具有奇异势的 Lévy 驱动朗之万动力学的指数遍历性

Jianhai Bao Rongjuan Fang Jianwang

摘要。本文研究具有奇异势的 Lévy 驱动朗之万动力学的指数遍历性，该动力学可用于模拟由 N 个粒子组成、在 $\mathbb{R}^d$ 中运动并受不连续随机力作用的分子系统的时间演化。特别地，我们的结果适用于奇异情形，不仅包括类似 Lennard-Jones 的相互作用势，也包括库仑势。除 Harris 定理外，本文方法还基于对适当李雅普诺夫函数的新颖构造（这与布朗运动驱动的朗之万动力学中的设定截然不同）、对非局部算子调用 Hörmander 定理、解决相关确定性系统的近似可控性问题，以及利用时间变换思想。

关键词： 朗之万动力学；Lévy 噪声；奇异势函数；指数遍历性；李雅普诺夫函数

MSC 2020： 60K35, 37A25, 60J76

arXiv:2302.00296v1 [math.PR] 1 Feb 2023

1. 引言与主要结果

在物理学中，朗之万动力学用于模拟由 N 个粒子组成的分子系统随时间的演化，这些粒子在 $\mathbb{R}^d$ 中运动。其数学描述如下，是定义在 $\mathbb{R}^{Nd}\times\mathbb{R}^{Nd}$ 上的退化随机微分方程（SDE）：$=(\mathbb{R}^d)^N\times(\mathbb{R}^d)^N$:

$$\begin{cases}\mathrm{d}\mathbf{X}_t=\nabla_{\mathbf{V}}H(\mathbf{X}_t,\mathbf{V}_t)\,\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}\mathbf{V}_t=-\big(F(\mathbf{X}_t,\mathbf{V}_t)\nabla_{\mathbf{V}}H(\mathbf{X}_t,\mathbf{V}_t)+\nabla_{\mathbf{X}}H(\mathbf{X}_t,\mathbf{V}_t)\big)\,\mathrm{d}t+\mathrm{d}\mathbf{Z}_t,\end{cases}\tag{1.1}$$

其中，$\mathbf{X}_t:=\big(X_t^{(1)},X_t^{(2)},\cdots,X_t^{(N)}\big)\in\mathbb{R}^{Nd}$ 和 $\mathbf{V}_t:=\big(V_{(1)\,t},V_{(2)\,t},\cdots,V_{(N)\,t}\quad\big)\in\mathbb{R}^{Nd}$ 分别表示 N 个粒子的位置和速度；H：$\mathbb{R}^{Nd}\times\mathbb{R}^{Nd}\to\mathbb{R}$ 表示哈密顿函数；F：$\mathbb{R}^{Nd}\times\mathbb{R}^{Nd}\to[0,\infty]$ 表示阻尼系数；$(\mathbf{Z}_t)_{t\geq0}$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^{Nd}$ 的噪声过程。有关物理背景的详细介绍以及力学中的更多应用，请参阅专著 [19]。特别地，当光滑 U：$\mathbb{R}^{Nd}\to\mathbb{R}$ 的哈密顿能量 $H(x,v)=\frac{1}{2}|v|^2+U(x)$ 满足条件，且阻尼系数 F 为常数（即，对于某个正的 γ，有 $F(x,v)=\gamma$），(1.1) 化为

$$\begin{cases}\mathrm{d}\mathbf{X}_t=\mathbf{V}_t\,\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}\mathbf{V}_t=-\big(\gamma\mathbf{V}_t+\nabla U(\mathbf{X}_t)\big)\,\mathrm{d}t+\mathrm{d}\mathbf{Z}_t.\end{cases}\tag{1.2}$$

其中，$-\gamma\mathbf{V}_t$ 表示阻尼力，其大小为 $\gamma>0$ 热介质产生的摩擦力；∇ 是作用于 $\mathbb{R}^{Nd}$ 和 U 上的梯度算子：$\mathbb{R}^{Nd}\to[0,\infty]$ 表示势能，它可能包含由外力产生的约束势，以及由排斥力产生的相互作用势能。

过去几十年来，单粒子情形（即 $N=1$）下方程 (1.2) 的长时间行为（例如指数遍历性）已得到深入研究。当势函数 U 呈多项式型，且驱动噪声 $(\mathbf{Z}_t)_{t\geq0}$ 是 d 维布朗运动时，几何

J. Bao: 中国天津市天津大学应用数学中心，邮编 300072。jianhaibao@tju.edu.cn。*R. Fang:* 中国福州市福建师范大学数学与统计学院，邮编 350007。fangrj@fjnu.edu.cn。*J. Wang:* 中国福州市福建师范大学数学与统计学院、福建省数学分析与应用重点实验室（FJKLMAA）、福建省应用数学中心（FJNU），邮编 350007。jianwang@fjnu.edu.cn。

遍历性在全变差距离下的研究，例如 [16, 22, 24] ，是通过 Harris 定理（如 [12, 定理 1.2]）进行的；而 [9] 则借助反射耦合方法进行了研究。除上述两种概率方法外，Villani [23] 开创的亚强制性理论也是一种重要的分析工具，可用于研究方程 (1.2) 在 H^1（μ）或 H^2（μ）中，具有 C^2 势函数 U 时向平衡态的指数收敛。

从统计力学的角度来看，刻画排斥力的相互作用势具有某些奇异特征，因为粒子彼此靠近时，相互作用会急剧增强。奇异相互作用势中，Lennard-琼斯势和库仑势是两种典型的势函数。与势项 U 为正则的情形相比，由于涉及排斥势，研究 (1.2) 的长时间行为要困难得多。尽管如此，在底层噪声 $(\mathrm{Z}_t)_{t\geq 0}$ 为标准布朗运动时，关于 (1.2) 的指数遍历性研究已取得显著进展。基于精巧构造的李雅普诺夫函数以及对 Harris 定理的巧妙应用，文献 [14] 探讨了容许势函数下加权全变差距离意义下的指数遍历性；这类势函数包括类 Lennard-琼斯相互作用势，但不包括库仑势。文献 [15], 中，作者进一步构造了另一种新颖的李雅普诺夫函数，并通过考察 Harris 定理的判据，研究具有库仑相互作用的朗之万动力学的几何遍历性。此外，当排斥势满足全局可积条件时，文献 [20] 利用 Zvonkin 变换消除奇异势函数，研究了加权全变差距离意义下的指数遍历性；其中，Lennard-琼斯势和库仑势均被完全排除。同时，具有奇异势函数的 (1.2) 的 L^2-指数遍历性也受到了广泛关注；更多详情请参见例如 [3, 10] 。此外，通过发展文献 [14, 15], 中构造李雅普诺夫函数的技巧，文献 [11] 讨论了具有奇异势函数的亚椭圆哈密顿动力学的准平稳分布的存在性与唯一性。

过去二十年来，人们越来越关注由 Lévy 噪声 $(\mathrm{Z}_t)_{t\geq 0}$ 驱动的朗之万动力学 (1.1) 所对应的动力学 Fokker-Planck 算子基本解的正则性与遍历性，特别是在 $N = 1$ 的情形下。具体而言，Zhang 及其合作者撰写的一系列论文（例如 [7, 13, 21, 25, 26, 27, 28]）致力于研究非局部算子的 Hörmander 定理；这与分数阶动力学方程或无角截断的空间非均匀 Boltzmann 方程（线性模型）的次椭圆性理论密切相关，参见例如 [1, 5, 17]。此外，即使假设势函数U 是正则的，而底层噪声 $(\mathrm{Z}_t)_{t\geq 0}$ 是一个 d 维纯跳 Lévy 过程，文献 [2] 仍借助精细基本耦合法，研究了由 (1.1) 求解的马尔可夫过程在乘法型准 Wasserstein 距离下的指数遍历性。事实上，受从重尾分布中采样这一问题的启发（该问题出现在统计机器学习 [18] 等各种应用中），并考虑到统计物理学研究 [4], ，具有 α-稳定 Lévy 运动（而非布朗运动）驱动的随机微分方程 (1.2) 的长时间行为将发挥更为恰当且重要的作用。

如上所述，关于驱动噪声为标准布朗运动时 (1.2) 的长期行为，已有大量文献研究。然而，在某些情况下，所考虑的随机系统可能受到不连续随机力的作用，而非连续随机力。因此，受上述动机的强烈启发，研究在含有 $N > 1$ 的 N 粒子框架下由 Lévy 噪声驱动的随机微分方程 (1.2) 的遍历性，尤其是当粒子间的相互作用导致势项 $U(x)$ 具有奇异性时，是十分必要且有意义的。迄今为止，这方面的研究仍为空白，因此我们打算填补相应的研究空缺。

具体而言，本文始终假设 $\mathrm{Z}_t := (Z_t^{(1)}, \cdots, Z_t^{(N)}) \in \mathbb{R}^{Nd}$，其中 $(Z_t^{(1)})_{t\geq 0}$, $\cdots$ 和 $(Z_t^{(N)})_{t\geq 0}$ 是定义在同一概率空间 $(\Omega\ \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上的相互独立的 d 维纯跳 Lévy 过程，其列维测度分别为 $\nu^{(1)}(\mathrm{d}u)\ \cdots, \nu^{(N)}(\mathrm{d}u)$。令 $P_t((x, v)\ \cdot)$ 为由 (1.2) 确定的过程 $(\mathrm{X}_t, \mathrm{V}_t)_{t\geq 0}$ 的转移核。

下文中，为避免列出关于势项 U 的复杂假设，并且更重要的是，简洁地阐明本文的贡献，我们将重点讨论与类 Lennard-Jones 势和库仑势相关的情形（这两者是奇异势的典型代表），而非更一般的势函数，以呈现本文的主要结果。

定理 1.1. 设驱动噪声 $(\mathbf{Z}_t)_{t\geq 0} := ((Z_t^{(1)}, \cdots, Z_t^{(N)}))_{t\geq 0}$ 满足：对于任意 $1 \leq i \leq N$，$(Z_t^{(i)})_{t\geq 0}$ 是一个 d 维的(旋转不变) 对称 α_i-稳定列维过程，且$\alpha_i \in (0,2)$，并且 $(Z_t^{(1)})_{t\geq 0}, \cdots, (Z_t^{(N)})_{t\geq 0}$ 相互独立。假设以下条件之一成立：

(i) (**类 Lennard-Jones 势**) 存在常数 $c_0, c_1, c_2 > 0$，使得对所有$x \in \mathbb{R}^{Nd}$,

$$U(x) = c_0 \sum_{i=1}^{N} (1 + |x^{(i)}|^2)^{\alpha/2} + \sum_{1\leq i<j\leq N} U_I(x^{(i)} - x^{(j)}),$$

其中 $\alpha \geq 2$，且对于非零的 $u \in \mathbb{R}^d$,

$$U_I(u) := c_1|u|^{-12} - c_2|u|^{-6}.$$

(i)(**库仑势**) 存在常数 $c_0 > 0$，使得对所有 $x \in \mathbb{R}^{Nd}$,

$$U(x) = c_0 \sum_{i=1}^{N} (1 + |x^{(i)}|^2)^{\alpha/2} + \sum_{1\leq i<j\leq N} U_I(x^{(i)} - x^{(j)}),$$

其中 $\alpha \geq 2$，且对于非零的 $u \in \mathbb{R}^d$,

$$U_I(u) := |u|^{2-d}, \quad d \geq 3; \; U_I(u) := -\log|u|, \quad d = 2.$$

那么，由$(\mathbf{X}_t, \mathbf{V}_t)_{t\geq 0}$ 给出的过程(1.2) 是指数遍历的，具体而言，过程$(\mathbf{X}_t, \mathbf{V}_t)_{t\geq 0}$ 具有唯一的不变概率测度 μ，并且存在常数 λ 和正函数 $C(x,v)$，使得对所有$(x,v) \in \mathscr{K} := \mathscr{D}(U) \times \mathbb{R}^{Nd}$以及 $t > 0$,

$$\|P_t((x,v),\cdot) - \mu\|_V \leq C(x,v)\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

其中，对于符号测度 μ_0，$\|\mu_0\|_V = \sup_{|f|\leq V} |\mu_0(f)|$，并且 $V(x,v) \geq 1$ 对所有满足以下条件的$(x,v) \in \mathscr{K}$

$$V(x,v) \simeq \big(|v|^2 + U(x)\big)^{\theta/2} \qquad as \; |v|^2 + U(x) \to \infty$$

其中 $\theta \in (0, \min_{1\leq i\leq N} \alpha_i)$.

这里以及下文中，对于两个函数 f、g，$f \simeq g$表示存在常数 c_*、c^*使得 $c_* f \leq g \leq c^* f$。下面我们对定理 1.1及其证明作一些评论。

注 1.2. (i) 需要说明的是，上述主要结果是在两种特定设定下描述的。对于适用于范围更广的奇异相互作用势的一般框架，关于在加权全变差距离下方程 (1.2) 的指数遍历性的相应主要结果将在第 4 节给出。

(ii) Harris 定理是研究马尔可夫过程指数遍历性质的有力工具之一，其中关键要素之一是构造适当的李雅普诺夫函数。在 [14, 15]（即使在 [16, 24]，对于系数正则的情形也是如此），为研究具有奇异势的朗之万动力学的几何遍历性，构造了指数型李雅普诺夫函数（更多详情见 [14] 中的 (2.4) 和 [15] 中的 (16)）。这类李雅普诺夫函数反过来要求相应过程具有有限的指数型矩；更多详情见 [14, 定理 2.3] 和 [15, 定理 2.5]。然而，当驱动噪声（例如，α-稳定 Lévy 运动）具有重尾性质时，这一要求相当严格。特别是，对于我们所关注的框架，所构造的李雅普诺夫函数

[14, 15] 已不再适用。不过，受 [14, 15], 中李雅普诺夫函数构造方法的启发，本文构造了两个全新的李雅普诺夫函数，并使其适用于奇异势（例如类 Lennard-Jones 势和库仑势）。与 [14, 15], 中的主要结果不同，定理 1.1 中建立的李雅普诺夫函数仅允许具有多项式增长。更重要的是，本文给出的李雅普诺夫函数也为进一步研究具有奇异势的 Lévy 驱动的朗之万动力学的加权 L^2- 压缩性（例如 [3]），以及准平稳分布的存在性与唯一性（例如 [11]）铺平了道路。

(iii) 关于李雅普诺夫函数的构造，所涉及的驱动 Lévy 噪声可以更加一般。然而，对于不可约性，噪声项则被限制为一类对称稳定过程（或更一般的从属布朗运动），其中关键在于充分利用布朗运动在拓扑意义上的不可约性。为避免应用 Harris 定理（在绝大多数情况下，检验强 Feller 性质和不可约性都极其困难），概率耦合方法或许可以作为研究 (1.2) 遍历性的替代方案；更重要的是，它能够涵盖广泛的纯跳 Lévy 噪声情形（系数正则时的情形见 [2] ）。由于奇异势函数的存在，目前构造合适的耦合和恰当的度量函数，以研究 (准) Wasserstein 距离下的遍历性，仍是一项极具挑战性的任务。尽管困难重重，仍值得在后续工作中尝试。

本文其余部分安排如下。第 2 节中，我们旨在针对两种不同的充分条件，为随机微分方程 (1.2) 构造适当的李雅普诺夫函数（见命题 2.1 和 2.5 ）。具体而言，这两种情形分别适用于 Lennard-Jones 类相互作用势函数（见例 2.3）和库仑势（见例 2.6）。第 3 节通过采用截断论证并运用非局部算子的 Hörmander 定理，证明强 Feller 性质（见命题 3.1）；此外，还通过对相关确定性系统的近似可控性采用一种技巧，证明不可约性（见命题 3.2）。其中，(1.2) 中涉及的驱动噪声 $(\mathrm{Z}_t)_{t\geq 0} := ((Z_t^{(1)}, \cdots, Z_t^{(N)}))_{t\geq 0}$ 是一个独立对称稳定 Lévy 过程。同时，借助李雅普诺夫函数、强 Feller 性质和不可约性，我们在第 4 节援引 Harris 定理给出定理 1.1 的证明。最后，在本文结论之前，我们给出关于 (1.2) 指数遍历性的一个更一般的结果。

2. 李雅普诺夫函数与李雅普诺夫条件

令 $\mathscr{L}$ 为由 (1.2) 确定的 $(\mathrm{X}_t, \mathrm{V}_t)_{t\geq 0}$ 的无穷小生成元；即，对所有 $\psi \in C_b^2(\mathscr{K})$,

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{L}\psi)(x,v) &= \langle \nabla_x \psi(x,v), v\rangle - \langle \nabla_v \psi(x,v), \gamma v + \nabla U(x)\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\psi(x, v+S_i(z)) - \psi(x,v) - \langle \nabla_v^{(i)} \psi(x,v), z\rangle \mathbb{1}_{\{|z|\leq 1\}}\right) \nu^{(i)}(\mathrm{d}z).
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

此处及下文中，$\mathscr{K} := \mathscr{D}(U) \times \mathbb{R}^{Nd}$满足 $\mathscr{D}(U) := \{x \in \mathbb{R}^{Nd} : U(x) < \infty\}$；对于$v = (v^{(1)}, \cdots, v^{(N)}) \in \mathbb{R}^{Nd}$且 $v^{(i)} \in \mathbb{R}^d$,

$$\nabla_v \psi(x,v) = (\nabla_v^{(1)} \psi(x,v), \cdots, \nabla_v^{(N)} \psi(x,v)) \in \mathbb{R}^{Nd},$$

其中，$\nabla_v^{(i)}$表示关于分量 $v^{(i)} \in \mathbb{R}^d$的梯度算子；对于 $x \in \mathscr{D}(U)$，$\nabla_x \psi(x,v)$的定义类似；对于 $z \in \mathbb{R}^d$，$S_i(z)$是零向量 $(\mathbf{0}_1, \cdots, \mathbf{0}_N) \in \mathbb{R}^{Nd}$的第 i次替换，即，

$$S_i(z) = (\mathbf{0}_1, \cdots, \mathbf{0}_{i-1}, z, \mathbf{0}_{i+1}, \cdots, \mathbf{0}_N).$$

本节的主要目的是分别给出过程 $(\mathrm{X}_t, \mathrm{V}_t)_{t\geq 0}$ （该过程满足方程 (1.2)）存在李雅普诺夫函数的两个充分条件。具体而言，我们将分别讨论两种情形，它们尤其适用于伦纳德-琼斯型势和库仑型势。

2.1. 情形 1。

在本部分中，我们假设势项 U 和 Lévy 测度 $(\nu^{(k)})_{1\leq k\leq N}$ 满足

$(\mathbf{H}_U)$ $U\colon\ \mathscr{D}(U)\to\mathbb{R}$ 是一个 C^∞-函数，使得 $U(x)$ 有下界，且 $U(x)\to+\infty$ 当且仅当 $x\to\partial\mathscr{D}(U)$（定义域 $\mathscr{D}(U)$ 的边界，其中该定义域是开且路径连通的）或 $|x|\to+\infty$；并且存在常数 $C_U>0$，使得对所有 $x\in\mathscr{D}(U)$，

$$U(x)(1+\|\nabla^2 U(x)\|)\leq C_U(1+|\nabla U(x)|^2), \tag{2.2}$$

其中 ∇^2 和 $\|\cdot\|$ 分别表示海森算子和希尔伯特–施密特范数。

$(\mathbf{H}_\nu)$ 存在常数 $\theta\in(0,2]$，使得

$$\sum_{i=1}^N\int_{\{|z|>1\}}|z|^\theta\,\nu^{(i)}(\mathrm{d}z)<\infty.$$

根据 (2.2) 以及 $U(x)$ 有下界这一事实可知，$U(x)\to+\infty$ 当且仅当 $x\to\partial\mathscr{D}(U)$ 或 $|x|\to+\infty$，因此我们有

- 存在一个常数 $r_0>0$，使得 $|\nabla U(x)|\geq 1$ 对任意满足 $U(x)\geq r_0$ 的 $x\in\mathscr{D}(U)$ 均成立；
- 对任意 $r>0$，存在一个常数 $C^*_{U,r}>0$，使得

$$\sup_{x\in\mathscr{D}(U):U(x)\leq r}\|\nabla^2U(x)\|\leq C^*_{U,r}; \tag{2.3}$$

- 存在常数 C^*_U、$R^*_U>0$，使得对所有满足 $U(x)\geq R^*_U$ 的 $x\in\mathscr{D}(U)$，

$$\frac{U(x)}{|\nabla U(x)|^2}\big(1+\|\nabla^2U(x)\|\big)\leq C^*_U. \tag{2.4}$$

下文中，令 $\alpha\in C^\infty([0,\infty);[0,1])$ 满足

$$\alpha(u)=\begin{cases}1, & u\geq 2r_0,\\ 0, & u\leq r_0,\end{cases}$$

且对所有 $u\in[r_0,2r_0]$，$|\alpha'(u)|\leq 2/r_0$。对于 $\kappa>0$，定义

$$\psi_\kappa(x,v)=\frac{\kappa}{|\nabla U(x)|^2}\alpha(U(x))U(x)\langle v,\nabla U(x)\rangle,\quad (x,v)\in\mathscr{K}.$$

根据 $\alpha(\cdot)$ 的定义以及对所有满足 $U(x)\geq r_0$ 的 $x\in\mathscr{D}(U)$，$|\nabla U(x)|\geq 1$ 这一事实，由 (2.4) 可得

$$\begin{aligned}|\psi_\kappa(x,v)|&\leq\frac{\kappa^2\alpha(U(x))^2U(x)^2}{|\nabla U(x)|^2}+\frac{|v|^2}{4}\\&\leq\frac{\kappa^2U(x)^2}{|\nabla U(x)|^2}\mathbb{1}_{\{U(x)\geq r_0\vee R^*_U\}}+\frac{\kappa^2U(x)^2}{|\nabla U(x)|^2}\mathbb{1}_{\{r_0<U(x)<r_0\vee R^*_U\}}+\frac{|v|^2}{4}\\&\leq\kappa^2\Big(C^*_U\mathbb{1}_{\{U(x)\geq r_0\vee R^*_U\}}+U(x)\mathbb{1}_{\{r_0\leq U(x)<r_0\vee R^*_U\}}\Big)U(x)+\frac{|v|^2}{4}\\&\leq\kappa^2\theta_0U(x)\mathbb{1}_{\{U(x)\geq r_0\}}+\frac{|v|^2}{4},\quad (x,v)\in\mathscr{K},\end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $\theta_0:=r_0\vee C^*_U\vee R^*_U$。

下文中，我们令

$$V_\kappa(x,v):=C_*+\frac{|v|^2}{2}+U(x)+\psi_\kappa(x,v),\quad (x,v)\in\mathscr{K}, \tag{2.6}$$

其中

$$C_* := 1 + \sup_{x\in\mathscr{D}(U):U(x)<r_0} |U(x)|.$$

特别地，对于所有的 $(x,v) \in \mathscr{K}$，有

$$\begin{aligned} C_* + \frac{3|v|^2}{4} + \big(1+\kappa^2\theta_0 \mathbb{1}_{\{U(x)\geq r_0\}}\big)U(x) \geq & V_\kappa(x,v) \\ \geq & C_* + \frac{|v|^2}{4} + \big(1-\kappa^2\theta_0 \mathbb{1}_{\{U(x)\geq r_0\}}\big)U(x). \end{aligned} \tag{2.7}$$

因此，只要 $\kappa \in \big(0, \frac{1}{\sqrt{\theta_0}}\big]$, $V_\kappa(x,v) \geq 1$ 对于所有 $(x,v) \in \mathscr{K}$ 成立。

此外，令

$$\kappa^* = \frac{1}{\sqrt{\theta_0}} \wedge \frac{1}{2\theta_0\gamma} \wedge \frac{\gamma}{4(5+3(C_U^* \vee (\beta_0 C^*_{U,\beta_0})))}, \tag{2.8}$$

其中 $\beta_0 := (2r_0) \vee R^*_U$。

基于上述预备材料，我们得到以下极其重要的结论。

命题 *2.1.* 假设 *(H$_U$)* 和 *(H$_\nu$)* 成立。那么，对于任意 $\kappa \in (0,\kappa^*)$ 和 $\mathcal{V}_{\kappa,\theta}(x,v) := V_\kappa(x,v)^{\theta/2}$，其中 $\theta \in (0,2]$ 在 *(H$_\nu$)* 中给出，且 κ^* 和 V_κ 分别由 *(2.8)* 和 *(2.6)* 定义，存在常数 $\lambda_{\mathcal{V}}, C_{\mathcal{V}} > 0$，使得对于 $(x,v) \in \mathscr{K}$，

$$(\mathscr{L}\mathcal{V}_{\kappa,\theta})(x,v) \leq -\lambda_{\mathcal{V}}\mathcal{V}_{\kappa,\theta}(x,v) + C_{\mathcal{V}}. \tag{2.9}$$

在证明上述命题之前，我们先对其中涉及的假设以及李雅普诺夫函数 $\mathcal{V}_{\kappa,\ \theta}(x,v)$ 的构造作一些说明。

注 2.2. (i) 由于 $U(x)$ 有下界，因此 $U(x) \to +\infty$ 当且仅当$x \to \partial\mathscr{D}(U)$ 或 $|x| \to +\infty$，由 (2.2) 和 (2.4) 可知，当 $U(x) \to \infty$ 时，

$$|\nabla U(x)| \to \infty, \quad \frac{\|\nabla^2 U(x)\|}{|\nabla U(x)|^2} \to 0.$$

因此，假设 (H_U) 比 [14] 中采用的容许势函数的性质略强；更多细节请参见 [14, 定义 2.1] 。尽管与 [14], 中对应的假设相比，假设 (H_U) 略显严格，但它完全能够处理我们所关注的奇异势函数。

(ii) 李雅普诺夫函数 $\mathcal{V}_{\kappa,\ \theta}(x,v) := V_\kappa(x,v)^{\theta/2}$ 的构造有以下两方面的直观依据。首先，式 (2.6) 给出的函数 $V_\kappa(x,v)$ 在某种程度上受到了 [14, (5.1)] 中函数 $W(q,p)$ 的指数项的启发。然而，此处的低阶扰动项 $\psi_\kappa(x,v)$ 与 [14] 中的低阶扰动项截然不同。事实上，这一区别对于我们处理非局部算子 $\mathscr{L}$ 的论证至关重要。其次，由于我们假设列维测度仅满足假设 (H_ν) 中所述的有限 θ 阶矩条件，[14] 中使用的指数型李雅普诺夫函数 $W(q,p)$ 并不适用于我们的情形。因此，我们将采用函数 $V_\kappa(x,v)$ 的幂次阶（在假设 (H_ν) 下，恰为 $\theta/2$ 阶）。这在一定程度上反映了 Lévy 噪声的重尾性质。特别地，根据式 (2.7),

$$\mathcal{V}_{\kappa,\theta}(x,v) \simeq (|v|^2 + U(x))^{\theta/2} \quad \text{as } |v|^2 + U(x) \to \infty.$$

命题 2.1 的证明。 下文中，我们设 $(x,v) \in \mathscr{K}$并固定 $\kappa \in (0,\kappa^*)$，这显然意味着 $V_\kappa \geq 1$. 由于

$$\nabla_x \mathcal{V}_{\kappa,\theta}(x,v) = \frac{\theta}{2}V_\kappa(x,v)^{\theta/2-1}\nabla_x V_\kappa(x,v), \quad \nabla_v \mathcal{V}_{\kappa,\theta}(x,v) = \frac{\theta}{2}V_\kappa(x,v)^{\theta/2-1}\nabla_v V_\kappa(x,v),$$

我们可以写成

$$(\mathscr{L}\mathcal{V}_{\kappa,\theta})(x,v) = \frac{\theta}{2}V_\kappa(x,v)^{\theta/2-1}\big(\langle\nabla_x V_\kappa(x,v), v\rangle - \langle\nabla_v V_\kappa(x,v), \gamma v + \nabla U(x)\rangle\big)$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{N}\int_{\{|z|\le 1\}}\big(\mathcal{V}_{\kappa,\theta}(x,v+S_i(z))-\mathcal{V}_{\kappa,\theta}(x,v)-\langle\nabla_v^{(i)}\mathcal{V}_{\kappa,\theta}(x,v),z\rangle\big)\,\nu^{(i)}(\mathrm{d}z)\\
&+\sum_{i=1}^{N}\int_{\{|z|>1\}}\big(\mathcal{V}_{\kappa,\theta}(x,v+S_i(z))-\mathcal{V}_{\kappa,\theta}(x,v)\big)\,\nu^{(i)}(\mathrm{d}z)\\
&=:\frac{\theta}{2}V_\kappa(x,v)^{\theta/2-1}I_1(x,v)+I_2(x,v)+I_3(x,v).
\end{aligned}
$$

接下来，我们将分别对项 I_1、I_2 和 I_3 进行定量分析。首先，由于

$$
\begin{aligned}
\nabla_x V_\kappa(x,v)&=\nabla U(x)+\frac{\kappa}{|\nabla U(x)|^2}\alpha'(U(x))U(x)\langle v,\nabla U(x)\rangle\nabla U(x)\\
&\quad+\frac{\kappa\alpha(U(x))}{|\nabla U(x)|^2}\bigg[\langle v,\nabla U(x)\rangle\nabla U(x)\\
&\qquad+U(x)\bigg(\nabla^2U(x)-\frac{2((\nabla^2U(x)\nabla U(x))\otimes\nabla U(x))}{|\nabla U(x)|^2}\bigg)v\bigg],
\end{aligned}
$$

and

$$
\nabla_v V_\kappa(x,v)=v+\frac{\kappa}{|\nabla U(x)|^2}\alpha(U(x))U(x)\nabla U(x),
$$

我们推得

$$
\begin{aligned}
I_1(x,v)&=-\gamma|v|^2-\gamma\psi_\kappa(x,v)\\
&\quad+\bigg(-\kappa\alpha(U(x))U(x)+\frac{\kappa}{|\nabla U(x)|^2}\big(\alpha(U(x))+\alpha'(U(x))U(x)\big)\langle v,\nabla U(x)\rangle^2\bigg)\\
&\quad+\frac{\kappa\alpha(U(x))U(x)}{|\nabla U(x)|^2}\bigg(\langle v,\nabla^2U(x)v\rangle-\frac{2}{|\nabla U(x)|^2}\langle v,((\nabla^2U(x)\nabla U(x))\otimes\nabla U(x))v\rangle\bigg)\\
&=:-\gamma|v|^2-\gamma\psi_\kappa(x,v)+I_{11}(x,v)+I_{12}(x,v).
\end{aligned}
$$

由 (2.5) 可直接得到

$$
-\gamma\psi_\kappa(x,v)\le\gamma\theta_0\kappa^2U(x)\mathbb{1}_{\{U(x)\ge r_0\}}+\frac{\gamma}{4}|v|^2.
$$

接下来，由于 $\alpha(u)=0$ 当 $u\le r_0$ 时，$\alpha(u)=1$ 当 $u\ge 2r_0$ 时，以及 $|\alpha'(u)|\le 2/r_0$ 当 $u\in[r_0,2r_0]$ 时，我们得到

$$
I_{11}(x,v)\le-\kappa\alpha(U(x))U(x)\mathbb{1}_{\{r_0\le U(x)<2r_0\}}-\kappa U(x)\mathbb{1}_{\{U(x)\ge 2r_0\}}+5\kappa|v|^2.
$$

此外，由于 $|\nabla U(x)|\ge 1$ 当 $U(x)\ge r_0$ 时，$\alpha(u)=0$ 当 $u\le r_0$ 时，结合 (2.3) 和 (2.4)，我们推得

$$
\begin{aligned}
I_{12}(x,v)&\le\frac{3\kappa}{|\nabla U(x)|^2}U(x)\|\nabla^2U(x)\|\cdot|v|^2\mathbb{1}_{\{U(x)\ge\beta_0\}}+\frac{3\kappa\beta_0}{|\nabla U(x)|^2}\|\nabla^2U(x)\|\cdot|v|^2\mathbb{1}_{\{r_0\le U(x)\le\beta_0\}}\\
&\le 3\kappa\big(C_U^*\vee(\beta_0C_{U,\beta_0}^*)\big)|v|^2,
\end{aligned}
$$

其中 $\beta_0:=(2r_0)\vee R_{U^\circ}^*$。因此，我们得到

$$
\begin{aligned}
I_1(x,v)\le&-\Big(\frac{3}{4}\gamma-5\kappa-3\kappa\big(C_U^*\vee(\beta_0C_{U,\beta_0}^*)\big)\Big)|v|^2\\
&-\kappa(1-\gamma\theta_0\kappa)U(x)\mathbb{1}_{\{U(x)\ge 2r_0\}}+\gamma\theta_0\kappa^2U(x)\mathbb{1}_{\{r_0\le U(x)<2r_0\}}.
\end{aligned}
$$

由 $\kappa\in(0,\kappa^*)$，根据 (2.8) 中给出的 κ^* 的定义，我们得到 t

$$
5\kappa+3\kappa(C_U^*\vee(\beta_0C_{U,\beta_0}^*))\le\frac{\gamma}{4},\qquad\frac{1}{2}-\gamma\theta_0\kappa\ge 0
$$

从而

$$
I_1(x,v)\le-\frac{\gamma}{2}|v|^2-\frac{1}{2}\kappa U(x)\mathbb{1}_{\{U(x)\ge 2r_0\}}+\gamma\theta_0\kappa^2U(x)\mathbb{1}_{\{r_0\le U(x)<2r_0\}}.
$$

因此，将此结果与 (2.7) 结合， $V_\kappa \geq 1$ 和 $\theta \in (0,2]$ 对于某些常数 $c_1, C_1 > 0$可得

$$\frac{\theta}{2} V_\kappa(x,v)^{\theta/2-1} I_1(x,v) \leq -c_1 V_\kappa(x,v)^{\theta/2} + C_1. \tag{2.10}$$

注意，对于每个 $i = 1$、$\cdots$、N,

$$(\nabla_v^{(i)})^2 \mathcal{V}_{\kappa,\theta}(x,v) = \frac{\theta}{2} V_\kappa(x,v)^{\theta/2-1} \Bigg[\mathbb{1}_{d\times d} + \Big(\frac{\theta}{2} - 1\Big) V_\kappa(x,v)^{-1} \times \left(v^{(i)} + \frac{\kappa\alpha(U(x))U(x)}{|\nabla U(x)|^2} \nabla^{(i)} U(x) \right) \otimes \left(v^{(i)} + \frac{\kappa\alpha(U(x))U(x)}{|\nabla U(x)|^2} \nabla^{(i)} U(x) \right) \Bigg],$$

其中，大括号中的第二个矩阵是负半定的。因此，结合前提 $\theta \in (0, 2)$ 以及事实 $V_\kappa \geq 1$，利用中值定理可得

$$I_2(x,v) \leq \frac{\theta}{4} \sum_{i=1}^N \int_{\{|z|\leq 1\}} |z|^2 \, \nu^{(i)}(\mathrm{d}z) < \infty \tag{2.11}$$

因为 $\nu^{(i)}(\mathrm{d}z)$ 是 $\mathbb{R}^d$. 上的列维测度

接下来，利用不等式：对 a、$b \geq 0$，有 $|a^{\theta/2} - b^{\theta/2}| \leq |a-b|^{\theta/2}$；对所有 a、$b \geq 0$、$\varepsilon > 0$，有 $2ab \leq \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon$，可得对所有 ε_1、$\varepsilon_2 > 0$,

$$\begin{aligned}
I_3(x,v) &\leq \sum_{i=1}^N \int_{\{|z|>1\}} \left| \langle v^{(i)}, z\rangle + \frac{|z|^2}{2} + \frac{\kappa\alpha(U(x))U(x)}{|\nabla U(x)|^2} \langle z, \nabla^{(i)} U(x)\rangle \right|^{\theta/2} \nu^{(i)}(\mathrm{d}z) \\
&\leq \sum_{i=1}^N \int_{\{|z|>1\}} \left(|v^{(i)}| \cdot |z| + \frac{|z|^2}{2} + \frac{\kappa\alpha(U(x))U(x)}{|\nabla U(x)|} \mathbb{1}_{\{U(x)\geq r_0\}} |z| \right)^{\theta/2} \nu^{(i)}(\mathrm{d}z) \\
&\leq \sum_{i=1}^N \int_{\{|z|>1\}} \Bigg(\Big(\varepsilon_1 |v^{(i)}|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}\Big)|z| + \frac{|z|^2}{2} \\
&\qquad + \left(\Big(\varepsilon_2 U(x) + \frac{\kappa^2 U(x)}{4\varepsilon_2 |\nabla U(x)|^2} \Big) \mathbb{1}_{\{U(x)\geq \beta_0\}} + \kappa\beta_0 \right) |z| \Bigg)^{\theta/2} \nu^{(i)}(\mathrm{d}z) \\
&\leq (\varepsilon_1 |v|^2 + \varepsilon_2 U(x) \mathbb{1}_{\{U(x)\geq\beta_0\}})^{\theta/2} \sum_{i=1}^N \int_{\{|z|>1\}} |z|^{\theta/2} \, \nu^{(i)}(\mathrm{d}z) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\varepsilon_1} + \frac{\kappa^2 C_U^*}{4\varepsilon_2} + \kappa\beta_0 \right)^{\theta/2} \sum_{i=1}^N \int_{\{|z|>1\}} |z|^\theta \, \nu^{(i)}(\mathrm{d}z),
\end{aligned}$$

其中，在第二个不等式中，我们使用 $|\nabla^{(i)} U(x)| \leq |\nabla U(x)|$；在第三个不等式中，我们利用如下事实：对 $x \in \mathbb{R}^{Nd}$，有 $|\nabla U(x)| \geq 1$，且 $U(x) \geq r_0$ 和 $\alpha(u) = 1$ 对 $u \geq 2r_0$ 成立；最后一个不等式由 (2.4) 和 $|v^{(i)}| \leq |v|$ 得出。随后，利用 (2.7) 和假设 (H_ν)，并将 ε_1 和 ε_2 取得足够小，可得存在某个常数 $C_2 > 0$,

$$I_3(x,v) \leq \frac{c_1}{2} V_\kappa(x,v)^{\theta/2} + C_2, \tag{2.12}$$

其中 c_1 由式 (2.10) 给出。

最后，结合式 (2.10)、(2.11) 和 (2.12)，即可得出断言 (2.9)。 □

接下来，我们举例说明假设 (H_U) 是可验证的。具体而言，以下例子表明，式 (1.2) 中涉及的奇异势包括伦纳德-琼斯型势。

例 2.3。 考虑伦纳德-琼斯型势（例如参见 [14,例 4.4]）

$$U(x) = \sum_{i=1}^N U_c(x^{(i)}) + \sum_{1\leq i<j\leq N} U_I(x^{(i)} - x^{(j)}),$$

其中

$$U_c(u) := A(1+|u|^2)^{\alpha/2} + \phi_c(u), \quad u \in \mathbb{R}^d; \quad U_I(u) := \frac{B}{|u|^\beta} + \phi_I(u), \quad u \in \mathscr{D}(U_I)$$

其中 $A, B, \beta > 0, \alpha \geq 2$, $\phi_c \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 和 $\phi_I \in C^\infty(\mathscr{D}(\phi_I))$，使得

$$\lim_{|u|\to\infty} |u|^{-\alpha}|\phi_c(u)| = \lim_{|u|\to\infty} |u|^{1-\alpha}|\nabla\phi_c(u)| = \lim_{|u|\to\infty} |u|^{2-\alpha}\|\nabla^2\phi_c(u)\| = 0, \tag{2.13}$$

$$\lim_{u\in\mathscr{D}(\phi_I),|u|\to 0} |u|^{\beta}|\phi_I(u)| = \lim_{u\in\mathscr{D}(\phi_I),|u|\to 0} |u|^{1+\beta}|\nabla\phi_I(u)| = \lim_{u\in\mathscr{D}(\phi_I),|u|\to 0} |u|^{2+\beta}\|\nabla^2\phi_I(u)\| = 0, \tag{2.14}$$

并且对于某个 $r > 0$,

$$\phi_I,\ \nabla\phi_I,\ \nabla^2\phi_I \text{ are bounded on the set } \{u \in \mathscr{D}(\phi_I) : |u| \geq r\}. \tag{2.15}$$

特别地，当 $\phi_c(u) = 0, \beta = 12$ 且 $\phi_I(u) = -\frac{C}{|u|^6}$，其中某个正的常数为 C 时，上述势函数 U 对应于经典伦纳德-琼斯势。

显然， $U\colon\ \mathscr{D}(U) \to \mathbb{R}$ 是一个 C^∞-函数。另一方面，注意对于任意非零向量 $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} U_c(u) &\geq \frac{1}{2}A|u|^\alpha + \frac{1}{2}A|u|^\alpha\Big(1 - \frac{2}{A}|u|^{-\alpha}|\phi_c(u)|\Big), \\ U_I(u) &\geq \frac{B}{2|u|^\beta} + \frac{B}{2|u|^\beta}\Big(1 - \frac{2}{B}|u|^\beta|\phi_I(u)|\Big). \end{aligned} \tag{2.16}$$

然后，利用

$$\lim_{|u|\to\infty} |u|^{-\alpha}|\phi_c(u)| = \lim_{u\in\mathscr{D}(\phi_I),|u|\to 0} |u|^{\beta}|\phi_I(u)| = 0, \tag{2.17}$$

由 (2.13) 和 (2.14)，再结合 ϕ_c 和 ϕ_I 分别在闭球内及闭球外有界（见 (2.15)），可知存在常数 $C_U^\star > 0$，使得

$$\overline{U}(x) := U(x) + C_U^\star \geq 1.$$

特别地，函数 $U(x)$ 有下界，并且根据 (2.16)， $U(x) \to +\infty$ 当且仅当 $x \to \partial\mathscr{D}(U)$ 或 $|x| \to +\infty$。

根据上述结论，要证明 (2.2)，只需验证函数 $\overline{U}$ 满足 (2.4)。回顾 [14, 引理 A.1]，存在常数 C_1、C_2、$C_3 > 0$，使得

$$|\nabla\overline{U}(x)| \geq C_1|x|^{\alpha-1} + C_2\sum_{1\leq i<j\leq N} |x^{(i)} - x^{(j)}|^{-\beta-1} - C_3.$$

另请回顾，$\overline{U}(x) \to \infty$ 当且仅当 $|x| \uparrow \infty$ 或对于某个 $i \neq j$ 有 $|x^{(i)} - x^{(j)}| \downarrow 0$。因此，存在常数 $R_{\overline{U}}^* > 0$，使得对于所有满足 $\overline{U}(x) \geq R_{\overline{U}}^*$ 的 $x \in \mathscr{D}(\overline{U})$,

$$\frac{1}{2}C_1|x|^{\alpha-1} + \frac{1}{2}C_2\sum_{1\leq i<j\leq N} |x^{(i)} - x^{(j)}|^{-\beta-1} \geq C_3$$

使得对于所有满足 $\overline{U}(x) \geq R_{\overline{U}}^*$ 的 $x \in \mathscr{D}(\overline{U})$,

$$|\nabla\overline{U}(x)| \geq F(x) := \frac{1}{2}C_1|x|^{\alpha-1} + \frac{1}{2}C_2\sum_{1\leq i<j\leq N} |x^{(i)} - x^{(j)}|^{-\beta-1}. \tag{2.18}$$

考虑到 (2.17)，以及 ϕ_c 在闭球内和 ϕ_I 在闭球外的有界性，存在常数 $C_4 > 0$，使得

$$\overline{U}(x) \leq C_4\bigg(1 + |x|^\alpha + \sum_{1\leq i<j\leq N} |x^{(i)} - x^{(j)}|^{-\beta}\bigg). \tag{2.19}$$

此外，结合 (2.18)，可知对于所有满足 $\overline{U}(x) \geq R_{\overline{U}}^*$ 的 $x \in \mathscr{D}(\overline{U})$,

$$\frac{\overline{U}(x)}{|\nabla\overline{U}(x)|^2} \leq \frac{4C_4\big(1 + |x|^\alpha + \sum_{1\leq i<j\leq N} |x^{(i)} - x^{(j)}|^{-\beta}\big)}{C_1^2|x|^{2(\alpha-1)} + C_2^2\big(\sum_{1\leq i<j\leq N} |x^{(i)} - x^{(j)}|^{-\beta-1}\big)^2}$$

$$\leq \frac{4C_4\big(1+(N-1)N/2+|x|^{\alpha}+\sum_{1\leq i<j\leq N}|x^{(i)}-x^{(j)}|^{-\beta}\mathbb{1}_{\{|x^{(i)}-x^{(j)}|\leq 1\}}\big)}{C_1^2|x|^{2(\alpha-1)}+C_2^2(\sum_{1\leq i<j\leq N}|x^{(i)}-x^{(j)}|^{-\beta-1}\mathbb{1}_{\{|x^{(i)}-x^{(j)}|\leq 1\}})^2}.$$

根据基本不等式：对于任意 a、b、c、$d>0$,

$$\frac{a+b}{c+d}\leq \frac{a}{c}\vee\frac{b}{d},$$

并且，由于 $\alpha-2(\alpha-1)=-\alpha+2\leq 0$，可知存在一个常数 $C^*_{\overline{U}}>0$，使得

$$\sup_{x\in\mathscr{D}(\overline{U}):\overline{U}(x)\geq R^*_{\overline{U}}}\frac{\overline{U}(x)}{|\nabla\overline{U}(x)|^2}\leq C^*_{\overline{U}}. \tag{2.20}$$

接下来，由 (2.13) 和 (2.14) 得

$$\lim_{|u|\to\infty}|u|^{2-\alpha}\|\nabla^2\phi_c(u)\|=\lim_{u\in\mathscr{D}(\phi_I),|u|\to 0}|u|^{2+\beta}\|\nabla^2\phi_I(u)\|=0$$

再利用 $U(x)$ 的定义，可得存在一个常数 $C_5>0$，使得对所有 $x\in\mathscr{D}(\overline{U})$,

$$\|\nabla^2\overline{U}(x)\|\leq C_5\bigg(1+|x|^{\alpha-2}+\sum_{1\leq i<j\leq N}|x^{(i)}-x^{(j)}|^{-\beta-2}\bigg). \tag{2.21}$$

随后，结合 (2.18)、(2.19) 和 (2.21)，以及 $\alpha+\alpha-2-2(\alpha-1)=0$ 和 $-\beta-(\beta+2)+2(\beta+1)=0$，可推知存在一个常数 $C^{**}_{\overline{U}}>0$，使得对所有满足 $\overline{U}(x)\geq R^*_{\overline{U}}$ 的 $x\in\mathscr{D}(\overline{U})$,

$$\sup_{x\in\mathscr{D}(\overline{U}):\overline{U}(x)\geq R^*_{\overline{U}}}\frac{\overline{U}(x)\|\nabla^2\overline{U}(x)\|}{|\nabla\overline{U}(x)|^2}\leq C^{**}_{\overline{U}}.$$

因此，考虑到 (2.20)，我们得出结论：对 $\overline{U}$，(2.4) 成立。

因此，根据以上所有结论，我们推断 $U(x)$ 满足假设 ($\mathbf{H}_U$)。

例 2.3 表明，李雅普诺夫条件 (2.9) 适用于广泛的奇异势函数，包括 Lennard-琼斯势、黎兹势（即对于所有$d\geq 2$，$U_I(u)=|u|^{1-d}$）以及（牛顿）库仑势（即对于所有 $d\geq 3$，$U_I(u)=|u|^{2-d}$）等典型例子。

2.2. 情形 2。 注意，情形 $d=2$ 下的库仑型势（例如，对于非零向量 $u\in\mathbb{R}^2$，$U_I(u)=-\log|u|$（不满足 (2.15)））已被命题 2.1 排除。为了处理库仑型势这一奇异势的另一种经典代表，我们将提出另一组充分条件，使李雅普诺夫型条件 (2.9) 仍然成立。

为此，假设势函数 U 可以写成

$$U(x)=\sum_{i=1}^{N}V(x^{(i)})+\frac{1}{N}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N}K(x^{(i)}-x^{(j)}), \tag{2.22}$$

其中 $V:\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 是一个 C^∞-函数，$K:\ \mathscr{D}(K)\to\mathbb{R}$ 是一个径向 C^∞-函数，使得$\{x\in\mathbb{R}^d:\ |x|\geq r\}\subset\mathscr{D}(K):=\{x\in\mathbb{R}^d:\ |K(x)|<\infty\}$ 并且对于任意 $r>0$，都有 上确界$_{|x|\geq r}|\nabla K(x)|<\infty$。此外，$V$ 和 K分别满足以下两个条件。

（$\mathbf{H}_V$）存在常数 C^*_V，$C^{**}_V>0$ 和 M_V，$M^*_V\geq 0$，使得对所有 $x\in\mathbb{R}^d$,

$$C^*_V|x|^2-M_V\leq V(x)\leq\frac{1}{C^*_V}\big(M_V+\langle\nabla V(x),x\rangle\big), \tag{2.23}$$

and

$$|\nabla V(x)|\leq C^{**}_V V(x)+M^*_V. \tag{2.24}$$

（$\mathbf{H}_K$）存在常数 R_K，$C_K^*>0$，使得对所有 $x\in\mathscr{D}(K)$ 满足 $|x|\le R_K$，

$$K(x)\ge 0,\quad \frac{1}{|x|}\langle x,\nabla K(x)\rangle\le -C_K^* K(x). \tag{2.25}$$

此外，存在一个常数 $C_K^{**}>0$，使得对所有 $x\in\mathscr{D}(K)$，

$$\sum_{i,j,k=1,j,k\neq i}^{N}\langle \mathbf{n}(x^{(i)}-x^{(j)}),\nabla K(x^{(i)}-x^{(k)})\rangle\le C_K^{**}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N}\langle \mathbf{n}(x^{(i)}-x^{(j)}),\nabla K(x^{(i)}-x^{(j)})\rangle, \tag{2.26}$$

其中 $\mathbf{n}(u):=u/|u|$，对于一个非零向量 $u\in\mathbb{R}^d$.

注意，在当前设定下 $\mathscr{K}:=\mathscr{D}(U)\times\mathbb{R}^{Nd}=\mathscr{D}(K)\times\mathbb{R}^{Nd}$。对于 α、β、$C^\star>0$，定义

$$\mathscr{V}_{\alpha,\beta}(x,v)=C^\star+\frac{1}{2}|v|^2+U(x)-\frac{\alpha}{N}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N}\langle v^{(i)},\mathbf{n}(x^{(i)}-x^{(j)})\rangle+\beta\langle x,v\rangle,\quad (x,v)\in\mathscr{K}. \tag{2.27}$$

根据霍尔德不等式和柯西–施瓦茨不等式，有

$$\Big|-\frac{\alpha}{N}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N}\langle v^{(i)},\mathbf{n}(x^{(i)}-x^{(j)})\rangle+\beta\langle x,v\rangle\Big|\le\frac{1}{2}(\alpha+\beta)|v|^2+\frac{1}{2}\beta|x|^2+\frac{1}{2}N\alpha.$$

注意，$K\colon\ \mathscr{D}(K)\to\mathbb{R}$是一个径向 C^∞-函数，因此 $\{x\in\mathbb{R}^d\colon\ |x|\ge r\}\subset\mathscr{D}(K)\colon=\{x\in\mathbb{R}^d\colon |K(x)|<\infty\}$ 并且

$$C_{K,r}:=\sup_{|x|\ge r}|\nabla K(x)|<\infty \tag{2.28}$$

对每个 $r>0$ 都成立。由 V 的局部有界性以及 $K(\cdot)$ 的径向性质，根据 (2.28) 可得，对于任意 r_1，$r_2>0$，

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}|V(x^{(i)})|\mathbb{1}_{\{|x^{(i)}|\le r_1\}}+\frac{1}{N}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N}|K(x^{(i)}-x^{(j)})|\mathbb{1}_{\{|x^{(i)}-x^{(j)}|\ge r_2\}}\\&\le N\max_{|u|\le r_1}|V(u)|+N|K(r_2)|+C_{K,r_2}N(2|x|-r_2).\end{aligned}$$

因此，对于任意 $r_1>(M_V/C_V^*)^{1/2}$ 以及 $r_2\in(0,R_K)$，由 (2.23) 可推得

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{\alpha,\beta}(x,v)&\le C^\star+\frac{1}{2}(1+\alpha+\beta)|v|^2+2C_{K,r_2}N|x|\\&\quad+\Big(1+\frac{\beta}{2C_V^*}\Big)\sum_{i=1}^{N}V(x^{(i)})\mathbb{1}_{\{|x^{(i)}|\ge r_1\}}+\frac{1}{N}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N}K(x^{(i)}-x^{(j)})\mathbb{1}_{\{|x^{(i)}-x^{(j)}|\le r_2\}}\\&\quad+\Big(1+\frac{\beta}{2C_V^*}\Big)N\max_{|u|\le r_1}|V(u)|+\Big(\frac{\beta M_V}{2C_V^*}+\frac{\alpha}{2}+|K(r_2)|-C_{K,r_2}r_2\Big)N\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{\alpha,\beta}(x,v)&\ge C^\star+\frac{1}{2}(1-(\alpha+\beta))|v|^2+\frac{1}{2}(C_V^*-\beta)\sum_{i=1}^{N}|x^{(i)}|^2-2C_{K,r_2}N|x|\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}V(x^{(i)})\mathbb{1}_{\{|x^{(i)}|\ge r_1\}}+\frac{1}{N}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N}K(x^{(i)}-x^{(j)})\mathbb{1}_{\{|x^{(i)}-x^{(j)}|\le r_2\}}\\&\quad-\Big(\frac{1}{2}\max_{|u|\le r_1}|V(u)|+|K(r_2)|-C_{K,r_2}r_2+\frac{1}{2}(\alpha+M_V)\Big)N.\end{aligned}$$

在下文中，我们将取满足以下条件的 $\alpha,\beta>0$

$$\alpha\le\frac{\beta C_V^*}{2C_V^{**}},\qquad \beta\le\frac{1}{2}(C_V^*\wedge\gamma)\wedge\frac{(C_V^*)^2}{8\gamma}\wedge\frac{C_V^{**}}{2C_V^{**}+C_V^*} \tag{2.29}$$

使得

$$\alpha+\beta\le\frac{1}{2},\qquad \beta\le\frac{1}{2}C_V^*.$$

因此，存在一个足够大的常数 $C^\star>0$，使得

$$\mathscr{V}_{\alpha,\beta}(x,v)\ge 1,\quad (x,v)\in\mathscr{K};$$

此外，对于任意 $r_1>(M_V/C_V^*)^{1/2}$ 和 $r_2\in(0,R_K)$，存在常数 $0<c_1\le c_2$（二者均依赖于 r_1、r_2），使得

$$c_1\le\frac{\mathscr{V}_{\alpha,\beta}(x,v)}{1+|v|^2+\sum_{i=1}^N V(x^{(i)})\mathbb{1}_{\{|x^{(i)}|\ge r_1\}}+\frac{1}{N}\sum_{i,j=1,j\ne i}^N K(x^{(i)}-x^{(j)})\mathbb{1}_{\{|x^{(i)}-x^{(j)}|\le r_2\}}}\le c_2 \tag{2.30}$$

对所有 $(x,v)\in\mathscr{K}$. 均成立

在继续讨论之前，我们先对前述假设以及函数 $\mathscr{V}_{\alpha,\beta}$ 的构造作一些说明。

注 2.4. (i) 式 (2.22) 中给出的势函数 $U(x)$ 的分解具有物理意义。含有函数 V 的项表示外力所产生的约束势，因此，文献中的假设 $(\mathbf{H}_V)$ 是自然的；例如参见 [16, 24]。另一方面，由函数 K 表示的项则代表相互作用势能。特别地，条件 (2.25) 中的第二个条件大致表明，当粒子彼此靠近时，相互作用产生的排斥力会带来耗散；而式 (2.26) 表明粒子之间的相互作用具有某种齐次性质。

(ii) 函数 $\mathscr{V}_{\alpha,\beta}$ 中的 $\langle x,v\rangle$-扰动项已被广泛用于构造朗之万动力学的李雅普诺夫函数（参见 [24] 和 [15]，分别对应正则情形和奇异情形）。特别地，根据上述估计，我们可以看到

$$\mathscr{V}_{\alpha,\beta}(x,v)\simeq|v|^2+U(x)\quad \text{as } |v|^2+U(x)\to\infty.$$

因此，下面命题 2.5 中的李雅普诺夫函数 $\mathcal{V}_{\alpha,\beta,\theta}(x,v)$ 满足

$$\mathcal{V}_{\alpha,\beta,\theta}(x,v)\simeq(|v|^2+U(x))^{\theta/2}\quad \text{as } |v|^2+U(x)\to\infty.$$

下面的命题说明，在另一组充分条件下，李雅普诺夫条件 (2.9) 仍然成立；更重要的是，它适用于库仑型势。

命题 2.5。 假设$(\mathbf{H}_V)$、$(\mathbf{H}_K)$和$(\mathbf{H}\nu)$成立。那么，对于 $\mathcal{V}_{\alpha,\beta,\theta}(x,v):=\mathscr{V}_{\alpha,\beta}(x,v)^{\theta/2}$，其中正的 α, β见式 (2.29)，存在常数 $\lambda_{\mathcal{V}},C_{\mathcal{V}}>0$使得

$$(\mathscr{L}\mathcal{V}_{\alpha,\beta,\theta})(x,v)\le-\lambda_{\mathcal{V}}\mathcal{V}_{\alpha,\beta,\theta}(x,v)+C_{\mathcal{V}},\quad (x,v)\in\mathscr{K}, \tag{2.31}$$

其中，无穷小生成元 $\mathscr{L}$ 定义如(2.1)所示。

证明。 下文中，我们固定 $(x,v)\in\mathscr{K}$。根据 (2.1) 中给出的 $\mathscr{L}$定义，可得

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}\mathcal{V}_{\alpha,\beta,\theta})(x,v)&=\frac{\theta}{2}\mathscr{V}_{\alpha,\beta}(x,v)^{\theta/2-1}\big(\langle\nabla_x\mathscr{V}_{\alpha,\beta}(x,v),v\rangle-\langle\nabla_v\mathscr{V}_{\alpha,\beta}(x,v),\gamma v+\nabla U(x)\rangle\big)\\&\quad+\sum_{i=1}^N\int_{\{|z|\le1\}}\big(\mathcal{V}_{\alpha,\beta,\theta}(x,v+S_i(z))-\mathcal{V}_{\alpha,\beta,\theta}(x,v)-\langle\nabla_v^{(i)}\mathcal{V}_{\alpha,\beta,\theta}(x,v),z\rangle\big)\,\nu^{(i)}(\mathrm{d}z)\\&\quad+\sum_{i=1}^N\int_{\{|z|>1\}}\big(\mathcal{V}_{\alpha,\beta,\theta}(x,v+S_i(z))-\mathcal{V}_{\alpha,\beta,\theta}(x,v)\big)\,\nu^{(i)}(\mathrm{d}z)\\&=:\frac{\theta}{2}\mathscr{V}_{\alpha,\beta}(x,v)^{\theta/2-1}I_1(x,v)+I_2(x,v)+I_3(x,v).\end{aligned}$$

下文中，为了得到（2.31），归根结底需要分别估计量 I_1、I_2 和 I_3。

由于对于非零向量 $u \in \mathbb{R}^d$，$\mathbf{n}(-u) = -\mathbf{n}(u)$，容易看出

$$\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N} \langle v^{(i)}, \mathbf{n}(x^{(i)}-x^{(j)})\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N} \langle v^{(i)}-v^{(j)}, \mathbf{n}(x^{(i)}-x^{(j)})\rangle.$$

因此，$\mathscr{V}_{\alpha,\beta}$ 可改写为

$$\mathscr{V}_{\alpha,\beta}(x,v) = C^\star + \frac{1}{2}|v|^2 + U(x) - \frac{\alpha}{2N}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N} \langle v^{(i)}-v^{(j)}, \mathbf{n}(x^{(i)}-x^{(j)})\rangle + \beta\langle x, v\rangle.$$

据此，我们有

$$\begin{aligned}
\nabla_x^{(i)}\mathscr{V}_{\alpha,\beta}(x,v) &= \nabla_x^{(i)}U(x) + \beta v^{(i)} - \frac{\alpha}{2N}\Theta(x^{(i)},v),\\
\nabla_v^{(i)}\mathscr{V}_{\alpha,\beta}(x,v) &= v^{(i)} - \frac{\alpha}{2N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\mathbf{n}(x^{(i)}-x^{(j)}) + \beta x^{(i)},
\end{aligned}$$

其中

$$\Theta_i(x,v) := \sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{1}{|x^{(i)}-x^{(j)}|}\big(\mathbb{1}_{d\times d} - (\mathbf{n}(x^{(i)}-x^{(j)})\otimes\mathbf{n}(x^{(i)}-x^{(j)})\big)(v^{(i)}-v^{(j)}).$$

因此，我们推导出

$$\begin{aligned}
I_1(x,v) &= \sum_{i=1}^{N}\langle\nabla_x^{(i)}\mathscr{V}_{\alpha,\beta}(x,v), v^{(i)}\rangle - \sum_{i=1}^{N}\langle\nabla_v^{(i)}\mathscr{V}_{\alpha,\beta}(x,v), \gamma v^{(i)} + \nabla_x^{(i)}U(x)\rangle\\
&= -(\gamma-\beta)|v|^2 - \frac{\alpha}{2N}\sum_{i=1}^{N}\langle\Theta_i(x,v), v^{(i)}\rangle\\
&\quad + \left(\frac{\alpha\gamma}{2N}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N}\langle\mathbf{n}(x^{(i)}-x^{(j)}), v^{(i)}\rangle - \beta\gamma\sum_{i=1}^{N}\langle x^{(i)}, v^{(i)}\rangle\right)\\
&\quad + \left(\frac{\alpha}{2N}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N}\langle\mathbf{n}(x^{(i)}-x^{(j)}), \nabla_x^{(i)}U(x)\rangle - \beta\sum_{i=1}^{N}\langle x^{(i)}, \nabla_x^{(i)}U(x)\rangle\right)\\
&=: -(\gamma-\beta)|v|^2 - \frac{\alpha}{2N}I_{11}(x,v) + I_{12}(x,v) + I_{13}(x).
\end{aligned}$$

根据柯西–施瓦茨不等式，除 $\Theta_i(x,-v) = -\Theta_i(x,v)$ 外，显然有

$$I_{11}(x,v) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N}\frac{1}{|x^{(i)}-x^{(j)}|^3}\big(|v^{(i)}-v^{(j)}|^2|x^{(i)}-x^{(j)}|^2 - \langle v^{(i)}-v^{(j)}, x^{(i)}-x^{(j)}\rangle^2\big) \geq 0.$$

应用 Hölder 不等式和柯西–施瓦茨不等式，并结合基本不等式：$2ab \leq a^2+b^2$ 对于 $a,\ b\in\mathbb{R}$，可得

$$\begin{aligned}
I_{12}(x,v) &\leq \frac{2\beta\gamma^2}{(C_V^*)^2}|v|^2 + \frac{1}{4}\beta(C_V^*)^2|x|^2 + \frac{1}{16\beta}(\alpha C_V^*)^2 N\\
&\leq \frac{2\beta\gamma^2}{(C_V^*)^2}|v|^2 + \frac{1}{4}\beta C_V^*\sum_{i=1}^{N}V(x^{(i)}) + \frac{1}{4}N\beta C_V^* M_V + \frac{1}{16\beta}(\alpha C_V^*)^2 N,
\end{aligned}$$

其中，最后一个公式由 (2.23) 得出。注意，

$$\nabla_x^{(i)}U(x) = \nabla V(x^{(i)}) + \frac{1}{N}\sum_{k=1,k\neq i}^{N}\nabla^{(i)}K(x^{(k)}-x^{(i)}) + \frac{1}{N}\sum_{l=1,l\neq i}^{N}\nabla^{(i)}K(x^{(i)}-x^{(l)})$$

$$= \nabla V(x^{(i)}) + \frac{2}{N}\sum_{k=1,k\neq i}^{N} \nabla^{(i)} K(x^{(i)} - x^{(k)}).$$

由于 $K(\cdot)$ 是一个 径向函数，我们有 $\nabla^{(i)} K(x^{(i)} - x^{(j)}) = -\nabla^{(j)} K(x^{(j)} - x^{(i)})$，这意味着

$$\frac{\beta}{N}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N} \langle x^{(i)}, \nabla^{(i)} K(x^{(i)} - x^{(j)})\rangle = \frac{\beta}{2N}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N} \langle x^{(i)} - x^{(j)}, \nabla^{(i)} K(x^{(i)} - x^{(j)})\rangle.$$

这一事实结合式 (2.22) 中给出的 U 的表达式，使我们能够由 (2.23) 和 (2.24) 得到

$$\begin{aligned} I_{13}(x) = &-\beta\sum_{i=1}^{N}\langle x^{(i)}, \nabla V(x^{(i)})\rangle + \frac{\alpha}{2N}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N}\langle \mathbf{n}(x^{(i)} - x^{(j)}), \nabla V(x^{(i)})\rangle \\ &- \frac{\beta}{N}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N}\langle x^{(i)} - x^{(j)}, \nabla^{(i)} K(x^{(i)} - x^{(j)})\rangle \\ &+ \frac{\alpha}{N^2}\sum_{i,j,k=1,j,k\neq i}^{N}\langle \mathbf{n}(x^{(i)} - x^{(j)}), \nabla^{(i)} K(x^{(i)} - x^{(k)})\rangle \\ \leq &-\big(\beta C_V^* - \alpha C_V^{**}/2\big)\sum_{i=1}^{N} V(x^{(i)}) + (\beta M_V + M_V^*\alpha/2)N + \frac{1}{N}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N} J(x^{(i)} - x^{(j)}), \end{aligned} \tag{2.32}$$

其中，对于非零向量 $u \in \mathbb{R}^d$，

$$J(u) := \Big(\frac{\alpha C_K^{**}}{N|u|} - \beta\Big)\langle u, \nabla K(u)\rangle.$$

设 $r^* = R_K \wedge \frac{\alpha C_K^{**}}{2N\beta}$。那么，对于任意非零向量 $u \in \mathbb{R}^d$，由 (2.28) 可得

$$\begin{aligned} J(u) &= \Big(\frac{\alpha C_K^{**}}{N|u|} - \beta\Big)\langle u, \nabla K(u)\rangle \mathbb{1}_{\{|u|\leq r^*\}} + \Big(\frac{\alpha C_K^{**}}{N|u|} - \beta\Big)\langle u, \nabla K(u)\rangle \mathbb{1}_{\{|u|\geq r^*\}} \\ &\leq \frac{\alpha C_K^{**}}{2N|u|}\langle u, \nabla K(u)\rangle \mathbb{1}_{\{|u|\leq r^*\}} + \Big(\frac{\alpha C_K^{**}}{N} + \beta|u|\Big)C_{K,r*}\mathbb{1}_{\{|u|\geq r^*\}}, \end{aligned}$$

在上述不等式中，我们利用了这样一个事实：当 $|u| \leq \frac{\alpha C_K^{**}}{2N\beta}$时，$\frac{\alpha C_K^{**}}{2N|u|} - \beta \geq 0$。特别地，借助 (2.23) 和 (2.25)，我们推得存在一个常数 $C_0 > 0$，使得对于 $u = x^{(i)} - x^{(j)}$，

$$\begin{aligned} J(u) &\leq \frac{\alpha C_K^{**}}{2N|x^{(i)} - x^{(j)}|}\langle x^{(i)} - x^{(j)}, \nabla K(x^{(i)} - x^{(j)})\rangle \mathbb{1}_{\{|x^{(i)} - x^{(j)}|\leq r^*\}} \\ &\quad + \Big(\frac{\alpha C_K^{**}}{N} + \beta|x^{(i)} - x^{(j)}|\Big)C_{K,r*}\mathbb{1}_{\{|x^{(i)} - x^{(j)}|\geq r^*\}} \\ &\leq \frac{\alpha C_K^{**}}{2N|x^{(i)} - x^{(j)}|}\langle x^{(i)} - x^{(j)}, \nabla K(x^{(i)} - x^{(j)})\rangle \mathbb{1}_{\{|x^{(i)} - x^{(j)}|\leq r^*\}} + \Big(\frac{\alpha C_K^{**}}{N} + \beta|x^{(i)}| + \beta|x^{(j)}|\Big)C_{K,r*} \\ &\leq -\frac{\alpha C_K^* C_K^{**}}{2N}\ K(x^{(i)} - x^{(j)})\mathbb{1}_{\{|x^{(i)} - x^{(j)}|\leq r^*\}} + \frac{1}{8}\beta C_V^* V(x^{(i)}) + \frac{1}{8}\beta C_V^* V(x^{(j)}) + C_0, \end{aligned}$$

现在，将关于 $J(\cdot)$ 的前一个估计代入 (2.32) 中给出的对 I_{13} 的估计，我们得到

$$I_{13}(x) \leq -\Big(\frac{3}{4}\beta C_V^* - \frac{1}{2}\alpha C_V^{**}\Big)\sum_{i=1}^{N} V(x^{(i)}) - \frac{\alpha C_K^* C_K^{**}}{2N^2}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N} K(x^{(i)} - x^{(j)})\mathbb{1}_{\{|x^{(i)} - x^{(j)}|\leq r^*\}} + C_1$$

对于某个常数 $C_1 > 0$.

因此，根据对 I_{11}、I_{12}、I_{13} 的估计，我们推得存在某个常数$C_2>0$,

$$I_1(x,v)\le -\Big(\gamma-\beta-\frac{2\beta\gamma^2}{(C_V^*)^2}\Big)|v|^2-\frac{1}{2}\big(\beta C_V^*-\alpha C_V^{**}\big)\sum_{i=1}^N V(x^{(i)})$$
$$-\frac{\alpha C_K^* C_K^{**}}{2N^2}\sum_{i,j=1,j\neq i}^N K(x^{(i)}-x^{(j)})\mathbb{1}_{\{|x^{(i)}-x^{(j)}|\le r^*\}}+C_2.$$

根据（2.29）中引入的 α、$\beta>0$ 的不同情形，我们有

$$\gamma-\beta-\frac{2\beta\gamma^2}{(C_V^*)^2}\ge\frac{\gamma}{4},\quad \frac{1}{2}\big(\beta C_V^*-\alpha C_V^{**}\big)\ge\frac{1}{4}\beta C_V^*.$$

随后，考虑到（2.30），存在常数 c_0、$C_3>0$ 使得

$$I_1(x,v)\le -c_0\mathcal{V}_{\alpha,\beta,\theta}(x,v)+C_3. \tag{2.33}$$

完全沿用推导（2.11）的思路，我们有

$$I_2(x,v)\le\frac{\theta}{4}\sum_{i=1}^N\int_{\{|z|\le1\}}|z|^2\,\nu^{(i)}(\mathrm{d}z)<\infty. \tag{2.34}$$

接下来，应用不等式：$|a^\kappa-b^\kappa|\le|a-b|^\kappa$（其中 a、$b\ge0$ 和 $\kappa\in(0,1],$），由杨氏不等式和（2.30）可得

(2.35)

$$\begin{aligned}I_3(x,v)&\le\sum_{i=1}^N\int_{\{|z|>1\}}\Big|\langle v^{(i)},z\rangle+\frac{1}{2}|z|^2-\frac{\alpha}{N}\sum_{k=1,k\neq i}^N\langle z,\mathbf{n}(x^{(i)}-x^{(k)})\rangle+\beta\langle x^{(i)},z\rangle\Big|^{\theta/2}\nu^{(i)}(\mathrm{d}z)\\&\le\sum_{i=1}^N\int_{\{|z|>1\}}\big(|z|^2+(\alpha+|v^{(i)}|+\beta|x^{(i)}|)|z|\big)^{\theta/2}\nu^{(i)}(\mathrm{d}z)\\&\le(1+\alpha+|v|+\beta|x|)^{\theta/2}\sum_{i=1}^N\int_{\{|z|>1\}}|z|^\theta\,\nu^{(i)}(\mathrm{d}z)\\&\le\frac{c_0}{2}\mathcal{V}_{\alpha,\beta,\theta}(x,v)+C_4\end{aligned}$$

对于某个常数 $C_4>0$，其中常数 c_0 即（2.33）中给出的常数。

最后，综合考虑 (2.33)、(2.34) 和 (2.35)，即可得到所需的断言 (2.31)。

□

在结束本节之前，我们给出一个例子，以说明命题 2.5 对库仑势的适用性（例如参见 [15]）。

例 2.6. 设

$$V(x)=A(1+|x|^2)^{\alpha/2};\quad K(x)=-\log|x|\quad\text{if}\quad d=2,\quad K(x)=|x|^{2-d}\quad\text{if}\quad d\ge3, \tag{2.36}$$

其中 $\alpha\ge2$ 和 $A>0$。

显然，对所有 $x\in\mathbb{R}^d$，$V\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$、$\langle\nabla V(x)\ x\rangle=A\alpha(1+|x|^2)^{\alpha/2-1}|x|^2$，且 $|\nabla V(x)|\le A\alpha(1+|x|^2)^{\alpha/2-1}|x|$。由这些估计可知，(2.23) 和 (2.24) 成立。因此，假设 ($\mathbf{H}_V$) 有效。

显然，$K\in C^\infty(\mathscr{D}(K))$ 和 $K(x)\ge0$ 对于 $x\in\mathscr{D}(K)$，其中 $|x|\le1$.注意，对于所有 $d\ge2$,

$$\frac{1}{|x|}\langle x,\nabla K(x)\rangle=-(1\vee(d-2))\frac{1}{|x|}|x|^{2-d},\quad x\in\mathscr{D}(K). \tag{2.37}$$

特别地，对于情形 $d=2$,

$$\frac{1}{|x|}\langle x,\nabla K(x)\rangle=-\frac{1}{|x|}\le-\log\frac{1}{|x|}=-K(x),\quad x\in\mathscr{D}(K),$$

其中我们用到了基本不等式：对于 $\alpha > 0.$，$\log \alpha \le \alpha - 1$。于是，由 (2.37) 可得，对所有满足 $|x| \le 1$ 的 $x \in \mathscr{D}(K)$,

$$\frac{1}{|x|}\langle x, \nabla K(x)\rangle \le -K(x).$$

接下来，对于每个满足 $|x| \ge r$ 的 $r > 0$ 和 $x \in \mathscr{D}(K)$,

$$|\nabla K(x)| = (1 \vee (d-2))|x|^{1-d} \le (1 \vee (d-2))r^{1-d} < \infty.$$

此外，应用 [15, 引理 4.3]可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k=1:j,k\neq i}^{N} \langle \mathbf{n}(x^{(i)} - x^{(j)}), \nabla K(x^{(i)} - x^{(k)})\rangle \\
&= -(1 \vee (d-2)) \sum_{i,j,k=1:j,k\neq i}^{N} \frac{1}{|x^{(i)} - x^{(k)}|^d}\langle \mathbf{n}(x^{(i)} - x^{(j)}), x^{(i)} - x^{(k)}\rangle \\
&\le -(1 \vee (d-2)) \sum_{i,j=1:j\neq i}^{N} \frac{1}{|x^{(i)} - x^{(j)}|^{d-1}} \\
&= \sum_{i,j=1:j\neq i}^{N} \langle \mathbf{n}(x^{(i)} - x^{(j)}), \nabla K(x^{(i)} - x^{(j)})\rangle.
\end{aligned}$$

总而言之，条件 $(\mathbf{H}_K)$ 由式 (2.36) 中给出的库仑势 K 满足。

3. 强 Feller 与不可约性

本节中，我们假设 $(\mathbf{Z}_t)_{t\ge 0} := ((Z_t^{(1)}, \cdots, Z_t^{(N)}))_{t\ge 0}$，使得对于任意 $1 \le i \le N$，$(Z_t^{(i)})_{t\ge 0}$ 是一个 d 维（旋转不变）对称 α_i-稳定 Lévy 过程，并且 $(Z_t^{(1)})_{t\ge 0}$、$\cdots$ 和 $(Z_t^{(N)})_{t\ge 0}$ 相互独立。我们将在上一节所研究的李雅普诺夫条件下，验证随机微分方程 (1.2) 具有强 Feller 性质和不可约性。关于强 Feller 性质，我们将充分利用针对非局部算子的 Hörmander 定理（在 [27, 28] 中得到了重要发展），采用截断思想，并结合狄利克雷热核的连续性；至于勒贝格不可约性，我们将解决相关确定性系统的近似可控性问题，并利用由从属布朗运动驱动的随机微分方程的时间变换思想（例如，参见 [25, 26, 27]）。

为便于阐释，我们仅考虑单粒子（即 $N = 1$）情形，因为所采用的论证方法基本上同样适用于多粒子系统的一般情形，只需使用一些较复杂的记号即可。因此，以下固定 $N = 1$，并用 $(X_t, V_t)_{t\ge 0}$ 代替 $(\mathbf{X}_t, \mathbf{V}_t)_{t\ge 0}$。此外，出于技术原因，我们将 (1.2) 中的驱动噪声 $(\mathbf{Z}_t)_{t\ge 0}$ 设为 d 维对称 α-稳定过程，以下也记为 $(L_t)_{t\ge 0}$。我们还假设，过程 $(X_t, V_t)_{t\ge 0}$存在一个李雅普诺夫函数$\mathcal{V}(x, v) \ge 1$；也就是说，当 $H(x, v)$ 趋于无穷时，$\mathcal{V}(x, v) \to \infty := \frac{1}{2}\gamma|v|^2 + U(x) \to \infty$，并且存在常数 $\lambda_{\mathcal{V}} \ge 0, C_{\mathcal{V}} > 0$，使得

$$(\mathscr{L}\mathcal{V})(x, v) \le \lambda_{\mathcal{V}}\mathcal{V}(x, v) + C_{\mathcal{V}}, \quad (x, v) \in \mathscr{K}, \tag{3.1}$$

其中 $\mathscr{K} = \mathscr{D}(U) \times \mathbb{R}^d$满足 $\mathscr{D}(U) := \{x \in \mathbb{R}^d \colon U(x) < \infty\}$。显然，只要满足命题 2.1 或命题 2.5 中的假设，李雅普诺夫条件 (3.1) 即成立。

接下来，我们将逐一讨论马尔可夫过程 $(X_t, V_t)_{t\ge 0}$ 的强 Feller 性质和不可约性问题。

命题 3.1. 在上述假设下，过程 $(X_t, V_t)_{t\ge 0}$ 由 (1.2) 给出，其中 $(\mathbf{Z}_t)_{t\ge 0}$是一个对称 α-稳定过程，该过程具有强 *Feller* 性质。

证明。 对于 $z=(x,v)\in\mathscr{K}$，定义

$$b(z)=\begin{pmatrix} v \\ -\gamma v-\nabla U(x)\end{pmatrix},\quad \sigma=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{d\times d}\\ \mathbb{1}_{d\times d}\end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

其中， $\mathbf{0}_{d\times d}$和 $\mathbb{1}_{d\times d}$分别表示 $d\times d$ 零矩阵和 $d\times d$ 单位矩阵。利用上述记号，随机微分方程 (1.2) 可改写为以下紧凑形式：采用简写记号 $Z_t:=(X_t,V_t)$,

$$\mathrm{d}Z_t=b(Z_t)\,\mathrm{d}t+\sigma\,\mathrm{d}L_t. \tag{3.3}$$

对于任意 $R\geq 1$，令

$$\mathcal{A}_R=\{(x,v)\in\mathscr{K}:\mathcal{V}(x,v)<R\}.$$

特别地， $\mathcal{A}_R$ 是 $\mathscr{K}$中的一个开集。定义具有有界导数的 $U_R\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$，使得对于所有 $(x,v)\in\mathcal{A}_R$，$U_R(x)=U(x)$。考虑过程 $(Z_t^R)_{t\geq0}:=(X_t^R,V_t^R)_{t\geq0}$，它满足随机微分方程

$$\mathrm{d}Z_t^R=b_R(Z_t^R)\,\mathrm{d}t+\sigma\,\mathrm{d}L_t, \tag{3.4}$$

其中， b_R 的定义与 (3.2) 中相同，只需用 U_R 替换 U。特别地，由于 $b_R(z)$ 在 $\mathbb{R}^{2d}$上全局 Lipschitz 连续，随机微分方程 (3.4) 存在唯一强解 $(Z_t^R)_{t\geq0}$ ，且该解非爆炸。令 $\sigma_i=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ e_i\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2d}$, $i=1,2,\cdots,d$ 为 (3.2) 中定义的 σ 的第 i 列，其中 $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^d$ 是零向量，且 $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ 是 $\mathbb{R}^d$. 的标准正交基。于是， b_R 与 σ_i之间的李括号记为 $[b_R,\sigma_i]\in\mathbb{R}^d$，其表达式为

$$[b_R,\sigma_i](z)=\nabla\sigma_i\cdot b_R(z)-\nabla b_R(z)\cdot\sigma_i=\begin{pmatrix}-e_i\\ \gamma e_i\end{pmatrix}.$$

因此，对所有 $z\in\mathscr{K}$，均有

$$\mathrm{Rank}\{\sigma_1,\cdots,\sigma_d,[b_R,\sigma_1](z),\cdots,[b_R,\sigma_d](z)\}=2d.$$

根据 [27, 定理 1.1 和定理 1.3], ，过程 $(Z_t^R)_{t\geq0}$ 关于勒贝格测度具有转移密度函数 $\rho_R(t,z',z'')$, 因此 $(z',z'')\mapsto\rho_R(t,z',z'')$ 有界且关于 $(z',z'')\in\mathscr{K}\times\mathscr{K}$ 连续，对任意固定的 $t>0$ 均成立。

下文中，令 $(P_t)_{t\geq0}$ 为过程 $(Z_t)_{t\geq0}$ 的半群。固定 $z=(x,v)\in\mathscr{K}$和$t>0$，并选取充分大的 $R_0>0$ ，使得 $z\in\mathcal{A}_{R_0}$。那么，对任意 $R\geq R_0$ 和 $f\in\mathscr{B}_b(\mathscr{K})$，显然有

$$\begin{aligned}P_tf(z)=\mathbb{E}^z f(Z_t)=&\mathbb{E}^z\big(f(Z_t)\mathbb{1}_{\{\tau_{\mathcal{A}_R}\leq t\}}\big)+\mathbb{E}^z\big(f(Z_t)\mathbb{1}_{\{t<\tau_{\mathcal{A}_R}\}}\big)\\ =&\mathbb{E}^z\big(f(Z_t)\mathbb{1}_{\{\tau_{\mathcal{A}_R}\leq t\}}\big)+\mathbb{E}^z\big(f(Z_t^R)\mathbb{1}_{\{t<\tau^*_{\mathcal{A}_R}\}}\big),\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中

$$\tau_{\mathcal{A}_R}:=\inf\{t>0:Z_t\notin\mathcal{A}_R\},\quad \tau^*_{\mathcal{A}_R}:=\inf\{t>0:Z_t^R\notin\mathcal{A}_R\}.$$

这里，在最后一个等式中，我们用到了以下事实：以 z 为起点时，若两个相关过程在时间 t 之前均未离开开集 $\mathcal{A}_R$，则 Z_t^R 的分布与 Z_t 的分布相同。

如上所述，与 Z_t^R相关的转移密度函数 $\rho_R(t,z',z'')$ 关于 $(z',z'')\in\mathscr{K}\times\mathscr{K}$有界且连续，其中 $t>0$为任意固定值。接着，按照标准方法可知，函数 $z\mapsto\mathbb{E}^z f(Z_t^R\mathbb{1}_{\{t<\tau^*_{\mathcal{A}_R}\}})$ 对所有 $R\geq R_0$都连续。事实上，$\mathbb{E}^z\big(f(Z_t^R)\mathbb{1}_{\{t<\tau_{\mathcal{A}_R^*}\}}\big)$ 对应于过程 $(Z_t^R)_{t\geq0}$的 Dirichlet 半群；并且，由于 [6, 第 2 节.2], 中的论证，该 Dirichlet 半群所对应的转移密度函数（文献中称为狄利克雷热核）也是连续的。

接下来，我们估计项 $I(t):=\mathbb{E}^z\big(f(Z_t)\mathbb{1}_{\{\tau_{\mathcal{A}_R}\leq t\}}\big)$，其中 $f\in\mathscr{B}_b(\mathscr{K})$。注意，对于任意 $t>0$,

$$|I(t)|\leq\|f\|_\infty\mathbb{P}^z(\tau_{\mathcal{A}_R}\leq t).$$

根据 (3.1) 和伊藤公式，对于所有 $R \geq R_0$ 和 $t > 0$，有

$$\mathrm{e}^{-\lambda_{\mathcal{V}} t} R\, \mathbb{P}^z(\tau_{\mathcal{A}_R} \leq t) \leq \mathbb{E}^z\big(\mathrm{e}^{-\lambda_{\mathcal{V}}(t\wedge\tau_{\mathcal{A}_R})}\mathcal{V}(Z_{t\wedge\tau_{\mathcal{A}_R}})\big) \leq \mathcal{V}(z) + (1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\mathcal{V}} t})C_{\mathcal{V}}/\lambda_{\mathcal{V}}.$$

特别是，

$$\mathbb{P}^z(\tau_{\mathcal{A}_R} \leq t) \leq \frac{1}{R}\big(\mathcal{V}(z) + (1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\mathcal{V}} t})C_{\mathcal{V}}/\lambda_{\mathcal{V}}\big)\mathrm{e}^{\lambda_{\mathcal{V}} t}. \tag{3.6}$$

因此，当 R 足够大时，可以忽略项 $I(t)$。

结合以上所有结论，我们可以证明函数 $z \mapsto P_t f(z)$ 是连续的，因此过程 $(Z_t)_{t\geq 0}$ 具有强 Feller 性质。□

为了进一步研究解方程 (1.2) 的 $(Z_t)_{t\geq 0}$ 的不可约性，我们进一步将 $L_t = W_{S_t}$ 写成 d 维从属布朗运动的形式；也就是说，$(W_t)_{t\geq 0}$ 是一个 d 维布朗运动，$(S_t)_{t\geq 0}$ 是一个与 $(W_t)_{t\geq 0}$ 独立的 $\alpha/2$-稳定子ordinator。

下面我们介绍与从属布朗运动 $(W_{S_t})_{t\geq 0}$ 相对应的典范概率空间。令 $(\mathbb{W}, \mathscr{B}(\mathbb{W})\ \mu_{\mathbb{W}})$ 为标准维纳空间。具体而言，$\mathbb{W}$ 是所有满足 $\omega_0 = \mathbf{0}$ 的连续函数 $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ 所构成的空间，并赋予局部一致收敛拓扑；$\mu_{\mathbb{W}}$ 是维纳测度，在该测度下，坐标过程 $W_t(\omega) := \omega_t$ 是标准的 d 维布朗运动。令 $\mathbb{S}$ 为所有满足 $\ell_0 = \mathbf{0}$ 的递增右连续有左极限函数 $\ell : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 所构成的空间。设 $\mathbb{S}$ 配备 Skorohod 度量，并赋予概率测度 $\mu_{\mathbb{S}}$，使得坐标过程 $S_t(\ell) := \ell_t$ 的分布服从 $\alpha/2$-稳定子ordinator的分布。下文中，我们将在概率空间上进行讨论

$$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) := (\mathbb{W}\times\mathbb{S}, \mathscr{B}(\mathbb{W})\times\mathscr{B}(\mathbb{S}), \mu_{\mathbb{W}}\times\mu_{\mathbb{S}}).$$

在此概率空间下，坐标过程 $L_t(\omega, \ell) := \omega_{\ell_t}$ 是一个对称 α-稳定过程。

命题 3.2。 假设命题3.1 中的假设成立。则，满足(1.2) 且$(\mathbf{Z}_t)_{t\geq 0}$ 为对称 α-稳定过程的过程$(X_t, V_t)_{t\geq 0}$ 是勒贝格不可约的，即对于任意 $z, z^* \in \mathscr{K}$和 $t, \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}^z(|(X_t, V_t) - z^*| \leq \varepsilon) > 0. \tag{3.7}$$

*Pr*证明。 对于任意 $t > 0$，令 $Z_t := (X_t, V_t)$。注意，对于任意 z、$z^* \in \mathscr{K}$以及 t、$\varepsilon > 0$ ，

$$\mathbb{P}^z(|Z_t - z^*| \leq \varepsilon) = \int_{\mathbb{S}}\int_{\mathbb{W}} \mathbb{1}_{\{|Z_t(z;\omega_{\ell_\cdot}) - z^*| \leq \varepsilon\}}\, \mu_{\mathbb{W}}(\mathrm{d}\omega)\, \mu_{\mathbb{S}}(\mathrm{d}\ell).$$

因此，为证明断言 (3.7)，只需验证对于任意 z、$z^* \in \mathscr{K}$、$\varepsilon > 0$ 以及对于 $\mu_{\mathbb{S}}$-几乎所有 $\ell \in \mathbb{S}$,

$$\mathbb{P}^z_{\mu_{\mathbb{W}}}(|Z^\ell_t - z^*| \leq \varepsilon) > 0, \tag{3.8}$$

其中 $(Z^\ell_t)_{t\geq 0}$ 是将 $L_t = W_{S_t}$ 替换为 W_{ℓ_t} 后方程 (3.3) 的解。

对于任意的 $\delta > 0$ 和 $t \geq 0$，将 $\ell \in \mathbb{S}$ 的正则版本定义为

$$\ell^\delta_t = \frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta} \ell_s\, \mathrm{d}s = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \ell_{t+r}\, \mathrm{d}r.$$

显然，当 $\delta \to 0$时，$\ell^\delta_t \to \ell_t$；此外，函数 $t \mapsto \ell^\delta_t$ 连续且严格递增。考虑以下常微分方程

$$\mathrm{d}\widehat{Z}_t = b(\widehat{Z}_t)\, \mathrm{d}t + \sigma\, \mathrm{d}u_t, \tag{3.9}$$

其中 $u \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$，且 b和 σ的定义与 (3.2) 中相同。我们声称，对于任意 $t, \eta > 0$，都可以找到 $u \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$，使得相应的解 $(\widehat{Z}_t)_{t\geq 0}$满足常微分方程 (3.9)，并且满足$\curvearrowright$ $\curvearrowright Z_0 = z$ 和 $Z_t = z^*$，且

$$\mathbb{P}^z_{\mu_{\mathbb{W}}}(A^\ell_\eta) > 0, \tag{3.10}$$

其中

$$A_\eta^\ell := \Big\{\omega \in \mathbb{W} : \sup_{0\le s\le t} |W_{\ell_s}(\omega) - u_s| \le \eta\Big\}.$$

事实上，根据 [14, 命题 2.5], 的证明，存在 $u \in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$，使得 $(\widehat{Z}_t)_{t\ge0}$ 满足方程（3.9）的解满足 $Z_0 = z$ 和 $Z_t = z^*$。如上所述，对于任意 $\delta > 0$，函数 $t \mapsto \ell_t^\delta$ 连续且严格递增，因此 $(W_{\ell_t^\delta})_{t\ge0}$ 仍然是一个协变差矩阵为 $(\ell_t^\delta \mathbb{1}_{d\times d})_{t\ge0}$ 的布朗运动。由于 d 维布朗运动的支撑是整个空间 $C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$，对于任意 t、$\eta > 0$,

$$\mathbb{P}^z_{\mu_{\mathbb{W}}}\Big(\sup_{0<s\le t} |W_{\ell_s^\delta}(\omega) - u_s| \le \eta\Big) > 0.$$

另一方面，由于 $\ell_t^\delta \to \ell_t$ 当 $\delta \to 0$时，$W_{\ell_t^\delta} \to W_{\ell_t}$ 几乎处处对每个 $t > 0$成立。因此，利用如下事实可得（3.10）成立：对于所有 $\ell \in \mathbb{S}$，对任意 $t \ge 0$，$[0,t]$ 上的不连续点至多是可数无穷的。

对于任意 $r > 0$，令

$$E_r = \{z \in \mathscr{K} : \mathcal{V}(z) \le r\}.$$

由于 $z \mapsto b(z)$ 在 $\mathscr{K}$ 上是局部利普希茨的，因此存在一个常数 $C_r > 0$，使得

$$|b(z_1) - b(z_2)| \le C_r|z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in E_r. \tag{3.11}$$

下文中，令

$$R_t = R + \sup_{0\le s\le t} \mathcal{V}(\widehat{Z}_s), \quad \eta_t = \frac{\varepsilon}{\|\sigma\|\mathrm{e}^{C_{R_t}t}}.$$

沿用推导 (3.6) 的论证，我们发现，对于 $\mu_{\mathbb{S}}$-几乎所有 $\ell \in \mathbb{S}$，

$$\lim_{r\to\infty} \tau_r^\ell = \infty, \quad \mathbb{P}_{\mu_{\mathbb{W}}} - \text{a.s.},$$

其中 $\tau_r^\ell := \inf\{s > 0 : \mathcal{V}(Z_s^\ell) > r\}$。那么，对于每个固定的 $t > 0$，都存在一个足够大的常数 $R > 0$，使得事件 $\{t < \tau_{R_t}^\ell\}$ 以正概率发生。

注意到 $\widehat{Z}_t = z^*$ 使得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^z_{\mu_{\mathbb{W}}}(|Z_t^\ell - z^*| \le \varepsilon) &= \mathbb{P}^z_{\mu_{\mathbb{W}}}(|Z_t^\ell - \widehat{Z}_t| \le \varepsilon)\\ &\ge \mathbb{P}^z_{\mu_{\mathbb{W}}}\Big(\big\{\mathbb{1}_{\{t<\tau_{R_t}^\ell\}}|Z_t^\ell - \widehat{Z}_t| \le \varepsilon\big\} \cap A_{\eta_t}^\ell\Big).\end{aligned}$$

假设

$$A_{\eta_t}^\ell \subseteq \Big\{\omega \in \mathbb{W} : \mathbb{1}_{\{t<\tau_{R_t}^\ell(\omega_{\ell_\cdot})\}}|Z_t^\ell(\omega_{\ell_\cdot}) - \widehat{Z}_t| \le \varepsilon\Big\}, \tag{3.12}$$

我们很容易得到

$$\mathbb{P}^z_{\mu_{\mathbb{W}}}(|Z_t^\ell - z^*| \le \varepsilon) \ge \mathbb{P}^z_{\mu_{\mathbb{W}}}(A_{\eta_t}^\ell).$$

结合 (3.10)，即可得到所需结论。

由 (3.11) 和 R_t 的定义可推得，对于任意 $s \le t < \tau_{R_t}^\ell$,

$$\begin{aligned}\big|Z_s^\ell - \widehat{Z}_s^\ell\big| &\le \int_0^s |b(Z_r^\ell) - b(\widehat{Z}_r))|\,\mathrm{d}r + \|\sigma\| \sup_{0\le s\le t} |W_{\ell_s} - u_s|\\ &\le C_{R_t}\int_0^s \big|Z_r^\ell - \widehat{Z}_{r\wedge\tau_{R_t}^\ell}\big|\,\mathrm{d}r + \|\sigma\| \sup_{0\le s\le t} |W_{\ell_s} - u_s|.\end{aligned}$$

随后，在事件 $\{t < \tau_{R_t}^\ell\}$ 上应用格朗沃尔不等式，可得

$$\big|Z_t^\ell - \widehat{Z}_t^\ell\big| \le \|\sigma\| \sup_{0\le s\le t} |W_{\ell_s} - u_s|\mathrm{e}^{C_{R_t}t}.$$

因此，考虑到 η_t 的另一种情况，当事件 $\{t < \tau_{R_t}^\ell\}$ 发生时，包含关系 (3.12) 成立。因此，证明完成。□

4. 定理 1.1 的证明与一般结果

我们首先给出

定理的证明 1.1。 假设定理中的假设成立。根据例 2.3 和 2.6，我们知道，对于定理 (i) 和 (ii) 中给出的势函数 $U(x)$，李雅普诺夫条件成立；此外，根据命题 2.1 和 2.5 的证明，相应的李雅普诺夫函数满足定理中提到的函数 V 的性质。

此外，根据命题 3.1 和 3.2，由 (1.2) 定义的过程 $(\mathrm{X}_t, \mathrm{V}_t)_{t\geq 0}$ 具有强 Feller 性质和不可约性。因此，通过采用与[14, 推论 5.3], 中类似的论证（其思路见 [16, 引理 2.3], 的证明），我们考察了类似于 Doeblin 条件的局部一致小化条件。事实上，根据不可约性（见命题 3.2），可以看出 [16, 假设 2.1 (i)]成立。另一方面，根据强 Feller 性质（见命题 3.1）及其证明，我们可以验证 [16, 假设 2.1 (ii)] 也成立；更具体地说，正如我们先前所述，(3.5) 右端的第二项（即 $\mathrm{E}^z\big(f(Z_t^R)\mathbb{1}_{\{t<\tau^*_{A_R}\}}\big)$）与过程 $(Z_t^R)_{t\geq 0}$ 的所谓 Dirichlet 半群相关，该半群具有连续的转移密度函数。然后，采用截断论证并再次考虑 (3.5)，我们知道原过程 $(\mathrm{X}_t, \mathrm{V}_t)_{t\geq 0}$ 的半群也具有转移密度函数$\rho(t, z', z'')$，因此对于每个 $t > 0$，$(z', z'') \mapsto \rho(t, z', z'')$ 在 $\mathscr{K} \times \mathscr{K}$ 上连续。

借助上述所有结论，所需结论可由 Harris 定理（[12,定理 1.2]）或定理 [14,2.3] 的证明得出。□

注 4.1。 由于随机微分方程 (1.2) 的系数在 $\mathscr{K} = \mathscr{D}(U) \times \mathbb{R}^d$上局部 Lipschitz 连续，且相应无穷小生成元 $\mathscr{L}$ 满足李雅普诺夫条件（见命题 2.1 和命题 2.5），我们可以验证，对于任意初始点 $(x, v) \in \mathscr{K}$，随机微分方程 (1.2) 存在唯一的路径强解 $(\mathrm{X}_t, \mathrm{V}_t)_{t\geq 0}$。此外，对所有 $t > 0$, $(\mathrm{X}_t, \mathrm{V}_t) \in \mathscr{K}$ 几乎必然成立。关于上述陈述的详细证明，读者可参阅命题 2.4] 的证明。

除了针对特定情形（即定理 1.1）的主要结果外，下面我们还将给出关于随机微分方程 (1.2) 指数遍历性的一般结果，以结束本节。更准确地说，

定理 *4.2.* 假设 (H_U) 和 (H_ν) 或 (H_V)、(H_K) 以及 (H_ν) 成立。则，解方程 *(1.2)* 的过程 $(X_t, V_t)_{t\geq 0}$，其中 $(Z_t)_{t\geq 0}$ 是与定理 *1.1* 中相同的柱对称稳定过程，在如下意义下具有指数遍历性：过程 $(X_t,V_t)_{t\geq 0}$ 具有唯一的不变概率测度 μ，并且存在一个常数 λ 和一个正函数 $C(x, v)$，使得对所有 $(x, v) \in \mathscr{K} := \mathscr{D}(U) \times \mathbb{R}^{Nd}$ 和 $t > 0$,

$$\|P_t((x, v), \cdot) - \mu\|_V \leq C(x, v)\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

其中 $V(x, v) \geq 1$ 具有定理 1.1 中的性质。

证明。 借助命题 2.1 和 2.5，定理 4.2 的证明可完全按照定理 1.1 的证明完成，同时注意到命题 3.1 和 3.2 对多粒子系统的情形仍然成立。因此，我们在此不再赘述。□

致谢。 Jianhai Bao 的研究得到中国国家自然科学基金（编号：12071340）的支撑。Rongjuan Fang 的研究得到中国国家自然科学基金（编号：12201119）的支撑。王健的研究得到国家重点研发计划（2022YFA1000033）和中国国家自然科学基金（编号：11831014、12071076 和 12225104）的支撑。

参考文献

[1] Alexandre, R.：分数阶动理学方程与次椭圆性，《分析与应用》，**10** （2012），237–247。[2] 鲍，J. 和 Wang, J.：利用耦合方法研究 Lévy 噪声驱动的随机哈密顿系统的指数遍历性，《随机过程及其应用》，**146** （2022），114–142。

[3] Camrud, E.、Herzog, D.P.、Stoltz, G. 和 Gordina, M.：具有奇异势函数的朗之万动力学的加权 L^2-收缩性，Nonlinearity，35（2022），998–1035。[4] Capala, K. 和 Dybiec, B.：柯西噪声驱动的欠阻尼非谐振子的平稳态，Chaos，29（2019），论文编号 093113。[5] Chen, H.、Li, W.X. 和 Xu, C.J.：一类动力学方程的 Gevrey 次椭圆性，Commun. Partial Differ. Equ.，36（2011），693–728。[6] Chung, K.L. 和 Zhao, Z.：《从布朗运动到薛定谔方程》，Springer，柏林，第 2 版，2001。[7] Dong, Z.、Peng, X.、Song, Y. 和 Zhang, X.：具有跳跃的退化随机微分方程的强 Feller 性质，Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.，52（2016），888–897。[8] Down, D.、Meyn, S.P. 和 Tweedie, R.L.：马尔可夫过程的指数遍历性与一致遍历性，Ann. Probab.，23（1995），1671–1691。[9] Eberle, A.、Guillin, A. 和 Zimmer, R.：朗之万动力学的耦合与定量收缩速率，Ann. Probab.，47（2019），1982–2010。[10] Grothaus, M. 和 Stilgenbauer, P.：一种与次强制性相关的奇异扭曲非对称扩散遍历性方法，Integral Equations Operator Theory，83（2015），331–379。[11] Guillin, A.、Nectoux, B. 和 Wu, L.：具有奇异势函数的哈密顿动力学的准平稳分布，Probab. Theory Related Fields，https://doi.org/10.1007/s00440-022-01154-9。[12] Hairer, M. 和 Mattingly, J.C.：再谈马尔可夫链的 Harris 遍历定理，《随机分析、随机场与应用研讨会 VI》（纽约：Springer），109–117。[13] Hao, Z.、Peng, X. 和 Zhang, X.：非局部算子的 Hörmander 次椭圆定理，J. Theoret. Probab.，34（2021），1870–1916。[14] Herzog, D.P. 和 Mattingly, J.C.：具有奇异势函数的朗之万动力学的遍历性与李雅普诺夫函数，Comm. Pure Appl. Math.，72（2019），2231–2255。[15] Lu, Y. 和 Mattingly, J.C.：具有库仑相互作用的朗之万动力学的几何遍历性，Nonlinearity，33（2020），675–699。[16] Mattingly, J.C.、Stuart, A.M. 和 Higham, D.J.：随机微分方程及其近似的遍历性：局部 Lipschitz 向量场与退化噪声，《随机过程及其应用》，101（2002），185–232。[17] Morimoto, Y. 和 Xu, C.J.：一类动力学方程的次椭圆性，J. Math. Kyoto Univ.，47（2007），129–152。[18] Şimşekli, U.、Zhu, L.、Teh, Y. 和 Gurbuzbalaban, M.：分数阶欠阻尼朗之万动力学：在重尾梯度噪声下重新审视带动量的随机梯度下降。载于：国际机器学习会议，2020，第 8970–8980 页。[19] Soize, C.：《随机动力系统的福克-普朗克方程及其显式稳态解》，Ser. Adv. Math. Appl. Sci.，第 17 卷，世界科学出版社，新加坡，1994。[20] Song, R. 和 Xie, L.：奇异朗之万随机微分方程的适定性与长时间行为，《随机过程及其应用》，130（2020），1879–1896。[21] Song, Y. 和 Zhang, X.：退化 Lévy 噪声驱动的随机微分方程的密度正则性，Electron. J. Probab.，20（2015），第 21 号，27 页。[22] Talay, D.：随机哈密顿系统：向不变测度指数收敛及其隐式欧拉格式离散化，Markov Process. Related Fields，8（2002），1–36。[23] Villani, C.：次强制性，Mem. Amer. Math. Soc.，202（2009），第 950 号。[24] Wu, L.：随机阻尼哈密顿系统的大偏差与中偏差及指数收敛，《随机过程及其应用》，91（2001），205–238。[25] Zhang, X.：退化 α-稳定过程驱动的随机微分方程的密度，Ann. Probab.，42（2014），1885–1910。[26] Zhang, X.：具有各向异性非局部耗散性的动力学 Fokker-Planck 算子的基本解，SIAM J. Math. Anal.，46（2014），2254–2280。[27] Zhang, X.：非局部 Hörmander 算子的基本解，Commun. Math. Stat.，4（2016），359–402。[28] Zhang, X.：非局部 Hörmander 算子的基本解 II，Ann. Probab.，45（2017），1799–1841。