，我们采用 Student's t 分布拟合。具体而言，我们旨在用 $\nu_z > 2$准确拟合 $Z \sim \sigma_z \mathcal{T}$（$\nu_z$）；至少从直观上看，这应该可行，因为这两种分布具有相同的对称钟形曲线。然而，若考虑到 Student'st 分布的自由度大于二且不受其他约束，这种看似简单直接的方法其实并非如此。下面对此作进一步阐述。

分布拟合方法通常依赖于矩（包括 L–矩[17]）或累积量匹配。具体而言，需要将 Z 的至少两个矩和/或累积量与缩放后的 Student's t 分布相应的矩和/或累积量进行匹配，因为此类分布仅由尺度参数 σ_z和自由度 ν_z决定。然而，难点在于， ν_z （以及每个 ν_i）都必须大于矩/累积量的阶数，而 i）奇数阶矩/累积量无法使用，因为它们为零；ii）[2] Th

e 假设 tion that RVs $\{T_i\}$ are independent is 常见 in the literat ure, 例如, [2, 4, 6] .

负阶矩不收敛，因为 $f_Z(0) > 0$。这意味着：i）为了使 $\nu_z \in (2, \infty)$ 成立，我们无法拟合高于 2 阶的矩/累积量；ii）我们无法依赖一阶矩/累积量。与此同时，可以使用分数阶矩，但它们通常较为复杂，难以计算。

在这项工作中，我们采用基于二阶矩匹配并结合绝对矩匹配或特征函数匹配的方法进行拟合，以规避上述问题。鉴于二阶矩匹配简单易行，采用这种方法是很自然的选择，而利用绝对矩似乎也颇具吸引力。然而，尽管可以使用任意阶的绝对矩，$\mathbb{E}[|\cdot|^m]$，其中 $m \in \mathbb{R}, m < \nu$，但由于和的绝对值难以分离，推导这些矩颇为繁琐，因此我们聚焦于最简单的 $m = 1$ 情形。最后，特征函数匹配的表现值得关注，因为在文献中，它并非分布拟合问题的常用方法，尤其是因为通常可以获得矩或其他更简单的统计量；鉴于所考虑问题的特殊特征与挑战，我们在此采用这种方法。

2 Z相关统计量的计算

2.1 二阶矩

因此，Z 的二阶矩为

$$\mathbb{E}[Z^2] = \sum_{i=1}^{K} \mathbb{E}[T_i^2] = \sum_{i=1}^{K} \frac{\sigma_i^2 \nu_i}{\nu_i - 2}, \tag{8}$$

这源于利用了 $\{T_i\}$ 的独立性和零均值特性，并结合 $m = 2$ 使用了式 (4)。

2.2 特征函数

独立随机变量之和的特征函数等于各自独立特征函数的乘积，因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{CF}_Z(r) &= \prod_{i=1}^{K} \mathrm{CF}_{\sigma_i T_i}(r) = \prod_{i=1}^{K} \mathrm{CF}_{T_i}(\sigma_i r) \\ &= \prod_{i=1}^{K} \frac{(\sqrt{\nu_i}\sigma_i|r|)^{\nu_i/2} K_{\nu_i/2}(\sqrt{\nu_i}\sigma_i|r|)}{2^{\nu_i/2-1}\Gamma(\nu_i/2)},\ \forall \nu_i > 0 \\ &= 2^K (|r|/2)^{\sum_{i=1}^K \nu_i/2} \prod_{i=1}^{K} \frac{(\sqrt{\nu_i}\sigma_i)^{\nu_i/2} K_{\nu_i/2}(\sqrt{\nu_i}\sigma_i|r|)}{\Gamma(\nu_i/2)},\ \forall \nu_i > 0. \end{aligned} \tag{9}$$

2.3 绝对矩

Z 的绝对矩满足

$$\mathbb{E}[|Z|] = \mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{K} \sigma_i T_i\right|\right]. \tag{10}$$

值得注意的是，进一步简化式（10）并非易事。此外，其计算复杂度随 K 增长。因此，我们重点研究 $K = 2$ 的情况，但在第 4 节中利用相应结果对任意 $K \geq 2$ 个随机变量的线性组合进行分布拟合。

$K = 2$ 情况下的绝对矩可按如下方式计算

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|Z|] &= \mathbb{E}\big[|\sigma_1 T_1 + \sigma_2 T_2|\big] \\ &\overset{(a)}{=} 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\sigma_2 x_2}{\sigma_1}}^{\infty} (\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2) f_{T_1}(x_1) f_{T_2}(x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\ &\overset{(b)}{=} 2\sigma_1 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\frac{\sigma_2|x_2|}{\sigma_1}}^{\infty} x_1 f_{T_1}(x_1) f_{T_2}(x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2}_{I_1} + 2\sigma_2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\sigma_2 x_2}{\sigma_1}}^{\infty} x_2 f_{T_1}(x_1) f_{T_2}(x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2}_{I_2}, \end{aligned} \tag{11}$$

其中在 (a) 中，我们利用了 $\sigma_1 T_1 + \sigma_2 T_2$ 关于 0 对称这一事实，因此它取正值和负值的概率均为 0.5。接着，(b) 是通过应用

积分算子分别作用于被积函数的各个加项，并利用 $\int_{-a}^{a} x_1 f_{T_1}(x_1)\mathrm{d}x_1 = 0$ 的对称性得到的。现在，注意到 $\mathbb{E}[|Z|] = 2(\sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2)$，我们需要计算 I_1 和 I_2。

在 I_1 的情况下，我们有

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\sigma_2|x_2|/\sigma_1}^{\infty} x_1 f_{T_1}(x_1) f_{T_2}(x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\ &\overset{(a)}{=} \frac{2\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\nu_1}{\nu_1 - 1}\int_0^{\infty}\Big(1 + \frac{x_2^2\sigma_2^2}{\nu_1\sigma_1^2}\Big)^{\frac{1-\nu_1}{2}}\Big(1 + \frac{x_2^2}{\nu_2}\Big)^{-\frac{\nu_2+1}{2}}\mathrm{d}x_2 \\ &\overset{(b)}{=} \frac{\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}B(\frac{1}{2}, \frac{\nu_1+\nu_2-1}{2})}{(\nu_1-1)\nu_1^{-3/2}\sigma_2/\sigma_1}\ {}_2F_1\Big(\frac{\nu_2+1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\nu_1+\nu_2}{2}, 1 - \frac{\nu_1\sigma_1^2}{\nu_2\sigma_2^2}\Big), \end{aligned} \tag{12}$$

其中，(a) 是通过 [8,eq. (2.27.7)]，求解内积分得到的，而我们利用 [8, eq. (3.259.3)] 求解 (b) 中剩余的积分。

在 I_2 的情况下，我们有

$$\begin{aligned} I_2 &\overset{(a)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x_2\big(1 - F_{T_1}(-\sigma_2 x_2/\sigma_1)\big) f_{T_2}(x_2)\mathrm{d}x_2 \\ &\overset{(b)}{=} -\int_{-\infty}^{0} x_2 F_{T_1}(-\sigma_2 x_2/\sigma_1) f_{T_2}(x_2)\mathrm{d}x_2 - \int_0^{\infty} x_2 F_{T_1}(-\sigma_2 x_2/\sigma_1) f_{T_2}(x_2)\mathrm{d}x_2 \\ &\overset{(c)}{=} \int_0^{\infty} x_2 F_{T_1}(\sigma_2 x_2/\sigma_1) f_{T_2}(x_2)\mathrm{d}x_2 - \int_0^{\infty} x_2\big(1 - F_{T_1}(\sigma_2 x_2/\sigma_1)\big) f_{T_2}(x_2)\mathrm{d}x_2 \\ &\overset{(d)}{=} \underbrace{2\int_0^{\infty} x_2 F_{T_1}\Big(\frac{\sigma_2 x_2}{\sigma_1}\Big) f_{T_2}(x_2)\mathrm{d}x_2}_{I_{2,2}} - \underbrace{\int_0^{\infty} x_2 f_{T_2}(x_2)\mathrm{d}x_2}_{I_{2,1}}, \end{aligned} \tag{13}$$

其中，(a) 由累积分布函数的定义得出；(b) 则利用了 $\int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{T_2}(x_2)\mathrm{d}x_2 = 0$，随后对积分区域进行划分，以便相应地固定 x_2 的符号。结合 T_1 的对称性，利用上述划分得到 (c)；而 (d) 则可通过简单的代数变换立即得到。注意，$I_2 = 2I_{2,\,2} - I_{2,\,1}$，其中 I_1 和 I_2 需要按照式 (13) 进行积分计算。幸运的是，如下所述，它们的计算还可以进一步简化。

当 $I_{2,\ 1}$ 时，我们有

$$I_{2,1} = \frac{\sqrt{\nu_2}\Gamma((\nu_2-1)/2)}{2\Gamma(\nu_2/2)\sqrt{\pi}}, \tag{14}$$

这来自于使用 [8, 式 (3.241.4)]。与此同时，

$$\begin{aligned} I_{2,2} &= \int_0^\infty x_2 F_{T_1}(\sigma_2 x_2/\sigma_1) f_{T_2}(x_2)\mathrm{d}x_2 \\ &\overset{(a)}{=} \int_0^\infty x_2 \left(1 - \frac{1}{2}\mathcal{I}_{\frac{\nu_1}{\frac{\sigma_2^2 x_2^2}{\sigma_1^2}+\nu_1}}\left(\frac{\nu_1}{2},\frac{1}{2}\right)\right) f_{T_2}(x_2)\mathrm{d}x_2 \\ &\overset{(b)}{=} \int_0^\infty x_2 f_{T_2}(x_2)\mathrm{d}x_2 - \frac{\alpha_{\nu_2}}{2}\underbrace{\int_0^\infty x_2 \mathcal{I}_{\frac{\nu_1}{\frac{\sigma_2^2 x_2^2}{\sigma_1^2}+\nu_1}}\left(\frac{\nu_1}{2},\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{x_2^2}{\nu_2}\right)^{-\frac{\nu_2+1}{2}}\mathrm{d}x_2}_{I'_{2,2}} \\ &\overset{(c)}{=} I_{2,1} - \frac{\alpha_{\nu_2}}{2} I'_{2,2}, \end{aligned} \tag{15}$$

其中，(a) 来自代入 (2)，(b) 是通过重新排列各项得到的，而 (c) 则是利用 (14) 得到的。

现在，为了简化 $I'_{2,\ 2}$，我们引入如下变量变换

$$z^2 \triangleq \frac{\nu_1}{\sigma_2^2 x_2^2/\sigma_1^2 + \nu_1} \quad \to \quad x_2^2 = \frac{\nu_1\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\Big(\frac{1}{z^2} - 1\Big), \tag{16}$$

因此，$x_2\mathrm{d}x_2 = -\frac{\nu_1\sigma_1^2}{\sigma_2^2 z^3}\mathrm{d}z$。接下来，

$$I'_{2,2} = \omega_1 \int_0^1 z^{-3}\mathcal{I}_{z^2}\left(\frac{\nu_1}{2},\frac{1}{2}\right)\left(\omega_2 + \frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{\nu_2+1}{2}}\mathrm{d}z, \tag{17}$$

其中 $\omega_1, \left(\frac{\nu_1\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)^{-\frac{\nu_2-1}{2}}\nu_2^{\frac{\nu_2+1}{2}}, \omega_2, \frac{\nu_2\sigma_2^2}{\nu_1\sigma_1^2} - 1$。现在，我们利用不完全正则化贝塔函数 [18] 的泰勒级数展开来写出

$$I_{z^2}\Big(\frac{\nu_1}{2},\frac{1}{2}\Big) = \frac{2}{\sqrt{\pi}B\big(\frac{\nu_1}{2},\frac{1}{2}\big)}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^{\nu_1+2i}\Gamma(1/2+i)}{(\nu_1+2i)i!}. \tag{18}$$

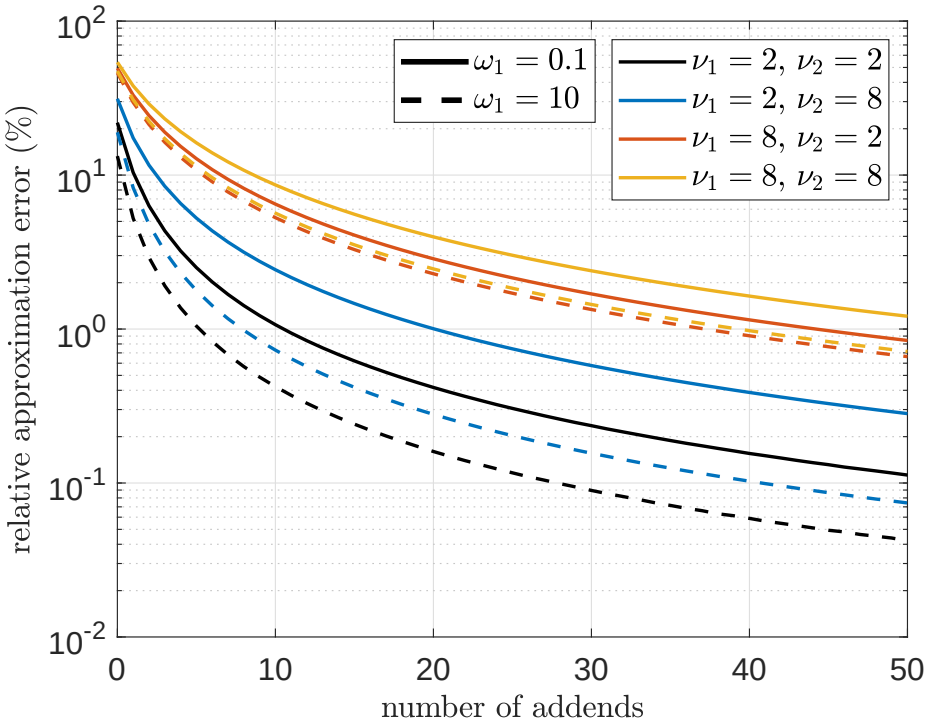

图1：根据（19）使用有限个加项计算 $I'_{2,\ 2}$ 的精度。

然后，将 (18) 代入 (17)，得到

$$
\begin{aligned}
I'_{2,2} &= \frac{2\omega_1/\sqrt{\pi}}{B\left(\frac{\nu_1}{2},\frac{1}{2}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\right)}{(\nu_1+2i)i!} \int_0^1 \frac{\left(\omega_2+\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{\nu_2+1}{2}}}{z^{3-\nu_1-2i}} \mathrm{d}z \\
&\overset{(a)}{=} \frac{\omega_1/\sqrt{\pi}}{B\left(\frac{\nu_1}{2},\frac{1}{2}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\right)}{(\nu_1+2i)i!} \int_0^1 \frac{\left(y\omega_2+1\right)^{-\frac{\nu_2+1}{2}}}{y^{\frac{3-\nu_1-\nu_2-2i}{2}}} \mathrm{d}y \\
&\overset{(b)}{=} \frac{2\omega_1}{\sqrt{\pi}B\left(\frac{\nu_1}{2},\frac{1}{2}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right)\ {}_2F_1\left(\frac{\nu_2+1}{2},\frac{\nu_1+\nu_2+2i-1}{2},\frac{\nu_1+\nu_2+2i+1}{2},-\omega_2\right)}{(\nu_1+2i)(\nu_1+\nu_2+2i-1)i!},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

其中，(a)是通过运用变量变换 $y = z^2$得到的，而(b)中的积分则借助 [8, eq. (3.197.8)] 求解。随后，通过截断式（19）中的无穷级数，可以轻松估算$I'_{2,\ 2}$ 。如图1所示，相对近似误差按幂律衰减，因此只需较少的加项，尤其是在 ν_2、 ν_1较小且 ω_2较大时。

结合（12）、（13）、（14）、（15）和（19），并将它们代入（11），可得

$$\mathbb{E}[|Z|] = \frac{B(\frac{1}{2}, \frac{\nu_1+\nu_2-1}{2})\ {}_2F_1\Big(\frac{\nu_2+1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\nu_1+\nu_2}{2}, 1-\frac{\nu_1\sigma_1^2}{\nu_2\sigma_2^2}\Big)}{(\nu_1-1)\nu_1^{-3/2}\sigma_2/\big(2\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\sigma_1^2\big)} + \frac{\sigma_2\Gamma(\frac{\nu_2-1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_2}{2})\sqrt{\frac{\pi}{\nu_2}}} - \frac{4\alpha_{\nu_2}\sigma_2\omega_1}{\sqrt{\pi}B\big(\frac{\nu_1}{2}, \frac{1}{2}\big)} \times \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma\big(i+\frac{1}{2}\big)\ {}_2F_1\big(\frac{\nu_2+1}{2}, \frac{\nu_1+\nu_2+2i-1}{2}, \frac{\nu_1+\nu_2+2i+1}{2}, -\omega_2\big)}{(\nu_1+2i)(\nu_1+\nu_2+2i-1)i!}. \tag{20}$$

2.4 特例：独立同分布的 Student's t 随机变量之和

这里，我们考虑独立同分布的 Student's t 随机变量之和这一特例，即 $\sigma_i = \sigma, \nu_i = \nu$, $\forall i = 1, \cdots, K$。有了这一结果，$\mathbb{E}[Z^2]$、特征函数 $_Z(r)$ 和 $\mathbb{E}[|Z|]$（对于 $K = 2$）的计算便可更容易地按如下方式得到。

在此条件下，(8) 和 (9) 可直接简化为

$$\mathbb{E}[Z^2] = \frac{\sigma\nu K}{\nu-2}, \tag{21}$$

$$\mathrm{CF}_Z(r) = \mathrm{CF}_T^K(\sigma r) = \left[\frac{(\sqrt{\nu}\sigma|r|)^{\nu/2}K_{\nu/2}(\sqrt{\nu}\sigma|r|)}{2^{\nu/2-1}\Gamma(\nu/2)}\right]^K. \tag{22}$$

至于 $\mathbb{E}[|Z|]$ 对于 $K = 2$，其中 $\mathbb{E}[|Z|] = 2\sigma(I_1 + I_{2,1} - \alpha_\nu I'_{2,2})$，可从 (12) 中的 (a) 出发，写为

$$I_1 = \frac{2\alpha_\nu^2\nu}{\nu-1}\int_0^\infty \Big(1+\frac{x_2^2}{\nu}\Big)^{-\nu}\mathrm{d}x_2 = \frac{\Gamma\Big(\frac{\nu-1}{2}\Big)\Gamma\Big(\nu-\frac{1}{2}\Big)}{2^\nu\Gamma(\nu/2)^3\nu^{-1/2}}, \tag{23}$$

该式利用了 [8, 公式 (3.251.2)]和 (3)，随后进行了简单的代数化简。同时，(14) 可直接用于 ν 而非 ν_2。现在，从 (17) 出发即可计算 (19)：

$$\begin{aligned} I'_{2,2} &= \nu\int_0^1 z^{\nu-2}\mathcal{I}_{z^2}\Big(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\Big)\mathrm{d}z \\ &\overset{(a)}{=} \frac{\Gamma\big(\frac{\nu+1}{2}\big)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi}}\int_0^1 x^{\nu-3/2}\ {}_2F_1\Big(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, 1+\frac{\nu}{2}, x\Big)\mathrm{d}x \\ &\overset{(b)}{=} \frac{\nu}{\nu-1}\left(1-\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\big(\nu-\frac{1}{2}\big)}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu/2)^2}\right), \end{aligned} \tag{24}$$

其中，(a) 是根据 [7, 公式 (8.17.7)] 将正则化不完全贝塔函数表示为超几何函数，并利用 x , $z^2 \to \mathrm{d}x = 2z\mathrm{d}z$得到的；(b) 则是利用 [19] 并结合迭代分部积分得到的。最后，综合上述结果，可得

$$\mathbb{E}[|Z|] = \frac{\sigma\sqrt{\nu}\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}{2^{\nu-2}\Gamma(\nu/2)^3}. \tag{25}$$

3 分布拟合

接下来，我们采用两种不同的分布拟合方法。第一种方法基于匹配二阶矩和绝对矩，而第二种方法则基于匹配二阶矩和某个 r 的特征函数（CF）。我们还将说明它们的精度。

3.1 基于二阶矩和绝对矩的拟合

根据 （4）中的 $m = 2$ 和（6）中的 $m = 1$，需要求解的方程组为

$$\left\{ \frac{\sigma_z^2\nu_z}{\nu_z - 2} = \mathbb{E}[Z^2], \qquad \frac{\sigma_z\sqrt{\nu_z}\Gamma((\nu_z-1)/2)}{\Gamma(\nu_z/2)\sqrt{\pi}} = \mathbb{E}[|Z|] \right\} \tag{26}$$

其变量为 $\{\sigma_z, \nu_z\}$。回想一下， $\mathbb{E}[Z^2]$ 由（8）给出，而在 $K = 2$ 的情况下， $\mathbb{E}[|Z|]$ 由（20）给出。通过在第一个方程中分离出 σ_z ，即 $\sigma_z = \sqrt{}$（ν_z ~~$- 2)\ \mathbb{E}[Z^2]/\nu_z,$~~ 并将其代入第二个方程，方程组（26）转换为

$$h(\nu_z) \triangleq \frac{\Gamma((\nu_z-1)/2)\sqrt{\nu_z-2}}{\Gamma(\nu_z/2)} = \frac{\sqrt{\pi}\mathbb{E}[|Z|]}{\sqrt{\mathbb{E}[Z^2]}}. \tag{27}$$

注意到，对于式 (27) 中的 ν_z ，求得精确的闭式解并不可行，因此我们采用 $h(\nu_z)$ 的低复杂度近似。为此，我们绘制了 $h(\nu_z)$ 与 ν_z 的关系图，如图2所示，并发现 $h(\nu_z)$ 近似呈现为两个线性函数的商的形式。

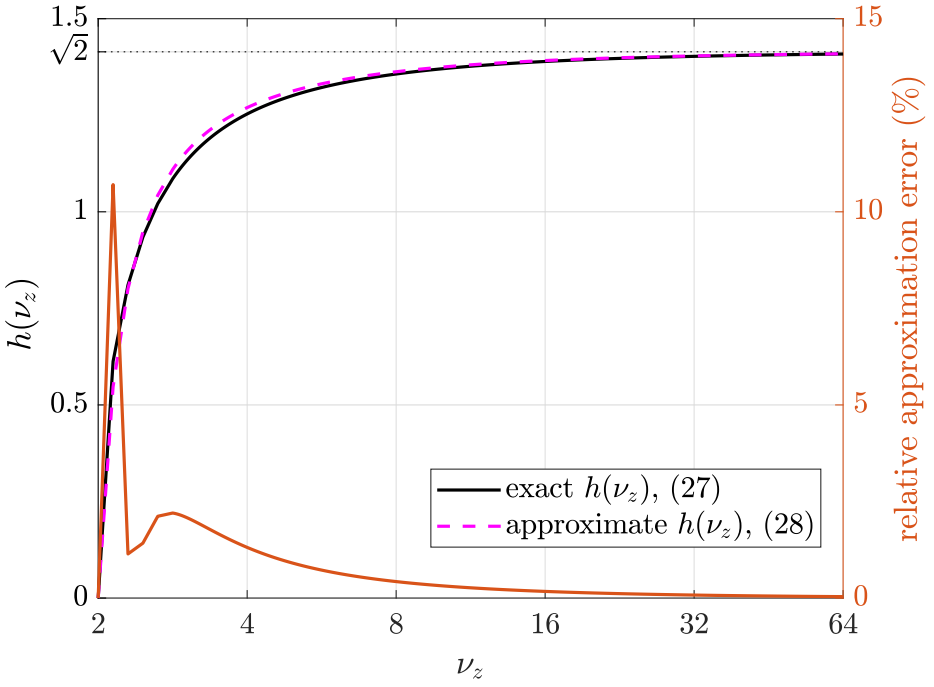

图2：式（28）中给出的 $h(\nu_z)$ 近似计算的精度。

因此，我们表述如下：

$$h(\nu_z) \approx \frac{p_1 \nu_z + p_2}{\nu_z + p_3}. \tag{28}$$

这里，我们知道 $h(2) = 0$，并且

$$\lim_{\nu_z \to \infty} h(\nu_z) = \lim_{\nu_z \to \infty} \frac{\Gamma((\nu_z - 1)/2)\sqrt{\nu_z - 2}}{\Gamma(\nu_z/2)} \overset{(a)}{=} \lim_{\nu_z \to \infty} \sqrt{\frac{2(\nu_z - 2)}{\nu_z}} = \sqrt{2}, \tag{29}$$

其中，(a) 来自使用 [7, eq. 5.11.12]。然后，为满足这些条件，我们可以直接将 p_1 and p_2 设置如下

$$\lim_{\nu_z \to \infty} h(\nu_z) = p_1 = \sqrt{2}, \tag{30}$$

$$h(2) = \frac{2p_1 + p_2}{2 + p_3} = 0 \to 2p_1 + p_2 = 0 \to p_2 = -2\sqrt{2}, \tag{31}$$

其中，式 (31) 的最后一步用到了式 (30) 的结果。最后，通过标准曲线拟合即可轻松求得 $p_3 = -\sqrt{3}$ 。式 (28) 的精度也显示在图2中。

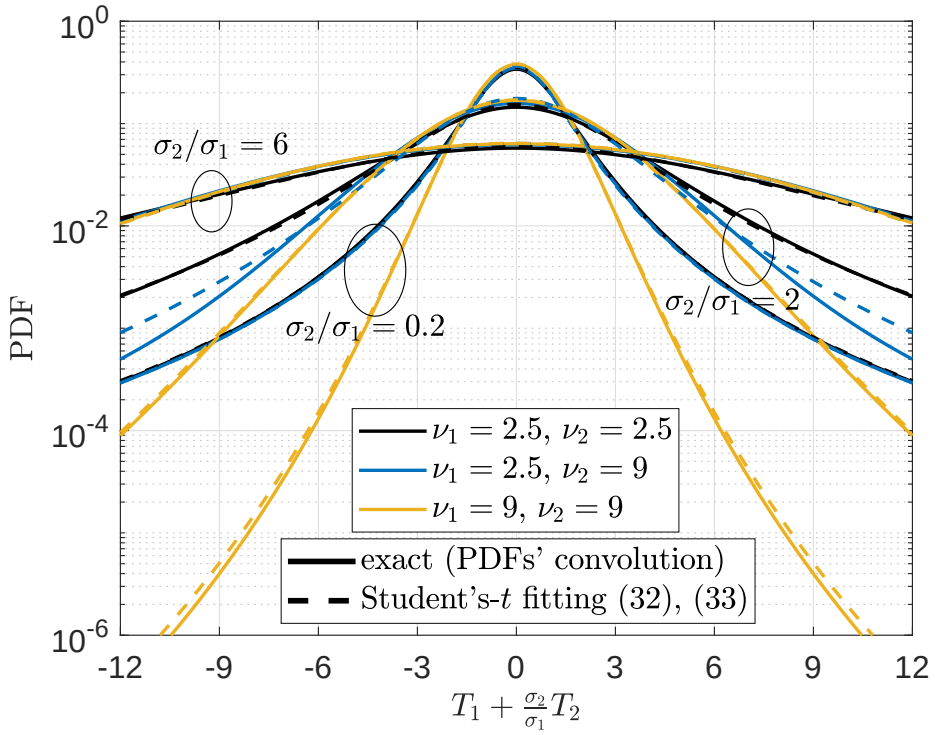

图 3：两个 Student's t 随机变量线性组合的概率密度函数。

有了式 (28)，即可估计 ν_z 和 σ_z：

$$\nu_z^\star \approx \frac{\pi\mathbb{E}[|Z|] - 2\sqrt{2\mathbb{E}[Z^2]}}{\sqrt{\pi}\mathbb{E}[|Z|] - \sqrt{2\mathbb{E}[Z^2]}}, \tag{32}$$

$$\sigma_z^\star \approx \sqrt{\frac{(\pi - 2\sqrt{\pi})\mathbb{E}[|Z|]\mathbb{E}[Z^2]}{\pi\mathbb{E}[|Z|] - 2\sqrt{2\mathbb{E}[Z^2]}}}, \tag{33}$$

并使用近似式 $Z \sim \sigma_z^\star \mathcal{T}(\nu_z^\star)$。图 3 展示了这种分布拟合，证明了我们的方法是恰当的。总的来说，拟合精度似乎只在分布尾部受到影响；考虑到拟合时仅使用了子分布的两个（低阶）特征，这一结果是预期之中的。尽管如此，即使在尾部区域，精度也出乎意料地高；只有当子分布的自由度和缩放因子朝相反方向显著偏离时，精度才会受到严重影响，例如较小的 ν_1, σ_2 和较大的 ν_2, σ_1。

3.1.1 $K > 2$ Student's t 随机变量的线性组合

请注意，如果一个缩放后的 Student's t 分布能够精确拟合 $K = 2$ 个 Student's t 随机变量的线性组合的分布，那么这种 Student's t 拟合方法也适用于任意 $K \geq 2$ 个 Student's t 随机变量的线性组合。通过以下归纳法即可轻松证明这一点。

根据上一小节的结果，我们可以得出

$$\sigma_1 T_1 + \sigma_2 T_2 \sim \sigma_{z_2} \mathcal{T}(\nu_{z_2}) \tag{34}$$

近似成立。这里，$\sigma_{z_n} = g_1(\sigma_1, \cdots, \sigma_n, \nu_1, \cdots, \nu_n)$ 和 $\nu_{z_n} = g_2(\sigma_1, \cdots, \sigma_n, \nu_1, \cdots, \nu_n)$，其中 $g_1(\cdot)$ 和 $g_2(\cdot)$ 是变换函数（在 $n = 2$ 的特定情形下由 (32) 和 (33) 给出）。接着，假设 $\sum_{i=1}^{K} \sigma_i T_i \sim \sigma_{z_K} \mathcal{T}(\nu_{z_K})$，并注意到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{K+1} \sigma_i T_i &= \sigma_{K+1} \underbrace{T_{K+1}}_{\mathcal{T}(\nu_{K+1})} + \underbrace{\sum_{i=1}^{K} \sigma_i T_i}_{\sigma_{z_K} \mathcal{T}(\nu_{z_K})} \\ &\sim \underbrace{g_1(\sigma_{z_K}, \sigma_{K+1}, \nu_{z_K}, \nu_{K+1})}_{\sigma_{z_{K+1}}} \mathcal{T}\Big(\underbrace{g_1(\sigma_{z_K}, \sigma_{K+1}, \nu_{z_K}, \nu_{K+1})}_{\nu_{z_{K+1}}} \Big). \end{aligned} \tag{35}$$

由此即可证明该假设。

综上，$K \geq 2$ Student's t 随机变量的线性组合近似服从 $\sigma_{z_K} \mathcal{T}(\nu_{z_K})$，其中 σ_{z_K}，ν_{z_K} 可通过迭代求得：

$$\sigma_{z_{i+1}} = g_1(\sigma_{z_i}, \sigma_{i+1}, \nu_{z_i}, \nu_{i+1}), \tag{36}$$

$$\nu_{z_{i+1}} = g_2(\sigma_{z_i}, \sigma_{i+1}, \nu_{z_i}, \nu_{i+1}), \tag{37}$$

$\forall i \geq 1$，其中 $\sigma_{z_1} = \sigma_1$、$\nu_{z_1} = \nu_1$ 和 $g_1(\sigma_1, \sigma_2, \nu_1, \nu_2)$、$g_2(\sigma_1, \sigma_2, \nu_1, \nu_2)$ 分别由式 (32) 和 (33) 给出，可利用式 (8)、(20) 计算。多次仿真实验验证了该方法的精度；图 4 以一组分布参数为例进行了展示。

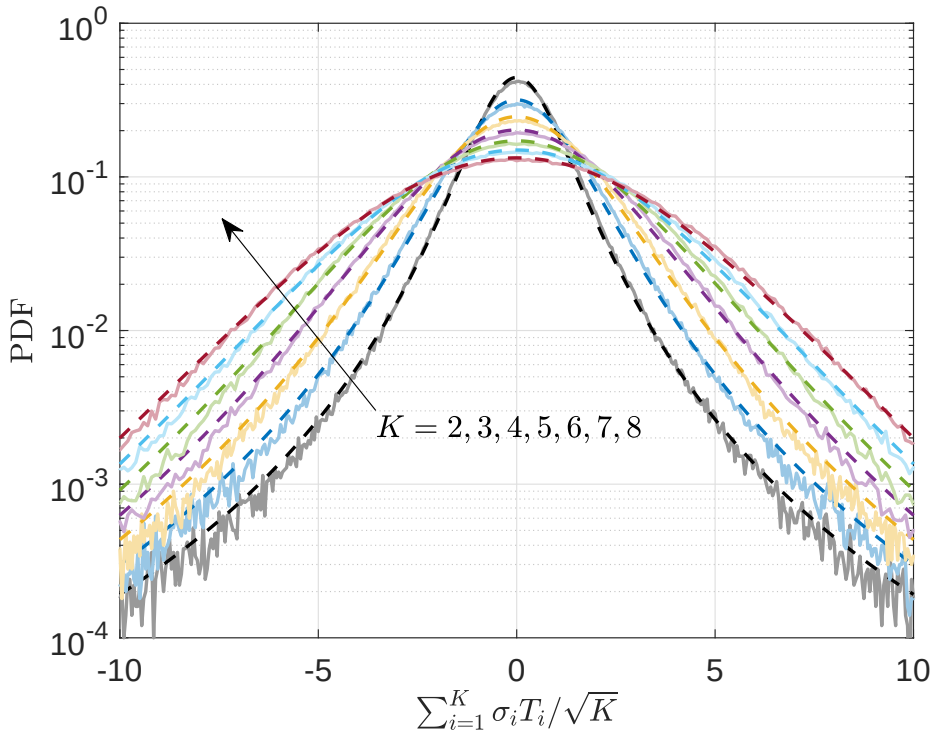

图 4: K Student's t 随机变量线性组合的概率密度函数（已归一化）。我们令 $\sigma_i = i/2$ 和 $\nu_i = 2 + i/2.$。实线表示通过蒙特卡罗模拟得到的经验概率密度函数，虚线表示我们提出的基于二阶矩和绝对矩匹配的 Student's t 分布拟合。

3.2 基于二阶矩和特征函数的拟合

根据带有 $m = 2$ 的式 (4) 和式 (5)，需要求解的方程组为

$$\left\{ \frac{\sigma_z^2 \nu_z}{\nu_z - 2} = \mathbb{E}[Z^2], \qquad \frac{(\sqrt{\nu_z}\sigma_z|r|)^{\nu_z/2} K_{\nu_z/2}(\sqrt{\nu_z}\sigma_z|r|)}{2^{\nu_z/2-1}\Gamma(\nu_z/2)} = \mathrm{CF}_Z(r) \right\} \tag{38}$$

其中变量为 $\{\sigma_z, \nu_z\}$。回顾一下，$\mathbb{E}[Z^2]$ 由（8）给出，而特征函数$_Z(r)$由（9）给出。与第 3.1 节一样，我们首先在第一个方程中将 σ_z 单独移到一边，即 ~~$\sigma_z = \sqrt{(\nu_z - 2)}$~~ $\mathbb{E}[Z^2]/\nu_z$，然后将其代入第二个方程。这样，方程组（38）

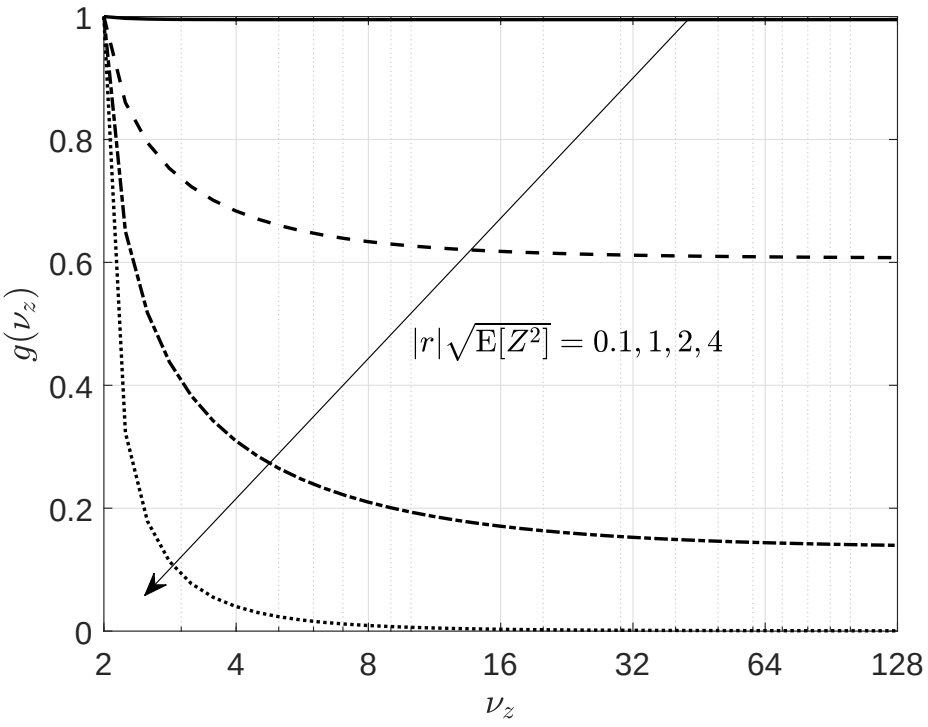

图 5： $g(\nu_z)$ 与 ν_z （ $|r|\sqrt{\mathbb{E}[Z^2]} \in \{0.1, 1, 2, 4\}$）。

变为

$$g(\nu_z) \triangleq \frac{\left(|r|\sqrt{(\nu_z-2)\mathbb{E}[Z^2]}\right)^{\nu_z/2} K_{\nu_z/2}(|r|\sqrt{(\nu_z-2)\mathbb{E}[Z^2]})}{2^{\nu_z/2-1}\Gamma(\nu_z/2)} = \mathrm{CF}_Z(r). \tag{39}$$

可以证明， $g(\nu_z)$ 是一个递减函数，并且 $\lim_{\nu_z\to 2^+} g(\nu_z) = 1$ ，且 $\lim_{\nu_z\to\infty} g(\nu_z) = l(|r|\sqrt{\mathbb{E}[Z^2]}) \geq 0$ ，其中 $l(\cdot)$ 是某个递减函数。这如图 5 所示，并意味着式 (39) 至多有一个实数解 $\nu_z^\star$，可通过二分法轻松求得。随后，令 $\sigma_z^\star = \sqrt{(\nu_z^\star - 2)\mathbb{E}[Z^2]/\nu_z^\star}$，并使用近似式 $Z \sim \sigma_z^\star \mathcal{T}(\nu_z^\star)$。

这种方法的主要挑战在于如何恰当地设置 r。一方面，对于某些 r 的取值，可能(39)无解。另一方面，不同的可行 r 取值可能会导致拟合精度显著不同。我们将在第 4.3 节探讨这些问题。现在，为方便起见，我们设

$$r = \mathbb{E}[Z^2]^{-1/2} \tag{40}$$

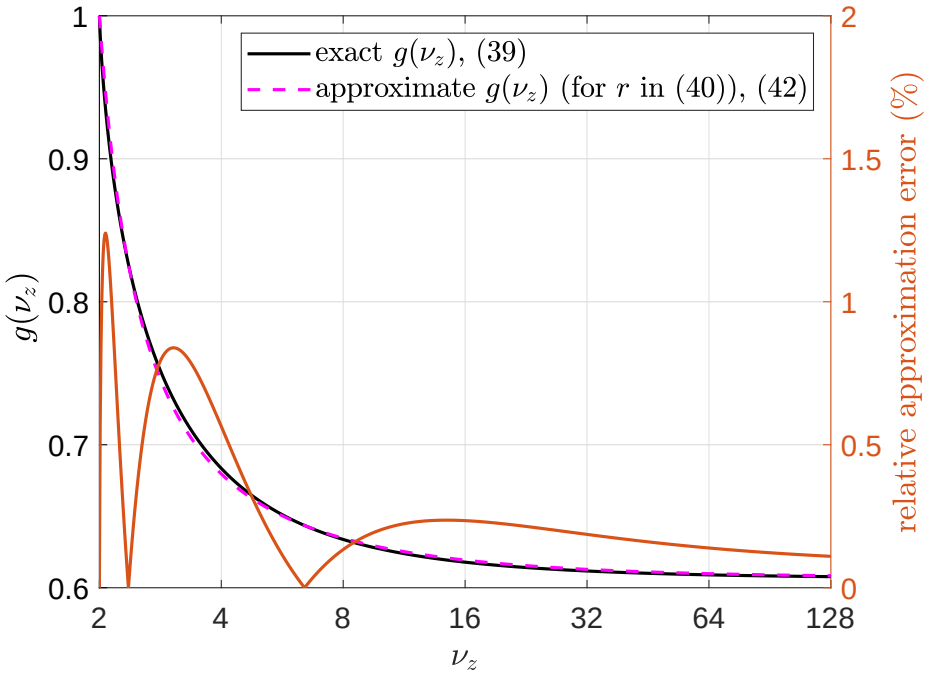

图 6：式 (42) 中给出的 $g(\nu_z)$ 近似计算的精度。

使得 $g(\nu_z)$简化为

$$g(\nu_z) \triangleq \frac{(\nu_z-2)^{\nu_z/4} K_{\nu_z/2}(\sqrt{\nu_z-2})}{2^{\nu_z/2-1}\Gamma(\nu_z/2)}. \tag{41}$$

请注意，使用式 (41) 求得 ν_z in $g(\nu_z)$ = 特征函数$_Z(\mathbb{E}[Z^2]^{-1/2})$ 的精确闭式解仍不可行。幸运的是， $g(\nu_z)$ 可以用一种非常易于处理的分式函数进行准确近似，其形式为

$$g(\nu_z) \approx \frac{p_1\nu_z + p_2}{\nu_z + p_3}. \tag{42}$$

同时，我们知道 $\lim_{\nu_z\to 2^+} g(\nu_z) = 1$，且 $\lim_{\nu_z\to\infty} g(\nu_z) \approx 0.6070$，如图 5 所示。然后，为了满足这些条件，我们可以直接将 p_1 和 p_2 设为如下形式

$$\lim_{\nu_z\to\infty} g(\nu_z) = p_1 = 0.607, \tag{43}$$

$$g(2) \approx \frac{2p_1 + p_2}{2 + p_3} = 1 \to 2p_1 + p_2 = 2 + p_3 \to p_3 = 2p_1 + p_2 - 2 = p_2 - 0.786, \tag{44}$$

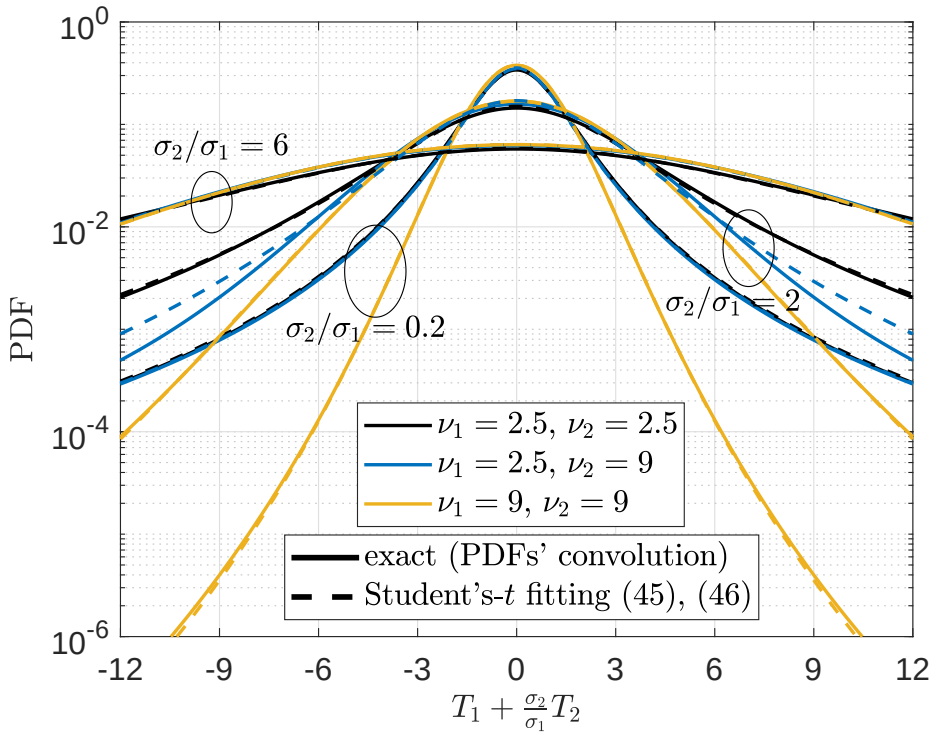

图 7：两个 Student t 随机变量的线性组合的概率密度函数。

其中，最后一步的 (44) 利用了 (43) 中的结果。最后，通过标准曲线拟合即可轻松获得 $p_2 = -0.7606$，然后可以设定 $p_3 = -0.7606 - 0.786 = -1.5466$。(42) 的精度如图 6 所示。

有了式 (42)，即可估计 ν_z 和 σ_z：

$$\nu_z^\star \approx \frac{0.7606 - 1.5466 \times \mathrm{CF}_Z(\mathbb{E}[Z^2]^{-1/2})}{0.607 - \mathrm{CF}_Z(\mathbb{E}[Z^2]^{-1/2})}, \tag{45}$$

$$\sigma_z^\star \approx \sqrt{\frac{(\mathrm{CF}_Z(\mathbb{E}[Z^2]^{-1/2}) - 1)\mathbb{E}[Z^2]}{1.6775 - 3.4111 \times \mathrm{CF}_Z(\mathbb{E}[Z^2]^{-1/2})}}, \tag{46}$$

并使用近似式 $Z \sim \sigma_z^\star \mathcal{T}(\nu_z^\star)$。图 7 和图 8 展示了这种分布拟合，表明我们的方法是恰当的。最后请注意，此处的结果也与我们此前围绕图 3 得出的观察一致。

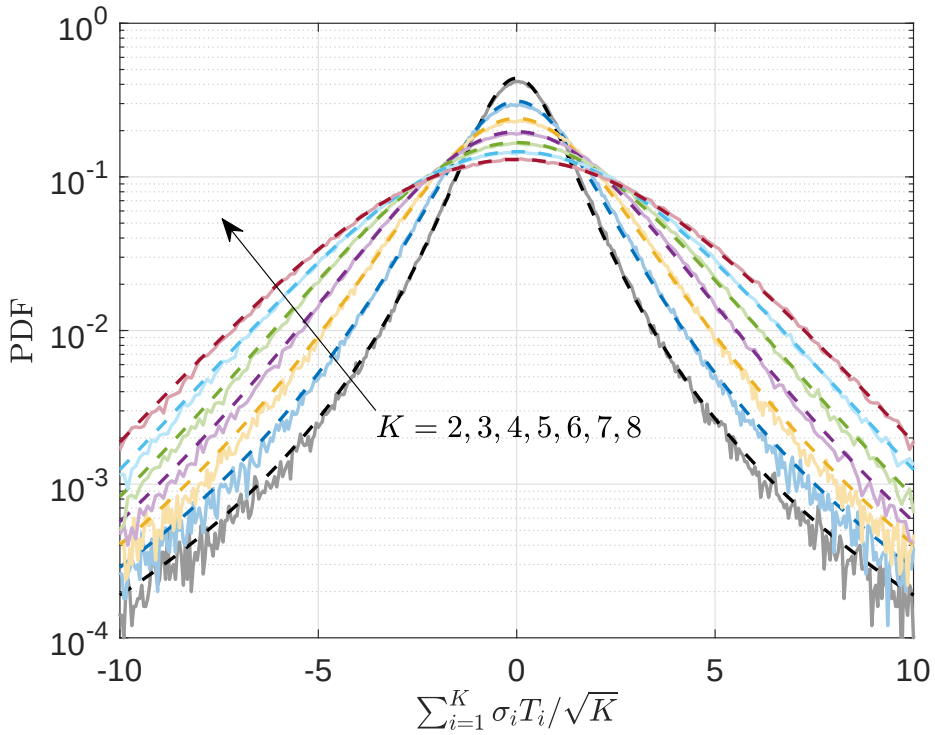

图 8： K Student's t 随机变量线性组合（归一化后）的概率密度函数。我们设定 $\sigma_i = i/2$和 $\nu_i = 2 + i/2.$。实线表示通过蒙特卡罗模拟得到的经验概率密度函数，点线表示我们提出的 Student's t 分布拟合方法，该方法基于对 r 在（40）中给出的二阶矩和特征函数进行匹配。

4 拟合精度分析

本节采用巴塔恰里亚距离度量 [20]，评估第 3 节中讨论的拟合方法的精度。该度量衡量两个概率分布之间的相似性；在此处，这两个分布分别是真实分布 Z, $f_Z(z)$，以及基于某种所提拟合方法得到的近似缩放 Student t 分布 $f_{\hat{Z}}(z)$。请注意，由于 Z, $f_Z(z)$ 的真实／精确分布未知，且对于一般的 K 难以计算，我们采用蒙特卡罗方法来估计

巴塔查里亚距离。具体而言，该度量的计算方法如下

$$d_B(Z,\hat{Z}) = -\ln\Big(\sum_{n=1}^{N}\sqrt{f_Z(z_n)f_{\hat{Z}}(z_n)}\Big), \tag{47}$$

其中，z_n 是从 $\sigma\sum_{i=1}^{K}T_i$中取得的第 n–个样本，$f_Z(z_n)$则通过其直方图估算。随着 $N\to\infty$，式 (47) 趋近于 Z 和 Z的连续概率分布之间的精确巴塔查里亚距离。最后，为简化起见，我们重点讨论独立同分布随机变量之和这一特殊情形，采用 $N=10^6$，并在不失一般性的前提下令 $\sigma=1$ 。

4.1 绝对矩与基于特征函数的拟合

图 9 展示了本文提出的两种方法的拟合精度，以及基于二阶和四阶矩匹配的基准方法的拟合精度。正如前文所述，该方法仅在 $\nu\geq 4$时适用，这也是我们开展本研究的主要动机之一。从图中可以看出：i）本文提出的拟合方法比基于二阶和四阶矩匹配的基准方法更精确；后者还仅适用于 $\nu\geq 4$的情形；ii）基于特征函数匹配的拟合通常比基于绝对矩匹配的拟合更精确，不过随着 ν 增大，两种方法的结果趋于一致；iii）当 ν相对较小时，K较小时，本文提出的拟合方法更精确；但随着 ν 增大，这一趋势可能会逆转。

4.2 拟合参数的缩放规律

在此，我们利用独立同分布假设，在图 10 中说明拟合分布的参数如何随 K 变化。为此，我们仅采用基于特征函数的拟合，因为先前的结果表明它最为准确。可以观察到，拟合分布的两个参数——尺度参数 σ_z 和自由度数量 ν_z——均随 K 增加而增加。

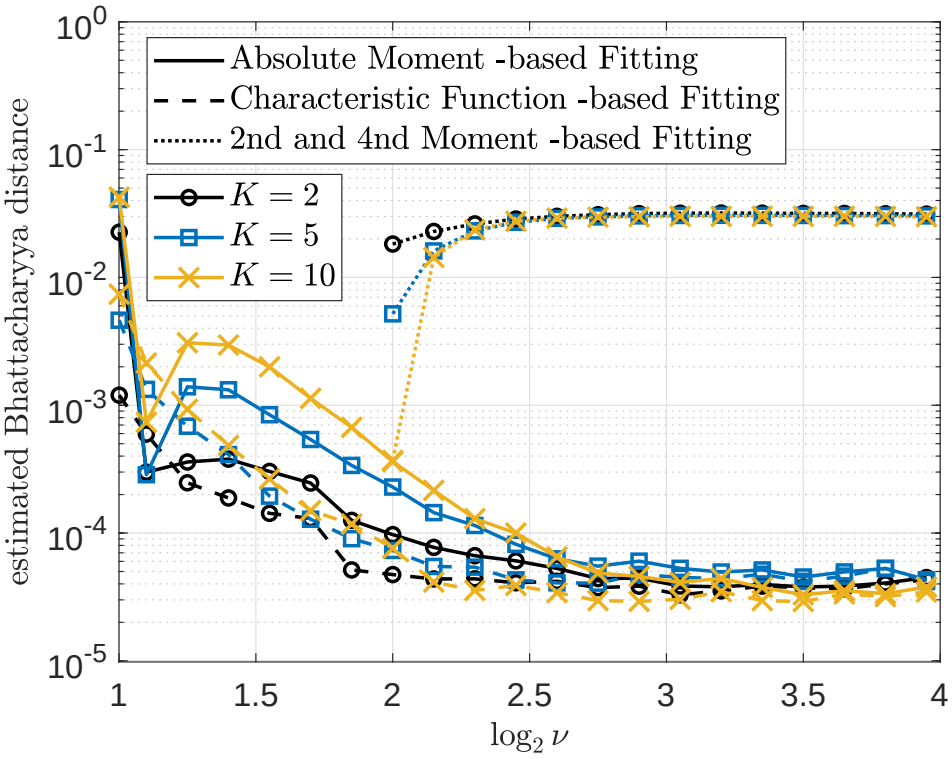

图 9：估计的巴塔查里亚距离随 ν 的变化。

具体而言， σ_z、 $\nu_z \sim \gamma_1 K^{\gamma_2} + \gamma_3$ 随 γ_1 增加， $\gamma_2 > 0$ 和 $\gamma_2 < 1$ 呈凹增。除此之外， σ_z 和 ν_z 分别是 ν 的增函数和减函数。

4.3 CFParameter 设置对性能的影响

如前文第 3.2 节所述，在 (38) 中（或直接在 (39) 中）选择不同的 r ，可能会导致拟合精度显著不同。这里，我们通过展示图 11 中估计的巴塔查里亚距离随 r 变化的情况，来探讨这些问题。请注意，当 ν相对较大时，精度几乎不受 r具体取值的影响。随着 ν 减小并趋近于 2，情况会发生显著变化，此时，恰当地设置 r 变得更加重要。事实上， r 存在一个精度最优值，在 ν 较小时尤其明显。请注意，尽管在实践中事先确定最优的 r 可能较为棘手，但作为一条经验法则，较小的

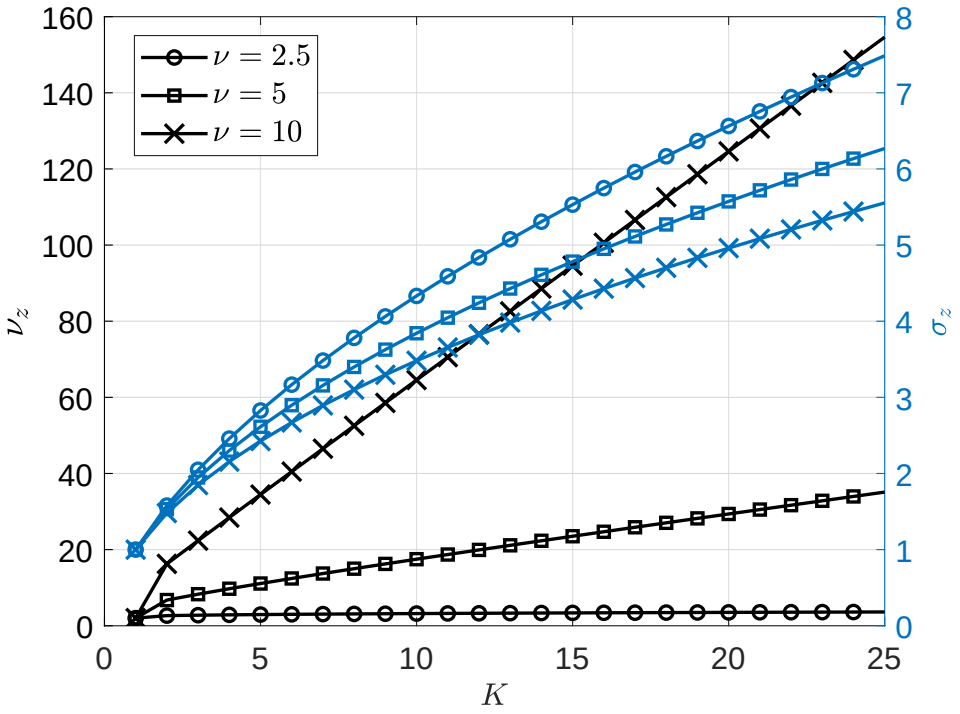

图 10：基于 CF 的拟合分布的参数随 K for $\nu \in \{2.5, 5, 10\}$ 的变化。

r 取值通常更可取，而我们在 (40) 中提出的方法似乎是一种有效且简单的配置方案。

5 结论

在本研究中，我们提出了两种拟合自由度大于二的 Student's t 随机变量线性组合分布的方法。它们利用二阶矩以及一阶绝对矩或特征函数，将该分布拟合为经过缩放的 Student's t 随机变量的分布。对于前一种方法，我们首先通过解析推导得到 $K = 2$ Student's t 随机变量线性组合的绝对矩，然后通过简单的迭代过程将其推广到$K \geq 2$；后一种方法则可直接拟合，但其精度取决于特征函数参数。值得注意的是，我们提出了一种简单的特征函数参数配置方法，并

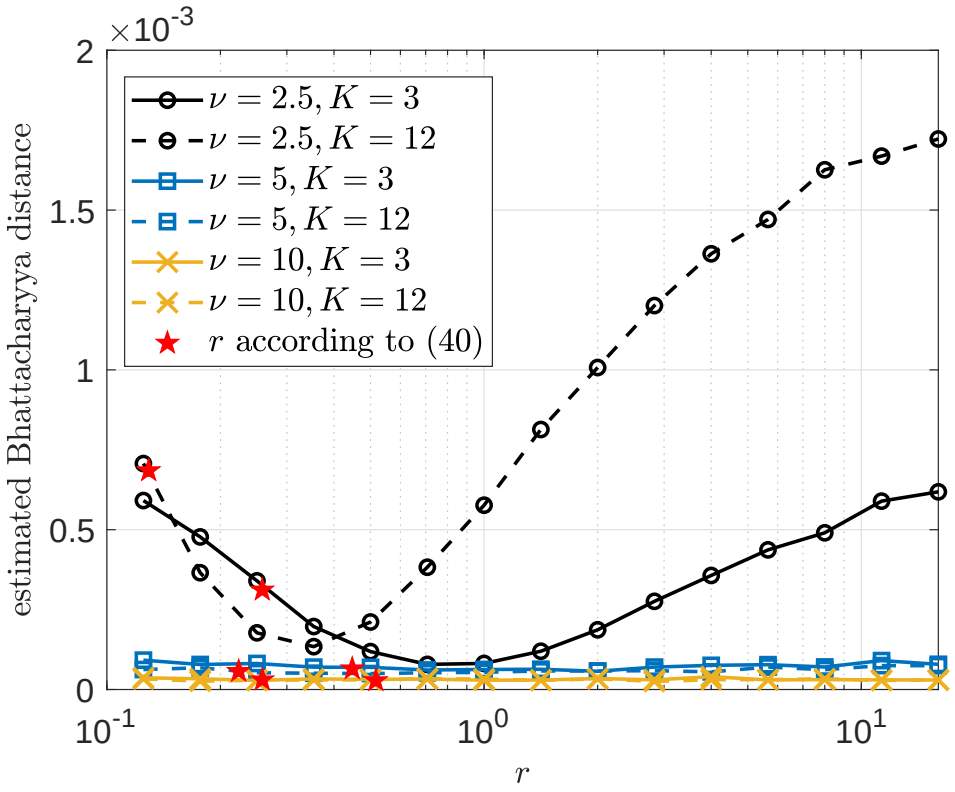

图11：在基于特征函数的拟合下，估计的巴塔查里亚距离随r 的变化情况，其中 $\nu \in \{2.5, 5, 10\}$ 和 $K \in \{3, 12\}$。

证明该方法能够实现较高的拟合精度。我们采用蒙特卡罗模拟，并使用巴塔恰里亚距离度量对拟合精度进行数值量化。结果表明，基于特征函数的拟合通常优于基于绝对矩的拟合，尽管当 t–随机变量的自由度足够大时，两种方法的精度都会趋于一致。有趣的是，所提出的两种方法均优于基于二阶和四阶矩匹配的基准拟合方法，而后者仅适用于所有 t–随机变量的自由度至少为四的情形。有趣的是，拟合分布的尺度参数和自由度数均随 K 近似线性增长。

最后需要指出的是，我们的工作为更一般的拟合方法开辟了道路。事实上，舍弃二阶矩，仅利用绝对矩和

特征函数，或许就能准确刻画自由度大于 1 的 t–随机变量线性组合的分布。此外，仅依靠不同参数 r下特征函数的匹配，或许就能完全取消对自由度数量的限制，并任意拟合任何 t–随机变量线性组合的分布，使其符合经尺度变换的 Student t 随机变量的分布。不过，如何以最优和/或简单的方式实现这一点，仍有待进一步研究。

数据可用性

用于复现　　本研究结果的代码已在 `https://github.com/onel` 公开　　2

利益冲突

未发现利益冲突。

资助与致谢

本研究得到芬兰科学院（6G旗舰计划，项目编号346208）和芬兰技术促进基金会的支持。

参考文献

[1] V. E. Bening 和 V. Y. Korolev，《学生分布在概率论和数理统计中的一种应用》，《概率论及其应用》，第 49 卷，第 3 期，第 377–391 页，2005 年。

[2] G.A. Walker 和 J. G. Saw，《t变量的线性组合的分布》，《美国统计学会会刊》，第 73 卷，第 364 期，第 876–878 页，1978 年。[在线]。可访问：https://doi.org/10.1080/01621459.1978.10480117

[3] V. Witkovsk`y，“奇数自由度倒卡方随机变量正线性组合的精确分布”，Statistics & probability letters，第56卷，第1期，第45–50页，2002年。

[4] C. Berg 和 C. Vignat，“贝塞尔多项式的线性化系数及学生 t 分布的性质”，《构造性逼近》，第27卷，第1期，第15–32页，2008年。

[5] S. Nadarajah 和 D. Dey，“ t 分布的卷积”，Computers & Mathematics with Applications，第49卷，第5–6期，第715–721页，2005年。

[6]M. Ahsanullah、B. G. Kibria 和 M. Shakil，《正态分布与学生t分布及其应用》。Atlantis Press，2014年。 [在线]。可访问：https://doi.org/10.2991/978-94-6239-061-4

[7] F. W. Olver、D. W. Lozier、R. F. Boisvert 和 C. W. Clark，《NIST数学函数手册》精装版及 CD-ROM。剑桥大学出版社，2010 年。

[8] I. S. Gradshteyn 和 I. M. Ryzhik，《积分、级数与乘积表》。学术出版社，2014年。

[9] W. R. Fairweather，“一种求取多个正态总体共同均值精确置信区间的方法”，《皇家统计学会杂志：C辑（应用统计）》第21卷第3期，229–233页，1972年。

[10] K. Krishnamoorthy 和 Y. Lu，“基于广义变量方法对多个正态总体共同均值进行推断”，Biometrics，第59卷第2期，237–247页，2003年。

[11] S.-H. Kim 和 A. S. Cohen，“关于 Behrens-Fisher问题：综述”，Journal of Educational and Behavioral Statistics，第 23 卷，第 4 期，第 356–377 页，1998 年。

[12] S. Weerahandi，《用于数据分析的精确统计方法》。SpringerScience & Business Media，2003 年。

[13] M. Hollander、D. A. Wolfe 和 E. Chicken，《非参数统计方法》。John Wiley & Sons，2013 年。

[14] O. L´opez、G. Brante、R. D. Souza、M. Juntti 和 M. Latva-aho，“瑞利衰落下大规模物联网网络中用于检测信号稀疏度的协同导频传输”，arXiv 预印本 arXiv:2205.00406，2022 年。

[15] N. C. Petroni，“非稳定 Lévy 过程中的混合”，Journal of Physics A: Mathematical and theoretical，第 40 卷，第 10 期，第 2227 页，2007 年。

[16] C. Berg 和 C. Vignat，《两个相互独立的 Student t 随机向量之和的密度》，Statistics & Probability Letters，第 80 卷，第 13–14 期，第 1043–1055 页，2010 年。

[17] T. C. Headrick，《通过 L 矩刻画幂方法变换》，Journal of Probability and Statistics，2011 年，第 2011 卷，2011 年。

[18]“正则化不完全贝塔函数：级数表示（小节 06/01/03/01）。”[在线]。网址：https://functions.wolfram.com/GammaBetaErf/BetaRegularized/06/01/03/01/01/

[19]“高斯超几何函数 2F1：积分。”[在线]。网址：
h
ttps://functions.
wolfram.com/HypergeometricFunctions/Hypergeometric2F1/21/ShowAll.html[20] T. Kailath，“信号选择中的散度与巴塔查里亚距离度量”，IEEE通信技术汇刊，第 15 卷，第 1 期，第 52–60 页，1967 年。