arXiv:2302.00279v2 [math.DS] 1 Aug 2023

定量 KAM 理论及其在三体问题中的应用

Gabriella Pinzari*，Xiang Liu†

2023年8月2日

摘要

基于定量“KAM 理论”，我们陈述并证明了两个定理，讨论在呈现适当退化的轻微扰动系统中，极大准周期运动和带鞘准周期运动的延续。接下来，我们将这些结果应用于证明：在三体问题中，相空间内存在一个小区域，在该区域内可以检测到这两类环面族。我们还估计了此类运动在适当环境空间中的密度。

据我们所知，这是首次证明稳定环面与带须环面在同一物理系统中共存。

关键词：适当退化哈密顿量、辛坐标、对称性约化。

MSC 2020：37J40、37J11、37J06。

目录

1 概述 2

2 E共面、共圆外部逆行构型附近的椭圆性与双曲性 构型 5
2.1 椭圆性（带 BNF） .62.2 双曲性 .92.3 两个环面族的存在与共存 .102.4 命题 2.3、2.4 和 2.5 的证明.13

3 定量 KAM理论 17
定理 1.1 的证明.17定理 1.2 的证明.18定理 3.1 的证明.21正规形理论.30

参考文献 34

*帕多瓦大学数学系，意大利帕多瓦。通讯作者。pinzari@math.unipd.it

†帕多瓦大学数学系，意大利帕多瓦。

1 概述

1.1 两个 KAM 关于适当退化哈密顿方程组的定理 我们研究满足接近可积条件的哈密顿量（参见，例如，[15]），但除此之外，扰动项的自由度数量还可能多于未扰动部分的自由度数量。这类哈密顿量经常出现在天体力学问题中，并在 [2]之后被称为“适当退化”的哈密顿量。我们将其记为

$$H(I,\varphi,p,q;\mu) = H_0(I) + \mu\, P(I,\varphi,p,q;\mu)\,,$$

其中，坐标 $(I,\varphi) = (I_1,\dots,I_n,\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ 属于“作用量–角”类型（可先对未扰动项应用李乌维尔–阿诺德定理），而（就我们的需要而言），$(p,q) = (p_1,\dots,p_m,q_1,\dots,q_m)$ 则是“直角坐标”，即取值于某点（例如原点）附近的一个小球内（例如半径为 ε_0）。辛形式为标准形式：

$$\Omega = dI\wedge d\varphi + dp\wedge dq = \sum_{i=1}^{n} dI_i\wedge d\varphi_i + \sum_{i=1}^{m} dp_i\wedge dq_i\,.$$

我们采用实解析框架，这意味着假设 H 可在实“相空间”（即定义域）的某个复邻域上作全纯延拓

$$\mathcal{P}_{\varepsilon_0} := V\times\mathbb{T}^n\times B^{2m}_{\varepsilon_0}\,,$$

其中 $V\subset\mathrm{R}^n$ 有界、开且连通，$\mathrm{T} = \mathrm{R}/(2\pi\mathrm{Z})$ 为“平坦环面”，$B^{2m}_{\varepsilon_0}$是R^{2m}中相对于某个范数、半径为 ε_0且以0为中心的$2m$维球。在此框架下，我们提出[1] 两个“KAM 定理”，分别处理不同情形。两个陈述共有的一个基本假设通常称为“柯尔莫哥洛夫条件”，即：

(A$_1$) 映射 $I\to\partial_I H_0(I)$ 是 V 的微分同胚。

How然而，由于上述适当退化，这一假设需要进一步加强
with 关于扰动项，或更准确地说，关于其拉格朗日平均的某些陈述

$$P_{\mathrm{av}}(I,p,q;\mu) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0,2\pi]^n} P(I,\varphi,p,q;\mu)d^n\varphi$$

关于 φ–坐标。此类额外假设在两个陈述中有所不同，因此我们在下文分别列出。

第一个结果重新探讨了 V.I. Arnold 提出的所谓“基本定理”，[2]。这一结果已在先前的研究 [6, 21]中得到研究、推广和扩展。这里我们讨论一种此前文献未曾考虑的情形：P_{av} 在 $(p,q) = (0,0)$ 附近存在高[2] 阶的“Birkhoff正规形”（以下简称BNF）；例如 s。正如预期，更高阶的 BNF 可以改善“柯尔莫哥洛夫集合”的测度，即所有 KAM 环面的并集所构成的集合的测度。我们将证明[3] 如下

定理 1.1 假设上述 (A_1) 以及以下条件：

(A$_2$) $P_{\mathrm{av}}(I,p,q) = \sum_{j=1}^{s}\mathcal{P}_j(r;\,I)+\mathrm{O}_{2s+1}(p,q;\,I)$，其中 $r_i := \frac{p_i^2+q_i^2}{2}$和 $\mathcal{P}_j(r;\,I)$ 是关于 $r=(r_1,\cdots,r_m)$ 的 j 次多项式，对于某个 $2\le s\in$ 自然数集。

[1]关于历史沿革和构造性方法，我们参阅专业文献 KAM [16, 理论：例如, 14, 3, 8]及其中的参考文献。[2][2, 6, 21] 处理“最小”情形 $s=2$。情形 $s=2$ 在此称为“最小”情形，因为我们采用的是柯尔莫哥洛夫条件的推广框架（A_1）如上所述。在 [24, 12], 采用不同技术的情况下，情形 $s=1$ 已得到研究。[3]为简化记号，我们不将 μ 写在定理1.1 和 1.2中函数的自变量之中。

(A$_3$) 第二阶项 $\mathcal{P}_2(r;\, I) = \frac{1}{2}\sum_{i,\, j=1}^{m} \beta_{ij}(I) r_i r_j$ 的 $m\times m$ 系数矩阵 $\beta(I)$ 是非退化的：$|\det \beta(I)| \geq$ 对所有 $I \in V$ 均为常数。

那么，存在正数 $\varepsilon_* < \varepsilon_0$、$C_*$ 和 c_*，使得对于

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_*\,, \qquad 0 < \mu < \frac{\varepsilon^{2s+2}}{C_*(\log \varepsilon^{-1})^{c_*}}\,. \tag{1}$$

可以找到一个集合 $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_\varepsilon$，它由并集构成，其中包含 H 不变的 n 维拉格朗日环面；在这些环面上，H 运动可解析地共轭于频率为 (ω_1, ω_2) 的线性丢番图准周期运动，$\in \mathrm{R}^{n_1} \times \mathrm{R}^{n_2}$ 且满足 $\omega_1 = O(1)$ 和 $\omega_2 = O(\mu)$。集合 $\mathcal{K}$ 具有正的刘维尔–勒贝格测度，并满足

$$\mathrm{meas}\mathcal{P}_\varepsilon > \mathrm{meas}\mathcal{K} > \left(1 - C_*\varepsilon^{s-\frac{3}{2}}\right)\mathrm{meas}\mathcal{P}_\varepsilon\,. \tag{2}$$

第二个结果讨论低维准周期运动，即所谓的“带须环面”。它们是 n 维准周期运动（处于维数为 $2n+2m$ 的相空间中），以指数速率趋近或到达。为简便起见，并结合我们的应用，我们着重讨论情形 $m = 1$。此外，我们允许哈密顿量存在进一步的退化：未扰动项 H_0 可能并不依赖于所有的 I，而只依赖于其中一部分。

定理 1.2 设 $m = 1$，并令 H_0 依赖于 $I_1 = (I_{11}, \ldots, I_{1n_1})$ 的分量，其中 $I = (I_1, I_2)$ 满足 $1 \leq n_1 \leq n := n_1 + n_2$。假设 (A$_1$) 中以 I_1 替代 I，并且此外有

(A$_2'$) $P_{\mathrm{av}}(I, p, q; \mu) = P_0(I, pq; \mu) + P_1(I, \varphi, p, q; \mu)$ *with* $\|P_1\| \leq a\|P_0\|$;

(A$_3'$) $|\partial_{pq} P_0| \geq \mathrm{const} > 0$ 且 $|\det \partial^2_{I_2} P_0| \geq \mathrm{const} > 0$，若 $n_2 \neq 0$。

固定 $\eta > 0$。则存在正数 a_*、$\varepsilon_* < \varepsilon_0$、$C_*$ 和 c_*，使得当

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_*\,, \quad 0 < a < a_*\varepsilon^4\,, \quad 0 < \mu < \frac{C_*(a\|P_0\|)^{1+\eta}}{(\log a^{-1})^{c_*}} \tag{3}$$

可以找到集合 $\mathcal{K}$，它由 H–不变的 n 维拉格朗日环面的并构成，在该集合上，H–运动解析共轭于具有频率 $(\omega_1, \omega_2) \in \mathrm{R}^{n_1} \times \mathrm{R}^{n_2}$ 的线性丢番图准周期运动，其中 $\omega_1 = O(1)$ 且 $\omega_2 = O(\mu)$。集合 $\mathcal{K}$ 在 $\mathcal{P}_0 := V \times \mathrm{T}^n$ 上的投影 $\mathcal{K}_0$ 具有正的刘维尔–勒贝格测度，并满足

$$\mathrm{meas}\mathcal{P}_0 > \mathrm{meas}\mathcal{K}_0 > \left(1 - C_*\sqrt{a}\right)\mathrm{meas}\mathcal{P}_0\,. \tag{4}$$

此外，对于任意 $\mathcal{T} \in \mathcal{K}$，存在两个 $(n+1)$ 维不变流形 $\mathcal{W}_{\mathrm{u}}, \mathcal{W}_{\mathrm{s}} \subset \mathcal{P}_{\varepsilon_*}$，使得 $\mathcal{T} = \mathcal{W}_{\mathrm{u}} \cap \mathcal{W}_{\mathrm{s}}$，且在 $\mathcal{W}_{\mathrm{u}}, \mathcal{W}_{\mathrm{s}}$ 上的运动以指数速率离开 $\mathcal{T}$ 并趋近于它。

在继续说明我们打算如何运用上述定理之前，先提出几点评论。

(i) 涉及 μ 的条件（1）和（3）并非最优。采用与 [6, 定理 1.2 的证明步骤 1–4], 中所示类似的过程，可以证明这些条件分别可放宽为

$$\mu < \frac{1}{C_*(\log \varepsilon^{-1})^{2b}}\,, \qquad \mu < \frac{1}{C_*(\log(a\|P_0\|)^{-1})^{2b}}$$

其中有一些 C_*、$b > 0$。

（ii）鉴于我们的应用，（2）和（4）中给出的关于不变集测度的精确界是必需的。事实上，我们将应用上述两个定理来证明，在三体问题中，靠近共面、共圆的外部逆行构型（精确定义见下文）处，完全维数的“带须”准周期环面共存（这一结果曾在 [20]中被猜想）。在这一应用中，ε 将对应于偏心率或倾角的最大值；a 则为半长轴比；由于集合的大小会随 ε （$s=4$ 的某个幂次趋于 0，因此定理1.1 中需要采用高阶 BNF ，这对我们的应用已经足够）。

（iii）沿着[5], 定理1.2 的思路，或许可以进一步证明“扩散路径”和“鞭毛梯”的存在。我们不打算这样做，因为证明下文方程组（5）具有阿诺德不稳定性（按照 [1]的定义）并非本文的目的。不过，我们指出，在非常相似的框架下，四体问题中已经发现了这类不稳定性 [9]。我们还指出，天体力学中混沌或阿诺德不稳定性的证明是相当近期的成果[13, 10], ，这是因为克服所谓的“间隙过大问题”十分困难。参见 [17] 及其中的参考文献。

（iv）鉴于上述应用，证明定理1.2还可得出另一个相当标准的重要推论：若 P（即 P_1）在（p，q）处有一个平衡点 $=0$，则沿着 $\mathcal{K}$的运动，坐标（p，q）始终固定为（0，0），而不会在其附近变化；也就是说

$$\mathcal{K} \subset V \times \mathbb{T}^n \times \{(0,0)\}\,.$$

更一般地，稳定不变流形和不稳定不变流形不会偏离未受扰动时的流形：

$$\mathcal{W}_{\mathrm{s}} \subset \mathcal{P}_\varepsilon \cap \{q=0\}\,, \qquad \mathcal{W}_{\mathrm{u}} \subset \mathcal{P}_\varepsilon \cap \{p=0\}\,.$$

1.2 三体问题的应用 我们将上述结果应用于证明：在三体问题相空间的某个区域内，并在稍后将具体说明的条件下，满维环面与带须环面可以共存。我们强调，这类不同运动的共存并非仅仅是方程组不可积的结果（若是如此，这一结果多少会在预料之中），因为在两个彼此接近且适当选取的方程组可积近似中，这种共存依然存在。事实上，这些运动会出现在三体问题相空间中的一个极小区域内；该区域同时处于其中一个近似的椭圆型平衡点邻域内，以及另一个近似的双曲型平衡点邻域内。这种现象与采用两种不同的坐标系密切相关，而在所研究的区域内，这两种坐标系彼此奇异。据作者所知，此前尚未有人发现过这种现象。

平移不变性经过“日心约化”后，质量分别为 m_0、μm_1 和 μm_2，牛顿常数为 $\mathcal{G}\equiv 1$ 的三体问题哈密顿量可写成二粒子方程组的形式（推导见例如 [12, 19] ）：

$$\mathrm{H_{3b}} = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{|y^{(\mathrm{i})}|^2}{2\mathrm{m}_i} - \frac{\mathrm{m}_i\mathrm{M}_i}{|x^{(\mathrm{i})}|}\right) + \mu\left(-\frac{m_1 m_2}{|x^{(1)}-x^{(2)}|} + \frac{y^{(1)}\cdot y^{(2)}}{m_0}\right) \tag{5}$$

取 m 的适当值$_i = m_i + \mathrm{O}(\mu), \mathrm{M}_i = m_0 + \mathrm{O}(\mu)$。我们在欧几里得空间中考虑该方程组，也就是说，在 (5) 中取 $y^{(\mathrm{i})}$，$x^{(\mathrm{i})} \in \mathbb{R}^3$, 且 $x^{(1)} \neq x^{(2)}$。
我们将哈密顿量 (5) 的如下辛坐标系称为开普勒映射：[4] 坐标系 $\mathcal{C} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \ell_1, \ell_2, \mathrm{y}, \mathrm{x})$，其中 $\mathrm{y} = (\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_4)$、$\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_4)$，且满足：

[4]即验证

$$\Omega = d\Lambda \wedge d\ell + d\mathrm{y} \wedge d\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{2} d\Lambda_i \wedge d\ell_i + \sum_{i=1}^{4} d\mathrm{y}_i \wedge d\mathrm{x}_i\,.$$

– $\Lambda_i = \mathrm{m}_i\sqrt{\mathrm{M}_i a_i}$，其中 a_i 表示 i^{th} 瞬时[5] 椭圆的半长轴；– ℓ_1，$\ell_2 \in \mathbb{T}$ 与 Λ_1，Λ_2 共轭。这些角的定义方式因所选的 $\mathcal{C}$ 而异。在所有已知示例中，它们都与行星沿瞬时椭圆扫过的面积有关。

利用开普勒映射，哈密顿量（5）可写成如下形式

$$\mathrm{H}_{\mathcal{C}} = -\frac{\mathrm{m}_1^3\mathrm{M}_1^2}{2\Lambda_1^2} - \frac{\mathrm{m}_2^3\mathrm{M}_2^2}{2\Lambda_2^2} + \mu f_{\mathcal{C}}(\Lambda_1, \Lambda_2, \ell_1, \ell_2, \hat{\mathrm{y}}, \hat{\mathrm{x}}) \tag{6}$$

其中，$\hat{}\mathrm{y}$，$\hat{}\mathrm{x}$ 包含满足以下条件的变量对（y_i，x_i）：[6] y 和 $_i\,\mathrm{x}$ 均 $_i$ 不可忽略。$\hat{}\mathrm{y}$，$\hat{}\mathrm{x}$ 常被称为退化坐标，因为当 μ 设为零时，它们不会出现在（6）中。换言之，$\mathrm{H}_{\mathcal{C}}$是一个适当退化的近可积系统，含义与上一段所述相同。

我们将两个行星作圆形共面运动、且外行星的角动量方向与合成角动量方向相反的构型称为共面、共圆、外行星逆行构型。在 [20] 中已指出，经过仔细选择$\mathcal{C}$ 后，这种构型在（ℓ_1, ℓ_2）平均摄动函数中起到平衡点的作用

$$\overline{f}_{\mathcal{C}}(\Lambda_1, \Lambda_2, \hat{\mathrm{y}}, \hat{\mathrm{x}}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{[0,2\pi]^2} f_{\mathcal{C}}(\Lambda_1, \Lambda_2, \ell_1, \ell_2, \hat{\mathrm{y}}, \hat{\mathrm{x}})\, d\ell_1 d\ell_2\,.$$

但更重要的是，在该平衡点附近，存在两个这样的 $\mathcal{C}_i$，使得哈密顿量 $\mathrm{H}_{\mathcal{C}_1}$ 适用于定理1.1，而 $\mathrm{H}_{\mathcal{C}_2}$ 适用于定理1.2。由此得到以下结果，它表明三体问题中稳定准周期运动与带鞘准周期运动共存。下文将对此作出更精确的表述（见定理2.1 ），并给出证明。

定理 A 在共面、共圆、外行星逆行构型附近，且行星的质量和半长轴之比都很小的条件下，存在一个正测度集 $\mathcal{K}_1$ ，由 5 维准周期运动 $\mathcal{T}_1$ 构成，它们以（将在后文说明的意义）“围绕”着 3 维准周期运动 $\mathcal{T}_2$；每个 $\mathcal{T}_2$ 都配有两个不变流形，分别称为不稳定流形和稳定流形，其中这些运动在过去和未来分别渐近于 $\mathcal{T}_2$。

最后，我们说明本文的组织结构。

- 在第 2.1 节和 2.2 节中，我们回顾 [20], 中的主要论证，这些论证将方程组（5）化为适用于定理 1.1 和 1.2的形式。
- 在第 2.3 节和 2.4 节中，我们验证定理 1.1 和 1.2适用的两个定义域有非空交集，且该交集包含两个环面族。由于所用框架不同，这项验证颇为微妙。
- 在第3 节中，我们通过经过仔细定量化的 KAM 理论证明定理。

2 接近共面、共圆的外侧逆行构型的椭圆性与双曲性

将方程组化为适用于定理1.1 的形式，需要识别一个椭圆型平衡点；而定理1.2 则需要一个双曲型平衡点。

[5]参照三体哈密顿量（5），i^{th} *instantaneous ellipse* 是由 h 生成的轨道$_i$: $= {}^{|y_{(i)2}}{}^{|^2}{}_{\mathrm{m}_i} - \overline{{}^{i\ i}_{\mathrm{m}|x}{}^{|}}_{\mathrm{M(i)}}$，位于相空间~~中 h_r~~ 为负值的区域。[6]这是因为哈密顿量（5）具有第一积分，正如下一节将要回顾的那样。

将 $\mathrm{C}^{(j)} := x^{(j)} \times y^{(j)}$ 视为行星的角动量后，我们接下来研究从靠近流形的初始数据演化而来的运动

$$\mathcal{M}_\pi := \Big\{ (y,x) : \ \mathrm{C}^{(1)} \parallel (-\mathrm{C}^{(2)}) \parallel \mathrm{C}\,, \ \text{and } x^{(1)}\,,\ x^{(2)} \text{ describe circular motions}\,. \Big\}\,. \tag{7}$$

下标“π”提示 $\mathrm{C}^{(1)}$ 和 $\mathrm{C}^{(2)}$ 互为相反数。在接下来的两节中，我们回顾 [20], 中的相关内容，该内容突显了 $\mathcal{M}_\pi$的某种“双重（椭圆型、双曲型）性质”。

2.1 椭圆性（含 BNF）

基本上[7], ，椭圆型平衡点及其相应的 BNF 的构造与 [7]中的做法相同。这里简要回顾这一过程。

我们固定一个定义域 $\mathcal{D}_{\mathrm{C}} \subset \mathbb{R}^{12}$ ，用于表示相对于冲量—位置“笛卡尔”坐标

$$\mathrm{C} = (y,x) := (y^{(1)}, y^{(2)}, x^{(1)}, x^{(2)})$$

的两个质点的坐标，这些坐标相对于预先选定的标准正交标架（$k^{(1)}$、$k^{(2)}$、$k^{(3)}$），该标架位于 $\mathbb{R}^3$ 中。首先，我们转换到一组文献中广为人知的坐标，并以 C. G. J. Jacobi 、 R. Radau 和 A. Deprit 命名为 JRD [18, 23, 11], ；他们在不同阶段为这组坐标的构造作出了贡献。

我们固定相空间的一个区域，在该区域中，未受扰“开普勒”哈密顿量生成的轨道 $t \to (x^{(j)}(t)\ y^{(j)}(t)$

$$\mathrm{h}_{\mathrm{k}}^{(j)} := \frac{|y^{(j)}|^2}{2\mathrm{m}_j} - \frac{\mathrm{m}_j \mathrm{M}_j}{|x^{(j)}|}$$

在（5）中均为偏心率非零的椭圆。于是我们将 $\mathrm{P}^{(j)}$ 记为指向近日点方向的单位向量；将 a_j 记为半长轴；将 ℓ_j 记为 $x^{(j)}$的“平近点角”（回顾一下，它定义为从 $\mathrm{P}^{(j)}$ 到 $x^{(j)}$ 的椭圆扇形面积，并以 2π归一化）；将 $\mathrm{C}^{(j)} = x^{(j)} \times y^{(j)}$、$j = 1$、2 记为两颗行星的角动量，而 C: $= \mathrm{C}^{(1)} + \mathrm{C}^{(2)}$ 记为总角动量积分。我们假设“交点”

$$\nu_1 := k^{(3)} \times \mathrm{C}\,, \quad \nu := \mathrm{C} \times \mathrm{C}^{(1)} = \mathrm{C}^{(2)} \times \mathrm{C}^{(1)} \tag{8}$$

在任何时候都不消失。该条件等价于要求由瞬时椭圆确定的平面与（$k^{(1)}$, $k^{(2)}$）平面两两永不重合。与以往的研究一样，我们采用以下记号。对于满足 u、$v \perp w$ 的三个向量 u、v、w，我们将 $\alpha_w(u,v)$ 记为由 u 到 v 相对于 w 所确定的正向（逆时针）方向形成的角。于是，这里的 JRD 坐标记作符号

$$\mathrm{JRD} := \Big(\widehat{\mathrm{JRD}} := (\Lambda_1, \Lambda_2, \mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ell_1, \ell_2, \gamma_1, \gamma_2), (\mathrm{G}, \mathrm{Z}, \gamma, \zeta) \Big) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{T}^4 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2 \tag{9}$$

并通过公式定义

$$\begin{cases} \mathrm{Z} := \mathrm{C} \cdot k^{(3)} \\ \mathrm{G} := \|\mathrm{C}\| \\ \mathrm{G}_1 := \|\mathrm{C}^{(1)}\| \\ \mathrm{G}_2 := \|\mathrm{C}^{(2)}\| \\ \Lambda_j := \mathrm{M}_j \sqrt{\mathrm{m}_j a_j} \end{cases} \qquad \begin{cases} \zeta := \alpha_{k^{(3)}}(k^{(1)}, \nu_1) \\ \gamma := \alpha_{\mathrm{C}}(\nu_1, \nu) \\ \gamma_1 := \alpha_{\mathrm{C}^{(1)}}(\nu, \mathrm{P}^{(1)}) \\ \gamma_2 := \alpha_{\mathrm{C}^{(2)}}(\nu, \mathrm{P}^{(2)}) \\ \ell_j := \text{mean anomaly of } x^{(j)} \end{cases} \tag{10}$$

[7]正如 [20], 中所指出的，与 [7] 所研究的情形（涉及行星的顺行运动，即所有行星都沿同一方向运行）相比，唯一值得注意的区别在于：这里平衡点的椭圆型特征并不能直接由哈密顿量的对称性推出，而是需要手动验证。

其主要之处在于 JRD，Z、ζ 和 γ 都是可忽略坐标，并且 G 沿着 SO(3)不变系统的运动保持不变。因此，SO(3)不变系统的大多数运动实际上可由“约化”坐标 $\widehat{\mathrm{JRD}}$描述。在本文的案例研究中，这一强性质无法利用，因为 (7) 中的流形 $\mathcal{M}_\pi$ 在 (7) 是变换(10)的奇点。更一般地，任何共面或圆形[8] 构型都是如此。与 [7], 中的做法颇为相似，我们通过切换到记作

$$\mathrm{RPS}_\pi := \Big(\widehat{\mathrm{RPS}}_\pi := (\Lambda_1, \Lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2, p, q), (Z, \zeta)\Big)$$

其中 Λ_j、Z 和 ζ 与[9] 式（9）中的相同，而

$$\begin{cases} \lambda_1 = \ell_1 + \gamma_1 + \gamma \\ \lambda_2 = \ell_2 + \gamma_2 - \gamma \\ \eta_1 + \mathrm{i}\xi_1 = \sqrt{2(\Lambda_1 - \mathrm{G}_1)}e^{-\mathrm{i}(\gamma_1+\gamma)} \\ \eta_2 + \mathrm{i}\xi_2 = -\sqrt{2(\Lambda_2 - \mathrm{G}_2)}e^{\mathrm{i}(-\gamma_2+\gamma)} \\ p + \mathrm{i}q = -\sqrt{2(\mathrm{G} + \mathrm{G}_2 - \mathrm{G}_1)}e^{\mathrm{i}\gamma} \end{cases} \tag{11}$$

与 JRD 中一样，(Z, ζ) 是 SO(3)不变哈密顿量中的一个循环变量对，但现在不再出现循环坐标。这使方程组具有 5 个自由度和一个额外的积分：用 RPS_π 表示的作用量 G:

$$\mathrm{G}_{\mathrm{RPS}_\pi} := \Lambda_1 - \Lambda_2 - \frac{\eta_1^2 + \xi_1^2}{2} + \frac{\eta_2^2 + \xi_2^2}{2} + \frac{p^2 + q^2}{2}\,. \tag{12}$$

我们记为

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{\mathrm{RPS}_\pi} &:= -\frac{\mathrm{m}_1^3\mathrm{M}_1^2}{2\Lambda_1^2} - \frac{\mathrm{m}_2^3\mathrm{M}_2^2}{2\Lambda_2^2} + \mu\Big(-\frac{m_1 m_2}{|x^{(1)}_{\mathrm{RPS}_\pi} - x^{(2)}_{\mathrm{RPS}_\pi}|} + \frac{y^{(1)}_{\mathrm{RPS}_\pi} \cdot y^{(2)}_{\mathrm{RPS}_\pi}}{m_0}\Big) \\ &=: \mathrm{h_k}(\Lambda) + \mu f_{\mathrm{RPS}_\pi}(\Lambda, \lambda, z) \qquad z := (\eta, \xi, p, q) \end{aligned} \tag{13}$$

用5中的坐标表示的哈密顿量（RPS_π），并对此进行研究。
注意，式（$\mathcal{M}_\pi$ （7）中的流形现在由以下条件给出

$$\mathcal{M}_\pi = \big\{\mathrm{RPS}_\pi :\ z = 0\big\}\,.$$

接着，我们考虑 $\mathcal{M}_\pi$ 的一个如下形式的邻域

$$\mathcal{M}_{\mathrm{RPS}_\pi, \varepsilon_0} := \mathcal{L} \times \mathbb{T}^2 \times B^6_{\varepsilon_0}(0)\,,$$

其中 $B^6_{\varepsilon_0}$ 是以 $0 \in \mathbb{R}^6$ 为中心、半径为 ε_0的六维球；$\mathsf{T} := \mathsf{R}/(2\pi\mathsf{Z})$，并且 $\mathcal{L}$ 定义为

$$\mathcal{L} := \Big\{\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2) :\ \Lambda_- < \Lambda_2 < \Lambda_+\ ,\quad k_-\Lambda_2 < \Lambda_1 < k_+\Lambda_2\Big\}\,. \tag{14}$$

[8]圆形构型对应于 $\mathsf{G}_i = \Lambda_i$；共面构型对应于 $\mathsf{G} = \sigma_1\mathsf{G}_1 + \sigma_2\mathsf{G}_2$,，其中 $(\sigma_1, \sigma_2) \in \{\pm 1\}^2 \setminus \{(-1, -1)\}$。[9]定义 (11) 与 [21, 公式 (25)、(26)]之间存在一个无关紧要的差别。将 $\overline{\mathrm{RPS}}_\pi := \Big((\Lambda_1, \Lambda_2, \overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2, \overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \overline{p}, \overline{q}), (P, Q)\Big)$ 记作 [21], 中定义的坐标，我们得到以下关系：

$$\begin{cases} \overline{\lambda}_1 = \lambda_1 + \zeta \\ \overline{\lambda}_2 = \lambda_2 - \zeta \\ \overline{\eta}_1 + \mathrm{i}\overline{\xi}_1 = (\eta_1 + \mathrm{i}\xi_1)e^{-\mathrm{i}\zeta} \\ \overline{\eta}_2 + \mathrm{i}\overline{\xi}_2 = (\eta_2 + \mathrm{i}\xi_2)e^{\mathrm{i}\zeta} \\ \overline{p} + \mathrm{i}\overline{q} = (p + \mathrm{i}q)e^{\mathrm{i}\zeta} \\ P + \mathrm{i}Q = \sqrt{2(\mathrm{G} - \mathrm{Z})}\,e^{-\mathrm{i}\zeta} \end{cases}$$

但是，由于 (Z, ζ)、(P, Q) 和 ζ 并未出现在哈密顿量中，其表达式不会改变。

这里，$0 < \Lambda_- < \Lambda_+$ 任意选取（论文后文将说明对这类数的更多条件），对于固定的正[10] 数 $0 < \alpha_- < \alpha_+ < 1$，$k_\pm$ 是依赖于 $\alpha_\pm$ 和质量的常数，其定义如下：

$$k_\pm := \frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{m_0+\mu m_2}{m_0+\mu m_1}\alpha_\pm}\ . \tag{15}$$

现在取 $0 < \delta < 1$ 和[11]，并假设

$$0 < \frac{m_2}{m_1} < \min\left\{\sqrt{(1-\delta)\alpha_-}\ ,\ 1-\delta\right\}, \quad 0 < \mu < \mu_0(\delta) := \frac{\delta m_0}{m_1(1-\delta)-m_2} \tag{16}$$

那么我们[12] 有

命题 2.1（[20, 第三节和附录 A]）可以找到一个仅依赖于 $\Lambda_-, \delta, \alpha_-, m_1, m_2$ 的 $\varepsilon_0 > 0$，使得（13）中的函数 $\mathrm{H}_{\mathrm{RPS}_\pi}$ 对于 $(\Lambda,\lambda,\eta,\xi,p,q) \in \mathcal{M}_{\mathrm{RPS}_\pi,\ \varepsilon_0}$ 是实解析的。此外，对于任意 $s \in$ 自然数集 N，都存在一个正数 $\alpha^\#$，使得如果 $\alpha_+ < \alpha^\#$，则存在一个正数 $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ 和一个实解析典范变换

$$\phi_{\mathrm{BNF}}:\quad (\Lambda,\overline{\lambda},\overline{\eta},\overline{\xi},\overline{p},\overline{q}) \in \mathcal{M}_{\mathrm{RPS}_\pi,\varepsilon_1} \to (\Lambda,\lambda,\eta,\xi,p,q) \in \mathcal{M}_{\mathrm{RPS}_\pi,\varepsilon_0}$$

它将 $(\overline{\eta},\overline{\xi},\overline{p},\overline{q}) = 0$ 映射为 $(\eta,\xi,p,q) = 0$，对于所有满足以下条件的 $(\overline{\Lambda},\overline{\lambda}) \in \mathcal{L}\times\mathrm{T}^2$,: 如果

$$\mathrm{H}_{\mathrm{BNF}} := \mathrm{H}_{\mathrm{RPS}_\pi}\circ\phi_{\mathrm{BNF}} = \mathrm{h_k}(\Lambda) + \mu f_{\mathrm{BNF}}(\Lambda,\overline{\lambda},\overline{\eta},\overline{\xi},\overline{p},\overline{q}) \tag{17}$$

[10]注意，α_- 和 α_+ 分别表示半长轴比 $\alpha = a_1/a_2$ 的下界和上界，即，

$$\alpha_- \le \alpha \le \alpha_+ \qquad \forall\ (\Lambda_1,\Lambda_2) \in \mathcal{L}\ .$$

事实上，根据公式

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{m_0+\mu m_2}{m_0+\mu m_1}\alpha}$$

我们得到

$$\alpha \le \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \frac{m_0+\mu m_1}{m_0+\mu m_2}k_+^2 = \alpha_+$$

同样地，$\alpha \ge \alpha_-$。

[11]读者可能会问，为什么不等式（16）成立。这与我们希望研究这样一个相空间区域有关：标记为“1”的内行星具有更大的角动量，即 $\mathrm{G}_1 > \mathrm{G}_2$,，同时，行星的质量、偏心率以及相互倾角都很小。由于当偏心率和相互倾角趋于零时，G_i 趋于 Λ_i，根据（14），（k_- 15）中的数值必须严格大于 1。条件（16）适合确保这一点，因为它们事实上立即推出

$$1-\delta \le \frac{m_0+\mu m_2}{m_0+\mu m_1} \le 1+\delta$$

因此，根据（15），

$$k_- \ge \frac{m_1}{m_2}\sqrt{(1-\delta)\alpha_-} > 1\,.$$

[12][20, 附录 A] 中的证明是在 $\delta = 1 - \frac{1}{4\chi^2} \ge \frac{3}{4}$ 下给出的，但对于任意 $\delta \in (0,1)$ 也同样适用。事实上，对于（Λ_1, Λ_2）$\in \mathcal{L}$,

$$\Lambda_1 - \Lambda_2 = \Lambda_2\left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} - 1\right) \ge \Lambda_-(k_- - 1) \ge \Lambda_-\left(\frac{m_1}{m_2}\sqrt{(1-\delta)\alpha_-} - 1\right)\ .$$

因此，对于依赖于 Λ_-、m_1、m_2、α_- 和 δ 的 $\mathcal{L}$ 的复邻域中的(Λ_1,Λ_2)，我们有 $|\Lambda_1 - \Lambda_2| \ge \frac{\Lambda_-}{2}\left(\frac{m_1}{m_2}\sqrt{(}1-\delta)\alpha_- - 1\right)$；并且，正如 [20, 命题 III.2], 的证明中那样，可以取$\varepsilon_0 < \frac{\Lambda_-}{2}\left(\frac{m_1}{m_2}\sqrt{(1-\delta)\alpha_-} - 1\right)$，使得[20, 附录 A] 中的函数 c_1^*、c_2, c_2^* 的分母不为零，且足够小，从而排除碰撞。

[13]也就是说，在$\mathcal{M}_{\mathrm{RPS}_\pi}$上解析，$\varepsilon_0$ 并且在$\mathcal{M}_{\mathrm{RPS}_\pi}$上取实值，$\varepsilon_0$。

那么平均摄动函数

$$f^{\mathrm{av}}_{\mathrm{BNF}}(\Lambda,\overline{\eta},\overline{\xi},\overline{p},\overline{q}) := \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2} f(\Lambda,\overline{\lambda},\overline{\eta},\overline{\xi},\overline{p},\overline{q})d\overline{\lambda}_1 d\overline{\lambda}_2$$

“是 s 阶的 Birkhoff正规形”，即：

$$f^{\mathrm{av}}_{\mathrm{BNF}} = C_0(\Lambda) + \Omega\cdot\overline{\tau} + \frac{1}{2}\overline{\tau}\cdot \mathrm{T}(\Lambda)\overline{\tau} + \mathbb{1}_{s\geq 3}\sum_{j=3}^{s}\mathcal{P}_j(\overline{\tau};\Lambda) + \mathrm{O}_{2s+1}(\overline{\eta},\overline{\xi},\overline{p},\overline{q};\Lambda)$$

其中 $\Omega(\Lambda) = (\Omega_1(\Lambda), \Omega_2(\Lambda), \Omega_3(\Lambda))$；$\mathcal{P}_j(\overline{\tau};\Lambda)$ 是关于 $\overline{\tau}$ 的 j 次齐次多项式：$= \left(\frac{\overline{\eta}_1^2+\overline{\xi}_1^2}{2}, \frac{\overline{\eta}_2^2+\overline{\xi}_2^2}{2}, \frac{\overline{p}^2+\overline{q}^2}{2}\right)$，且 3×3 矩阵 $\mathrm{T}(\Lambda)$ 的行列式不恒为零。此外，ϕ_{BNF} 保持 $\mathrm{G}^{\mathrm{RPS}_\pi}$ 不变，这意味着函数

$$\overline{\mathrm{G}} := \Lambda_1 - \Lambda_2 - \frac{\overline{\eta}_1^2+\overline{\xi}_1^2}{2} + \frac{\overline{\eta}_2^2+\overline{\xi}_2^2}{2} + \frac{\overline{p}^2+\overline{q}^2}{2}$$

仍是 H 的第一积分。

2.2 双曲性

采用一组正则坐标后，便可显现其双曲型特征；这组坐标称为近日点约化（P–坐标）。这是一组进一步的正则坐标

$$\mathrm{P} := \left(\widehat{\mathrm{P}}, (\mathrm{Z},\mathrm{G},\zeta,\mathrm{g})\right) \in \mathbb{R}^{3n-2}\times\mathbb{T}^{3n-2}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}^2 \tag{18}$$

对一个 n–粒子方程组进行 SO(3) 不变性的完全约化，同时仍能保持共面运动的正则性。 P–坐标最早引入于[21], , 其正则性的证明可参见该文。我们指出，在（18）中，G、Z 和 ζ 与 JRD 中的（10）相同。与 G 共轭的坐标 g 并非（10）中的同一坐标，不过当然，（Z ζ、g）仍是可忽略坐标，并且在 SO(3) 不变方程组中 G 为常数。对于三体问题，即 $n=2$，八元组 $\widehat{\mathrm{P}}$ 为

$$\widehat{\mathrm{P}} := (\Lambda_1,\Lambda_2,\mathrm{G}_2,\Theta,\ell_1,\ell_2,\mathrm{g}_2,\vartheta)$$

与 Λ_j, ℓ_j, G_2 同式 (10中一样。为定义 Θ, g, ϑ 和 g_2, , 我们假设

$$\nu_1 := k^{(3)}\times\mathrm{C}, \qquad \mathrm{n}_1 := \mathrm{C}\times\mathrm{P}^{(1)}, \qquad \nu_2 := \mathrm{P}^{(1)}\times\mathrm{C}^{(2)}, \quad \mathrm{n}_2 = \mathrm{C}^{(2)}\times\mathrm{P}^{(2)} \tag{19}$$

不为零。注意， ν_1 在式 (19) 中与式 (8) 中相同。我们[14] 令（沿用上一节中的记号）

$$\Theta := \mathrm{C}\cdot\mathrm{P}^{(1)} = \mathrm{C}^{(2)}\cdot\mathrm{P}^{(1)} \qquad \begin{cases} \vartheta := \alpha_{\mathrm{P}^{(1)}}(\mathrm{n}_1,\nu_2) \\ \mathrm{g} := \alpha_{\mathrm{C}}(\nu_1,\mathrm{n}_1) \\ \mathrm{g}_2 := \alpha_{\mathrm{C}^{(2)}}(\nu_2,\mathrm{n}_2) \end{cases} \tag{20}$$

现在我们说明 P–坐标在哈密顿量 (5) 中的作用。我们记为

$$\mathrm{H}_{\mathrm{P}} = \mathrm{h}_{\mathrm{k}}(\Lambda_1,\Lambda_2) + \mu f_{\mathrm{P}}(\Lambda_1,\Lambda_2,\mathrm{G}_2,\Theta;\ell_1,\ell_2,\mathrm{g}_2,\vartheta;\mathrm{G})$$

[14](20) 中第一个方程里的第二个等式由 $\mathrm{C} = \mathrm{C}^{(1)}+\mathrm{C}^{(2)}$ 和 $\mathrm{C}^{(1)}\cdot\mathrm{P}^{(1)} = 0$推出。

其中

$$\mathrm{h_k}(\Lambda_1,\Lambda_2)=-\frac{\mathrm{m_1^3M_1^2}}{2\Lambda_1^2}-\frac{\mathrm{m_2^3M_2^2}}{2\Lambda_2^2},\qquad f_{\mathrm{P}}=-\frac{m_1m_2}{|x_{\mathrm{P}}^{(1)}-x_{\mathrm{P}}^{(2)}|}+\frac{y_{\mathrm{P}}^{(1)}\cdot y_{\mathrm{P}}^{(2)}}{m_0}.$$

哈密顿量（5）用 P 表示，且

$$f_{\mathrm{P}}^{\mathrm{av}}:=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{[0,2\pi]^2}f_{\mathrm{P}}d\ell_1d\ell_2$$

双重平均摄动函数。我们考察其展开

$$f_{\mathrm{P}}^{\mathrm{av}}=-\frac{m_1m_2}{a_2}\Big(1+\alpha^2\mathrm{P}+\mathrm{O}(\alpha^3)\Big)$$

其中 $\alpha:=\frac{a_1}{a_2}$ 是半长轴比。我们关注函数 P。令 $\mathcal{L}$ 如（14）所示；$c\in(0,\ 1)$，并设

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{P}}(\mathrm{G}) \ :=\ &\Big\{\Lambda=(\Lambda_1,\Lambda_2)\in\mathcal{L}:\quad \Lambda_1>\mathrm{G}+\frac{2}{c}\sqrt{\alpha_+}\Lambda_2\\ &5\Lambda_1^2\mathrm{G}-(\mathrm{G}+\frac{2}{c}\sqrt{\alpha_+}\Lambda_1)^2(4\mathrm{G}+\frac{2}{c}\sqrt{\alpha_+}\Lambda_1)>0,\\ &5\Lambda_1^2\mathrm{G}-(\mathrm{G}+\Lambda_2)(4\mathrm{G}+\Lambda_2)>0\\ &\Lambda_2>\mathrm{G}\ ,\quad \Lambda_1>2\mathrm{G}\Big\} \qquad (21)\\ \mathcal{G}_{\mathrm{P}}(\Lambda_1,\Lambda_2,\mathrm{G}) \ :=\ &\Big\{\mathrm{G}_2:\ \max\{\frac{2}{c}\sqrt{\alpha_+}\Lambda_2,\mathrm{G}\}<\mathrm{G}_2<\Lambda_2\Big\} \qquad (22)\\ \mathcal{B}_{\mathrm{P}}(\mathrm{G}) \ :=\ &\Big\{(\Theta,\vartheta):\ |\Theta|<\frac{\mathrm{G}}{2}\,,\ |\vartheta|<\frac{\pi}{2}\Big\}\end{aligned}$$

最后

$$\mathcal{A}_{\mathrm{P}}(\mathrm{G}):=\Big\{(\Lambda_1,\Lambda_2,\mathrm{G}_2):\ (\Lambda_1,\Lambda_2)\in\mathcal{L}_{\mathrm{P}}(\mathrm{G})\,,\ \mathrm{G}_2\in\mathcal{G}_{\mathrm{P}}(\Lambda_1,\Lambda_2)\Big\}$$

此外，令

$$\mathcal{N}(\mathrm{G}):=\mathcal{A}_{\mathrm{P}}(\mathrm{G})\times\mathbb{T}^3\times\mathcal{B}_{\mathrm{P}}(\mathrm{G})\,,\quad \mathcal{N}_0(\mathrm{G}):=\mathcal{A}_{\mathrm{P}}(\mathrm{G})\times\mathbb{T}^3\times\big\{0\,,0\big\}. \qquad (23)$$

注意，$\mathcal{N}_0$ 中的相点在几何上表示与外行星作逆行运动的共面运动。

命题 2.2（[20, 第四节]）4 自由度哈密顿量 $\mathrm{H_P}$ 在 $\mathcal{N}$ 上是实解析的。它在 $\mathcal{N}_0$ 上有一个平衡点。对于 P，这个平衡点是双曲型的[15] 。

2.3 环面族的存在与共存

定理 1.1 和定理1.2 现在可用于证明三体问题中满维环面和余维 2 的带须环面的存在性。事实上：

[15] In [21] 证明了一个稍一般的结果：当 $\mathcal{L}_{\mathrm{P}}$ 中的21）不按等 式

$$5\Lambda_1^2\mathrm{G}-(\mathrm{G}+\Lambda_2)(4\mathrm{G}+\Lambda_2)>0 \qquad (24)$$

并且，(22) 中的 $\mathcal{G}_{\mathrm{P}}$ 取为 $\Big\{\mathrm{G}_2:\ \max\{\frac{2}{c}\sqrt{\alpha_+}\Lambda_2,\mathrm{G}\}<\mathrm{G}_2<\min\{\Lambda_2,\mathrm{G}^\star\}\Big\}$，其中 $\mathrm{G}^\star$ 是多项式 $\mathrm{G}_2\to 5\Lambda_1^2\mathrm{G}-(\mathrm{G}+\mathrm{G}_2)(4\mathrm{G}+\mathrm{G}_2)$ 的唯一根。但由于 (24) 保证 $\Lambda_2<\mathrm{G}^\star$，在此限制下，$\mathcal{G}_{\mathrm{P}}$ 可取为 (22) 中的形式。

– 在条件 (1) 下，根据定理1.1，找到了一个不变[16] 集 $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_\varepsilon$ 对应于哈密顿量 $\mathrm{H}_{\mathrm{RPS}_\pi}$，其频率为 5 维，且其测度满足

$$\mathrm{meas}\mathcal{M}_\varepsilon > \mathrm{meas}\mathcal{F} > \left(1 - C_*\varepsilon^{\frac{1}{2}+\overline{s}}\right)\mathrm{meas}\mathcal{M}_\varepsilon \tag{25}$$

其中 $\overline{s} = s - 2$。

– 在条件（3）下，若 $a = \alpha_+$，根据定理 1.2，对于任意 $\mathrm{G} \in \mathbb{R}_+$，可以找到一个不变集 $\mathcal{H}(\mathrm{G}) \subset \mathcal{N}_0(\mathrm{G})$，其对于 H 具有 3 维频率$_{\mathrm{P}}$，并配备有 4 维稳定流形和不稳定流形[17]，，其测度满足

$$\mathrm{meas}\mathcal{N}_0(\mathrm{G}) > \mathrm{meas}\mathcal{H}(\mathrm{G}) > \left(1 - C_*\sqrt{\alpha_+}\right)\mathrm{meas}\mathcal{N}_0(\mathrm{G})\ . \tag{26}$$

接下来，我们将说明，上面构造的不变集 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{H}(\mathrm{G})$“具有共同的存在定义域”。我们必须使这一断言更加精确，主要是因为 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{H}(\mathrm{G})$是通过不同的形式体系构造的。

Let

$$\phi^{\mathrm{P}}_{\mathrm{RPS}_\pi}\ :\ \mathrm{RPS}_\pi \to \mathrm{P} \tag{27}$$

定义良好的 与 $_{\mathrm{P}}$ 之间的典则坐标变换，在一个满测度集上有定义。令 $\mathbb{G}_*$ 和 $\mathbb{G}_0$ 分别为函数（12）下的像:

$$\mathbb{G}_0 := \mathrm{G}_{\mathrm{RPS}_\pi}(\mathcal{M}_\varepsilon)\ , \qquad \mathbb{G}_* := \mathrm{G}_{\mathrm{RPS}_\pi}(\mathcal{F})$$

集合 $\mathcal{M}_\varepsilon$、 $\mathcal{F}$。由于 $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_\varepsilon$，于是 $\mathrm{G}_* \subset \mathrm{G}_0$。对于任意 $\mathrm{G}_0 \in \mathbb{G}_0$, $\mathrm{G}_* \in \mathbb{G}_*$，令

$$\mathcal{M}_\varepsilon(\mathrm{G}_0) := \mathcal{M}_\varepsilon \cap \{\mathrm{G}_{\mathrm{RPS}_\pi} = \mathrm{G}_0\}\ , \qquad \mathcal{F}(\mathrm{G}_*) := \mathcal{F} \cap \{\mathrm{G}_{\mathrm{RPS}_\pi} = \mathrm{G}_*\}$$

$\mathcal{M}_\varepsilon(\mathrm{G}_0)$ 和 $\mathcal{F}(\mathrm{G}_*)$ 是不变集，因为 $\mathrm{G}_{\mathrm{RPS}_\pi}$ 在 $\mathrm{H}_{\mathrm{RPS}}$ 的运动过程中守恒。定义:

$$\mathcal{M}'_\varepsilon(\mathrm{G}_0) := \phi^{\mathrm{P}}_{\mathrm{RPS}_\pi}(\mathcal{M}_\varepsilon(\mathrm{G}_0))\ , \qquad \mathcal{F}'(\mathrm{G}_*) := \phi^{\mathrm{P}}_{\mathrm{RPS}_\pi}(\mathcal{F}(\mathrm{G}_*))\ .$$

从 G_0, G_* 中剔除零测度集之后，对于所有 $\mathrm{G}_0 \in \mathbb{G}_0$, $\mathrm{G}_* \in \mathbb{G}_*$，集合 $\mathcal{F}'(\mathrm{G}_*)$、 $\mathcal{M}'_\varepsilon(\mathrm{G}_0)$ 都有良好定义。接下来将其拆分

$$\mathcal{M}'_\varepsilon(\mathrm{G}_0) = \widehat{\mathcal{M}}'_\varepsilon(\mathrm{G}_0) \times \{\mathrm{G} = \mathrm{G}_0\ ,\ \mathrm{g} \in \mathbb{T}\} \qquad \mathcal{F}'(\mathrm{G}_*) = \widehat{\mathcal{F}}'(\mathrm{G}_*) \times \{\mathrm{G} = \mathrm{G}_*\ ,\ \mathrm{g} \in \mathbb{T}\}$$

（27）中 $\phi^{\mathrm{P}}_{\mathrm{RPS}_\pi}$ 的体积保持性质、勒贝格积分的单调性以及（25）中的界保证了

$$\mathrm{meas}\widehat{\mathcal{M}}'_\varepsilon(\mathrm{G}_*) > \mathrm{meas}\widehat{\mathcal{F}}'(\mathrm{G}_*) > \left(1 - C_1\varepsilon^{\frac{1}{2}+\overline{s}}\right)\mathrm{meas}\widehat{\mathcal{M}}'_\varepsilon(\mathrm{G}_*) \qquad \forall\ \mathrm{G}_* \in \mathbb{G}_*\ . \tag{28}$$

其中某个 $C_1 > 0$。

现在回顾 $\mathcal{N}(\mathrm{G})$、 $\mathcal{N}_0(\mathrm{G})$ 在（23）中的定义，以及 $\mathcal{H}(\mathrm{G})$ 在（26）中的定义。本文的主要结果如下

[16]更准确地说，定理 1.1 应用于哈密顿量 $\mathrm{H}_{\mathrm{BNF}}$ （17）中，因此

$$n_1 = 2\ ,\ n_2 = 3\ ,\ V = \mathcal{L}\ ,\ \varepsilon = \varepsilon_1\ ,\ H_0 = \mathrm{h}_{\mathrm{k}}\ ,\ P = f_{\mathrm{BNF}}$$

对应于 $\overline{\phi}$ 定理 1.1的证明所得到的不变集在[17]定理 1.2 应用于命题 $_{\mathrm{P}}$ 2.2的哈密顿量 H，因此

$$n_1 = 2\ ,\ n_2 = 1\ ,\ V = \mathcal{A}_{\mathrm{P}}(\mathrm{G})$$
$$H_0 = \mathrm{h}_{\mathrm{k}} - \frac{m_1 m_2}{a_2}\ ,\ P_0 = -\frac{m_1 m_2}{a_2}\alpha^2\mathrm{P}\ ,\ P_1 = -\frac{m_1 m_2}{a_2}\mathrm{O}(\alpha^3)\ ,\ a = \alpha_+$$

定理 2.1 令 $\sigma > 0$ 为半整数。存在 ε_*, $c_0 \in (0,1)$，使得若 $\varepsilon < \varepsilon_*$、$G_* \in G_*$、$G_* > c_0^{-1}\varepsilon^2$, $\alpha_+ \le c_0\varepsilon^{12}$ 且 μ 满足条件 (1)、(3)，其中 $a = \alpha_+$ 和 $s = \sigma + \frac{7}{2}$，则存在一个非空集合 $\mathcal{A}_\star(G_*)$，令

$$\mathcal{Q}(G_*) := \mathcal{A}_\star(G_*) \times \mathbb{T}^3 \times \mathcal{B}_1(\varepsilon, G_\star)\,, \qquad \mathcal{Q}_0(G_*) := \mathcal{A}_\star(G_*) \times \mathbb{T}^3 \times \{(0,0)\}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$并记 $\mathcal{F}'_*(G_*)$、$\mathcal{H}_*(G_*)$ 分别为 $\mathcal{F}'(G_*)$、$\mathcal{H}(G_*)$ 与 $\mathcal{Q}(G_*)$、$\mathcal{Q}_0(G_*)$ 的交集，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$则 $\mathcal{F}'_*(G_*)$、$\mathcal{H}_*(G_*)$ 非空，事实上满足

$$\mathrm{meas}\mathcal{Q}(G_*) \ge \mathrm{meas}\widehat{\mathcal{F}}'_*(G_*) \ge \left(1 - \frac{\varepsilon^\sigma}{\varepsilon_*^\sigma}\right) \mathrm{meas}\mathcal{Q}(G_*) \tag{29}$$

$$\mathrm{meas}\mathcal{Q}_0(G_*) \ge \mathrm{meas}\widehat{\mathcal{H}}_*(G_*) \ge \left(1 - \frac{\alpha_+}{c_0\varepsilon^{12}}\right) \mathrm{meas}\mathcal{Q}_0(G_*)\,. \tag{30}$$

定理 2.1 的证明依赖于一些技术性结果（下文的命题2.3、2.4 和2.5 ），现陈述如下，并将在稍后给出证明。

命题 2.3 设对于某个适当的纯数 $\underline{k} \in (1,2)$，有 $\Lambda_- < G$, $k_- \le \underline{k}$ $k_+ \ge 2$, $\alpha_+ \le \frac{c^2}{16}$。取 Λ_+ 为 $\Lambda_2 > G$ 的唯一值，使得 $\mathcal{C}$ 与直线 $\Lambda_1 = 2\Lambda_2$ 在 $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (2\Lambda_+, \Lambda_+)$ 处相交。令

$$\mathcal{L}_0(G) := \left\{(\Lambda_1, \Lambda_2) : \quad G \le \Lambda_2 \le \Lambda_+\,, \quad (G + \Lambda_2)\sqrt{\frac{4G + \Lambda_2}{5G}} < \Lambda_1 < \min\{k_+\Lambda_2\,,\ 2\Lambda_+\}\right\}$$

$$\mathcal{A}_0(G) := \left\{(\Lambda_1, \Lambda_2, G_2) : \ (\Lambda_1, \Lambda_2) \in \mathcal{L}_0(G)\,,\ G_2 \in \mathcal{G}_{\mathrm{P}}(\Lambda_1, \Lambda_2)\right\}$$

那么集合

$$\mathcal{N}_0(G) := \mathcal{A}_0(G) \times \mathbb{T}^3 \times \mathcal{B}_{\mathrm{P}}(G)$$

是 $\mathcal{N}(G)$ 的子集。

命题 2.4 存在仅依赖于 Λ_+/G、Λ_-/G 的 $c_1 \in (0,1)$，使得对任意 $\gamma < c_1^2\varepsilon^2$，令

$$\mathcal{L}_1(G) := \left\{(\Lambda_1, \Lambda_2) \in \mathcal{L}\ ,\ |\Lambda_1 - \Lambda_2 - G| < c_1^2\varepsilon^2\right\}$$

$$\mathcal{G}_1(\Lambda_2) := \left\{G_2 : \ \Lambda_2 - c_1^2\varepsilon^2 < G_2 < \Lambda_2 - \gamma\right\}$$

$$\mathcal{A}_1(G) := \left\{(\Lambda_1, \Lambda_2, G_2) : \quad (\Lambda_1, \Lambda_2) \in \mathcal{L}_1\ , \quad G_2 \in \mathcal{G}_1(\Lambda_2)\right\}$$

$$\mathcal{B}_1(G, \varepsilon) := \left\{(\Theta, \vartheta) : \quad \Theta^2 < c_1^2 G\varepsilon^2\,,\ \vartheta^2 < c_1^2\frac{\varepsilon^2}{G}\right\}$$

那么集合

$$\mathcal{N}_1(G, \varepsilon) := \mathcal{A}_1(G) \times \mathbb{T}^3 \times \mathcal{B}_1(G, \varepsilon)$$

$\widehat{\ }$是 $\mathcal{M}'_\varepsilon(G)$ 的子集。

命题 2.5 假设 $G \ge 10c_1^2\varepsilon^2$ 和 $\alpha_+ < \frac{c^2}{16}$。则 $\mathcal{A}_0(G)$ 与 $\mathcal{A}_1(G)$ 的交集非空 $\mathcal{A}_\star(G)$，满足

$$\mathrm{meas}(\mathcal{A}_\star(G)) \ge \frac{9}{10}(c_1^2\varepsilon^2 - \gamma)c_1^4\varepsilon^4$$

我们证明定理 2.1 如何由上述命题推出。 $\mathcal{Q}(\mathrm{G}_*)$ 是 $\mathcal{M}'_\varepsilon(\mathrm{G}_*)$ 的子集，并且 $\mathcal{N}_\varepsilon(\mathrm{G}_*)$，以及

$$\mathrm{meas}\mathcal{Q}(\mathrm{G}_*) = C_1\varepsilon^8 = C_2\varepsilon^2\,\mathrm{meas}\widehat{\mathcal{M}}'_\varepsilon\,.$$

(28) 中的界保证

$$\mathrm{meas}\left(\widehat{\mathcal{M}}'_\varepsilon(\mathrm{G}_*)\setminus\widehat{\mathcal{F}}'(\mathrm{G}_*)\right) < C_3\varepsilon^{\frac12+\overline{s}}\,\mathrm{meas}\widehat{\mathcal{M}}'_\varepsilon(\mathrm{G}_*)\qquad\forall\ \mathrm{G}_*\in\mathbb{G}_*\,.$$

另一方面，如果 $\mathcal{F}'_\varepsilon(\mathsf{G}_*)\cap\mathcal{Q}(\mathsf{G}_*)$ 为空，那么我们就有

$$\mathrm{meas}\left(\widehat{\mathcal{M}}'_\varepsilon(\mathrm{G}_*)\setminus\widehat{\mathcal{F}}'(\mathrm{G}_*)\right)\ge\ \mathrm{meas}\mathcal{Q}(\mathrm{G}_*) = C_2\varepsilon^2\,\mathrm{meas}\widehat{\mathcal{M}}'_\varepsilon(\mathrm{G}_*)$$

如果 $\overline{s}>\frac32$ 且 ε 很小，这就与前一个不等式矛盾。最后，如果 $\mathsf{G}_*\in\mathsf{G}_*$,

$$\mathrm{meas}\left(\mathcal{Q}_\varepsilon(\mathrm{G}_*)\setminus\widehat{\mathcal{F}}'(\mathrm{G}_*)\right)\le\ \mathrm{meas}\left(\widehat{\mathcal{M}}'_\varepsilon(\mathrm{G}_*)\setminus\widehat{\mathcal{F}}'(\mathrm{G}_*)\right) < C_3\varepsilon^{\frac12+\overline{s}}\,\mathrm{meas}\widehat{\mathcal{M}}'_\varepsilon(\mathrm{G}_*) = C_4\varepsilon^{\overline{s}-\frac32}\,\mathrm{meas}\mathcal{Q}_\varepsilon(\mathrm{G}_*)$$

并且我们有 (29)，其中 $\sigma=\overline{s}-\frac32=s-\frac72$，其中 $s\ge4$。式 (30) 的证明类似。

2.4 命题 2.3、2.4 和 2.5 的证明

命题 **2.3** 我们只需证明 $\mathcal{L}_0(\mathrm{G})\ \subset\ \mathcal{L}_{\mathrm{P}}(\mathsf{G})$。我们改用坐标

$$y:=\frac{\Lambda_1}{\mathrm{G}}\,,\qquad x:=\frac{\Lambda_2}{\mathrm{G}}\,.$$

我们将（y, x）的定义域记为 $\mathcal{X}_{\mathrm{P}}:=\mathsf{G}^{-1}\mathcal{L}_{\mathrm{P}}$，并将

$$x_-:=\frac{\Lambda_-}{\mathrm{G}}\,,\qquad x_+:=\frac{\Lambda_+}{\mathrm{G}}$$

$\mathcal{X}_{\mathrm{P}}$ 可以写成以下三个集合的交集:

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_1 &:= \left\{(y,x):\quad 1\le x\le x_+\,,\quad y>2\,,\ \max\{k_-\,x,(1+x)\sqrt{\frac{4+x}{5}}\}<y<k_+\,x\right\}\\
\mathcal{X}_2 &:= \left\{(y,x):\quad 1\le x\le x_+\,,\quad y>1+\frac{2}{c}\sqrt{\alpha_+}x\right\}\\
\mathcal{X}_3 &:= \left\{(y,x):\quad 1\le x\le x_+\,,\quad y>2\,,\quad 5y^2-(1+\frac{2}{c}\sqrt{\alpha_+}y)^2(4+\frac{2}{c}\sqrt{\alpha_+}y)>0\right\}
\end{aligned}$$

我们证明 $\mathcal{X}_0:=\mathsf{G}^{-1}\mathcal{L}_0$ 是它们的子集。曲线

$$\mathcal{C}:\qquad y=(1+x)\sqrt{\frac{4+x}{5}}\qquad x\ge1$$

经过 $P_0=(1,2)$。我们将 $\underline{k}$ 记为直线 $y=kx$ 在 P_0处与 $\mathcal{C}$ 相切时的斜率。经过 P_0 的直线 $y=kx$ 的斜率显然为 $\overline{k}=2$。我们假设

$$k_-\le\underline{k}\,,\qquad k_+\ge\overline{k}$$

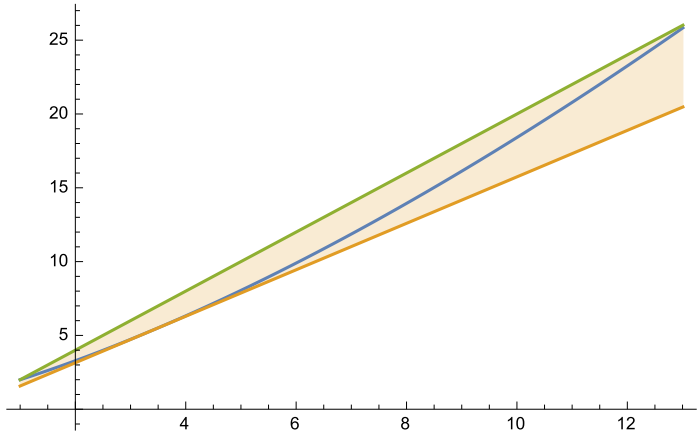

图 1：蓝色曲线为 $\mathcal{C}$；橙色直线的斜率为 k_-，绿色直线的斜率为 k_+(MATHEMATICA)。

并选取 (x_+, y_+) 作为唯一满足 $x > 1$ 的 (x, y)，使得 $\mathcal{C}$ 在 (x, y) 处与 $y = 2x$ 相交。在这些假设下，我们有：

$$\mathcal{X}_1 = \left\{ (y, x) : \quad 1 \le x \le x_+ \,, \quad (1+x)\sqrt{\frac{4+x}{5}} < y < k_+ \, x \right\} \supset \mathcal{X}_0$$

在 $\mathcal{C}$ 处与 $P_0 = (1, 2)$相切的直线方程为

$$y = \frac{6}{5}x + \frac{4}{5}$$

由于我们有 $\alpha_+ < \frac{c^2}{4}$，且 $x > 1$ 和 $\mathcal{C}$ 是凸的，因此有

$$1 + \frac{2}{c}\sqrt{\alpha_+}x \le 1 + x \le \frac{6}{5}x + \frac{4}{5} \le (1+x)\sqrt{\frac{4+x}{5}}$$

这表明 $\mathcal{X}_2 \supset \mathcal{X}_0$。至于 $\mathcal{X}_3$，我们注意到对于

$$\alpha_+ \le \frac{c^2}{16}$$

它是

$$5y^2 - (1 + \frac{2}{c}\sqrt{\alpha_+}y)^2(4 + \frac{2}{c}\sqrt{\alpha_+}y) \ge 5y^2 - \left(1 + \frac{y}{2}\right)^2 \left(4 + \frac{y}{2}\right) = \frac{1}{4}(y-2)(y-y_-)(y_+ - y)\,.$$

with

$$y_\pm = 13 \pm \sqrt{185}\,.$$

由于 $y_- < 0$ 和 $(y-2)(y_+ - y) \ge 0$ 在 $\mathcal{X}_0$上，我们有 $\mathcal{X}_3 \supset \mathcal{X}_0$。 □

注释 2.1 命题$\underline{k}$, Λ_+ 的数值2.3 可选为

$$\Lambda_+ = \frac{\mathrm{G}}{2}\left(13 + \sqrt{185}\right), \quad \underline{k} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{10}(69 + 11\sqrt{33})} \sim 1.57$$

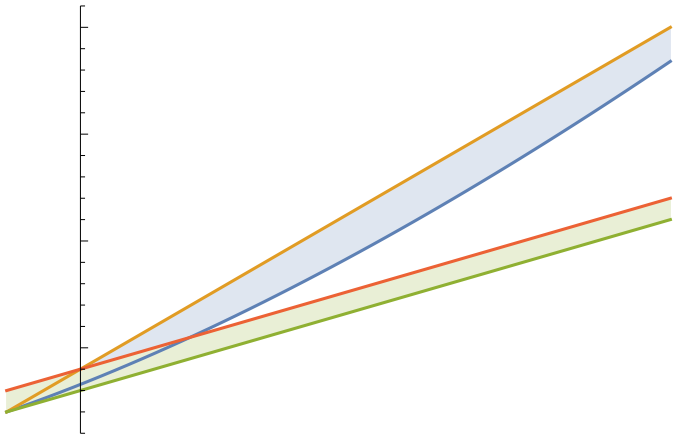

图 2： $\mathcal{L}_0$(G)（蓝色）和 $\mathcal{L}_1$(G)（绿色）。

Λ_+ 与证明过程中通过 $\Lambda_+ = x_+$G.$\underline{k}$ 计算得到的数值 x_+ 有关。$\underline{k}$ 定义为在 $\mathcal{C}$ 处与之相切的直线 $y = kx$ 的斜率。我们可以通过消去两个方程中的 y 来计算它，得到三次方程

$$x^3 + (6 - 5k^2)x^2 + 9x + 4 = 0. \tag{31}$$

令此方程与下式相等，从而施加相切条件

$$(x - a)^2(x - b) = 0 \tag{32}$$

其中 a 是切点的横坐标。令（31）和（32）中的相应系数相等，得到

$$\begin{cases} -(b + 2a) = 6 - 5k^2 \\ 2ab + a^2 = 9 \\ -a^2 b = 4 \end{cases} \tag{33}$$

通过第二个和第三个方程消去 b，得到

$$a^3 - 9a - 8 = 0$$

它有以下三个根:

$$a_0 = -1, \qquad a_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

因此唯一可接受的值是

$$a = a_+ = \frac{1 + \sqrt{33}}{2}\ .$$

对于 a 的这一取值，求解方程组（33）可得

$$b = \frac{-17 + \sqrt{33}}{32}, \qquad k = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{10}(69 + 11\sqrt{33})} = \underline{k}\,. \quad \square$$

命题的证明 **2.4** 由（11），可得

$$|z|^2 = \eta_1^2 + \xi_1^2 + \eta_2^2 + \xi_2^2 + p^2 + q^2 = 2(\mathrm{G} + \mathrm{G}_2 - \mathrm{G}_1) + 2(\Lambda_1 - \mathrm{G}_1) + 2(\Lambda_2 - \mathrm{G}_2)\,.$$

由等式

$$\begin{aligned}\mathrm{G}_1 &= \sqrt{\mathrm{G}^2+\mathrm{G}_2^2-2\Theta^2+2\sqrt{\mathrm{G}^2-\Theta^2}\sqrt{\mathrm{G}_2^2-\Theta^2}\cos\vartheta}\\ &= \mathrm{G}+\mathrm{G}_2+\mathrm{O}\left(\frac{\Theta^2}{\mathrm{G}+\mathrm{G}_2}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{\Theta^2\mathrm{G}_2}{\mathrm{G}(\mathrm{G}+\mathrm{G}_2)}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{\Theta^2\mathrm{G}}{\mathrm{G}_2(\mathrm{G}+\mathrm{G}_2)}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{\vartheta^2\mathrm{G}\mathrm{G}_2}{\mathrm{G}+\mathrm{G}_2}\right)\end{aligned}$$

根据 $\mathcal{N}_1$(G) 的定义，结论显然成立。□

Pro命题 2.5 设 $\Lambda_2^\star$ 是平面（Λ_2, Λ_1）中交点的横坐标
betw两条曲线之间

$$\Lambda_1 = (\mathrm{G}+\Lambda_2)\sqrt{\frac{4\mathrm{G}+\Lambda_2}{5\mathrm{G}}}\ , \qquad \text{and} \qquad \Lambda_1 = \Lambda_2+\mathrm{G}+c_1^2\varepsilon^2\ .$$

使用坐标 $x := \frac{\Lambda_2}{\mathrm{G}}$。令 $x^\star := \frac{\Lambda_2^\star}{\mathrm{G}}$、$\theta := \frac{c_1^2\varepsilon^2}{\mathrm{G}}$、$\zeta := \frac{\gamma}{\mathrm{G}}$，其中 $\zeta<\theta$，集合 $\mathcal{A}_\star$(G):=$\mathcal{A}_0$(G) ∩ $\mathcal{A}_1$(G) 的测度为

$$\mathrm{meas}(\mathcal{A}_\star(\mathrm{G})) = \mathrm{G}^3\int_{1+\zeta}^{x^\star} F_1(x)F_2'(x)dx$$

其中

$$\begin{aligned}F_1(x) &= \min\Big\{2x,\ x+1+\theta\Big\}-(1+x)\sqrt{\frac{4+x}{5}}\\ F_2(x) &= \min\Big\{\theta-\zeta,\ x-1-\zeta,\ mx-\zeta\Big\}\end{aligned}$$

并且为简便起见，令 $m := 1-\frac{2}{c}\sqrt{\alpha_+}$。于是，

$$\mathrm{meas}(\mathcal{A}_\star(\mathrm{G})) \geq \mathrm{G}^3\int_{1+\zeta}^{x^\star} F_1(x)F_2(x)dx\ . \tag{34}$$

为了进一步推进，我们需要对 $x^\star$ 给出一个定量界。事实上，我们有

断言 2.1 若 $0<\theta<\frac{1}{10}$，则 $1+4\theta<x^\star<1+6\theta$。

为避免打断主要证明，断言的证明推迟到下文给出。

由于我们已假设 G $\geq 10c_1^2\varepsilon^2$ 且 $\alpha_+\leq\frac{c^2}{16}$，因此 G $\geq \frac{\frac{12}{c}\sqrt{\alpha_+}}{1-\frac{2}{c}\sqrt{\alpha_+}}c_1^2\varepsilon^2$。在新变量中，这就是 $\theta\leq$ 6 $\frac{m}{(1-m)_\circ}$但是

$$x^*<1+6\theta\leq\frac{1}{1-m} \qquad\Longrightarrow\qquad x-1-\zeta\leq mx-\zeta \quad\forall\ x<x^*$$

由此可得

$$F_2(x)=\begin{cases} x-1-\zeta & \text{if} \quad 1+\zeta\leq x\leq 1+\theta\\ \\ \theta-\zeta & \text{if} \quad 1+\theta<x\leq x^\star\end{cases}$$

观察 可见第二个不等式定义良好，因为如前所述， $x^\star>1+4\theta$。函数 $F_1(x)$
分解 在相同的区间内：

$$F_1(x)=\begin{cases} 2x-(1+x)\sqrt{\frac{4+x}{5}} & \text{if} \quad 1+\zeta\leq x\leq 1+\theta\\ \\ x+1+\theta-(1+x)\sqrt{\frac{4+x}{5}} & \text{if} \quad 1+\theta<x\leq x^\star\end{cases} \tag{35}$$

由于 $\zeta < \theta$，式（34）中积分的下界为

$$\int_{1+\zeta}^{x^\star} F_1(x)F_2(x)dx \geq \int_{1+\theta}^{x^\star} F_1(x)F_2(x)dx = (\theta-\zeta)\int_{1+\theta}^{x^\star} F(x)dx$$

with

$$F(x) := x+1+\theta-(1+x)\sqrt{\frac{x+4}{5}} \tag{36}$$

（35）中第二行的函数。由于 F 是一个线性函数与一个凸函数之差，因此它是凹函数。于是我们有

$$F(x) \geq F(1) + \frac{F(x^\star)-F(1)}{x^\star-1}(x-1) \qquad \forall\ 1 \leq x \leq x^\star$$

由于 $F(x^\star) = 0$ 且 $F(1) = \theta$，这个不等式变为

$$F(x) \geq \frac{x^\star - x}{x^\star - 1}\theta \qquad \forall\ 1 \leq x \leq x^\star$$

因此

$$\int_{1+\theta}^{x^\star} F(x)dx \geq \frac{\theta}{x^\star-1}\int_{1+\theta}^{x^\star}(x^\star-x)dx = \frac{\theta}{2}\frac{(x^\star-1-\theta)^2}{x^\star-1} \geq \frac{9}{10}\theta^2$$

用到了 $1+4\theta < x^\star < 1+6\theta$。
剩下的就是证明断言2.1。 $x^\star$ 定义为区间（1， F ）中方程（36）的函数 $+\infty$的零点。将方程左边乘以

$$x+1+\theta-(1+x)\sqrt{\frac{x+4}{5}} = 0$$

乘以 $x+1+\theta+(1+x)\sqrt{\frac{x+4}{5}}$ 后，我们得到一个三次代数方程

$$x^3+x^2+(1+10\theta)x-1-10\theta-5\theta^2 = 0$$

对于 $x \geq -1$ ，它与初始方程完全等价。我们计划对左侧的函数应用二分法论证，将其记为 $G(x)$。我们有

$$G(1+4\theta) = \theta(64\theta^2+19\theta-4)\ , \qquad G(1+6\theta) = \theta(216\theta^2+79\theta+4)$$

并且不难验证

$$G(1+4\theta) < 0 \qquad G(1+6\theta) > 0 \qquad \forall\ 0 < \theta < \frac{-19+\sqrt{1385}}{128} = 0.142\ldots$$

要证明唯一性，只需注意到函数 $x \in (0,+\infty) \to G(x)$ 对所有$\theta > 0$都是递增的。证明至此完成。□

3 定量 KAM理论

3.1 定理证明1.1

定理的证明 1.1 基于对以下内容的应用： [6, 命题 3]。该方法与定理 [6, 1.3], 的证明中所用的方法完全类似，因此我们只说明需要作何

修改定理 [6, 1.3] 的证明，才能得到定理 1.1的证明。多项式 $N(I,\ r$在 [6, 第 4] 节中的第一个未编号公式里，应改为

$$N(I,r)=P_0(I)+\sum_{i=1}^{m}\Omega_i(I)r_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\beta_{ij}(I)r_ir_j+\mathbb{1}_{s\geq 3}\sum_{j=3}^{s}\mathcal{P}_j(r;I)\,. \tag{37}$$

[6] 中的方程 (60) 和 (61) 可分别修改为

$$\begin{aligned}&\sup_{B_\varepsilon^{2m}\times V_{\rho_0}}|\tilde{P}_{\rm av}|\leq C\varepsilon^{2s+1}\qquad\forall\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0\\&\mu<\frac{\varepsilon^{2s+2}}{(\log\varepsilon^{-1})^{2\tau+1}}\qquad\overline{\gamma}>\Big(\frac{6(2s+1)}{s_0}\Big)^{\tau+\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{\mu}(\log\varepsilon^{-1})^{\tau+\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{s+\frac{1}{2}}}\,.\end{aligned} \tag{38}$$

类似于 [6], , 接下来在 [6], 中应用引理 A.1，但将 K 的选取修改为

$$K=\frac{6(2s+1)}{s_0}\log\varepsilon^{-1} \tag{39}$$

并保持其他量不变。由此可得到类似于 [6] 中方程 (62) 的界，~其中 H_0 如 [6] 所示，$N\ (\overline{I},\ \overline{r})$ 如 (37) 所示，$\mu P_{\rm av}\ (\overline{p},\ \overline{q},\ \overline{I})\ =f_{\rm BNF}\ (I,\ \overline{p},\ \overline{q})\ -N\ (\overline{I},\ \overline{r})$ 由 (A_2) 可知均被 $C\mu\varepsilon^{2s+1}$ 一致有界。由于 (39) 中 K 的选取以及 (38) 中 $\overline{\gamma}$ 的选取，[6] 中方程 (63) 的类似界也成立，只需将右端替换为 $\overline{C}\mu\varepsilon^{2s+1}$。此时，按照 [6] 中定理 1.3 证明的步骤 2 所给出的指引进行。也就是说，需要重复定理 1.4 的证明（此前已在 [6] 中证明）中的步骤 5 和 6，但作如下修改：[6] 中方程 (47) 的环带 $\mathcal{A}\ (\varepsilon)$ 应取为

$$\mathcal{A}(\varepsilon)=\Big\{J\in\mathbb{R}^m:\ \check{c}_1\varepsilon^{s+\frac{1}{2}}<J_i<\check{c}_2\varepsilon^2\ ,\quad 1<i<m\Big\}$$

并且，[6] 方程 (48) 中的数字 $\check{\rho}$ 应替换为 $\check{\rho}:=\min\{\check{c}_1\varepsilon^{s+\frac{1}{2}}/2,\ \overline{\rho}/48\}$。其他量保持不变。在 [6] 定理 1.4 的证明中剩余的步骤 5 和 6 里，将所有公式中出现的数字“5”替换为 $(2s+1)$，并将 [6] 方程 (56)（以及下文的公式）中的 $\varepsilon^{n_2/2}$ 替换为 $\varepsilon^{m(s-\frac{3}{2})}$。□

3.2 定理1.2 的证明

定理 1.2 的证明与定理 1.1的证明思路相同，但其依据是命题的推广（下文的定理 3.1 ），我们现在陈述该命题。与 [6] $\mathcal{D}_{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \tau}\subset$ 类似，R^n 表示满足以下条件的向量 $\omega=(\omega_1,\omega_2)\in\mathrm{R}^{n_1}\times\mathrm{R}^{n_2}$ 的集合：对任意$k=(k_1,k_2)\in\mathrm{Z}^{n_1}\times\mathrm{Z}^{n_2}\setminus\{0\}$，不等式

$$|\omega_1\cdot k_1+\omega_2\cdot k_2|\geq\begin{cases}\dfrac{\gamma_1}{|k|^\tau}\quad\text{if}\quad k_1\neq 0\ ;\\[2ex]\dfrac{\gamma_2}{|k_2|^\tau}\quad\text{if}\quad k_1=0\ ,\quad k_2\neq 0\ .\end{cases} \tag{40}$$

定理 3.1 设 $n_1,\ n_2\in$ 自然数集，$n:=n_1+n_2,\ \tau>n,\ \gamma_1\geq\gamma_2>0,\ 0<s\leq\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon},\ \rho>0,$ $A:=D_\rho\times B^2_{\varepsilon+\varepsilon}$，并设

$$\mathrm{H}(I,\psi,p,q)=\mathrm{h}(I,pq)+\mathrm{f}(I,\psi,p,q)$$

在 $A\times\mathrm{T}^n_{s+s}$ 上实解析。设

$$I=(I_1,I_1)\,,\quad\varpi(I,pq):=\partial_{(I,pq)}\mathrm{h}(I,pq)=(\omega_1(I_1,I_2,pq),\omega_2(I_1,I_2,pq),\nu(I_1,I_2,pq))$$

其中 $\omega_k(I_1,I_2,pq):=\partial_{I_k}\mathsf{h}(I_1,I_2,pq)$，并假设映射 $I\in D_\rho\to\omega(I,J)$ 对所有 $J=pq$ 都是 D_ρ 的微分同胚，且 $(p,q)\in B^2_\varepsilon$，海森矩阵 $U(I,J):=\partial^2_I\mathsf{h}(I,J)$ 非奇异。设[18]

$$M\geq\|\partial\omega\|_A\,,\ \widehat{M}\geq\|\partial\omega_1\|_A\,,\ \overline{M}\geq\|U^{-1}\|_A\,,\ E\geq\|\mathsf{f}\|_{\rho,\overline{s}+s}\,,\quad \lambda\leq\inf|\operatorname{Re}\nu|_A\,.$$

为[19] 简单起见，

$$2\frac{s^\tau\gamma_2}{6^\tau\lambda}\leq 1\,. \tag{41}$$

定义

$$\begin{aligned}
&\widehat{c}:=2^7(n+1)(24)^\tau\,,\quad \widetilde{c}:=2^6\\
&K:=\frac{32}{s}\ \log_+\left(\frac{EM^2L}{\gamma_1^2}\right)^{-1}\quad\text{where}\quad \log_+a:=\max\{1,\log a\}\\
&\widehat{\rho}:=\min\left\{\frac{\gamma_1}{2MK^{\tau+1}}\,,\ \frac{\gamma_2}{2\widehat{M}K^{\tau+1}}\,,\ \rho\right\},\quad \widetilde{\rho}:=\min\left\{\widehat{\rho},\ \frac{\varepsilon^2}{s}\right\}\\
&L:=\max\left\{\overline{M}\,,\ M^{-1}\,,\ \widehat{M}^{-1}\right\}\\
&\widehat{E}:=\frac{EL}{\widehat{\rho}\widetilde{\rho}}\,,\qquad \widetilde{E}:=\frac{E}{\lambda\varepsilon^2}\,.
\end{aligned}$$

最后，令 $\overline{M}_1,\overline{M}_2$ 为子矩阵 $n_1\times n,\,n_2\times n$ 的范数上界，其中 U^{-1} 的前 n_1 行和最后 n_2 行[20]。假设扰动 f 足够小，使得以下“KAM条件”成立

$$\widehat{c}\widehat{E}<1\,,\quad \widetilde{c}\widetilde{E}<1 \tag{42}$$

那么，对于任意 $(\pi,\kappa)\in B^2_{\overline{\varepsilon}}$ 以及任意 $\omega_*\in\Omega_*(\pi\kappa):=\omega(D,\pi\kappa)\cap\mathcal{D}_{\gamma_1,\,\gamma_2,\,\tau}$，都可以找到唯一的实解析嵌入

$$\begin{aligned}
\phi_{\omega_*}:\ \mathbb{T}^n\times\{(\pi,\kappa)\}\ &\to\ \operatorname{Re}(D_r)\times\mathbb{T}^n\times B^2_{\overline{\varepsilon}+r'}\\
(\vartheta,\pi,\kappa)\ &\to\ \Big(v(\vartheta,\pi,\kappa;\omega_*),\vartheta+u(\vartheta,\pi,\kappa;\omega_*),\pi+w(\vartheta,\pi,\kappa;\omega_*),\kappa+y(\vartheta,\pi,\kappa;\omega_*)\Big)
\end{aligned} \tag{43}$$

使得 $\mathcal{M}_{\omega_*}:=\phi_{\omega_*}(\mathbb{T}^n\times B^2_{\overline{\varepsilon}})$ 是一个实解析的 $(n+2)$ 维流形，在其上 H 流与下式解析共轭：

$$(\vartheta,\pi,\kappa)\in\mathbb{T}^n\times B^2_{\overline{\varepsilon}}\to(\vartheta+\omega_*t,\ \pi\to\pi e^{-\nu_*(\omega_*,\pi\kappa)t},\ \kappa\to\kappa e^{\nu_*(\omega_*,\pi\kappa)t})\,. \tag{44}$$

特别地，流形

$$\mathbb{T}_{\omega_*}:=\phi_{\omega_*}(\mathbb{T}^n\times\{(0,0)\})$$

是嵌入于 $\operatorname{Re}(D_r)\times\mathbb{T}^n\times B^2_{\overline{\varepsilon}}$ 中的实解析 n 维 H-不变环面，并配备 $(n+1)$ 维流形

$$\mathcal{M}_{\mathrm{u}}:=\phi_{\omega_*}\left(\mathbb{T}^n\times\{0\}\times B^1_{\overline{\varepsilon}}\right)\,,\qquad \mathcal{M}_{\mathrm{s}}:=\phi_{\omega_*}\left(\mathbb{T}^n\times B^1_{\overline{\varepsilon}}\times\{0\}\right)$$

在这些流形上，运动以指数速率离开并趋近于 $\mathbb{T}_{\omega_*}$。令 $\mathbb{T}_{\omega_*,\,0}$ 表示 $\mathbb{T}_{\omega_*}$ 在 (I,φ) 变量上的投影，并令 $\mathbb{K}_0:=\bigcup\mathbb{T}_{\omega_*,\,0}$。则 $\mathbb{K}_0$ 满足以下测度[21] $\omega_*\in\Omega_*$

估计：

$$\operatorname{meas}_{2n}(\operatorname{Re}(D_r)\times\mathbb{T}^n\setminus\mathbb{K}_0)\leq c_n\Big(\operatorname{meas}(D\setminus D_{\gamma_1,\gamma_2,\tau}\times\mathbb{T}^n)+\operatorname{meas}(\operatorname{Re}(D_r)\setminus D)\times\mathbb{T}^n\Big), \tag{45}$$

[18]范数将在下一节中说明 3.3。 [19]（41）是一个简化假设。该假设可以放宽。 [20] *I.e.* $\overline{M}_i\geq\sup_{D_\rho}\|T_i\|\quad i=1\ \ 2\qquad U^{-1}=\begin{pmatrix}T_1\\T_2\end{pmatrix}\cdot,$

[21] sup，，，若 meas$_n$ 表示 n维勒贝格测度。

其中 $D_{\frac{\gamma_1}{2n}\,\gamma_2\,\tau}$ $\omega_0\cdot 0$ $\mathcal{D}_{\gamma_1\,\gamma_2\,\tau}$ c_n $c_n=\ 1+\ 1+$,,表示 ,,的 2^8nE (,) 逆像，可取为 (( ))。最后，嵌入 ϕ_{ω_*} 满足以下一致估计：

$$
\begin{aligned}
&|v_1(\vartheta,\pi,\kappa;\omega_*)-I_1^0(\pi\kappa;\omega_*)|\le 6n\left(\frac{\overline{M}_1}{\overline{M}}+\frac{\widehat{M}}{M}\right)\widehat{E}\,\widetilde{\rho}\\
&|v_2(\vartheta,\pi,\kappa;\omega_*)-I_2^0(\pi\kappa;\omega_*)|\le 6n\left(\frac{\overline{M}_2}{\overline{M}}+\frac{\widehat{M}}{M}\right)\widehat{E}\,\widetilde{\rho}\,,\\
&|u(\vartheta,\pi,\kappa;\omega_*)|\le 2\,\widehat{E}\,s\,,\quad |w(\vartheta,\pi,\kappa;\omega_*)|\le 2\,\widehat{E}\,\varepsilon\\
&|y(\vartheta,\pi,\kappa;\omega_*)|\le 2\,\widehat{E}\,\varepsilon
\end{aligned}
\tag{46}
$$

其中 $v(\vartheta,\pi,\kappa;\ \omega_*)\ =(v_1(\vartheta,\pi,\kappa;\ \omega_*)\ v_2(\vartheta,\pi,\kappa;\ \omega_*))$，且 $I^0(\pi\kappa;\ \omega_*)\ =(I_1^0(\pi\kappa;\ \omega_*)\ I_2^0(\pi\kappa;\ \omega_*))\ \in$ $\frown$ $\frown D$ 是 $\omega(\cdot,\pi\kappa)-\omega_*\in\Omega_*(\pi\kappa)$ 的原像。其中 $r:=8nE\widetilde{\rho}$, $r'=2E\varepsilon$

定理 3.1 的证明推迟到下一节 3.3。这里我们证明定理 1.2如何由此得出。

如前所述，我们沿用定理 3.1的证明思路，而后者又沿用了 [6, 定理 1.3]。由（A_2'），

$$
P_{\rm av}(I,p,q)=P_0(I,pq)+P_1(I,p,q)\quad\text{where}\quad |P_1|\le a\|P_0\|=:\epsilon\,.
\tag{47}
$$

此时，按照 [6, 定理 1.3 的证明，第 1] 步进行，但将 ϵ^5 替换为 ϵ，在条件

$$
\mu<\frac{\epsilon^{1+\eta}}{(\log(\epsilon^{-1}))^{2\tau+1}}\,,\qquad \overline{\gamma}\ge C\Big(\frac{6}{s_0}\Big)^{\tau+\frac12}\frac{\sqrt{\mu}(\log\epsilon^{-1})^{\tau+\frac12}}{\sqrt{\epsilon}}\,,
$$

通过应用 [6, 引理 A.1], , 取 $\overline{K}=\frac{6}{s_0}\log\epsilon^{-1}$、$r_p=r_q=\epsilon_0$、$r=4\rho=\overline{\rho}:=\min\left\{\frac{\overline{\gamma}}{2\overline{M}\overline{K}^{\tau+1}}、\rho_0\right\}$（其中$\overline{M}:=\sup|\partial_{I_1}^2H_0|$）、$\rho_p=\rho_q=\epsilon_0/4$、$\sigma=s_0/4$、$\ell_1=n_1$、$\ell_2=0$、$m=n_2$ $h=H_0$、$g\equiv 0$、$f=\mu P$、$A=\overline{D}:=\omega_0^{-1}\mathcal{D}_{\gamma,\tau}$（其中 ω_0 与 A_1 中的相同，且$\mathcal{D}_{\gamma,\tau}$是 $\mathbb{R}^n$ 中通常的丢番图集合，即满足 $\gamma_1=\gamma_2$的集合 (40)）、$B=B'=\{0\}$、$s=s_0$、$\alpha_1=\alpha_2=\overline{\alpha}=\frac{\overline{\gamma}}{2\overline{K}^\tau}$和 $\Lambda=\{0\}$，在定义域$W_{\overline{r},\overline{s}}$上，其中 $\overline{r}=\ (\overline{\rho}/2、\ \epsilon_0/2)$ 且 $\overline{s}=s_0/2$，可得到一个实解析辛变换$\overline{\phi}$，该变换将 H 变为

$$
\begin{aligned}
\overline{H}(\overline{I},\overline{\varphi},\overline{p},\overline{q})\ &:=\ H\circ\overline{\phi}(\overline{I},\overline{\varphi},\overline{p},\overline{q})\\
&=\ H_0(\overline{I})+\mu P_0(\overline{I},\overline{pq})+\mu P_1(\overline{I},\overline{\varphi},\overline{p},\overline{q})+\widetilde{P}(\overline{I},\overline{\varphi},\overline{p},\overline{q})\\
&=\ H_0(\overline{I})+\mu P_0(\overline{I},\overline{pq})+\mu\overline{P}(\overline{I},\overline{\varphi},\overline{p},\overline{q})
\end{aligned}
$$

其中

$$
\|\widetilde{P}\|_{\overline{v},\overline{s}}\le\overline{C}\mu\max\{\frac{\mu\overline{K}^{2\tau+1}}{\overline{\gamma}^2},\frac{\mu\overline{K}^{\tau}}{\overline{\gamma}}\ e^{-\overline{K}s_0/2}\}\le\overline{C}\mu\epsilon=\overline{C}\mu a\|P_0\|\,,
$$

$\sim$ $\sim$由此（根据（47））， $\overline{P}=\mu P_{\rm av}+P$ 也在$W_{\overline{v},\overline{s}}$上被 $C\mu a\|P_0\|$ 所界定。

下一步是将定理 3.1应用于哈密顿量 H。由于我们可以取

$$
\begin{aligned}
&M=C\,,\quad \widehat{M}=C\mu\|P_0\|\,,\quad \overline{M}=C(\mu\|P_0\|)^{-1}\,,\quad E=C\mu a\|P_0\|\\
&\bar{M}_1=C\,,\quad \bar{M}_2=C(\mu\|P_0\|)^{-1}\,,\quad \lambda=C^{-1}\mu\|P_0\|
\end{aligned}
$$

数值 L、K、$\widehat{\rho}$ 和 $\widetilde{\rho}$ 分别可界定为

$$
L\le C(\mu\|P_0\|)^{-1}\,,\qquad K\le C\log(a/{\gamma_1}^2)^{-1}
$$

and

$$\widehat{\rho} \geq c\,\min\left\{\frac{\gamma_1}{(\log(a/{\gamma_1}^2)^{-1})^{\tau+1}}\,,\ \frac{\overline{\gamma}_2}{(\log(a/{\gamma_1}^2)^{-1})^{\tau+1}}\,,\frac{\bar{\gamma}}{(\log\epsilon^{-1})^{\bar{\tau}+1}}\,,\ \rho_0\right\}$$

$$\widetilde{\rho} \geq c\,\min\left\{\frac{\gamma_1}{(\log(a/{\gamma_1}^2)^{-1})^{\tau+1}}\,,\ \frac{\overline{\gamma}_2}{(\log(a/{\gamma_1}^2)^{-1})^{\tau+1}}\,,\frac{\bar{\gamma}}{(\log\epsilon^{-1})^{\bar{\tau}+1}}\,,\ \rho_0\,,\ \varepsilon^2\right\}$$

令 $\gamma_2 := \mu\|P_0\|\overline{\gamma}_2$。条件（41）对任意 $\overline{\gamma} < 1$，$s \leq 6$都显然成立，而由这些界

$$\begin{aligned}\widehat{c}\widehat{E} &\leq Ca\max\left\{\frac{(\log(a/{\gamma_1}^2)^{-1})^{2(\tau+1)}}{\gamma_1^2}\,,\ \frac{(\log(a/{\gamma_1}^2)^{-1})^{2(\tau+1)}}{\overline{\gamma}_2^2}\,,\ \frac{(\log\epsilon)^{-1})^{2(\tau+1)}}{\overline{\gamma}^2}\,,\ \frac{1}{\rho_0^2}\,,\ \frac{1}{\varepsilon^4}\right\}\,,\\ \widetilde{c}\widetilde{E} &\leq C\frac{a}{\varepsilon^2}\end{aligned}$$

可见，条件（42）在取

$$\overline{\gamma} = \gamma_1 = \overline{\gamma}_2 = \widehat{C}\sqrt{a}\,,\quad a < \widehat{C}^{-1}\varepsilon^4$$

$\widehat{\ }$取适当的 $C > 1$。根据定理3.1的结论，我们可以找到一组 n维不变环面 $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}$，其投影 $\mathcal{K}_0$ 到 $\mathcal{P}_0$ 满足测度估计

$$\mathrm{meas}\mathcal{P}_0 \geq \mathrm{meas}\mathcal{K}_0 \geq (1 - C'(\overline{\gamma} + \gamma_1 + \gamma_2))\,\mathrm{meas}\mathcal{P}_0 \geq (1 - C\sqrt{a})\,\mathrm{meas}\mathcal{P}_0\,.\quad \square$$

3.3 定理3.1的证明

我们固定以下记号。

- 在 R^n 中，我们固定 1-范数：$|I| := |I|_1 := \sum_{1\leq i\leq n_1}|I_i|$;
- 在 T^n 中，我们固定“上确界度量”：$|\varphi| := |\varphi|_\infty := \max_{1\leq i\leq n}|\varphi_i|$（模 2π）；
- 在 R 中，我们固定上确界范数：$|(p,q)| := |(p,q)|_\infty := \max\{|p|,|q|\}$;
- 对于矩阵，我们采用“上确界范数”：$|\beta| := |\beta|_\infty := \max_{i,j}|\beta_{ij}|$;
- 我们将以 $z_0 \in \mathrm{C}^n$ 为中心、半径为 ε 的复球记为 $B^n_\varepsilon(z_0)$。若 $z_0 = 0$，则简记为 B^n_ε。
- 若 $A \subset \mathrm{R}^n$，且 $r > 0$，则我们用 $A_r := \bigcup_{x_0\in A} B^n_r(x_0)$ 表示 A 的复 r 邻域（依据上文指定的范数/度量）；
- 给定 $A \subset \mathrm{R}^n$ 以及正数 r, ε, s，令

$$v := (r,\varepsilon)\,,\quad U_v := A_r \times B^2_\varepsilon\,,\quad W_{v,s} := U_v \times \mathbb{T}^n_s$$

- 若 f 在形如 W_{v_0,s_0} 的复域上实解析，其中 $v_0 = (r_0,\varepsilon_0)$，$r_0 > r$,$\varepsilon_0 > \varepsilon$, $s_0 > s$，则我们将其“上确界–泰勒–傅里叶范数”记为 $\|f\|_{v,s}$：

$$\|f\|_{v,s} := \sum_{k,\alpha,\beta}\sup_{U_v}|f_{\alpha,\beta,k}|e^{|k|s}\varepsilon^{|(\alpha,\beta)|} \tag{48}$$

其中 $|k| := |k|_1$, $|(\alpha,\beta)| := |\alpha|_1 + |\beta|_1$，其中 $f_{k,\ \alpha,\ \beta}(I)$ 表示展开中的系数

$$f = \sum_{\substack{(k,\alpha,\beta)\in\mathbf{Z}^n\times\mathbb{N}^\ell\times\mathbb{N}^\ell\\ \alpha_i\neq\beta_i\,\forall i}} f_{k,\alpha,\beta}(I)e^{ik\cdot\varphi}p^\alpha q^\beta\ ;$$

• 若 f 与上一项相同， $K>0$ 且 $\mathbb{L}$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的子格， $T_K f$ 那么 $\Pi_{\mathbb{L}} f$ 分别表示 f 的 K 截断和 $\mathbb{L}$ 投影:

$$T_K f := \sum_{\substack{(k,\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{N}^\ell\times\mathbb{N}^\ell \\ \alpha_i\neq\beta_i\,\forall i\,|k|_1\le K}} f_{k,\alpha,\beta}(I)e^{ik\cdot\varphi}p^\alpha q^\beta\ , \quad \Pi_{\mathbb{L}} f := \sum_{\substack{(k,\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{N}^\ell\times\mathbb{N}^\ell \\ \alpha_i\neq\beta_i\,\forall i,k\in\mathbb{L}}} f_{k,\alpha,\beta}(I)e^{ik\cdot\varphi}p^\alpha q^\beta$$

其中 $f_{k,\ \alpha,\ \beta}(I):=f_{k,\ \alpha,\ \beta}(I,0,0)$。若 f满足 K，则称其为正规形中的（$K,\mathbb{L}$）形式，即 $f=\Pi_{\mathbb{L}}T_K f$。如果 $\mathbb{L}$ 严格大于 $\{0\}$，则称 f 为共振正规形。

命题 3.1（部分双曲平均理论）设 $H=h(I_1,I_2,pq)+f(I,\varphi,p,q)$ 是定义在 W_{v_0,s_0} 上的实解析函数，且满足 $v_0=(r_0,\varepsilon_0)$。设 K, r, s, ε, $\hat{r},\hat{s}$ 为正数，满足 $\hat{r}<r/4,\hat{s}<s/4$ 和 $\hat{\varepsilon}<\varepsilon/4$。令 $\hat{\sigma}:=\min\left\{\hat{s},\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon}\right\}$。假设存在正数 α_1, $\alpha_2>0$，满足 $\alpha_1\ge\alpha_2$，使得对于所有 $k=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}^{n+1}$，$0<|k|\le K$，以及对于所有 $(I,p,q)\in U_{r,\varepsilon}$，

$$|\omega_1\cdot k_1+\omega_2\cdot k_2-\mathrm{i}k_3\nu|\ge\begin{cases}\alpha_1 & \text{if} \quad k_1\neq 0\\ \alpha_2 & \text{if} \quad k_1=0,\ (k_2,k_3)\neq(0,0)\end{cases} \tag{49}$$

and

$$K\hat{\sigma}\ge 8\log 2\,,\qquad \frac{2^3c_1K\hat{\sigma}}{\alpha_2\delta}\|f\|_{r,s,\varepsilon}<1,\qquad \delta:=\min\{\hat{r}\hat{s},\ \hat{\varepsilon}^2\} \tag{50}$$

取适当的数目 c_1。于是，可以找到一个实解析辛变换 n

$$\Phi_*:\quad W_{r_*,s_*,\varepsilon_*}\to W_{r,s,\varepsilon}$$

其带有 $r_*=r-4\hat{r}$, $s_*=s-4\hat{s}$, $\varepsilon_*=\varepsilon-4\hat{\varepsilon}$，并将 H 共轭为

$$H_*(I,\varphi,p,q):=H\circ\Phi_*=\mathrm{h}(I,pq)+g(I,\varphi,p,q)+f_*(I,\varphi,p,q),$$

其中 g 是正规形下的（$K,\{0\}$），而 g, f 满足

$$\begin{aligned}\|g-\Pi_0T_Kf\|_{r_*,s_*,\varepsilon_*}&\le\frac{8c_1\|f\|^2_{r,s,\varepsilon}}{\alpha_2\delta}\\ \|f_*\|_{r_*,s_*,\varepsilon_*}&\le e^{-K\hat{\sigma}/4}\|f\|_{r_*,s_*,\varepsilon_*}\end{aligned} \tag{51}$$

最后， Φ_* 满足

$$\max\left\{\alpha_1\hat{s}|I_1-I_1'|\,,\,\alpha_2\hat{s}|I_2-I_2'|\,,\,\alpha_2\hat{r}\,|\varphi-\varphi'|\,,\,\alpha_2\hat{\varepsilon}\,|p-p'|\,,\,\alpha_2\hat{\varepsilon}\,|q-q'|\right\}\le 2c_1E\,. \tag{52}$$

命题3.1 是 J. P¨oschel [22]提出的正规形引理的推广。该推广旨在将（p,q）坐标引入可积部分，同时将解析性尺度 $\hat{r},\hat{s}$ 和 $\hat{\varepsilon}$保持为相互独立。这是为了构造运动（44），其中坐标（π,κ）不取为（$0,0$），而是在其附近的一个小邻域内取值。命题3.1 的更完整表述将在第 3.4 节引用并证明。

下文中，我们令 $B:=B^2_{\bar{\varepsilon}}(0)$；因此， B_ε 将表示 $B^2_{\bar{\varepsilon}+\varepsilon}(0)$。

引理 3.1（KAM 步引理）在与定理3.1相同的假设和记号下，存在一个数列 ρ_j, ε_j, s_j；其区域为

$$(W_j)_{\rho_j,\varepsilon_j,s_j}=(A_j)_{\rho_j,\varepsilon_j}\times\mathbb{T}^n_{\bar{s}+s_j}\,,\qquad\text{with}\quad (A_j)_{\rho_j,\varepsilon_j}:=\bigcup_{(p_j,q_j)\in B_{\varepsilon_j}}\left(D_j(p_jq_j)\right)_{\rho_j}\times\{(p_j,q_j)\}$$

以及一个实解析且辛的变换

$$\Psi_{j+1}:\ (I_{j+1},\varphi_{j+1},p_{j+1},q_{j+1})\in(W_{j+1})_{\rho_{j+1},\varepsilon_{j+1},s_{j+1}}\ \to\ (I_j,\varphi_j,p_j,q_j)\in(W_j)_{\rho_j,\varepsilon_j,s_j} \tag{53}$$

使得

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_{j+1}(I_{j+1},\varphi_{j+1},p_{j+1},q_{j+1}) &= \mathrm{H}_j\circ\Psi_{j+1}(I_{j+1},\varphi_{j+1},p_{j+1},q_{j+1})\\ &= \mathrm{h}_{j+1}(I_{j+1},p_{j+1}q_{j+1})+\mathrm{f}_{j+1}(I_{j+1},\varphi_{j+1},p_{j+1},q_{j+1})\end{aligned}$$

并且使得以下结论成立。令 $E_0:=E$, $(M_0,\overline{M}_0,M_0,L_0)=(M,M,M,L)$, $s_0:=s$, $\rho_0:=\rho$, $\varepsilon_0:=\varepsilon_0$, $\lambda_0:=\lambda$并且，给定，对于 $0\le j\in\mathbb{Z}$, E_j, $(M_j,\overline{M}_j,M_j,L_j)$, s_j, ρ_j, ε_j, λ_j, 定义

$$K_j := \frac{32}{s_j}\log_+\Big(\frac{E_jL_jM_j^2}{{\gamma_1}^2}\Big)^{-1} \tag{54}$$

$$\widehat{\rho}_j := \min\left\{\frac{\gamma_1}{2M_jK_j^{\tau+1}},\ \frac{\gamma_2}{2\widehat{M}_jK_j^{\tau+1}},\ \frac{\lambda_j}{2M_jK_j},\ \frac{\lambda_j}{2\widehat{M}_jK_j},\ \rho_j\right\}, \tag{55}$$

$$\widetilde{\rho}_j := \min\left\{\widehat{\rho}_j,\frac{\varepsilon_j}{s_j}\right\},\qquad \widehat{E}_j:=\frac{E_jL_j}{\widehat{\rho}_j\widetilde{\rho}_j} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}E_{j+1} &:= \frac{E_jL_jM_j^2}{{\gamma_1}^2}\ ,\quad (M_{j+1},\overline{M}_{j+1},\widehat{M}_{j+1},L_{j+1})=2(M_j,\overline{M}_j,\widehat{M}_j,L_j)\\ \rho_{j+1} &:= \frac{\widehat{\rho}_j}{4}\,,\ \varepsilon_{j+1}:=\frac{\varepsilon_j}{4}\,,\ ,\lambda_{j+1}:=\lambda_j-2^8\frac{E_j}{\varepsilon_j^2}\,,\quad s_{j+1}:=\frac{s_j}{4}\,.\end{aligned}$$

那么，对于所有 $(p_{j+1},q_{j+1})\in B_{\varepsilon_{j+1}}$,

(i) $D_{j+1}(p_{j+1}q_{j+1})\subseteq(D_j(p_{j+1}q_{j+1}))_{\widehat{\rho}_j/4}$。令

$$\varpi_{j+1}:=\partial_{(I_{j+1},p_{j+1}q_{j+1})}\mathrm{h}_{j+1}(I_{j+1},p_{j+1}q_{j+1}))=(\omega_{j+1}(I_{j+1},p_{j+1}q_{j+1}),\nu_{j+1}(I_{j+1},p_{j+1}q_{j+1}))$$

映射 $I_{j+1}\to\omega_{j+1}(I_{j+1},p_{j+1}q_{j+1})$ 是 $\big(D_{j+1}(p_{j+1}q_{j+1})\big)_{\rho_j}$ 的微分同胚，满足

$$\omega_{j+1}(D_{j+1}(p_{j+1}q_{j+1})),p_{j+1}q_{j+1})=\omega_j(D_j(p_{j+1}q_{j+1})),p_{j+1}q_{j+1})\,.$$

映射

$$\begin{aligned}\widehat{\iota}_{j+1}(p_{j+1}q_{j+1}) &= (\widehat{\iota}_{j+1,1}(p_{j+1}q_{j+1}),\widehat{\iota}_{j+1,2}(p_{j+1}q_{j+1})):\\ D_j(p_{j+1}q_{j+1}) &\to D_{j+1}(p_{j+1}q_{j+1})\\ I_j(p_{j+1}q_{j+1}) &\to I_{j+1}(p_{j+1}q_{j+1}):=\omega_{j+1}^{-1}\big(\omega_j(I_j,p_{j+1}q_{j+1}),p_{j+1}q_{j+1}\big)\end{aligned}$$

满足

$$\begin{aligned}&\sup_{D_j}|\widehat{\iota}_{j+1,1}(p_{j+1}q_{j+1})-\mathrm{id}\,|\le 3n\frac{\overline{M}_1}{\overline{M}}\widehat{E}_j\widetilde{\rho}_j\le 3n\widehat{E}_j\widetilde{\rho}_j\ ,\\ &\sup_{D_j}|\widehat{\iota}_{j+1,2}(p_{j+1}q_{j+1})-\mathrm{id}\,|\le 3n\frac{\overline{M}_2}{\overline{M}}\widehat{E}_j\widetilde{\rho}_j\le 3n\widehat{E}_j\widetilde{\rho}_j \qquad (57)\\ &\mathcal{L}(\widehat{\iota}_{j+1}(p_{j+1}q_{j+1})-\mathrm{id}\,)\le 2^9n\widehat{E}_j \qquad (58)\end{aligned}$$

(ii) 扰动 f_j 的上确界傅里叶范数

$$\|f_j\|_{(W_j)_{\rho_j,\varepsilon_j,s_j}}\le E_j$$

(iii) 实解析辛同胚 Ψ_{j+1} 在 (53)中验证

$$\begin{aligned}
&\sup_{(W_{j+1})_{\rho_{j+1},\varepsilon_{j+1},s_{j+1}}} |I_{j,1}(I_{j+1},\varphi_{j+1},p_{j+1},q_{j+1}) - I_{j+1,1}| \le \frac{3}{4}\frac{\widehat{M}_j}{M_j}\widehat{E}_j\widetilde{\rho}_j \\
&\sup_{(W_{j+1})_{\rho_{j+1},\varepsilon_{j+1},s_{j+1}}} |I_{j,2}(I_{j+1},\varphi_{j+1},p_{j+1},q_{j+1}) - I_{j+1,2}| \le \frac{3}{4}\widehat{E}_j\widetilde{\rho}_j \\
&\sup_{(W_{j+1})_{\rho_{j+1},\varepsilon_{j+1},s_{j+1}}} |\varphi_j(I_{j+1},\varphi_{j+1},p_{j+1},q_{j+1}) - \varphi_{j+1}| \le \frac{3}{4}\widehat{E}_j s_j \\
&\sup_{(W_{j+1})_{\rho_{j+1},\varepsilon_{j+1},s_{j+1}}} |p_j(I_{j+1},\varphi_{j+1},p_{j+1},q_{j+1}) - p_{j+1}| \le \frac{3}{4}\widehat{E}_j\varepsilon_j \\
&\sup_{(W_{j+1})_{\rho_{j+1},\varepsilon_{j+1},s_{j+1}}} |q_j(I_{j+1},\varphi_{j+1},p_{j+1},q_{j+1}) - q_{j+1}| \le \frac{3}{4}\widehat{E}_j\varepsilon_j\,. \qquad (59)
\end{aligned}$$

重标度无量纲映射 $\check{\Phi}_{j+1} := \mathrm{id} + \mathbb{1}_{\widehat{\rho}_0^{-1},s_0^{-1},\varepsilon_0^{-1}}(\Phi_{j+1} - \mathrm{id}) \circ \mathbb{1}_{\widehat{\rho}_0,s_0,\varepsilon_0}$ 在 $(W_{j+1})_{\rho_{j+1}/\widehat{\rho}_0,\varepsilon_{j+1}/\varepsilon_0,s_{j+1}/s_0}$ 上具有 Lipschitz 常数

$$\mathcal{L}(\check{\Phi}_{j+1} - \mathrm{id}\,) \le 6(n+1)\big(12\cdot(24)^\tau\big)^j \widehat{E}_j\,; \qquad (60)$$

(iv) 对任意 $j \ge 0$, $\widehat{E}_{j+1} < \widehat{E}_j^2$, $\lambda_j \ge \frac{\lambda_0}{2}$。

证明 该命题的证明可通过推广 [6, 引理 B.1] 得到。我们仅描述不同之处，具体细节留给感兴趣的读者完成。

我们基于命题533.1，通过递归构造变换（3.1。为简化记号，我们将系统地省略下标“j”，并用“$j+1$”替换“$+$”。例如，我们将不写（53），而写作

$$\Psi_+ :\ W_+ \to W\,.$$

必要时，基础步骤将标记为“0”（例如，下文的（76））。我们（归纳地）假设

$$\omega(D, pq) \subset \mathcal{D}_{\gamma_1,\gamma_2,\tau} \quad \forall\ (p,q) \in B_\varepsilon \qquad (61)$$

$$\widehat{c}\widehat{E} < 1 \qquad (62)$$

$$\lambda \ge \max\left\{\frac{\gamma_2}{K^\tau}\,,\ \frac{\lambda_0}{2}\right\}. \qquad (63)$$

在基础步骤中，只要取 $D_0 = \omega_0^{-1}(\mathcal{D}_{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \tau},\ p_0q_0)$，条件（61）便成立；根据假设，（62）成立，而（63）则由（41）推出：

$$\lambda_0 \ge \frac{\lambda_0}{2} \ge \frac{s_0^\tau\gamma_2}{6^\tau} \ge \frac{\gamma_2}{K_0^\tau}\,. \qquad (64)$$

我们旨在将命题 3.1 应用于 ε，s 命题 3.1 现在对应于 $\overline{\varepsilon}+\varepsilon$，$\overline{s}+s$，以及

$$r = \widehat{\rho}\,,\quad \hat{r} = \frac{\hat{\rho}}{8}\,,\quad \hat{s} := \frac{s}{8}\,,\quad \hat{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{8}\,,\quad \mathbb{L} = \{0\}\,.$$

我们验证 (61) 和 (62) 推出条件 (49) 和 (50)。先考察 (49)。若 $(I,p,q) = (I_1,I_2,p,q) \in A_{\widehat{\rho},\varepsilon}$ 且 $k \in \mathbb{Z}^3\setminus\{0\}$，其中 $|k|_1 \le K$，则存在某个 $I_0(pq) = (I_{01}(pq)\ I_{02}(pq))$，使得 $|I - I_0(pq)| < \widehat{\rho}$ 且 $\omega(I_0(pq)\ pq) = (\omega_{01},\omega_{02}) \in \mathcal{D}_{\gamma_1,\gamma_2,\tau}$。我们有

$$
\begin{aligned}
|\varpi(I,pq)\cdot k| &= \Big|\omega_{01}\cdot k_1 + \omega_{02}\cdot k_2 + (\omega_1(I,pq) - \omega_1(I(pq),pq))\cdot k_1 \\
&\quad + (\omega_2(I,pq) - \omega_2(I(pq),pq)))\cdot k_2 - \mathrm{i}\nu(I,pq)k_3\Big| \\
&\ge \begin{cases} \min\left\{\dfrac{\gamma_1}{2K^\tau}\,,\ \dfrac{\lambda}{2}\right\} & \text{if} \quad k_1 \ne 0 \\ \min\left\{\dfrac{\gamma_2}{2K^\tau}\,,\ \dfrac{\lambda}{2}\right\} & \text{if} \quad k_1 = 0,\ k_2 \ne 0 \\ \lambda & \text{if} \quad k_1 = k_2 = 0,\ k_3 \ne 0 \end{cases} \\
&\ge \begin{cases} \alpha_1 := \dfrac{\gamma_1}{2K^\tau} & \text{if} \quad k_1 \ne 0 \\ \alpha_2 := \dfrac{\gamma_2}{2K^\tau} & \text{if} \quad k_1 = 0,\ (k_2,k_3) \ne (0,0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

使用了 (63) 后。上述界是分别考虑以下情形得到的：$k_3 \ne 0$和 $k_3 = 0$，并且：

– 若 $k_3 \ne 0$，取介于各个 $|$之间的表达式的虚部模的下确界；注意到 $\overline{\omega}_0 = (\overline{\omega}_{01},\overline{\omega}_{02})$ 是实数，并用 $MK\widehat{\rho}$（当 $i = 1$ 时）和 $\widehat{M}K\widehat{\rho}$（当 $i = 2$ 时）界定差值 $|\mathrm{Im}\left(\omega_i(I,pq) - \omega_i(I(pq)\ pq)\right)|$，再利用 (55) 中 $\widehat{\rho}$ 的定义。– 若 $k_3 = 0$，使用丢番图不等式，并像前一种情形那样界定差值 $|\mathrm{Im}\left(\omega_i(I,pq) - \omega_i(I(pq)\ pq)\right)|$，并利用 $\widehat{\rho}$ 的定义。

现在验证条件 (50)。不等式 $Ks > 8\log 2$ 根据 K 的定义是显然的（见 (54)），而且小量条件 (50) 也很容易满足，因为 $\hat{}\sigma =$最小值$\{\frac{1}{8}\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon},\ \frac{s}{8}\} = \frac{s}{8}$，$\delta = 2^{-6}$最小值$\{\hat{}\rho s,\ \varepsilon^2\} = 2^{-6}\widetilde{\rho}s$（根据 $\widetilde{\rho}$ 在 (56) 中的定义），因此

$$
2^3 c_1 \frac{K\frac{s}{8}}{\alpha_2\delta}\|f\|_{W_{\widehat{\rho},\varepsilon,s}} \le 2^6 c_1 \frac{EL}{\widehat{\rho}\widetilde{\rho}} \le \widehat{c}\widehat{E} < 1
$$

利用了 $L \ge \widehat{M}^{-1}$，M^{-1}，因此 $\alpha_2 \ge KL^{-1}\widehat{\rho}$，$2^6 c_1 < \widehat{c}$，以及（62）。因此，根据命题 3.1，H 可以共轭为

$$
\mathrm{H}_+ := \mathrm{H}\circ\Psi_+ = \mathrm{h}_+(I_+,p_+q_+) + f_+(I_+,\varphi_+,p_+,q_+)
$$

其中

$$
\mathrm{h}_+(I_+,p_+q_+) = \mathrm{h}(I_+,p_+q_+) + \mathrm{g}(I_+,p_+q_+)
$$

同时，由（51）以及 K 的选取，

$$
\|f_+\|_{\widehat{\rho}/2,\varepsilon/2,s/2} \le e^{-Ks/32}E \le \frac{ELM^2}{{\gamma_1}^2}E = E_+\,. \tag{65}
$$

该共轭由一个解析变换实现

$$
\Psi_+ :\quad (I_+,\varphi_+,p_+,q_+,) \in W_{\widehat{\rho}/2,\varepsilon/2,s/2} \to (I,\varphi,p,q) \in W_{\widehat{\rho},\varepsilon,s}\,.
$$

利用（52）、$\widetilde{\rho} \le \varepsilon^2/s$、$\alpha_1 \ge MK\widehat{\rho}$、$\alpha_2 = \frac{\gamma_2}{2K^\tau} \ge L^{-1}K\widehat{\rho}$、$Ks \ge 6$ 以及 $\widehat{E}$的定义，我们得到界（59）；其左端的集合为$W_{\widehat{\rho}/2,\ \varepsilon/2,\ s/2}$。下面我们将证明

$W_{+\rho_+,\ \varepsilon_+,\ s_+} \subset W_{\widehat{\rho}/2,\ \varepsilon/2,\ s/2}$，因此我们将得到（59）。

现在我们来计算广义频率

$$\varpi_+(I_+, p_+q_+) := \partial_{I_+, p_+q_+} \mathrm{h}_+(I_+, p_+q_+) = \big(\omega_+(I_+, p_+q_+)\,,\ \nu_+(I_+, p_+q_+)\big)\,.$$

with

$$\omega_+(I_+, p_+q_+) := \partial_{I_+} \mathrm{h}_+(I_+, p_+q_+) = \partial_{I_+} \mathrm{h}(I_+, p_+q_+) + \partial_{I_+} \mathrm{g}(I_+, p_+q_+) \tag{66}$$

（“新频率映射”）和

$$\nu_+(I_+, p_+q_+) \ := \ \partial_{p_+q_+} \mathrm{h}_+(I_+, p_+q_+) = \nu(I_+, p_+q_+) + \partial_{p_+q_+} \mathrm{g}(I_+, p_+q_+) \tag{67}$$

（“新李雅普诺夫指数”）。

引理 3.2 设 $(p_+, q_+) \in B_{\varepsilon/2}$。新频率映射 ω_+ 在 $D(p_+q_+)^{\widehat{\rho}/2}$ 上是单射，并将 $D(p_+q_+)^{\widehat{\rho}/4}$ 映到 $\omega(D, p-+q_+)$ 上。映射 $\widehat{\imath}_+(p_+q_+) = (\widehat{\imath}_{+1}(p_+q_+)\ \widehat{\imath}_{+2}(p_+q_+)) := \omega_+^{-1} \circ \omega|_{D(p_+q_+)}$ 将点 $I_0 \in D(p_+q_+)$ 映射到 $\omega(I_0, p_+q_+)$ 在 $D(p_+q_+)^{\widehat{\rho}/4}$ 中的 $\omega_+(\cdot, p_+q_+)$–原像，并满足

$$\begin{aligned}
&\sup_{(A_+)_{\rho_+,\varepsilon_+}} |\widehat{\imath}_{+1}(p_+q_+) - \mathrm{id}\,| \le 3n\frac{\overline{M}_1 E}{\widehat{\rho}} \le 3n\frac{\overline{M} E}{\widehat{\rho}}\ ,\\
&\sup_{(A_+)_{\rho_+,\varepsilon_+}} |\widehat{\imath}_{+2}(p_+q_+) - \mathrm{id}\,| \le 3n\frac{\overline{M}_2 E}{\widehat{\rho}} \le 3n\frac{\overline{M} E}{\widehat{\rho}}\ ,\\
&\mathcal{L}(\widehat{\imath}_+(p_+q_+) - \mathrm{id}\,) \le 2^9 n\frac{\overline{M} E}{\widehat{\rho}^2}\ .
\end{aligned} \tag{68}$$

雅可比矩阵 $U_+ := \partial^2_{I_+} \mathrm{h}_+(I_+, p_+q_+)$ 在 $D_{\widehat{\rho}/4} \times B^2_{\varepsilon/2}$ 上非奇异，且以下界成立

$$\begin{aligned}
&M_+ := 2M \ge \sup_{(A_+)_{\rho_+,\varepsilon_+}} \|U_+\|\ , \quad \widehat{M}_+ := 2\widehat{M} \ge \sup_{(A_+)_{\rho_+,\varepsilon_+}} \|\widehat{U}_+\|\ ,\\
&\overline{M}_+ := 2\overline{M} \ge \sup_{(A_+)_{\rho_+,\varepsilon_+}} \|U_+^{-1}\|\ , \quad \overline{M}_{i+} := 2\overline{M}_i \ge \sup_{(A_+)_{\rho_+,\varepsilon_+}} \|T_{i+}\|\ , \quad i = 1,\ 2\ .
\end{aligned} \tag{69}$$

其中 $U_+^{-1} =: \begin{pmatrix} T_{+1} \\ T_{+2} \end{pmatrix}$。最后，新李雅普诺夫指数 $\nu_+(I_+, p_+q_+)$ 满足

$$\lambda_+ := \lambda - 2^4\frac{E}{\varepsilon^2} \le \inf_{(A_+)_{\rho_+,\varepsilon_+}} |\operatorname{Re}\nu_+|\,. \tag{70}$$

暂时推迟该引理的证明，我们令 $\rho_+ := \widehat{\rho}/2$，$s_+ := s/2$，$\varepsilon_+ = \varepsilon/2$ 以及 $D_+(p_+q_+) := \widehat{\imath}_+(p_+q_+)\ (D(p_+q_+))$。根据引理 3.2，$D_+$ 是 $D_{\widehat{\rho}/4}$ 的子集，因此

$$(D_+)_{\rho_+} \subset D_{\widehat{\rho}/2}\ . \tag{71}$$

我们证明 $\widehat{E}_+ = \frac{E_+L_+}{\widehat{\rho}_+^2} \le \widehat{E}^2$。由于

$$s_+ = \frac{s}{4} \quad \text{and} \quad x_+ := \Big(\frac{E_+L_+M_+^2}{{\gamma_1}^2}\Big)^{-1} = \frac{x^2}{8} \quad \text{where} \quad x := \Big(\frac{ELM^2}{{\gamma_1}^2}\Big)^{-1} \tag{72}$$

我们有

$$K_+ = \frac{2^5}{s_+}\log x_+ = \frac{2^7}{s}\log\frac{x^2}{8} = \frac{2^8}{s}\log_+ x - \frac{3\cdot 2^7}{s}\log_+ 2 < 8K\,. \tag{73}$$

最后，(42)、(70)以及 $\tilde{E}$ 意味着 $\lambda_+ \geq \frac{\lambda}{2}$。汇总所有界，得到

$$\begin{aligned}\widehat{\rho}_+ &= \min\left\{\frac{\gamma_1}{2M_+K_+^{\tau+1}},, \frac{\gamma_2}{2\widehat{M}_+K_+^{\tau+1}}, \frac{\lambda_+}{2M_+K_+}, \frac{\lambda_+}{2\widehat{M}_+K_+}, \rho_+ = \frac{\widehat{\rho}}{2}\right\} \geq \frac{\widehat{\rho}}{2\cdot 8^{\tau+1}} \\ \widetilde{\rho}_+ &= \min\left\{\widehat{\rho}_+, \frac{\varepsilon_+^2}{s_+}\right\} \geq \frac{\widetilde{\rho}}{2\cdot 8^{\tau+1}} \end{aligned} \tag{74}$$

and

$$\widehat{E}_+ = \frac{E_+L_+}{\widehat{\rho}_+\widetilde{\rho}_+} \leq \frac{E^2LM^2}{{\gamma_1}^2}\frac{2L}{\widehat{\rho}\widetilde{\rho}}4\cdot 8^{2(\tau+1)} = 8\cdot 8^{2(\tau+1)}\frac{E\,LM^2}{{\gamma_1}^2}\widehat{E}$$

现在，在最后一个不等式中利用界

$$\frac{E\,LM^2}{{\gamma_1}^2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{s}{6}\right)^{2(\tau+1)}\frac{EL}{\widehat{\rho}^2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{s}{6}\right)^{2(\tau+1)}\widehat{E}$$

（因为 $\hat{}\rho \leq \frac{\gamma_1}{2MK^{\tau+1}}$ and $K \geq 6/s$），我们得到

$$\widehat{E}_+ \leq 2(\frac{4}{3}s)^{\tau+1}\widehat{E}^2 < \widehat{E}^2 \tag{75}$$

（利用了 $s \leq 1/2$）。现在我们证明 $\lambda_+ \geq \frac{\lambda_0}{2}$。迭代（70）并利用 $\widehat{\rho}_k \leq \widehat{\rho}_{k-1}/4$, $\widetilde{\rho}_k \leq \widetilde{\rho}_{k-1}/4$ $\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1}/4$ $L_k = 2L_{k-1}$ 75 42 $\tilde{c} = 2^6$ ，、、、、（）以及（）中的第二个条件和，我们得到

$$\begin{aligned}\lambda_+ &= \lambda_{j+1} = \lambda_0 - 2^4\sum_{k=1}^{j}\frac{E_k}{\varepsilon_k^2} \geq \lambda_0 - 2^4\sum_{k=1}^{j}\widehat{E}_k\frac{\widehat{\rho}_k\widetilde{\rho}_k}{\varepsilon_k^2L_k} \geq \lambda_0 - 2^4\frac{\widehat{\rho}_0\widetilde{\rho}_0}{\varepsilon_0^2L_0}\sum_{k=1}^{j}\widehat{E}_k \geq \lambda_0 - 2^5\frac{\widehat{\rho}_0\widetilde{\rho}_0}{\varepsilon_0^2L_0}\widehat{E}_0 \\ &= \lambda_0 - 2^5\frac{E_0}{\varepsilon_0^2} \geq \frac{\lambda_0}{2}\,. \end{aligned} \tag{76}$$

这使我们可以在下一步验证（63）：利用（64）和（73），我们有

$$\lambda_+ \geq \frac{\lambda_0}{2} \geq \frac{\gamma_2}{K_0^\tau} \geq \frac{\gamma_2}{K_+^\tau}\,.$$

最后，（57）和（58）由（68）推出，而（60）中的估计则由（59）、（71）、（72）、（74）、不等式 $LM \geq 1$ 和柯西估计得到：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\check{\Phi}_{j+1} - \mathrm{id}) &\leq 2(n+1)\sup_{(\check{W}_{j+1})_{\rho_{j+1},\varepsilon_{j+1},s_{j+1}}}\|D(\check{\Phi}_{j+1} - \mathrm{id})\|_\infty \\ &\leq 2(n+1)\frac{\frac{3}{4}\widehat{E}_j\max\{\widehat{\rho}_j/\rho_0, s_j/s_0, \varepsilon_j/\varepsilon_0\}}{\min\{\widehat{\rho}_j/(4\widehat{\rho}_0), s_j/(4s_0), \varepsilon_j/(4\varepsilon_0)\}} \\ &\leq 2(n+1)\frac{3/4(1/4)^j}{1/4\left(\frac{1}{2(24)^{\tau+1}}\right)^j}\widehat{E}_j = 6(n+1)\big(12\cdot(24)^\tau\big)^j\widehat{E}_j\,. \qquad \square\end{aligned}$$

引理的证明 **3.2** 通过推广 [6, 引理 B2]，即可得到该命题的证明。与上文一样，我们只讨论不同之处。根据（51），

$$\sup_{D_{\hat{\rho}/2}\times B^2_{\varepsilon/2}}|\mathrm{g}| \leq \sup_{D_{\hat{\rho}/2}\times B^2_{\varepsilon/2}}|\mathrm{g} - \overline{f}| + \sup_{D_{\hat{\rho}/2}\times B^2_{\varepsilon/2}}|\overline{f}| \leq \frac{3}{2}E\,,$$

（其中 $\overline{f}$ 表示 f的平均值）。因此，我们可以给出界

$$\sup_{D_{\widehat{\rho}/4}\times B^2_{\varepsilon/2}} \|(\partial^2_{I_+}\,\mathrm{h})^{-1}\partial^2_{I_+}\,\mathrm{g}\| \le 2\overline{M}\frac{\frac{3}{2}E}{(\widehat{\rho}/4)^2} \le 2^6\frac{\overline{M}E}{\widehat{\rho}^2} \le 2^6\frac{\overline{M}E}{\widehat{\rho}^2} < \frac{1}{2}$$

这表明函数 (66) 的雅可比矩阵为

$$\partial_{I_+}\omega_+(I_+,p_+q_+) = \partial^2_{I_+}\,\mathrm{h}_+(I_+,p_+q_+) = \partial^2_{I_+}\mathrm{h}(I_+,p_+q_+) + \partial^2_{I_+}\mathrm{g}(I_+,p_+q_+)$$

它对所有 $(p_+,q_+) \in B^2_{\varepsilon/2}$ 均可逆，并且满足

$$\overline{M}_+ := \sup_{D_{\widehat{\rho}/4}\times B^2_{\varepsilon/2}} \left\|\Big(\partial_{I_+}\omega_+(I_+,p_+q_+)\Big)^{-1}\right\| \le 2\overline{M}$$

类似地，可以证明 (69)。接下来，对于任意固定的 $(p_+,q_+) \in B^2_{\varepsilon/2}$ 以及 $\overline{\omega} = \omega(I(p_+q_+)\ p_+q_+) \in \omega(D,p_+q_+)$，其中 $I(p_+q_+) \in D$，我们希望求得 $I_+ = I_+(p_+q_+) \in D_+$ 使得

$$\omega_+(I_+(p_+q_+),p_+q_+) = \overline{\omega} = \omega(I(p_+q_+),p_+q_+) \tag{77}$$

为此，我们考虑函数

$$I_+ \in D_{\widehat{\rho}/2} \to F(I_+,p_+q_+) := \omega_+(I_+,p_+q_+) - \overline{\omega} \quad (p_+,q_+) \in B^2_{\varepsilon/2}$$

由于 F 与 ω_+ 相差一个常数，因此我们有

$$m := \sup_{D_{\widehat{\rho}/4}\times B^2_{\varepsilon/2}} \left\|\Big(\partial_{I_+}F(I_+,p_+q_+)\Big)^{-1}\right\| = \sup_{D_{\widehat{\rho}/4}\times B^2_{\varepsilon/2}} \left\|\Big(\partial_{I_+}\omega_+(I_+,p_+q_+)\Big)^{-1}\right\| \le 2M\,.$$

类似地，我们对这些量取界：

$$Q := |\partial^2_{I_+}F(I)| = |\partial^3_{I_+}\mathrm{g}(I_+,p_+q_+)| \le 6\frac{\frac{3}{2}E}{(\widehat{\rho}/4)^3} < 2^{10}\frac{E}{\widehat{\rho}^3}.$$

and

$$P := |F(I(p_+q_+))| = |\partial_{I_+}\mathrm{g}(I(p_+q_+),p_+q_+)| \le \frac{\frac{3}{2}E}{(\widehat{\rho}/4)} \le 2^3\frac{E}{\widehat{\rho}}\,.$$

综合以上各点，我们得到

$$4m^2PQ \le 2^{16}\frac{M^2E^2}{\widehat{\rho}^4} \le \widehat{c}^2\widehat{E}^2 < 1$$

根据隐函数定理（例如，[4, 定理 **1** 和注 1]），方程（77）有唯一解

$$(p_+,q_+) \in B_{\varepsilon/2} \to I_+(p_+q_+) \in B_r(I(p_+q_+))\,,$$

with

$$r = 2mP \le 2^5\frac{ME}{\widehat{\rho}} \le \frac{\widehat{\rho}}{4}$$

因此我们可以取

$$D_+(p_+q_+) = \bigcup_{\overline{\omega}\in\omega(D,p_+q_+)} \{I_+(p_+q_+)\}$$

这确保了（61）对 D_+ 也成立。
最后，函数的实部（67）满足下界

$$\inf_{D_{\widehat{\rho}/2}\times B^2_{\varepsilon/4}} |\operatorname{Re}\nu_+| \ge \lambda - \frac{E}{(\varepsilon/4)^2} = \lambda_+\,.$$

(68) 的证明 [6, 参见引理 B 的证明2]。 □

定理 **3.1** 的证明。
步骤 1 “广义极限作用”的构造
设 $(\pi,\kappa)\in B_0=B_{\bar\varepsilon}^2=\bigcap_{j\geq 0}B_{\varepsilon_j}$。 在 $D_0(\pi\kappa)=\omega_0^{-1}(\mathcal{D}_{\gamma_1,\gamma_2,\tau},\pi\kappa)\cap D$ 上定义,

$$\check\iota_j(\pi\kappa):=\widehat\iota_j(\pi\kappa)\circ\widehat\iota_{j-1}(\pi\kappa)\circ\cdots\circ\widehat\iota_1(\pi\kappa)\quad j\geq 1\,.$$

于是 $\check\iota_j(\pi\kappa)$ 一致收敛到一个 $\check\iota(\pi,\kappa)=(\check\iota_1(\pi,\kappa),\check\iota_2(\pi,\kappa))$, 满足

$$\sup_{D_0(\pi\kappa)}|\check\iota_1(\pi\kappa)-\mathrm{id}\,|\leq 6n\frac{\overline{M}_1}{\overline{M}}\widetilde\rho_0\widehat E_0\,,\qquad \sup_{D_0(\pi\kappa)}|\check\iota_2(\pi\kappa)-\mathrm{id}\,|\leq 6n\frac{\overline{M}_i}{\overline{M}}\widetilde\rho_0\widehat E_0\,.\tag{78}$$

此外, 由于

$$\sup|\widehat\iota_j(\pi\kappa)-\widehat\iota(\pi\kappa)|\leq 6n\widehat E_j\widetilde\rho_j<\frac{6n}{\widehat c}\widehat\rho_j<\rho_j$$

我们有

$$D_*(pq):=\check\iota(\pi\kappa)(D_0(\pi\kappa))\subset\bigcap_j D_j(\pi\kappa)_{\rho_j}\,.\tag{79}$$

特别地, 取 $j=0$,

$$D_*(\pi\kappa)\subset(D_0(\pi\kappa))_{6n\widehat E_0\widetilde\rho_0}\,.\tag{80}$$

此外,

$$\mathcal{L}(\check\iota(\pi\kappa)-\mathrm{id}\,)\leq 2^8n\widehat E\,.$$

因此 $\check\iota(\pi\kappa)$ 是双 Lipschitz 的, 且

$$\mathcal{L}_-(\check\iota(\pi\kappa))\geq 1-2^8n\widehat E\,,\qquad \mathcal{L}_+(\check\iota(\pi\kappa))\leq 1+2^8n\widehat E\,.$$

步骤 2 ϕ_{ω_*} 的构造。对于每个 $j\geq 1$, 变换

$$\Phi_j:=\Psi_1\circ\cdots\circ\Psi_j$$

定义在 $(W_j)_{\rho_j,\ s_j,\ \varepsilon_j}$ 上。如果

$$A_*:=\bigcup_{|(\pi,\kappa)|<\bar\varepsilon}D_*(\pi\kappa)\times\{(\pi,\kappa)\}\,,\qquad W_*:=A_*\times\mathbb{T}^n\,.$$

那么, 由 (79), $W_*\subset\bigcap_j(W_j)_{\rho_j,\ s_j,\ \varepsilon_j}$。序列 Φ_j 在 W_* 上一致收敛到一个映射 Φ。接着我们令

$$\begin{aligned}\phi_{\omega_*}(\vartheta,\pi,\kappa)&=\Big(v(\vartheta,\pi,\kappa;\omega_*),\vartheta+u(\vartheta,\pi,\kappa;\omega_*),\pi+w(\vartheta,\pi,\kappa;\omega_*),\kappa+y(\vartheta,\pi,\kappa;\omega_*)\Big)\\&:=\Phi\left(\check\iota(\omega_0^{-1}(\omega_*,\pi\kappa)),\vartheta,\pi,\kappa\right)\end{aligned}$$

与 $v(\vartheta,\ \pi,\ \kappa;\ \omega_*):=(v_1(\vartheta,\ \pi,\ \kappa;\ \omega_*)\ v_2(\vartheta,\ \pi,\ \kappa;\ \omega_*))$。由于 (59) 蕴含, 在 W_*[22],

$$\sup_{W_*}|\Pi_{I_1}\Phi-\mathrm{id}\,|_1\leq 2n\frac{\widehat{M_0}}{M_0}\widehat E_0\widetilde\rho_0\tag{81}$$

[22] Π_z 表示对 z 变量的投影。

类似地，

$$\sup_{W_*}|\Pi_{I_2}\Phi-\mathrm{id}\,|_1\le 2n\widehat{E}_0\widetilde{\rho}_0\,,\quad \sup_{W_*}|\Pi_{\varphi}\Phi-\mathrm{id}\,|_\infty\le 2\widehat{E}_0 s_0\,,$$
$$\sup_{W_*}|\Pi_{p}\Phi-\mathrm{id}\,|_\infty\le 2\widehat{E}_0\varepsilon_0\,,\quad \sup_{W_*}|\Pi_{q}\Phi-\mathrm{id}\,|_\infty\le 2\widehat{E}_0\varepsilon_0 \tag{82}$$

那么，鉴于 (78)、(81)、(82)，根据 W_* 的定义以及三角不等式，我们有 (46)。方程 (80)、(81)、(82) 还可推出

$$\mathrm{T}_{\omega_*}:=\phi_{\omega_*}(\mathbb{T}^n,0,0)\subset(D_*(0))_{2\widehat{E}_0\widetilde{\rho}_0}\times\mathbb{T}^n\times B^2_{r'}\subset(D_0(0))_r\times\mathbb{T}^n\times B^2_{r'} \tag{83}$$

其中

$$r=8n\widehat{E}_0\widetilde{\rho}_0\,,\qquad r'=2\widehat{E}_0\varepsilon_0$$

最后，采用与步骤 1 中类似的论证，由 (84)，重标度后的映射

$$\check{\Phi}:=\mathrm{id}+\mathbb{1}_{\widehat{\rho}_0^{-1},s_0^{-1},\varepsilon_0^{-1}}(\Phi-\mathrm{id}\,)\circ\mathbb{1}_{\widehat{\rho}_0,s_0,\varepsilon_0}$$

具有利普希茨常数

$$\mathcal{L}(\check{\Phi}-\mathrm{id}\,)\le 2^6(n+1)\widehat{E}_0\,. \tag{84}$$

特别地，$\check{}\Phi$，因此，Φ，并且最终，映射 $(\vartheta,\pi,\kappa;\,\omega)\to\phi_\omega(\vartheta,\pi,\kappa)$ 是双利普希茨的，因而是单射。

步骤 3 对于任意 $\omega_*\in\mathcal{D}_{\gamma_1,\,\gamma_2,\,\tau}\cap\omega_0(D,\,0)$，$\mathrm{T}_{\omega_*}$ 在 (83) 中是一个 n维 H不变环面，其频率为 ω_*。这一断言是 [6，命题 3 的证明，步骤 3]，中对应结论的直接推广，因此省略证明。

步骤 4 测度估计（*45*）的证明 （45）的证明 [6, 命题 3 的证明，步骤 4], 与 [6, 命题 3 的证明，步骤 4] 中的量

$$D_0\,,\quad D_*\,,\quad \check{\iota}\,,\quad \check{\Phi}\,,\quad \mathrm{K}$$

这里记作

$$D_0(0)\,,\quad D_*(0)\,,\quad \check{\iota}(0)\,,\quad \check{\Phi}\big|_{(\pi,\kappa)=(0,0)}\,,\quad \mathrm{K}_0\,.\qquad\square$$

3.4 正规形理论

命题3.1 可由下文更一般的命题 3.2 得到，取 $m=1$，$\mathbb{L}=\{0\}$ 并作如下坐标变换

$$p=\frac{p_1-\mathrm{i}q_1}{\sqrt{2}}\,,\qquad q=\frac{p_1+\mathrm{i}q_1}{\sqrt{2}\mathrm{i}}\,.$$

我们定义 c_m 为满足以下条件的最小数：对于任意两个在 $W_{r,\,s,\,\varepsilon}$ 上实解析的函数，以及任意选取的 $\hat{}r<r$、$\hat{s}<s$、$\hat{}\varepsilon<\varepsilon$,

$$\|\{f,g\}\|_{r-\hat{r},s-\hat{s},\varepsilon-\hat{\varepsilon}}\le\frac{c_m}{\delta}\|f\|_{r,s,\varepsilon}\|g\|_{r,s,\varepsilon}\quad\text{with }\delta:=\min\{\hat{r}\hat{s},\hat{\varepsilon}^2\}\,.$$

命题 3.2 设 $\{0\}\subset\mathbb{L}\subset\mathbb{Z}$。命题 *3.1* 成立，取

$$H(I,\varphi,p,q)=h\,(I_1,I_2,J(p,q))+f(I,\varphi,p,q)\,,\quad J(p,q):=\left(\frac{p_1^2+q_1^2}{2},\ldots,\frac{p_m^2+q_m^2}{2}\right)$$

将 c_1 替换为 c_m，将 Π_0 替换为 $\Pi_{\mathbb{L}}$，并将条件 (49) 替换为

$$|\omega_1\cdot k_1+\omega_2\cdot k_2|\geq\begin{cases}\alpha_1 & \text{if} \quad k_1\neq 0\\ \alpha_2 & \text{if} \quad k_1=0,\ k_2\neq 0\end{cases} \tag{85}$$

$$\forall\ k=(k_1,k_2)\ \in \mathsf{Z}^{n_1}\times\mathsf{Z}^{n_2+m}\setminus \mathrm{L}\ \neq(0,0)\quad |k|_1\leq K,\qquad \forall (I_1,I_2,p,q)\ \in V_r\times B_\varepsilon^{2m}$$

其中

$$\begin{aligned}\omega &= (\omega_1,\omega_2)\\ &:= \left(\partial_{I_1}h\left(I_1,I_2,J(p,q)\right)\ ,\ \partial_{(I_2,J(p,q))}h\left(I_1,I_2,J(p,q)\right)\right)\ .\end{aligned}$$

引理 3.3 设 $\hat{}r<r/2\,\hat{s}<s/2$, $\hat{}\varepsilon<\varepsilon/2$ 和 $\delta:=\min\{\hat{}r\hat{s},\hat{}\varepsilon^2\}$。设

$$H(u,\varphi,p,q)=\mathrm{h}(I,p,q)+g(u,\varphi,p,q)+f(u,\varphi,p,q)\qquad g(u,\varphi,p,q)=\sum_{i=1}^{m}g_i(u,\varphi,p,q)$$

在$W_{v,s,\varepsilon}$上实解析。假设不等式 (85) 以及

$$\|f\|_{v,s,\varepsilon}<\frac{\alpha_2\delta}{c_m}$$

成立。于是可以找到一个实解析的辛变换

$$\Phi:\ W_{v-2\hat{v},s-2\hat{s},\varepsilon-2\hat{\varepsilon}}\to W_{v,s,\varepsilon}$$

由一个合适的 ϕ 的时间一流[23] $X_\phi^1 f:=f\circ\Phi$ 定义，且满足

$$\|\phi\|_{v,s,\varepsilon}\leq\frac{\|f\|_{v,s,\varepsilon}}{\alpha_2}$$

使得

$$H_+:=H\circ\Phi=h+g+\Pi_{\mathbb{L}}T_K f+f_+$$

并且，此外，以下界成立

$$\begin{aligned}\|f_+\|_{v-2\hat{v},s-2\hat{s},\varepsilon-2\hat{\varepsilon}} \quad\leq\quad & \left(1-\frac{c_m}{\alpha_2\delta}\|f\|_{v,s,\varepsilon}\right)^{-1}\Big[\frac{c_m}{\alpha_2\delta}\|f\|_{v,s,\varepsilon}^2\\ & +\max\left\{e^{-K\hat{s}/2}\,,\ \left(\frac{\varepsilon-\hat{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^{K/2}\right\}\|f\|_{v,s,\varepsilon}+\|\{\phi,g\}\|_{v-\hat{v},s-\hat{s},\varepsilon-\hat{\varepsilon}}\Big]\end{aligned}$$

最后，对于任意定义在 $W_{v,s,\varepsilon}$ 上的实解析函数 F，

$$\|F\circ\Phi-F\|_{v-2\hat{v},s-2\hat{s},\varepsilon-2\hat{\varepsilon}}\quad\leq\quad\frac{\|\{\phi,F\}\|_{v-\hat{v},s-\hat{s},\varepsilon-\hat{\varepsilon}}}{1-\dfrac{c_m\|f\|_{v,s,\varepsilon}}{\alpha_2\delta}}. \tag{86}$$

证明思路 引理 3.3 是对 [22, 迭代引理]的直接推广。要得到这一推广，只需将 [22, 节 1] 中定义的范数替换为范数（48），其中

$$f=\sum_{\substack{(k,\alpha,\beta)\in\mathbf{Z}^n\times\mathbb{N}^\ell\times\mathbb{N}^\ell\\ \alpha_i\neq\beta_i\,\forall i}}f_{k,\alpha,\beta}(I)e^{ik\cdot\varphi}\left(\frac{p-\mathrm{i}q}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha}\left(\frac{p+\mathrm{i}q}{\mathrm{i}\sqrt{2}}\right)^{\beta}\ , \tag{87}$$

[23]由 ϕ生成的时间一流定义为微分算子

$$X_\phi^1:=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathcal{L}_\phi^k}{k!}$$

其中 $\mathcal{L}_\phi^0 f:=f$和 $\mathcal{L}_\phi^k f:=\{\phi,\mathcal{L}_\phi^{k-1}f\}$，其中 $k=1$、2、 $\cdots$。

并对“紫外余项”取界，即展开（87）仅包含满足 $|(k,\alpha-\beta)|_1 > K$ 的项的函数的范数，具体如下。注意，若 $|(k,\alpha-\beta)|_1 > K$，则要么 $|k|_1 > K/2$，要么 $|\alpha-\beta|_1 > K/2$。后一种情形显然有 $|\alpha|_1 + |\beta|_1 \geq |\alpha-\beta|_1 > K/2$。于是，对于这类函数，我们有 $\|f\|_{r,\ s-\hat{s},\ \varepsilon-\hat{\varepsilon}} \leq$ 最大值 $\left\{e^{-K\hat{s}/2},\ \left(\frac{\varepsilon-\hat{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^{K/2}\right\}\|f\|_{r,\ s,\ \varepsilon}$。其他细节从略。

命题的证明 **3.2**设

$$r_1 := r_0 - 2\hat{r}_0, \qquad s_1 := s_0 - 2\hat{s}_0, \quad \varepsilon_1 := \varepsilon_0 - 2\hat{\varepsilon}_0\,.$$

由引理 3.3，我们得到一个典范变换 $\Phi_1 = X_{\phi_1}$，它在 $W_{r_1,\ s_1,\ \varepsilon_1}$上实解析，并将 $H = H_0$ 共轭到 $H_1 = H_0 \circ \Phi_1 = h + g_1 + f_1$，其中 $g_1 = \Pi_{\mathbb{L}} T_K f_0$ 且

$$\begin{aligned}\|f_1\|_{v_1,s_1,\varepsilon_1} &\leq (1-\frac{c_m E_0}{\alpha_2\delta_0})^{-1}\Big[\frac{c_m E_0}{\alpha_2\delta_0} + \max\left\{e^{-K\hat{s}_0/2},\ (\frac{\varepsilon_0-\hat{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0})^{K/2}\right\}\Big]E_0\\ &\leq 2\Big[\frac{c_m E_0}{\alpha_2\delta_0} + e^{-K\hat{\sigma}_0/2}\Big]E_0\end{aligned}$$

利用了

$$(\frac{\varepsilon_0-\hat{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0})^{K/2} = e^{\frac{K}{2}\log\left(1-\frac{\hat{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0}\right)} \leq e^{-\frac{K}{2}\frac{\hat{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0}}\,.$$

现在我们聚焦于情形

$$\frac{c_m E_0}{\alpha_2\delta_0} < e^{-K\hat{\sigma}_0/2}$$

否则引理就[24] 得证。于是我们有

$$\|f_1\|_{v_1,s_1,\varepsilon_1} \leq 4\frac{c_m E_0^2}{\alpha_2\delta_0} =: E_1\,.$$

注意到

$$E_1 < \frac{E_0}{4}\,.$$

现在假设，对于某个 $j \geq 1$，有 $H_j = H_{j-1}\circ\Phi_j = h + g_j + f_j$，其中

$$g_j = \sum_{h=0}^{j-1}\Pi_{\mathbb{L}} T_K f_h\,, \qquad \|f_j\|_{v_j,s_j,\varepsilon_j} \leq E_j \leq \min\left\{\frac{E_0}{4^j},\ 4\frac{c_m E_0^2}{\alpha_2\delta_0}\right\}. \tag{88}$$

我们刚刚证明了当 $j=1$ 时该结论成立。令 $L := \left[\frac{K}{8}\frac{\sigma_0}{\text{对数 }2}\right]$。我们证明，对于88)，当$j+1$时，对所有 $1 \leq j \leq L$ 均成立。令

$$\hat{r}_j := \frac{\hat{r}_0}{L}\,, \quad \hat{s}_j := \frac{\hat{s}_0}{L}\,, \quad \hat{\varepsilon}_j := \frac{\hat{\varepsilon}_0}{L} \quad \text{hence} \quad \delta_j = \frac{\delta_0}{L^2} \quad \forall\ 1 \leq j \leq L\,.$$

注意，对所有 $1 \leq j \leq L$，都有 $\hat{r}_j < \frac{r_j}{2}$：

$$r_j = r_1 - 2(j-1)\frac{\hat{r}_0}{L} \geq r_1 - 2(1-1/L)\hat{r}_0 = r_0 - 4\hat{r}_0 + 2\hat{r}_j > 2\hat{r}_j\,.$$

同理，$\hat{s}_j < \frac{s_j}{2}$、$\hat{\varepsilon}_j < \frac{\varepsilon_j}{2}$。于是令

$$r_{j+1} = r_j - 2\frac{\hat{r}_0}{L}\,, \quad s_{j+1} = s_j - 2\frac{\hat{s}_0}{L}\,, \quad \varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j - 2\frac{\hat{\varepsilon}_0}{L}$$

[24]事实上，在这种情形下，$\|f_1\|_{v_1,\ s_1,\ \varepsilon_1} \leq 4e^{-K\hat{\sigma}_0/2} \leq e^{-K\hat{\sigma}_0/4}$因为 $e^{-K\hat{\sigma}_0/4} \leq \frac{1}{4}$已选取 $K\hat{\sigma}_0 \geq 8$ 对数 2。

使得 $r_j = r_1 - 2(j-1)\frac{\hat{r}_0}{L}$，等等，对所有 $1 \le j \le L$ 均成立。于是

$$c_m \frac{E_j}{\alpha_2 \delta_j} \le 4 \frac{c_0^2 E_0^2}{\alpha_2^2 \delta_0^2} L^2 < \frac{1}{16} \tag{89}$$

并且引理 3.3 再次适用，且 H_j 可共轭为 $H_{j+1} = H_j \circ \Phi_{j+1} = h + g_{j+1} + f_{j+1}$，其中

$$\begin{aligned} g_{j+1} &= g_j + \Pi_{\mathbb{L}} T_K f_j = \sum_{h=0}^{j} \Pi_{\mathbb{L}} T_K f_h \\ \|f_{j+1}\|_{r_{j+1}, s_{j+1}, \varepsilon_{j+1}} &\le \big(1 - \frac{c_m}{\alpha_2 \delta_j} E_j\big)^{-1} \Big[\frac{c_m}{\alpha_2 \delta_j} E_j^2 \\ &\quad + \max\left\{ e^{-K\hat{s}_j/2}, \big(\frac{\varepsilon_j - \hat{\varepsilon}_j}{\varepsilon_j}\big)^{K/2} \right\} E_j + \|\{\phi_j, g_j\}\|_{r_j - \hat{r}_j, s_j - \hat{s}_j, \varepsilon_j - \hat{\varepsilon}_j} \Big] \end{aligned}$$

为了给后一个表达式的右端项取界，我们使用（89），并注意到

$$\begin{aligned} & e^{-K\widehat{s}_j/2} = e^{-\frac{K}{2L}\widehat{s}_0} \le \frac{1}{16} \\ & \left(\frac{\varepsilon_j - \hat{\varepsilon}_j}{\varepsilon_j}\right)^{K/2} = \left(1 - \frac{\frac{\widehat{\varepsilon}_0}{L}}{\varepsilon_1 - 2(j-1)\frac{\widehat{\varepsilon}_0}{L}}\right)^{K/2} \le \left(1 - \frac{\widehat{\varepsilon}_0}{\varepsilon_1 L}\right)^{K/2} \le e^{-\frac{K\widehat{\varepsilon}_0}{2\varepsilon_1 L}} \le \frac{1}{16} \end{aligned}$$

使用了 $e^{-\frac{K\hat{s}_0}{2L}} \le e^{-\frac{K\hat{\sigma}_0}{2L}}$, $e^{-\frac{K\hat{\varepsilon}_0}{2\varepsilon_1 L}} \le e^{-\frac{K\hat{\varepsilon}_0}{2\varepsilon_0 L}} \le e^{-\frac{K\hat{\sigma}_0}{2L}}$和 $L \le {}^{K}\!\diagup_{8}\, {}^{\sigma_0}\!\diagdown_{\log 2}$。此外，记

$$g_j = \Pi_{\mathbb{L}} T_K f_0 + \mathbb{1}_{j \ge 2} \sum_{h=1}^{j-1} \Pi_{\mathbb{L}} T_K f_h =: f_0^{\mathbb{L},K} + f_{j-1}^{\mathbb{L},K}$$

with $f_{\mathbb{L}_0}{}^{K}$ 在 $W_{r_0, s_0, \varepsilon_0}$ 上实解析，而 $f_{\mathbb{L}_{j-1}}{}^{K}$ 在 $W_{r_{j-1}, s_{j-1}, \varepsilon_{j-1}}$ 上实解析，并验证

$$\|f_0^{\mathbb{L},K}\|_{r_0, s_0, \varepsilon_0} \le E_0\,, \quad \|f_{j-1}^{\mathbb{L},K}\|_{r_{j-1}, s_{j-1}, \varepsilon_{j-1}} \le \sum_{h=1}^{j-1} \frac{E_1}{4^{j-1}} \le \frac{4}{3} E_1$$

我们得到

$$\begin{aligned} \|\{\phi_j, g_j\}\|_{r_j - \hat{r}_j, s_j - \hat{s}_j, \varepsilon_j - \hat{\varepsilon}_j} &\le \frac{c_m L}{\alpha_2 \delta_0} E_0 E_j + \frac{4}{3} \frac{c_m L^2}{\alpha_2 \delta_0} E_1 E_j \\ &\le \left(\frac{c_m L}{\alpha_2 \delta_0} E_0 + \frac{16}{3} \frac{c_m^2 L^2}{\alpha_2^2 \delta_0^2} E_0^2 \right) E_j \\ &\le \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{32} \right) E_j = \frac{E_j}{16} \end{aligned}$$

汇总所有这些界，我们得到

$$E_{j+1} \le \frac{16}{15} \frac{3}{16} E_j < \frac{E_j}{4}\,.$$

因此，对于所有 $1 \le j \le L$，归纳断言 $j \to j+1$ 得证。现在令 $\Phi_* := \Phi_1 \circ \cdots \circ \Phi_{L+1}$，并且

$$\begin{aligned} & H_* := H_{L+1} = h + g_{L+1} + f_{L+1} =: h + g_* + f_* \\ & r_* := r_{L+1} = r - 4\hat{r}\,,\ s_* := s_{L+1} = s - 4\hat{s}\,,\ \varepsilon_* := \varepsilon_{L+1} = \varepsilon - 4\hat{\varepsilon} \end{aligned}$$

并利用 $L+1 > \frac{K\hat{\sigma}_0}{8} - \log 2$，可得

$$\|f_*\|_{r_*,s_*,\varepsilon_*} \leq \frac{E_0}{4^{L+1}} = e^{-2(L+1)\log 2} E_0 < e^{-\frac{K\hat{\sigma}_0}{4}} E_0$$
$$\|g_* - \Pi_{\mathbb{L}} T_K f_0\|_{r_*,s_*,\varepsilon_*} \leq \frac{4}{3} E_1 < 8 \frac{c_m E_0^2}{\alpha_2 \delta_0}$$

正如所声称的，界（52）由（86）通过常见的望远镜求和论证得到。 □

致谢 G.P. 感谢 G. Gallavotti 在多次讨论中提出的诸多启发性见解。定理 1.1 是 X.L. 理学硕士论文的一部分。本研究由 PRIN 项目“天体力学新前沿：理论与应用”资助，并在 INdAM 和 GNFM 的支持下开展。

作者确认本文没有相关数据。

作者贡献 GP 构思并开展了这项工作，撰写了论文主体。XL 起草了定理 1.1，该定理是其在帕多瓦大学攻读理学硕士期间论文的一部分。所有作者均审阅了稿件。

参考文献

[1] V. I. Arnold. 多自由度动力系统的不稳定性. 苏联科学院通报, 156:9–12, 1964.[2] V.I. Arnold. 经典力学与天体力学中运动稳定性问题的小分母. 俄罗斯数学评论, 18(6):85–191, 1963.[3] F. Bonetto, G. Gallavotti, G. Gentile, and V. Mastropietro. 林德斯特方程级数、紫外发散与莫泽定理. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser., 26(3):545– 593, 1998.[4] A. Celletti and L. Chierchia. 天体力学自旋—轨道问题中稳定周期轨道的构造. 《规则与混沌动力学》, 3(3):107–121, 1998. 莫泽七十岁（俄文）.[5] L. Chierchia and G. Gallavotti. 相空间中的漂移与扩散. Ann. Inst. H. Poincar ´e Phys. Th ´eor., 60(1):144, 1994.[6] L. Chierchia and G. Pinzari. 恰当退化的 KAM 理论（遵循 V.I. Arnold）. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 3(4):545–578, 2010.[7] L. Chierchia and G. Pinzari. 行星 N体问题：辛叶状结构、约化与不变环面. Invent. Math., 186(1):1–77, 2011.[8] L. Chierchia and M. Procesi. 有限维与无限维系统的柯尔莫哥洛夫–阿诺德–莫泽（KAM）理论，第1–45页. 施普林格·柏林·海德堡，柏林，海德堡, 2019.[9]A. Clarke, J. F ´ejoz, and M. Guardia. 为什么内行星没有倾斜？arXiv: 2210.11311v1, 2022.[10] A. Delshams, V. Kaloshin, A. de la Rosa, and T. M. Seara. 受限平面椭圆三体问题中的整体不稳定性. 《数学物理通讯》, 366(3):1173–1228, 2019.[11] A. Deprit. n 体问题中的交点线消去. 《天体力学》, 30(2):181–195, 1983.

[12]J. F´ejoz. 关于阿诺德定理的证明：行星系统稳定性（据Herman）. Ergodic Theory Dynam. Systems, 24(5):1521–1582, 2004.[13] J. F´ejoz, M. Guardia, V. Kaloshin, and P. Roldan. 受限平面三体问题中柯克伍德间隙与沿平均运动共振的扩散. J. Eur. Math. Soc., 2014.[14] G. Gentile G. Gallavotti. 无扭转 KAM 环面的主控收敛. Ergodic Theory Dyn. Syst., 15(5):587–869, 1995.[15] G. Gallavotti. 拟可积力学系统. 载于《临界现象、随机系统、规范理论》，第一、二部分（莱苏什，1984），第539–624页. North-Holland，阿姆斯特丹，1986.[16] G. Gallavotti. 无扭转 KAM 环面. 《数学物理通讯》, 164(1):145–156, 1994.[17] M. Guzzo, C. Efthymiopoulos, and R. I. Paez. 先验稳定哈密顿系统中沿单一共振的阿诺德扩散速度的半解析计算. J. Nonlinear Sci., 30(3):851–901, 2020.[18] C. G. J. Jacobi. 关于三体问题中的交点线消去. 《天文学通报》, Bd XX:81–102, 1842.[19] J. Laskar and P. Robutel. 行星三体问题的稳定性. I. 行星哈密顿量的展开. Celestial Mech. Dynam. Astronom., 62(3):193–217, 1995.[20] G. Pinzari. 行星三体问题中极大环面与带须环面的共存. 《数学物理学杂志》, 59(5):052701, 2018年5月.[21] G. Pinzari. 近日点约化与行星问题中的全局 Kolmogorov 环面. Mem. Amer. Math. Soc., 255(1218), 2018.[22]J. P¨oschel. 拟凸哈密顿系统的 Nekhoroshev 估计. Math. Z., 213(2):187–216, 1993.[23] R. Radau. 动力学微分方程的一种变换. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 5:311–375, 1868.[24] H. R¨ussmann. 非退化近可积哈密顿系统中的不变环面. 《规则与混沌动力学》, 6(2):119–204, 2001.