arXiv:2302.00304v1 [math.RT] 1 Feb 2023

广义杂耍模式、箭图格拉斯曼簇与仿射旗簇

¨叶夫根尼·费金、MARTINA LANINI 和亚历山大·普茨

Abstract. 本文旨在阐明全非负格拉斯曼簇理论中的某些结构、循环箭图的箭图格拉斯曼簇以及志村簇局部模型理论之间的联系。更确切地说，我们推广了此前论文中的构造，该构造将箭图格拉斯曼簇的组合学与几何同全非负格拉斯曼簇的组合学与几何联系起来。我们感兴趣的簇可作为志村簇局部模型的实现。我们运用箭图表示技术研究所关注的箭图格拉斯曼簇，尤其是明确描述它们到仿射旗簇中的嵌入，从而将这些箭图格拉斯曼簇实现为其中舒伯特簇的并。

1. Introduction

箭图格拉斯曼簇是经典格拉斯曼簇和旗簇的自然推广。简言之，给定一个箭图 Q、一个 Q-表示M 以及一个维数向量 e，人们考虑代数簇 $\mathrm{Gr_e}(M)$，它由 M ([CR08, CI20, Scho92]) 的 e 维子表示组成。过去二十年间，箭图格拉斯曼簇得到了广泛研究，并被证明在数学的各个领域中都十分有用（[CFR12, CL15, Re13]）。本文考虑循环箭图的某些箭图格拉斯曼簇 $X(k,n,\omega)$，推广了 [FLP22]。代数簇 $X(k,n,\omega)$ 自然地出现在志村簇的局部模型理论 [G01, HG02, PRS13] 以及全非负格拉斯曼簇理论 [FLP22, Kn08, Lus94, Lus98a, Lus98b, Pos06] 中。下面我们将给出一些细节。

设 Δ_n 是一个具有 n 个顶点的循环箭图。对于正整数 ω，我们考虑如下定义的 Δ_n 模 $U_{n\omega}$。设 A_∞ 是一个类型为 A、沿两个方向均无限延伸的等向箭图。考虑从 A_∞ 到 Δ_n 的自然模 n 投影。令 $V(i,j)$、$i \le j$ 表示 A_∞ 的一个不可分解表示，其支撑位于从 i 到 j 的顶点上。于是，Δ_n 模$U_{n\omega}$ 是 A_∞ 个模 $V(i+1, i+n\omega)$（$i = 0, \ldots\ldots, n-1$）直和的投影。特别地，$U_{n\omega}$ 的维数等于（$n\omega, \ldots\ldots, n\omega$）。

现在固定 $k = 1, \ldots, n-1$。我们将 $X(k,n,\omega)$ 定义为 Δ_n 箭图格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr_e}(U_{n\omega})$，其中 $\mathbf{e} = (k\omega, \ldots, k\omega)$。$\omega = 1$ 情形已在我们先前的论文 [FLP22]中讨论。特别地，我们证明了 $X(k,n,1)$ 的拓扑性质和组合性质与全非负格拉斯曼簇的性质密切相关。下面的定理成立。

Key words and phrases. 箭图格拉斯曼簇、全非负格拉斯曼簇、仿射旗簇。

定理 1. 代数簇 $X(k,n,\omega)$ 是一个射影等维代数簇，其维数为 $\omega k(n-k)$。不可约分支的数量为 $\binom{n}{k}$。每个分支都是正规、科恩-麦考利的，具有有理奇点，并且可通过某个光滑箭图格拉斯曼簇进行奇异性消解。

回顾一下，在 [FLP22] 中，我们描述了簇 $X(k,n,1)$ 与全非负格拉斯曼簇之间的联系。更准确地说，我们证明了 $X(k,n,1)$ 存在比亚乌尼茨基-比鲁拉分解 [BB73],，且该分解也是胞腔分解。其胞腔偏序集被识别为相应 tnn 格拉斯曼簇的胞腔偏序集（顺序相反）。我们证明如下推广。

定理 2. 簇 $X(k,n,\omega)$ 存在比亚乌尼茨基-比鲁拉分解，其中每个层都是一个仿射胞腔。每个胞腔在适当的代数环面作用下都包含唯一的不动点，且该胞腔是此点在 Δ_n 模$U_{n\omega}$ 自同构群作用下的轨道。这些胞腔由有界仿射置换的一种自然的 ω-推广来标记。

该胞腔分解在上述代数环面的作用下保持不变。我们描述环面作用于 $X(k,n,\omega)$ 所产生的矩图，并研究胞腔集合上的偏序结构。

本文最后一部分致力于将箭图格拉斯曼簇 $X(k,n,\omega)$ 实现在 A 型仿射格拉斯曼簇中。文献中将簇 $X(k,n,\omega)$ 视为志村簇局部模型的一种显式实现（参见 [G01、G03、P18]）。这些局部模型的某些性质已得到研究。特别是，嵌入到仿射格拉斯曼簇中的构造已经完成。我们运用箭图表示的技巧来证明以下结果。

定理 3. 簇 $X(k,n,\omega)$ 可以识别为 $\binom{n}{k}$ 个某类舒伯特子簇在 A 型仿射旗簇中的并。与这些舒伯特簇对应的魏尔群元素得到了明确描述。自同构群 $\mathrm{Aut}_{\Delta_n}(U_{n\omega})$ 的作用被识别为伊wahori 子群的作用。

箭图格拉斯曼簇与仿射舒伯特簇之间的联系，是通过半无限楔空间和佐藤格拉斯曼簇的形式体系建立起来的。

最后，让我们提出一个尚未解决的自然问题。对于所有$\omega \geq 1$，构造空间 $\mathrm{Gr}(k,n,\omega)_{\geq 0}$，使其推广全非负格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr}(k,n)_{\geq 0}$；具体而言，$\mathrm{Gr}(k,n,\omega)_{\geq 0}$ 可分解为形如 $\mathbb{R}^M_{>0}$ 的胞腔，且其胞腔偏序集与 $X(k,n,\omega)$ 的胞腔偏序集对偶。（回忆一下，后者是用广义有界仿射置换来描述的。）

本文结构如下。第2节研究箭图格拉斯曼簇 $X(k,n,\omega)$ 的几何性质；定理 1 在此证明。第3节描述 $X(k,n,\omega)$ 的矩图并讨论其上同调；特别地，我们在等变上同调上构造一个循环群作用。定理 2 在第4节证明。我们引入

ω-广义有界仿射置换和杂耍模式，并为 Poincar´e 多项式提供一个组合模型。定理 3 在第6节证明，而有关佐藤格拉斯曼簇和仿射旗簇的预备知识见第 5 节。附录中，我们更正了来自 [FLP22]的一项计算。

2. Geometric properties

2.1. 箭图格拉斯曼簇。本节回顾箭图格拉斯曼簇的定义。关于箭图表示论的更多细节，请参见 [Sch14]。有限箭图 Q 由有限个顶点 Q_0以及顶点之间有限条有向边 Q_1 组成。一个 Q-表示M 是一对元组，其中一个元组 $(M^{(i)})_{i\in Q_0}$ 是在各顶点上的 $\mathbb{C}$-向量空间，另一个元组 $(M_a)_{a\in Q_1}$ 包含沿着 Q_1 中各箭的向量空间之间的线性映射。

从 Q-表示 M 到 N 的一个态射 ψ 是由线性映射ψ_i组成的集合： $M^{(i)} \to N_{(i)}$，满足对所有边 a： $i \to j$，均有 $\psi_j \circ M_a = N_a \circ \psi_i$。从 M 到 N 的所有 Q-态射的集合记为 $\mathrm{Hom}_Q(M,N)$。有限维复数 Q-表示范畴记为 $\mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(Q)$。

箭图表示 $M \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(Q)$ 的维数向量 $\mathbf{dim}M \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ 的各分量由 $\mathbf{dim}_{\mathbb{C}}\, M^{(i)}$ 给出，对所有 $i \in Q_0$ 均成立。子表示$N \subseteq M$由一组向量子空间 $N_{(i)}\subset M^{(i)}$ 参数化，并且对所有箭 a： $i \to j$ of Q， $M_a(N^{(i)}) \subseteq N_{(j)}$ 均成立。

定义 2.1. 对于 $\mathbf{e}\in \mathbb{Z}^{Q_0}$ 和 $M \in \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(Q)$，箭图 Grassmannian $\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$ 是 M 的所有 $\mathbf{e}$ 维子表示构成的代数簇。

对于一点 $U \in \mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$，箭图 Grassmannian 中的同构类 $\mathcal{S}_U$ 称为层，且是不可约的（参见 [CFR12，引理 2.4]）。自同构群 $\mathrm{Aut}_Q(M) \subset \mathrm{End}_Q(M) = \mathrm{Hom}_Q(M,M)$ 在 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$ 上的作用为

$$A.\big(U^{(i)}\big)_{i\in Q_0} := \Big(A_i\big(U^{(i)}\big)\Big)_{i\in Q_0} \quad \text{for } A \in \mathrm{Aut}_Q(M) \text{ and } U \in \mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M).$$

2.2. 循环箭图格拉斯曼簇。等向循环 Δ_n 是顶点集为 $\mathbb{Z}_n$ 的箭图：$=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，其箭为 a： $i \to i+1$，对所有 $i \in \mathbb{Z}_n$ 均如此。对于一个 Δ_n-表示，我们将沿箭 a： $i \to i+1$ 的映射记为 M_i，而不是 M_a。现在我们定义 Δ_n-表示 U_m，其中 $m \geq 2$: 取向量空间 $M^{(i)} := \mathbb{C}^m$，对所有 $i \in \mathbb{Z}_n$ 均如此，并令 $B^{(i)} := \{v_j^{(i)} : \ j \in [m]\}$ 为 i 个 $\mathbb{C}^m$ 的副本中的标准基。于是，每个映射 M_i 都将 $v_j^{(i)}$ 映射到 $v_{j+1}^{(i+1)}$（当 $j \in [m-1]$ 时），并将 $v_m^{(i)}$ 映射为零。

定义 2.2. 固定数 k、$\omega \geq 1$，满足 $k \leq n$。定义箭图格拉斯曼簇

$$X(k,n,\omega) := \mathrm{Gr}_{(k\omega,\ldots,k\omega)}(U_{\omega n}).$$

特别地， $X(k,n,1)$ 与我们论文 [FLP22] 中研究的箭图格拉斯曼簇 $X(k,n)$ 相同。

注 2.3. 我们注意到，簇 $X(k,n,\omega)$ 出现在志村簇局部模型理论中（参见 [G03, HG02, PRS13, P18, PZ13,

PZ22]）。更确切地说， $X(k,n,\omega)$ 是志村簇局部模型的具体实现，对应于 $G=GL_n$ 和极小余权，例如 [PRS13, §7.1] 中所述。

注 2.4. 可以在保持维数不变的情况下改变表示 $U_{\omega n}$。这样便可得到一族箭图格拉斯曼簇，其思路与 [CFFFR17, F12] 类似。研究这一族对象将会很有意思。

2.3. 环面作用。环面 $\mathbb{C}^*$ 以权 $\mathrm{wt}(v_j^{(i)}):=j$ 作用于 $U_{\omega n}$ 的向量空间，其中对所有 $i\in\mathbb{Z}_n$ 和 $j\in[\omega n]$均成立。根据 [CI11，引理 1.1]，此作用扩展到$X(k,n,\omega)$。

上述 $\mathbb{C}^*$作用与一个 $n+1$维代数环面 $T:=(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ 的余特征一致，该代数环面通过以下方式作用于 $U_{\omega n}$ 的向量空间：

$$\gamma.v_j^{(i)}=\gamma_0^{j-1}\gamma_{i-j+1}v_j^{(i)}\quad\text{for }\big(\gamma_0,(\gamma_i)_{i\in\mathbb{Z}_n}\big)\in T.$$

注 2.5. 这与 [LP20] 中定义的作用于 Δ_n-表示的环面作用一致。因此，根据 [LP20，引理 5.12]，它扩展到 $X(k,n,\omega)$。

引理2.6。 $X(k,n,\omega)$上的 $\mathbb{C}^*$ 作用与 T 作用的不动点相同，且不动点的数量有限。

证明。第一部分是 [LP20，定理5.14] 的特例，第二部分则由 [CI11，定理 1]推出。□

现在我们要引入 $X(k,n,\omega)$的 T-不动点的显式参数化。对于 $k\le n$，我们用 $\binom{[n]}{k}$ 表示所有 $[n]$的 k元子集构成的集合。以下定义推广了杂耍模式的标准定义（参见 [Lam16] 或第4.1小节）。

定义2.7。对于满足 $k\le n$的 $k,n,\omega\in\mathbb{N}$，(k,n,ω)杂耍模式的集合为

$$\mathcal{J}ug(k,n,\omega):=\Big\{(J_i)_{i\in\mathbb{Z}_n}\in\prod_{i\in\mathbb{Z}_n}\binom{[\omega n]}{k\omega}:\tau_1(J_i\backslash\{\omega n\})\subset J_{i+1}\text{ for all }i\in\mathbb{Z}_n\Big\}.$$

引理2.8。 $X(k,n,\omega)^T$中的不动点与 $\mathcal{J}ug(k,n,\omega)$之间存在双射。

证明。由 [CI11，定理 1] 可知，参数化 $X(k,n,\omega)$ 不动点的向量空间由子集 $P^{(i)}\subset B^{(i)}\,\text{for}i\in\mathbb{Z}_n$ 张成，其中每个子集的基数为 $k\omega$。这由 $\binom{[\omega n]}{k\omega}$ 中的指标集编码。因此，条件

$$M_i\Big(\big\langle v:v\in P^{(i)}\big\rangle\Big)\subset\big\langle w:w\in P^{(i+1)}\big\rangle$$

可转化为 $\tau_1(J_i\setminus\{\omega n\})\subset J_{i+1}$ 其中 $P^{(i)}=\{v_j^{(i)}:\ j\in J_i\}$。 □

2.4. 几何性质。为了应用关于 Δ_n-表示的箭图格拉斯曼簇几何性质的所需结果，我们需要对 U_m 的另一种实现方式。记 A_∞ 为类型 A 的无限等向箭图。设 $V(i,j)$ 为不可分解的 A_∞-表示，其向量空间为 $V(i,j)^{(k)}=\mathbb{C}$对任意 $k\in[i,j]$ 均成立，映射为 $V(i,j)_k=\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$对任意 $k\in[i,j-1]$均成立。其他所有映射和向量空间均为零。令$F:\ A_\infty\to\Delta_n$ 将 k 送到 $k\bmod n$，并将 $(a:k\to k+1)$ 送到 $(\overline{a}:\ k$

$\mathrm{mod}\ n \to k+1 \ \mathrm{mod}\ n$)。这诱导出 Δ_n-表示 $U_i(\ell)$，其向量空间为 $U_i(\ell)^{(j)} := \bigoplus_{k\in F^{-1}(j)} V(i+1, i+\ell)^{(k)}$ 对任意 $j \in \mathbb{Z}_n$ 均成立，且具有显然的线性映射。

命题 2.9。存在一个 Δ_n-表示的同构：

$$U_m \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_n} U_i(m).$$

证明。两个表示的所有向量空间的维数均为 m。进行基变换，使得直和项 $U_i(m)$ 中位于第 j 个位置的 $\mathbb{C}$ 的基向量映射到 Δ_n 的第 $i+j-1$ 个顶点上 $\mathbb{C}^m$ 的第 $i+j-1$ 个基向量。这就诱导出所需的同构。□

命题 2.10。自同构群 $\mathrm{Aut}_{\Delta_n}(U_m)$ 的元素恰好是满足以下条件的矩阵组 $A = (A_i)_{i\in\mathbb{Z}_n}$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(i)} & & & & \\ a_{2,1}^{(i)} & a_{1,1}^{(i-1)} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{m-1,1}^{(i)} & a_{m-2,1}^{(i-1)} & \dots & a_{1,1}^{(i-m+2)} & \\ a_{m,1}^{(i)} & a_{m-1,1}^{(i-1)} & \dots & a_{2,1}^{(i-m-2)} & a_{1,1}^{(i-m+1)} \end{pmatrix}$$

其中，对所有 $i \in \mathbb{Z}_n$, $k \in [2,m]$，$a_k^{(i)}{}_{,1} \in \mathbb{C}$，且对所有 $i \in \mathbb{Z}_n$，$a_1^{(i)}{}_{,1} \in \mathbb{C}^*$。特别地，$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Aut}_{\Delta_n}(U_m) = mn$。

证明。我们首先计算自同态代数 $\mathrm{End}_{\Delta_n}(U_m)$。根据定义，$(E_i)_{i\in\mathbb{Z}_n} \in \mathrm{End}_{\Delta_n}(U_m)$ 当且仅当

$$E_{i+1}\tau_1 = \tau_1 E_i \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}_n.$$

这等价于

$$E_{i+1}\tau_1(v_l^{(i)}) = \tau_1 E_i(v_l^{(i)}) \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}_n, l \in [m]. \tag{2.1}$$

我们将 $a_{k\,l}^{(i)}{}_{,} := (E_i)_{k,l}$ 记作矩阵元素，因此

$$E_i(v_l^{(i)}) = \sum_{k=1}^{m} a_{k,l}^{(i)} v_k^{(i)}.$$

于是，方程 (2.1) 等价于

$$a_{k,l}^{(i)} = a_{k+1,l+1}^{(i+1)}, \quad a_{k,n}^{(i)} = 0, \quad a_{n,l}^{(i)} = 0, \qquad \text{for all } k,l \in [m-1].$$

由上述方程，对 $m-l$ 运用归纳法可得 $e_k^{(i)}{}_{,l} = 0$ 对任意 $l > k$ 均成立；对 l 运用归纳法可得 $e_k^{(i)}{}_{,l} = e_{k+1}^{(i+1)}{}_{,l+1}$。这意味着 E_i's 具有所述的下三角形式。现在，只需附加所有对角元素均可逆这一条件，即可得到自同构群。□

$\mathbb{C}^*$ 作用于 $X := X(k,n,\omega)$，诱导出如下分解：

$$X = \bigcup_{p\in X^{\mathbb{C}^*}} W_p, \qquad \text{with} \qquad W_p := \left\{ x \in X : \lim_{z\to 0} z.x = p \right\}.$$

我们称之为 BB分解，因为 Białynicki-Birula 最早在 [BB73] 中研究了此类分解。

定理 2.11. 对于 $\omega \geq 1$ 和 $k \leq n$，代数簇 $X(k,n,\omega)$ 满足以下性质：

(i) 它是一个维数为 $\omega k(n-k)$ 的射影代数簇；(ii) 其不可约分支等维；(iii) BB分解是一个胞腔分解；(iv) 其不可约分支正规、科恩-麦考利，且具有有理奇点；(v) 不可约分支 $X_I(k,n,\omega)$ 由 k 元子集 $I \subset [n]$ 标记。

证明. (i) 是 [Pue22，引理 4.9] 的特例。(ii) 以及如 (v) 所述对不可约分支的标记，均由 [Pue22，引理 4.10] 得出。上文引入的 $\mathbb{C}^*$ 作用的定义权函数与 [Pue22，第 4.4] 节中的权函数一致。因此，[Pue22，定理 4.13] 表明 BB 分解的各部分都是胞腔，故 (iii) 成立。[Pue22，引理 4.12] 推出 (iv)。(□

注 2.12. 利用 [Pue22]，中的方法，也可以研究 $\mathrm{Gr}^{(q,\dots,q)}(U_m)$，其中 Δ_n-表示 U_m 的定义与上文相同。但在这种情形下，只能证明上述定理的部分 (iii) 和 (iv)。对于部分 (i)、(ii) 和 (v)，n 整除 m 且 m/n 整除q 是至关重要的。否则，不可约分支的维数并不相同，其参数化也未知，因此不存在维数公式。

定理 2.13. 每个胞腔 $C \subset X(k,n,\omega)$ 都是 T-稳定的，并且恰好包含一个 T-不动点 P_C。P_C 的 $\mathrm{Aut}^{\Delta_n}(U_{\omega n})$-轨道与层均为 C。

证明. 第一部分由 [LP20，定理 5.7] 与 [LP20，定理 5.14] 结合得出。层与 $\mathrm{Aut}^{\Delta_n}(U_{\omega n})$-轨道之间的双射由 [Pue19，引理 2.28] 得出。由引理 2.8 中对 T-不动点的显式描述可知，它们两两不同构。因此，它们属于不同的层。□

注 2.14。注意，一般而言，箭图格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$ 中的 $\mathrm{Aut}_Q(M)$-轨道并不是胞腔，并且包含多个环面不动点。这是 $X(k,n,\omega)$'s 所特有的性质。否则，在一些简单例子中就已经不成立：

考虑带有 $M_{(1)} = M^{(2)} = \mathbb{C}^2$、$M_1 = \mathrm{id}$ 和 $M_2 = 0$ 的 Δ_2-表示 M。对于 $\mathbf{e} = (1,1)$，令 $\mathbb{C}^*$ 通过权函数 $\mathrm{wt}(e_i) = i$ 在由其诱导的箭图格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$ 上作用，其中 $\{e_1, e_2\}$ 是 $\mathbb{C}^2$ 的标准基。由 [CI11，定理 1] 可知，$\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$ 有两个同构的$\mathbb{C}^*$-不动点。因此，它们位于同一个 $\mathrm{Aut}^{\Delta_2}(M)$-轨道中。

注 2.15. 定理 2.13 表明，$X(k,n,\omega)$ 中每个胞腔闭包都是较小胞腔的并集。胞腔与广义杂耍模式之间的双射使我们能够将这一描述明确化（推论 4.7）。但首先，我们必须描述 T 对 $X(k,n,\omega)$ 的作用所对应的矩图（引理 3.4）。

2.5. 奇异性消解。 本小节中，我们遵循 [PR23] 中的一般构造，对 $X(k,n,\omega)$ 进行奇异性消解（另见 [CFR13、FF13、KS14、S17]）。

对于 $I \in \binom{[n]}{k}$，定义 Δ_n-表示

$$U_I := \bigoplus_{i\in I} U_i(\omega n).$$

命题 2.16. 对所有 $I \in \binom{[n]}{k}$，闭分层 $\overline{\mathcal{S}_{U_I}}$ 是 $X(k,n,\omega)$ 的一个不可约分支，且所有不可约分支均具有这种形式。

证明. 最高维分层代表元的参数化见 [Pue22，引理 4.10] 的证明。第二部分由定理 2.11.(v) 得出。□

ˆ设 Δ_n 为顶点集为

$$\big\{(i,k) \ : \ i \in \mathbb{Z}_n \text{ and } k \in [\omega n]\big\}$$

以及箭

$$\big\{a_{i,k} : (i,k) \to (i,k+1) \ : \ i \in \mathbb{Z}_n \text{ and } k \in [\omega n - 1]\big\} \cup$$
$$\big\{b_{i,k} : (i,k) \to (i+1,k-1) \ : \ i \in \mathbb{Z}_n \text{ and } k \in [\omega n] \setminus \{1\}\big\}.$$

ˆ 对于 $M \in \mathsf{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n)$，定义 Δ_n-表示

$$\hat{M} := \big((\hat{M}^{(i,k)})_{i\in\mathbb{Z}_n, k\in[N]}, (\hat{M}_{a_{i,k}}, \hat{M}_{b_{i,k+1}})_{i\in\mathbb{Z}_n, k\in[N-1]}\big)$$

with

$$\begin{aligned}
\hat{M}^{(i,1)} &:= M^{(i)} && \text{for } k = 1\\
\hat{M}^{(i,k)} &:= M_{i+k-2} \circ M_{i+k-3} \circ \cdots \circ M_{i+1} \circ M_i(M^{(i)}) && \text{for } k \geq 2\\
\hat{M}_{a_{i,k}} &:= M_{i+k-1} && \text{for } k \geq 1\\
\hat{M}_{b_{i,k}} &:= \iota : \hat{M}^{(i,k)} \hookrightarrow \hat{M}^{(i+1,k-1)} && \text{for } k \geq 2
\end{aligned}$$

这里，沿着 $b_{i,\ k}$ 的包含映射自然地来自 M 的 ˆ 向量空间的定义。

ˆ 每个 $W \in \mathsf{rep}_{\mathbb{C}}(\Delta_n)$ 都限制为一个 Δ_n-表示

$$\operatorname{res} W := \Big(\big(W^{(i,1)}\big)_{i\in\mathbb{Z}_n}, \big(W_{b_{i,2}} \circ W_{a_{i,1}}\big)_{i\in\mathbb{Z}_n}\Big).$$

对于 $I \in \binom{[n]}{k}$，令 ˆ $X_I(k,n,\omega) := \mathsf{Gr}_{\mathbf{dim}\ \hat{}U_I}\big(\hat{}U_{\omega n}\big)$ 定义映射

$$\pi_I : \hat{X}_I(k,n,\omega) \longrightarrow X(k,n,\omega)$$

ˆ 通过 $\pi_I(V) := \operatorname{res} V$，对所有 $V \in X_I(k,n,\omega)$ 均成立。

ˆ 注释 2.17. $U_{\omega n}$ 的向量空间由 $U_{\omega n}$ 的向量空间基底的子集张成。因此，$U_{\omega n}$ 上的 T 作用以显然的方式延拓到当 $I \in \binom{[n]}{k}$ 时的箭图格拉斯曼簇 ˆ $X_I(k,n,\omega)$。对 $\mathbb{C}^*$ 作用也同样成立。

以下结果是 [PR23，定理 3.18，引理 5.3] 的一个特例。

定理 2.18。映射

$$\pi := \bigsqcup_{I\in\binom{[n]}{k}} \pi_I \ : \ \bigsqcup_{I\in\binom{[n]}{k}} \hat{X}_I(k,n,\omega) \longrightarrow X(k,n,\omega)$$

是 T-等变的奇异性消解 $X(k,n,\omega)$。

定理 2.19. 对每个 $I \in \binom{[n]}{k}$，箭图格拉斯曼簇 $\hat{} X_I(k,n,\omega)$ 同构于一个纤维化塔

$$\hat{X}_I(k,n,\omega) = X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_{\omega n} = \mathrm{pt}$$

其中，对于 $k \in [\omega n - 1]$，每个映射 $X_k \to X_{k+1}$ 都是纤维化，其纤维同构于子空间格拉斯曼流形的乘积。

这一结果是 [PR23，定理 3.21] 的一个特例，并推广了 [FLP22，定理 7.10]。

2.6. 奇异性消解的性质。

引理 2.20。（参见 [PR23，定理 5.5]）$I \in \binom{[n]}{k}$ $\hat{} X_I(k,n,\omega)$ 的 T-不动点恰为 $X_I(k,n,\omega)$ 的 T-不动点在 π_I 下的原像 $\subset X(k,n,\omega)$（其中 $X_I(k,n,\omega) := \overline{\mathcal{S}_{U_I}}$）。这些点的 $\mathbb{C}^*$-吸引集给出了 $\hat{} X_I(k,n,\omega)$ 的胞腔分解。

$\hat{}$ 命题 2.21。$U_{\omega n}$ 的自同构群满足

$$\mathrm{Aut}_{\hat{\Delta}_n}(\hat{U}_{\omega n}) \cong \mathrm{Aut}_{\Delta_n}(U_{\omega n}).$$

证明。由复合映射 $\beta_{i+1,\ 2} \circ \alpha_{i,\ 1}$ 可知，对所有 $i \in \mathbb{Z}_n$，$A \in \mathrm{Aut}_{\hat{}\Delta_n}(\hat{} U_{\omega n})$ 的每个矩阵 $A^{(i,1)}$ 都满足与 $B \in \mathrm{Aut}_{\Delta_n}(U_{\omega n})$ 的矩阵 $B^{(i)}$ 相同的关系（见命题 2.10）。由此可知，根据 $\hat{} U_{\omega n}$ 的构造，所有其他分量 $A^{(i,r)}$ 都是矩阵 $A^{(i,1)}$ 中大小为 $\omega n - r + 1$ 的下三角块。这便推出所需的同构。□

$\hat{}$ 引理 2.22。箭图格拉斯曼簇 $X_I(k,n,\omega)$ 中的分层恰好是 T-不动点的 $\mathrm{Aut}_{\hat{\Delta}_n}(\hat{} U_{\omega n})$ 轨道，并且与它们的 $\mathbb{C}^*$-吸引集一致。

$\hat{}\hat{}$ 证明。表示 $U_{\omega n}$ 是一个单射有界 Δ_n 表示。因此，我们可以应用 [Pue19，引理 2.28]，，得出所有分层都是 $\mathrm{Aut}_{\hat{\Delta}_n}(\hat{} U_{\omega n})$ 轨道，反之亦然。由引理 2.20 对 $\hat{} X_I(k,n,\omega)$ 的 T-不动点的显式描述可知，它们两两同构。这意味着每个 $\mathrm{Aut}_{\hat{}\Delta_n}(\hat{} U_{\omega n})$ 轨道恰好包含一个 T-不动点。因此，该轨道必与该不动点的 $\mathbb{C}^*$-吸引集一致。□

3. Moment Graph and Cohomology

3.1. 矩图。矩图是一种组合对象，用于刻画复射影簇上适当环面作用下不动点和一维轨道的结构。该图的结构有助于理解代数簇的等变几何。在此之前

我们先回顾定义和一些必要的术语，然后再为 $X(k,n,\omega)$ 描述矩图。

设 X 是一个复射影代数簇， X 上有环面 T 的作用，且只有有限个不动点和有限个一维 T 轨道（即该作用是骨架性的）。下面的定义针对 X 具有 T-稳定胞腔分解的情形（如本文所述情形）。

定义 3.1. 设 T 是一个代数环面， X 是一个复射影代数 T-簇。假设 X 具有一个 T-稳定胞腔分解，且每个胞腔恰有一个不动点。若 T 在 X 上的作用是骨架性的，则相应的矩图 $\mathcal{G}(X,T)$ 定义如下：

- 顶点集是不动点集： $\mathcal{V}=X^T$;
- 当且仅当 x 和 y 属于同一个一维 T 轨道闭包 $\overline{\mathcal{O}_{x\to y}}$，且 y 属于包含 x 的胞腔的闭包时，才存在一条边 $x\to y$；
- 边 $x\to y$ 的边标记是特征 $\alpha\in \mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^*)$，环面通过该特征作用于 $\mathcal{O}_{x\to y}$。

边标记只在相差一个符号的意义下确定，但由于这在应用中（例如计算等变上同调）并不起作用，我们假设这些标记一劳永逸地固定下来，并不再考虑这种不确定性。

以下给出的 $X(k,n,\omega)$ 的 T-不动点参数化，有助于描述一维 T-轨道的结构。

命题 3.2. 对于满足 $k\le n$ 的 $k,n,\omega\in\mathbb{N}$，$\mathcal{J}ug(k,n,\omega)$ 与下列集合之间存在一个双射：

$$\mathcal{C}_{k,n,\omega}:=\left\{(\ell_j)_{j\in\mathbb{Z}_n}\in[0,\omega n]^{\mathbb{Z}_n}:\mathbf{dim}\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_n}U_j(\ell_j)=(k\omega,\dots,k\omega)\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}_n}\right\}.$$

证明。令 φ: $\mathcal{J}ug(k,n,\omega)\to\mathcal{C}_{k,n,\omega}$ 将 $\mathcal{J}_\bullet=(J_i)_{i\in\mathbb{Z}_n}$ 映射到 $\ell_\bullet=(\ell_j)_{j\in\mathbb{Z}_n}$，其中

$$\ell_j:=\max\left(\{r\in[\omega n]:\omega n-r+1\in J_{j-r+1}\}\cup\{0\}\right).$$

由 $U_{\ell_\bullet}:=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_n}U_j(\ell_j)$ 的定义可立即得出 $\mathbf{dim}\ U_{\ell_\bullet}=(k\omega,\dots,k\omega)$，因为每个 J_i 都包含 $k\omega$ 个元素。

逆映射 $\varphi^{-1}:\mathcal{C}_{k,n,\omega}\to\mathcal{J}ug(k,n,\omega)$ 将 $\ell_\bullet$ 映射到 $\mathcal{J}_\bullet$，其中对每个 $\ell_j\neq 0$ 和 $s\in[\ell_j]$，集合 J_{j-s+1} 都包含元素 $\omega n-s+1$。显然，每个 ℓ_j 对每个 J_i 恰好贡献 $k\omega$ 次，因为 $\mathbf{dim}\ U_{\ell_\bullet}=(k\omega,\dots,k\omega)$。□

例3.3. 对于 $k=n=\omega=2$， $X(k,n,\omega)$ 有五个由元组 (2, 2)、(3, 1)、(1, 3)、(4, 0) 和 (0, 4) 标记的 $T=(\mathbb{C}^*)^{2+1}$-不动点。

现在我们描述对 $\mathcal{C}_{k,n,\omega}$ 中各元素的线段进行的一些剪切粘贴操作。对于每个元素 $\ell_\bullet\in\mathcal{C}_{k,n,\omega}$，都存在如下形式的映射$f_{i,j,r}$： $\mathcal{C}_{k,n,\omega}\to\mathcal{C}_{k,n,\omega}$，满足

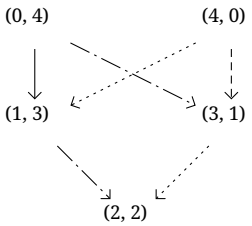
$$\Big(f_{i,j,r}(\ell_\bullet)\Big)_s:=\begin{cases}\ell_s & s\notin\{i,j\}\\ \ell_i-r & s=i\\ \ell_j+r & s=j\end{cases}.$$

当且仅当 $r \in [0, \min\{\ell_i, \omega n - \ell_j\}]$ 且 $i - \ell_i = j - \ell_j - r \mod n$。容易验证，$f_{i,j,r}(\ell_\bullet)$ 仍然是$\mathcal{C}_{k,n,\omega}$ 的一个元素。这些剪切粘贴操作描述了所有一维的 T-轨道。

引理 3.4. 环面T 作用在 $X(k,n,\omega)$ 上时，其矩图的顶点由 $\mathcal{C}_{k,n,\omega}$中的元素标记。当且仅当 $\ell_i > \ell_j + r$ 时，矩图中存在一条从 $\ell_\bullet$ 到 $f_{i,j,r}(\ell_\bullet)$ 的有向边。边 $\ell_\bullet \to f_{i,j,r}(\ell_\bullet)$ 的标记为 $\epsilon_j - \epsilon_i + \delta \cdot (\ell_i - \ell_j - r)$，其中对于任意 $i \in [n]$，$\delta(\gamma) := \gamma_0$，且 $\epsilon_i(\gamma) := \gamma_i$，并且 $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in T$。

证明。这是对 [LP20, 定理 6.15], 中矩图边及其标记的描述的一个特例，并将其转换为命题 3.2 中 T-不动点的描述。□

例 3.5. 例3.3中的 T-不动点之间的一维 T-轨道可由下图表示：



带有标签：

$\cdots\to \;\widehat{=}\; \epsilon_2 - \epsilon_1 + \delta$

$-\cdot\to \;\widehat{=}\; \epsilon_1 - \epsilon_2 + \delta$

$-\,-\to \;\widehat{=}\; \epsilon_2 - \epsilon_1 + 3\delta$

$\longrightarrow \;\widehat{=}\; \epsilon_1 - \epsilon_2 + 3\delta$

注意，由于 $1 \neq 2$ 模 2，(4, 0) 和 (0, 4) 之间没有边。出于同样的原因，(3, 1) 和 (1, 3) 之间，以及 (4, 0) 或 (0, 4) 与 (2, 2) 之间也没有边。边 (4, 0) $\to$ (1, 3) 的标记为 $\epsilon_2 - \epsilon_1 + \delta$，因为 (1, 3) $= f_{1,\,2,\,3}$(4, 0)。其他所有标记均以相同方式计算。

3.2. T-等变上同调。根据 [LP20，定理 6.6], ，我们可以利用引理 3.4 中描述的矩图 $\mathcal{G}$ 的结构，计算 $X := X(k,n,\omega)$ 的（T-等变）上同调环。令 $R := \mathbb{Q}[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, \delta]$，并将其视为一个 $\mathbb{Z}$-分次环，其分次由对所有 $i \in [n]$ 的 $\deg(\epsilon_i) = \deg(\delta) = 2$ 给出。用 $\alpha(\ell_\bullet, \ell'_\bullet)$ 表示边 $\ell_\bullet \to \ell'_\bullet$ 的标记。 [GKM98，定理 1.2.2] 给出以下结果。

推论 3.6. 存在一个（$\mathbb{Z}$-分次）环同构

$$H_T^\bullet(X, \mathbb{Q}) \simeq \left\{ (z_{\ell_\bullet})_{\ell_\bullet \in \mathcal{C}(k,n,\omega)} \in \bigoplus_{\ell_\bullet \in \mathcal{C}(k,n,\omega)} R \;\middle|\; \begin{array}{c} z_{\ell_\bullet} \equiv z_{\ell'_\bullet} \mod \alpha(\ell_\bullet, \ell'_\bullet) \\ \text{for every edge } \ell_\bullet \to \ell'_\bullet \end{array} \right\}.$$

注 3.7. 根据 [LP23，定理 3.22], $H_T^\bullet(X(k,n,\omega)\ \mathbb{Q})$ 作为 R 上的自由模具有一个非常好的基，即所谓的 Knutson-Tao (KT) 基（参见 [LP23，定义 3.2]）。

例 3.8。例如，在矩图为例 3.5 中的矩图的情况下，若记作 $\alpha = \epsilon_1 - \epsilon_2$，则 KT 类如下：

$$\xi_{(0,4)} = \begin{array}{ccc} (\alpha+\delta)(\alpha+3\delta) & & 0 \\ & \searrow\!\swarrow & \\ 0 & & 0 \\ & \searrow\;\swarrow & \\ & 0 & \end{array} \qquad \xi_{(4,0)} = \begin{array}{ccc} 0 & & (-\alpha+\delta)(-\alpha+3\delta) \\ & \searrow\!\swarrow & \\ 0 & & 0 \\ & \searrow\;\swarrow & \\ & 0 & \end{array}$$

$$\xi_{(1,3)} = \begin{array}{ccc} \alpha+\delta & & -\alpha+3\delta \\ \downarrow & \swarrow\!\searrow & \downarrow \\ \alpha+\delta & & 0 \\ & \searrow\ \ \swarrow & \\ & 0 & \end{array} \qquad \xi_{(3,1)} = \begin{array}{ccc} \alpha+3\delta & & -\alpha+\delta \\ \downarrow & \swarrow\!\searrow & \downarrow \\ 0 & & -\alpha+\delta \\ & \searrow\ \ \swarrow & \\ & 0 & \end{array}$$

$$\xi_{(2,2)} = \begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ \downarrow & \swarrow\!\searrow & \downarrow \\ 1 & & 1 \\ & \searrow\ \ \swarrow & \\ & 1 & \end{array}$$

上面的等变上同调类 $(z_{\ell_\bullet})_{\ell_\bullet\in\mathcal{C}(k,\ n,\ \omega)}$ 由一组排列在矩图相应顶点上的多项式表示（ $z_{\ell_\bullet}$ 位于该顶点 $\ell_\bullet$）。

3.3. 循环群对等变上同调的作用。考虑$\mathbb{Z}_n$ 在 T 上的作用，其定义为

$$m\cdot(\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_n)=(\gamma_0,\gamma_{1+m},\dots,\gamma_{n+m}),\quad (m\in\mathbb{Z}_n,\gamma\in T).$$

该作用在特征格 $\mathfrak{X}^*(T)$ 上诱导出一个 $\mathbb{Z}_n$ 作用，其定义为：对于任意 $m\in\mathbb{Z}_n$, $\alpha\in\mathfrak{X}^*(T)$ $\gamma\in T$， $m\cdot\alpha(\gamma)=\alpha((-m)\cdot\gamma)$。由此，我们还在 R 上得到一个 $\mathbb{Z}_n$ 作用，它由以下条件唯一确定：对于任意 $m,i\in\mathbb{Z}_n$， $m(\epsilon_i)=\epsilon_{i-m}$ 且 $m(\delta)=\delta$。

显然，集合 $\mathcal{C}_{k,n,\omega}$ 也带有一个 $\mathbb{Z}_n$ 作用，其定义为 $m\cdot(\ell_j)_{j\in\mathbb{Z}_n}=(\ell'_j)_{j\in\mathbb{Z}_n}$，其中 $\ell'_j=\ell_{j-m}$。

命题 3.9. 存在一个 $\mathbb{Z}_n$在 $H_T^\bullet(X(k,n,\omega)\ \mathbb{Q})$ 上的作用，其定义为

$$m\cdot\left(z_{\ell_\bullet}\right)_{\ell_\bullet\in\mathcal{C}(k,n,\omega)}=\left(z'_{\ell_\bullet}\right)_{\ell_\bullet\in\mathcal{C}(k,n,\omega)},$$

其中 $m\in\mathbb{Z}_n$、$(z_{\ell_\bullet})\in H_T^\bullet(X(k,n,\omega)\ \mathbb{Q})$，以及 $z'_{\ell_\bullet}=m(z_{m\cdot\ell_\bullet})$。

证明。令 $(z_{\ell_\bullet})\in H_T^\bullet(X(k,n,\omega)\ \mathbb{Q})$，且 $m\in\mathbb{Z}_n$。我们需要验证：对于任意 $\ell_\bullet\in\mathcal{C}(k,n,\omega)$ 以及任意满足 $f_{i,\ j,\ r}(\ell_\bullet)$ 有定义的三元组 i,j,r，下式成立

$$mz_{m\cdot\ell_\bullet}\equiv mz_{m\cdot f_{i,j,r}\ell_\bullet}\mod\alpha_{\ell_\bullet,f_{i,j,r}\ell_\bullet}=\epsilon_j-\epsilon_i+(\ell_i-\ell_j-r)\delta.$$

注意到

$$m\cdot f_{i,j,r}(\ell_\bullet)_s=\begin{cases}\ell_{s-m} & s\notin\{i+m,j+m\}\\ \ell_{s-m}-r & s=i+m\\ \ell_{s-m}+r & s=j+m\end{cases}=f_{i+m,j+m,r}(m\cdot\ell_\bullet)_s.$$

因此，由于 $(z_{\ell_\bullet})\in H_T^\bullet(X(k,n,\omega)\ \mathbb{Q})$，我们有

$$z_{m\cdot\ell_\bullet}\equiv z_{m\cdot f_{i,j,r}\ell_\bullet}\mod\epsilon_{j+m}-\epsilon_{i+m}+(\ell_i-\ell_j-r)\delta.$$

由此可得

$$mz_{m\cdot\ell_\bullet}\equiv mz_{m\cdot f_{i,j,r}\ell_\bullet}\mod m(\epsilon_{j+m}-\epsilon_{i+m}+(\ell_i-\ell_j-r)\delta)=\epsilon_j-\epsilon_i+(\ell_i-\ell_j-r)\delta.$$

□

例 3.10。用例 3.8 中的 KT 类表示， $\mathbb{Z}_2$ 作用由以下内容唯一确定

$$\sigma\cdot\xi_{(2,2)}=\xi_{(2,2)},\ \sigma\cdot\xi_{(3,1)}=\xi_{(1,3)},\ \sigma\cdot\xi_{(4,0)}=\xi_{(0,4)},$$

其中 σ 是 $\mathbb{Z}_2$的生成元。

令 P 表示由空间 R 给出的 $\mathbb{Z}_2$ 表示，并赋予上述引入的作用。作为 $\mathbb{Z}_2$ 表示，等变上同调分解为

$$\begin{aligned} H_T^\bullet(X(2,1,2)) &\simeq P\xi_{(2,2)} \oplus P(\xi_{(3,1)}+\xi_{(1,3)}) \oplus P(\xi_{(4,0)}+\xi_{(0,4)}) \\ &\quad \oplus P(\xi_{(3,1)}-\xi_{(1,3)}) \oplus P(\xi_{(4,0)}-\xi_{(0,4)}) \\ &\simeq \mathbf{1}^0\otimes P \oplus \mathbf{1}^2\otimes P \oplus \mathbf{1}^4\otimes P \oplus \epsilon^2\otimes P \oplus \epsilon^4\otimes P, \end{aligned}$$

其中， $\mathbf{1}^j$ 和 ϵ^j 表示集中在次数 j的一维表示， $1\in\mathbb{Z}_2$ 分别通过乘以 1 和 -1 作用于其上（回顾一下，余特征的上同调次数为 2）。

注 3.11. 值得进一步研究一般情况下 $\mathbb{Z}_n$表示在 $H_T^\bullet(X(k,n,\omega)\ \mathbb{Q})$ 上的结构。

4. Poset structures on the set of fixed points

4.1. 仿射置换、Grassmann 项链与抛接球模式。本小节简要回顾几个在全非负格拉斯曼簇理论中发挥重要作用的组合对象。详情参见 [KLS13、Lam16、Rie99、W05]。

令 $\mathcal{S}_{k,n}$ 为 (k,n) 仿射置换的集合，即 $\mathcal{S}_{k,n}$ 由双射 $f\colon\ \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 组成，满足对于所有 $i\in\mathbb{Z}$， $f(i+n)=f(i)+n$，且$\sum_{i=1}^n(f(i)-i)=kn$。我们用 $\mathrm{id}_k\in\mathcal{S}_{k,n}$ 表示由 $\mathrm{id}_k(j)=j+k$ 对所有 $j\in\mathbb{Z}$ 给出的置换。特别地，$(0,n)$ 仿射置换构成一个群 W_n，它同构于仿射型 $A_{n-1}^{(1)}$ 的魏尔群。群 W_n 通过左乘作用于 $\mathcal{S}_{k,n}$。特别地，映射 $w\mapsto w\mathrm{id}_k$ 给出一个双射 $W_n\to\mathcal{S}_{k,n}$。因此， W_n 上的 Bruhat 序在仿射置换集合上诱导出一个序。

若对于所有$i\in\mathbb{Z}$ 都有 $i\le f(i)\le i+n$，则称 (k,n) 仿射置换为有界的。有界 (k,n) 仿射置换的集合记作 $\mathcal{B}_{k,\ n}$。以下事实对我们很重要：

$$\mathcal{B}_{k,n} \text{ is a lower order ideal in } \mathcal{S}_{k,n}\simeq W_n. \tag{4.1}$$

集合 $\mathcal{I}=(I_a)^{a\in[n]}$，其中每个元素都是集合 $[n]$ 的子集，称为 (k,n) Grassmann 项链，若对所有 a 都有 $|I_a|=k$，且对所有 $a\in[n]$ 都有 $I_a\subset I_{a+1}\cup\{a\}$ （当 $a=n$ 时，我们令 $I_{a+1}=I_1$）。我们用 $\mathcal{GN}_{k,n}$ 表示 (k,n) Grassmann 项链的集合。$\mathcal{GN}_{k,n}$ 与 $\mathcal{B}_{k,n}$ 之间的双射由以下规则给出。对于 $\mathcal{I}\in\mathcal{GN}_{k,n}$，对应的 $f\in\mathcal{B}_{k,n}$ 固定所有满足 $a\notin I_a$ 的 a。若 $a\in I_a$，则 $I_{a+1}=I_a\setminus\{a\}\cup\{b\}$；我们令 $f(a)=c$，其中 $a<c\le a+n$ 模 n 为 $b=c$。

例 4.1. 对于子集 $I\subset[n]$, $|I|=k$，我们有 Grassmann 项链 $\mathcal{I}=(I,\dots,I)$。与 $\mathcal{I}$ 对应的有界 (k,n) 仿射置换 f_I 由 $f_I(a)=\begin{cases} a, & a\notin I,\\ a+n, & a\in I\end{cases}$ 确定。

我们用 $w_I\in W_n$ 表示在识别 $W_n\simeq\mathcal{S}_{k,n}$ 下与 f_I 对应的魏尔群元素。

杂耍模式与格拉斯曼项链颇为相似。根据定义，$\mathcal{J}=(J_1,\dots,J_n)$ 是由 $[n]$ 中的 k 元子集组成的一个集合；若对所有 $a\in[n]$，都有 $\tau_1(J_a\setminus\{n\})\subset J_{a+1}$，则称其为一个 (k,n) 杂耍模式。其中 $\tau_1(x)=x+1$。令 $\mathcal{J}ug(k,n)$ 表示 (k,n) 杂耍模式的集合。那么，$\mathcal{J}ug(k,n)$ 与 $\mathcal{B}_{k,n}$ 之间存在如下规则给出的双射。对于杂耍模式 $\mathcal{J}=(J_a)_{a=1}^n$，相应的元素 $f_{\mathcal{J}}\in\mathcal{B}(k,n)$ 定义如下：

$$f_{\mathcal{J}}(a)=\begin{cases}a, & n\notin J_a,\\ n+a+1-x, & n\in J_a, J_{a+1}=\tau_1(J_a\setminus\{n\})\cup\{x\}.\end{cases}\tag{4.2}$$

4.2. 广义有界仿射置换。如 [FLP22 的第 1], 节所示，$X(k,n,1)$ 的胞腔、杂耍模式与有界仿射置换之间存在双射。现在，我们引入广义有界仿射置换，它们与广义杂耍模式之间存在双射。这由此提供了一种参数化 T-不动点的替代方法：$X(k,n,\omega)$。

定义 4.2. 对于 $k,n,\omega\in\mathbb{N}$，其中 $k\le n$，一个 (k,n,ω) 有界仿射置换是一个双射 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，满足以下性质：

(1) 对所有 $i\in\mathbb{Z}$，$f(i+n)=f(i)+n$；

(2) $\sum_{i=1}^{n}(f(i)-i)=kn\omega$；(3) 对所有 $i\in\mathbb{Z}.$，$i\le f(i)\le i+\omega n$

(k,n,ω) 有界仿射置换的集合记作 $\mathcal{B}_{k,\ n,\ \omega}$。

这里，条件 (1) 与第4.1节中的 (k,n) 有界仿射置换的条件相同。对于 $\omega=1$，条件 (2) 和 (3) 与第4.1节中的相同。若不要求条件 (3)，则称 f 为 $(k\cdot\omega,n)$ 仿射置换。此定义对所有 $q\in\mathbb{Z}$ 都成立，而不仅仅是 $q=\omega k$。我们用 $\mathcal{S}_{q,\ n}$ 表示所有 (q,n) 仿射置换的集合。

有一个特殊的 (q,n) 仿射置换 id_q，定义为 $\mathrm{id}_k(i)=i+q$。在 $q=k\omega$ 的情形下，这是一个 (k,n,ω) 有界仿射置换。仿射置换的长度不依赖于 ω，其定义如下：

$$l(f)=|\{(i,j)\in[n]\times\mathbb{Z}:\ i<j\text{ and }f(i)>f(j)\}|.$$

注意，$(0,n)$ 仿射置换的集合是一个群，与 $A_{n-1}^{(1)}$ 型的仿射魏尔群 W_n 同构。对于一般的 q，群 W_n 在 $\mathcal{S}_{q,\ n}$ 上自由且传递地作用，因为我们可以将 $q=rn+k$ 写成 $0\le k<n$，并使用与 $\mathcal{S}_{k,\ n}$ 相同的论证。对于 $i=0$，置换 $s_i=(i,i+1)\in W_n$ 的作用会将值 $f(i+rn)$ 和 $f(i+rn+1)$ 对所有 $r\in\mathbb{Z}$ 进行置换。这使得我们可以通过将 $w\in W_n$ 映射到 $w.\mathrm{id}_q$，将 $\mathcal{S}_{q,\ n}$ 的集合与 W_n 视为同一集合。因此，我们在集合 $\mathcal{S}_{q,\ n}$ 上得到由 W_n 上的 Bruhat 序诱导的序 $\le$。于是，唯一的极小元是 id_q。

文献 [KLS13 的引理 3.6] 证明了 $\mathcal{B}_{k,\ n,\ 1}$ 是 $\mathcal{S}_{k,\ n}$中的一个下序理想。沿用相同的论证可知，$\mathcal{B}_{k,\ n,\ \omega}$ 是 $\mathcal{S}_{k\cdot\omega,\ n}\cong W_n$中的一个下序理想。对于 $f,g\in\mathcal{B}_{k,\ n,\ \omega}$，我们用 $f\le_{\mathcal{B}}g$ 表示由 W_n上的 Bruhat 序诱导的序。

根据 [Lam16 的定理 6.2], , 在集合 $\mathcal{B}_{k,\ n,\ 1}$ 与集合 $\mathcal{J}ug(k,n,1)$ 之间存在一个保序双射。在将其推广到任意 ω之前，我们先引入 $X(k,n,\omega)$ 的 T-不动点的另一种参数化，这种表示法更接近有界仿射置换的定义。

命题 4.3. 对于 k、n、$\omega \in \mathbb{N}$，若 $k \leq n$，则 $\mathcal{J}ug(k$、n、$\omega)$ 与

$$\Big\{(\ell_j)_{j\in\mathbb{Z}_n} \in [0,\omega n]^{\mathbb{Z}_n} \ : \ \sum_{j\in\mathbb{Z}_n} \ell_j = kn\omega, \quad \big\{j+\ell_j \bmod n : j\in\mathbb{Z}_n\big\} = \mathbb{Z}_n\Big\}.$$

证明。由命题 3.2，我们只需证明对于 $\ell_\bullet \in [0,\omega n]^{\mathbb{Z}_n}$，以下条件等价：

(1) $\mathbf{dim}\, U_{\ell_\bullet} = (k\omega,\dots,k\omega) \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}_n}$,
(2)

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_n} \ell_j = kn\omega \quad \text{and} \quad \big\{j+\ell_j \mod n : j\in\mathbb{Z}_n\big\} = \mathbb{Z}_n.$$

长度元组 $z_\bullet$ 满足条件 $z_j = k\omega$，对所有 $j \in \mathbb{Z}_n$ 均成立。它表示 $X(k$、n、$\omega)$ 的唯一零维胞腔 C_0，且 C_0 包含于 $X(k$、n、$\omega)$ 中其他每个胞腔的闭包内。因此，根据 LP20 定理 6.15] ，其他每个 $\ell_\bullet \in \mathcal{C}_{k,\ n,\ \omega}$ 均可由 $z_\bullet$ 经过一系列剪切粘贴操作 $f_{i,\ j,\ r}$ 得到：$\mathcal{C}_{k,\ n,\ \omega} \to \mathcal{C}_{k,\ n,\ \omega}$。这些操作保持性质 (1) 和 (2) 不变。因此 (1) 推出 (2)。

(2) 的第二部分意味着 $\mathbf{dim}\ U_{\ell_\bullet} = (L/n,\dots,L/n)$，其中$L = \sum_{j\in\mathbb{Z}_n} \ell_j$。结合 (2) 的第一部分，这意味着 (1)。□

引理 4.4. 对于 $k,n,\omega \in \mathbb{N}$，且 $k \leq n$，存在以下对象之间的双射：$\mathcal{J}ug(k$, $n,\omega)$、$\mathcal{C}(k,n,\omega)$ 和 $\mathcal{B}_{k,\ n,\ \omega}$。

证明. 命题 3.2 给出了第一个双射。我们定义映射 ψ :$\mathcal{C}(k,n,\omega) \to \mathcal{B}_{k,\ n,\ \omega}$，它将 $\ell_\bullet$映到映射 f: $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，其中 $f(j') := j'+\ell_j$，对所有满足 $j' = j \mod n$ 的 $j' \in \mathbb{Z}$ 均成立。由命题 4.3 中关于胞腔的第二种参数化可知，该 f 是双射，并满足定义 4.2 的第 (2) 部分。$\ell_j \in [0,\omega n]$ 蕴含该定义的第 (3) 部分。逆映射 ψ^{-1} 将 f映到 $(f(j)-j)_{j\in\mathbb{Z}_n}$。□

4.3. 胞腔集合上的偏序。本节中，我们在集合 $\mathcal{J}ug(k,n,\omega)$、$\mathcal{C}(k,n,\omega)$ 和 $\mathcal{B}_{k,\ n,\ \omega}$ 上引入偏序，并考察它们在引理 4.4 中的双射下如何相互关联。

对于 $\mathcal{J}_\bullet, \mathcal{J}'_\bullet \in \mathcal{J}ug(k,n,\omega)$，我们记 $\mathcal{J}_\bullet \geq_{\mathcal{J}} \mathcal{J}'_\bullet$ 当且仅当对于所有 $i\in\mathbb{Z}_n$ 和 $r\in[k\omega]$ 都有 $j_r^{(i)} \leq j_r'^{(i)}$，其中我们将每个 $J_i \in \binom{[n\omega]}{k\omega}$ 排序为

$$\big(j_1^{(i)} < j_2^{(i)} < \ldots < j_{k\omega}^{(i)}\big).$$

给定两个元素 $\ell_\bullet, \ell'_\bullet \in \mathcal{C}(k,n,\omega)$，若矩图中存在一条从 $\ell_\bullet$ 到 $\ell'_\bullet$ 的有向路径，其中矩图对应于 X上的 T-作用（k,n,ω），则记作 $\ell_\bullet \geq_{\mathcal{C}} \ell'_\bullet$。对于 $p,p' \in X(k,n,\omega)^T$，若 $\overline{C_p}$包含 p'，则记作 $p' \preceq p$。由定理 2.13 可知，无论考虑 $\mathrm{Aut}_{\Delta_n}(U_{\omega n})$-轨道闭包还是分层，得到的偏序 $\preceq$ 都相同。回顾一下，$\mathcal{B}_{k,\ n,\ \omega}$ 上的偏序 $\geq_{\mathcal{B}}$ 由 W_n上的 Bruhat 序诱导。

例4.5。对于例3.3中的 T-不动点，引理 4.4 中的双射如下：

$$
\begin{aligned}
(2,2) &\longleftrightarrow \big(\{3,4\},\{3,4\}\big) \longleftrightarrow f \quad \text{with } f(1) := 1+2, f(2) := 2+2,\\
(3,1) &\longleftrightarrow \big(\{2,4\},\{3,4\}\big) \longleftrightarrow f \quad \text{with } f(1) := 1+3, f(2) := 2+1,\\
(1,3) &\longleftrightarrow \big(\{3,4\},\{2,4\}\big) \longleftrightarrow f \quad \text{with } f(1) := 1+1, f(2) := 2+3,\\
(4,0) &\longleftrightarrow \big(\{2,4\},\{1,3\}\big) \longleftrightarrow f \quad \text{with } f(1) := 1+4, f(2) := 2+0,\\
(0,4) &\longleftrightarrow \big(\{1,3\},\{2,4\}\big) \longleftrightarrow f \quad \text{with } f(1) := 1+0, f(2) := 2+4.
\end{aligned}
$$

并且所有偏序集结构都与例 3.5 所诱导的偏序集结构相同。

下一个定理表明，这种偏序集结构的识别并非巧合。

定理4.6。对于 $k,n,\omega\in\mathbb{N}$ 且 $k\le n$， $\mathcal{J}ug(k,n,\omega)$、 $\mathcal{C}(k,n,\omega)$、 $X(k,n,\omega)^T$ 与 $\mathcal{B}_{k,\ n,\ \omega}$ 之间存在保序的偏序集同构。

推论 4.7。 $X(k,n,\omega)$ 中每个胞腔的闭包都可表示为

$$
\overline{C_{\mathcal{J}}} = \bigcup_{\mathcal{J}'\in\mathcal{J}ug(k,n,\omega)\ \text{s.t.:}\ \mathcal{J}'\le_J\mathcal{J}} C_{\mathcal{J}'}.
$$

此外， $\overline{C_{\mathcal{J}}}$ 的矩图是引理 3.4 中所述图在对应于 $\mathcal{J}'\le_{\mathcal{J}}\mathcal{J}$ 的顶点上的全子图。$C_{\mathcal{J}}$ 的维数等于矩图中从 $\mathcal{J}$ 出发的边数。这等于相应有界仿射置换的长度。

证明。结合定理4.6与注 2.15，可得闭包的描述。因此，胞腔闭包的矩图是由相对于任一偏序较小的顶点构成的完全子图。最后，如第6节所述，通过嵌入仿射旗簇可得维数公式。□

下面，我们将胞腔的偏序集结构与广义杂耍模式联系起来。第6节将考察它们与仿射置换的关系。

定理4.6的证明（$\le_{\mathcal{J}}\iff\le_{\mathcal{C}}\iff\preceq$）。集合层面的同构已在引理 4.4和引理2.8中给出。接下来需要证明它们保持偏序集结构。 $\le_{\mathcal{C}}$ 在 $\mathcal{C}(k,n,\omega)$上的偏序由引理 3.4所述的矩图中的边确定。剪切粘贴操作的 $\ell_i>\ell_j+r$ 性质意味着 $\varphi^{-1}(\ell_\bullet)\ge_{\mathcal{J}}\varphi^{-1}(f_{i,\ j,\ k}(\ell_\bullet))$，其中 φ 是命题 3.2中的映射。因此， $\ell_\bullet\ge_{\mathcal{C}}\ell'_\bullet$意味着对于所有 $\ell_\bullet,\ell'_\bullet\in\mathcal{C}(k,n,\omega)$， $\varphi^{-1}(\ell_\bullet)\ge_{\mathcal{J}}\varphi^{-1}(\ell'_\bullet)$。

从满足 $\mathcal{J}_\bullet\ge_{\mathcal{J}}\mathcal{J}'_\bullet$ 的 $\mathcal{J}_\bullet,\mathcal{J}'_\bullet\in\mathcal{J}ug(k,n,\omega)$ 出发，我们归纳地在矩图中构造一条从 $\ell_\bullet:=\varphi(\mathcal{J}_\bullet)$ 到 $\ell'_\bullet:=\varphi(\mathcal{J}'_\bullet)$ 的路径：令 $d:=\#\{i\in\mathbb{Z}_n:\ J_i\ne J'_i\}$。当 $d=0$ 时，两个杂耍模式相同，无需证明。若 $d>0$，则存在一个 $s\in\mathbb{Z}_n$ 使得 $J_s\ne J'_s$，并存在一个 $r\in[\omega k]$ 使得对于所有 $p\in[r+1,\omega k]$，都有 $j_p^{(s)}=j_p'^{(s)}$，且 $j_r^{(s)}<j_r'^{(s)}$。这里我们假设，属于杂耍模式的集合按升序排列，正如第4.3节开头所述。现在，我们在矩图中确定一条路径 $\ell_\bullet\to\ell''_\bullet$，使得 $\varphi^{-1}(\ell''_\bullet)=:\mathcal{J}''_\bullet\ge_{\mathcal{J}}\mathcal{J}'_\bullet$，且 $d>\#\{i\in\mathbb{Z}_n:\ J''_i\ne J'_i\}$。

点 $j_r^{(s)}$ 和 $j_r'^{(s)}$ 位于表示 $U_{\omega n}$ 的两个不同不可分解直和项上，该表示由 $a, b \in \mathbb{Z}_n$ 索引；这些直和项由 $\mathcal{J}_\bullet, \mathcal{J}'_\bullet$ 通过映射 φ 得到，具体如命题 3.2 的证明所述。由此得到剪切粘贴映射 $f_{a,b,r}$，其中 $r := b - a + \ell_a - \ell_b$。根据构造可知，$\ell_\bullet > c\ f_{a,b,r}(\ell_\bullet)$ 且 $\varphi^{-1}(f_{a,b,r}(\ell_\bullet)) \geq_{\mathcal{J}} \mathcal{J}'_\bullet$。我们可以递归地应用这一构造，在矩图中得到一条边，直到到达点 $\ell''_\bullet$，使得 $\varphi^{-1}(\ell''_\bullet) =: \mathcal{J}''_\bullet \geq_{\mathcal{J}} \mathcal{J}'_\bullet$ 且 $J''_s = J'_s$。这意味着 $d > \#\{i \in \mathbb{Z}_n \colon J''_i \neq J'_i\}$，从而完成归纳步骤。因此，偏序 $\leq_{\mathcal{J}}$ 和 $\leq_{\mathcal{C}}$ 等价。

根据将胞腔显式描述为不动点的吸引集，很容易验证：对于 $p, p' \in X(k,n,\omega)^T$，矩图中存在一条从 p 到 p' 的路径，当且仅当 $\overline{C_p}$ 包含 p'。这意味着偏序 $\leq_{\mathcal{C}}$ 和 $\preceq$ 等价。□

4.4. Poincar´e 多项式。箭图 Grass- mannian $X(k,n,\omega)$ 的 Poincar´e 多项式为

$$P_{k,n,\omega}(q) = \sum_{p \in X(k,n,\omega)^T} q^{\dim_{\mathbb{C}} C_p}.$$

由上一节的计算可得以下公式

引理 4.8. 对于满足 $k \leq n$ 的 $k, n, \omega \in \mathbb{N}$，$X(k,n,\omega)$ 的 Poincar´e 多项式为

$$P_{k,n,\omega}(q) = \sum_{f \in \mathcal{B}_{k,n,\omega}} q^{l(f)}.$$

此处 $l(f)$ 表示有界仿射置换 f 的长度，其定义见第4.2节。

证明。此结论可直接由推论 4.7 得出。□

5. Affine flag varieties

本节回顾类型为 A 的仿射旗簇与佐藤格拉斯曼簇理论的一些基础知识（[Kum02, FFR17, Pue22]）。下一节中，我们将运用这些内容，显式构造箭图格拉斯曼簇 $X(k,n,\omega)$ 到仿射旗簇的嵌入。

5.1. 记号。令 $\mathfrak{sl}_n$ 表示类型为 $A^{(1)}_{n-1}$ 的仿射卡茨–穆迪李代数。具体而言，$\widehat{\mathfrak{sl}_n} = \mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$，其中 K 为中心元，d 为导子。固定一个嘉当分解 $\mathfrak{sl}_n = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$，并令 $\widehat{\ }$ 为玻尔子代数 $\mathfrak{b} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$。于是，$\mathfrak{sl}_n$ 的伊瓦索瓦子代数为 $\mathfrak{b} \otimes 1 \oplus \mathfrak{sl}_n \otimes t\mathbb{C}[t]$。

我们用 W_n 表示 $\mathfrak{sl}_n$ 的魏尔群。对于 $n = 2$，其魏尔群由 s_0 和 s_1 生成，并满足关系 $s_0^2 = s_1^2 = e$。对于 $n > 2$，群 W_n 由反射 s_0、s_1、……、s_{n-1} 生成，并满足定义关系

$$s_i^2 = e,\ i = 0, \ldots, n-1, \quad s_i s_j = s_j s_i,\ |i-j| > 1,$$
$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1},\ i = 0, \ldots, n-1$$

（此处及下文均设 $s_n = s_0$）。群 W_n 也可实现为 $(0,n)$ 仿射置换群，即满足条件 $f(i+n) = f(i) + n$（对所有 i）以及 $\sum_{i=1}^{n}(f(i) - i) = 0$ 的双射 $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$。

Let $\widehat{SL_n}$ 该群包含两个维环面 $\exp(\mathfrak{h})$ 和二维环面 $(\widehat{\mathbb{C}^*})^2 = \exp(\mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d)$。

我们用 $P_i \subset SL_n$、$i = 0$、.....、$n-1$ 表示极大抛物子群。于是，仿射格拉斯曼簇定义为商空间 SL_n/P_i。

令 $\mathfrak{B} \subset \widehat{SL_n}$ 为伊wahori 子群。更准确地说， $\mathfrak{B}$ 由满足以下条件的矩阵 $A(t) \in SL_n(\mathbb{C}[t]) \subset SL_n$ 组成： $A(0)$ 是上三角矩阵。特别地， $\mathfrak{B}$ 的李代数为 $\mathfrak{b} \otimes 1 \oplus \mathfrak{sl}_n \otimes t\mathbb{C}[t]$

令 $\mathcal{AF}_n$ 仿射旗簇 是群的仿射旗簇拉斯曼簇的乘积 $\mathcal{AF}_n \subset \prod_{i=0}^{n-1} \widehat{SL_n}/P_i$中。注意到， $\mathcal{AF}_n$ 关于 SL_n 的环面作用的不动点由群W_n的元素标记。对于 $w \in W_n$ ，令 $p_w \in \mathcal{AF}_n$ 为相应的环面不动点。

仿射旗簇是一个归纳簇，即有限维射影代数簇的归纳极限。具体而言，对于元素 $w \in W_n$，我们用 X_w表示相应的（有限维）仿射舒伯特簇$\overline{\mathfrak{B}.p_w}$。于是 $\mathcal{AF}_n = \bigcup_{w \in W_n} X_w$。

5.2. 佐藤格拉斯曼簇。仿射格拉斯曼簇可显式嵌入佐藤格拉斯曼簇。因此，仿射旗簇可实现在佐藤格拉斯曼簇的乘积之中。下面给出一些细节。

佐藤格拉斯曼簇 $\mathrm{SGr}^{(i)}$, $i \in \mathbb{Z}$ 由满足以下条件的子空间 $V \subset \mathbb{C}[t, t^{-1}]$构成

- $t^N\mathbb{C}[t^{-1}] \supset V \supset t^{-N}\mathbb{C}[t^{-1}]$ for some $N \in \mathbb{Z}$,
- $\dim V/t^{-N}\mathbb{C}[t^{-1}] = i + N$.

例如，子空间 $\mathring{V}^{(i)} = \mathrm{span}\{t^j\colon\ j \le i\}$ 属于 $\mathrm{SGr}^{(i)}$。

佐藤格拉斯曼簇是归纳簇（尤其是，它们可以实现为有限维格拉斯曼流形的归纳极限）。它们具有到半无限形式的射影空间 $F = \Lambda^{\infty/2}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ 中的 Pl¨ucker 嵌入。空间 F 由无限楔积张成

$$t^L = t^{l_1} \wedge t^{l_2} \wedge \dots, \qquad L = (l_1, l_2, \dots),$$

其中 $l_1 > l_2 > \dots$，且当 s 充分大时 $l_{s+1} = l_s - 1$。存在荷分解 $F = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} F^{(i)}$，其中 $F^{(i)}$ 由满足当 s 充分大时 $l_s = i - s + 1$ 的楔积 t^L 张成。于是有 Pl¨ucker 嵌入 $\mathrm{SGr}^{(i)} \hookrightarrow \mathbb{P}(F^{(i)})$。

注 5.1. 令 $|i\rangle \in F^{(i)}$ 为荷数 i 真空向量，其明确表达式为$|i\rangle = t^i \wedge t^{i-1} \wedge \dots$。空间 $\mathring{V}_{(i)} \in \mathrm{SGr}^{(i)}$ 在 $\mathbb{P}(F_{(i)})$ 中的像与包含 $|i\rangle$ 的直线重合。我们还注意到，每个空间 $F^{(i)}$ 都赋有无限维海森堡代数的作用。作为海森堡代数上的模，$F^{(i)}$ 同构于一个福克模。

仿射旗簇 $\mathcal{AF}_n$ 实现为乘积 $\prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{SGr}^{(i)}$ 中的一个子集，由满足以下条件的集合 $(V_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ 构成：

- $V_i \subset V_{i+1}$,
- $V_{i+n} = t^n V_i$.

特别地，集合 $(\mathring{V}_{(i)})_i$ 对应于 $\mathcal{AF}_n \simeq SL_n/\mathfrak{B}$ 中的单位元陪集$\widehat{\ }$。

注 5.2. 给定一个元素 $w \in W_n$，相应的环面不动点$p_w \in \mathcal{AF}_n$ 由下式给出

$$\prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{span}(t^{w(j)}, j \le i) \in \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{SGr}^{(i)}.$$

6. Quiver Grassmannians inside affine flags

本节的目标是显式构造箭图格拉斯曼簇 $X(k,n,\omega)$ 到仿射旗簇中的嵌入。其像可描述为某些舒伯特簇的并。我们注意到，由于我们的箭图格拉斯曼簇与志村簇的局部模型相对应（参见注 2.3），例如在 [HG02, PRS13] 中可以找到这样的嵌入。本节的目标是用箭图格拉斯曼簇和佐藤格拉斯曼簇的语言显式构造该嵌入，并通过广义杂耍模式和有界仿射置换标记出像中出现的舒伯特簇。

6.1. 构造。根据定义，箭图格拉斯曼簇 $X(k,n,\omega)$ 位于乘积 $\prod_{i=0}^{n-1}\mathrm{Gr}_{k\omega}(M_{(i)})$ 内，其中 $M^{(i)}$ 是维数为 $n\omega$ 的向量空间，其基为 $v_j^{(i)}$, $j \in [n\omega]$ （这里我们将 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 与集合 $0,\dots,n-1$ 等同）。利用 $\mathrm{Gr}_{k\omega}(M^{(i)})$ 的 Pl¨ucker 嵌入，我们得到嵌入

$$X(k,n,\omega) \subset \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(\Lambda^{k\omega}(M^{(i)})) \tag{6.1}$$

现在来构造嵌入 $\Psi^{(i)} : \mathrm{Gr}_{k\omega}(M^{(i)}) \hookrightarrow \mathrm{SGr}^{(i)}$。我们按以下公式定义映射 $\psi^{(i)}: M^{(i)} \to \mathbb{C}[t,t^{-1}]$

$$\psi^{(i)} v^{(i)}_{n\omega+1-j} = t^{i-k\omega+j},\ j \in [n\omega]. \tag{6.2}$$

特别地，$\psi^{(i)}$ 的像由 $t^{i-k\omega+1}$、.....、$t^{i-k\omega+n\omega}$ 张成。

注 6.1。我们简要说明一下（6.2）中出现的指标移位（细节将在下面的证明中给出）。回忆由 $v_j^{(i)} \mapsto v_{j+1}^{(i+1)}$ 定义的映射 τ_1。左边的下标 $n\omega+1-j$ 和幂 $i-k\omega+j$ 的选取方式，使得映射 τ_1 在转换到 $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ 后诱导出恒等映射。我们还注意到，右边 t 的幂中的项 $-k\omega$ 保证了所诱导的映射 $\Lambda^{k\omega}(M^{(i)}) \to F$，其定义为

$$\mathrm{span}\{w_1,\dots,w_{k\omega}\} \mapsto w_1 \wedge \cdots \wedge w_{k\omega} \wedge |i-k\omega\rangle,$$

落在电荷 i 形式的子空间 $F^{(i)}$ 中。

现在定义映射 $\Psi^{(i)}$ 如下:

$$\Psi^{(i)}(U^{(i)}) = \psi^{(i)}U^{(i)} \oplus \mathrm{span}\{t^j : j \le i - k\omega\}. \tag{6.3}$$

下面的引理显然成立。

引理 6.2. 像 $\Psi^{(i)}\mathrm{Gr}_{k\omega}(M^{(i)})$ 属于 $\mathrm{SGr}^{(i)}$。

利用映射 $\Psi^{(i)}$，可得到嵌入

$$\Psi : X(k,n,\omega) \to \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{SGr}^{(i)}. \tag{6.4}$$

更准确地说，$\Psi(X(k,n,\omega))$ 位于乘积 $\prod_{i=0}^{n-1} \mathrm{SGr}^{(i)}$ 内。对于所有整数 i，我们通过显然的扩展规则 $M^{(i+n)} = M^{(i)}$，$\mathrm{Gr}_{k\omega}(M^{(i)}) = \mathrm{Gr}_{k\omega}(M_{(i+n)})$，考虑更大的乘积 $\prod_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{SGr}^{(i)}$。这给出了所需的实现（6.4）。

注 6.3. 考虑由 $\mathring{U}^{(i)} = \mathrm{span}\{v_j^{(i)}, (n-k)\omega + 1 \le j \le n\omega\}$ 定义的点 $\mathring{U} = (\mathring{U}_{(i)})_{i\in\mathbb{Z}}$。显然，$\mathring{U} \in X(k,n,\omega)$，且 $\Psi\mathring{U}$ 是穿过最高权向量乘积 $|i\rangle$ 的直线。

回顾第 5 节中的嵌入 $\mathcal{AF}_n \subset \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{SGr}^{(i)} \subset \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(F^{(i)})$。下文中，我们将仿射旗簇与其在佐藤格拉斯曼簇乘积中的像等同。

引理 6.4. Ψ 的像属于 $\mathcal{AF}_n$。

证明。设 $U = (U^{(i)})_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 $X(k,n,\omega)$ 中的一点（回顾一下，我们在 $M^{(i)} = M^{(i+n)}$ 内使用扩张 $U_{(i)} = U_{(i+n)}$）。我们需要证明

- $\Psi^{(i)}U^{(i)} \subset \Psi^{(i+1)}U^{(i+1)}$,
- $\Psi^{(i+n)}U^{(i+n)} = t^n\Psi^{(i)}U^{(i)}$.

根据定义,

$$\psi^{(i+n)} = t^n\psi^{(i)} \text{ and } \mathrm{span}\{t^j : j \le i + n - k\omega\} = t^n\mathrm{span}\{t^j : j \le i - k\omega\}.$$

因此，第二个性质 $\Psi^{(i+n)}U^{(i+n)} = t^n\Psi^{(i)}U_{(i)}$ 成立。

为了证明第一个性质，我们需要证明

$$\psi^{(i)}U^{(i)} \oplus \mathrm{span}\{t^j : j \le i - k\omega\} \subset \psi^{(i+1)}U^{(i+1)} \oplus \mathrm{span}\{t^j : j \le i + 1 - k\omega\}.$$

显然，只需证明

$$\psi^{(i)}U^{(i)} \subset \psi^{(i+1)}U^{(i+1)} \oplus \mathrm{span}\{t^j : j \le i + 1 - k\omega\}. \tag{6.5}$$

回忆一下，$\tau_1 U^{(i)} \subset U^{(i+1)}$，其中 $\tau_1 v_j^{(i)} = v_{j+1}^{(i+1)}$，除非 $j = n\omega$ 且 $\tau_1 v_{n\omega}^{(i)} = 0$。对于向量 $u = \sum_{j=1}^{n\omega} r_j v_{n\omega+1-j}^{(i)} \in U^{(i)}$，有:

$$\psi^{(i)}u = \sum_{j=1}^{n\omega} r_j t^{i-k\omega+j}, \qquad \psi^{(i+1)}(\tau_1 u) = \sum_{j=2}^{n\omega} r_j t^{i-k\omega+j}.$$

由于 $\tau_1 u \in U^{(i+1)}$，我们得到 (6.5)。 □

6.2. 像的描述。现在我们的目标是确定仿射旗簇中像$\Psi X(k,n,\omega)$。回顾（见定理 2.11 和 2.13），$X(k,n,\omega)$有 $\binom{n}{k}$ 个不可约分支 $X_I(k,n,\omega)$，这些分支由基数为 k 的子集 $I\subset[n]$标记。每个不可约分支都是胞腔 C_I 的闭包，其中包含唯一的环面不动点 p_I。胞腔 C_I 等于经过 p_I的 $\mathrm{Aut}_{\Delta_n}(U_{n\omega})$ 轨道。我们的目标有两个。首先，我们证明，将 $X(k,n,\omega)$嵌入仿射旗簇后，自同构群的作用转化为伊wahori 子群 $\mathfrak{B}$的作用。其次，我们计算环面不动点的像 Ψp_I，也就是说，找出满足$\Psi p_I=p_{w(I)}$的仿射魏尔群元素 $w(I)$。由此得到推论：嵌入 Ψ 将箭图格拉斯曼簇 $X(k,n,\omega)$实现为仿射旗簇 $\mathcal{AF}_n$内舒伯特簇 $X_{w(I)}$的并集。

引理 6.5. 点 p_I 由条件 $v_1^{(i)}\in p_I^{(i)}$ 对所有$i\in I$确定。

证明. 注意，由于对任意满足 $U=(U^{(i)})_{i\in\mathbb{Z}}$ 的点 $U\in X(k,n,\omega)$，都有 $\tau_1U^{(i)}\subset U_{(i+1)}$，因此条件 $v_1^{(i)}\in p_I^{(i)}$ 对于 $i\in I$ 意味着

$$p_I^{(i_0)}\ni v^{(i_0)}_{1+(i_0-i)+nr}\text{ for all } i\in I, i\le i_0 \text{ and } r=0,\dots,\omega-1,$$
$$p_I^{(i_0)}\ni v^{(i_0)}_{1+(i-i_0)+n(r+1)}\text{ for all } i\in I, i>i_0 \text{ and } r=0,\dots,\omega-1.$$

因此，对每一组 $i\in I$, $r=0,\dots,\omega-1$，我们都在$U_{(i_0)}$中得到一个基向量。由于 $|I|=k$且 $\dim U^{(i_0)}=k\omega$，我们得到所需结论。唯一需要说明的是，很容易看出，上述点 p_I 不属于任何其他环面不动点的 $\mathrm{Aut}_{\Delta_n}(U_{n\omega})$ 轨道闭包（这要归功于命题 2.10 中自同构群元素的显式形式）。因此，对任意 I，轨道 $\mathrm{Aut}_{\Delta_n}(U_{n\omega})p_I$ 的闭包都是一个不可约分支。□

注 6.6. 与点 p_I 对应的（ω-广义）杂耍模式 $(J_1,\dots,J_n)$ 为

$$\begin{aligned}J_{i_0}=&\{1+(i_0-i)+n(r-1),\ i\in I, i\le i_0, r\in[\omega]\}\\&\cup\{1+(i-i_0)+nr,\ i\in I, i>i_0, r\in[\omega]\}\end{aligned}$$

对所有 $i_0\in[n]$。

对于 $I\in\binom{[n]}{k}$，我们用 $w(I)\in W_n$ 表示满足 $\Psi p_I=p_{w(I)}$ 的魏尔群元素。

推论 6.7. 元素 $w(I)\in W_n$ 定义为

$$w(I):i\mapsto\begin{cases}i-k\omega, & i\notin I,\\ i-k\omega+n\omega, & i\in I\end{cases}$$

对所有 $i=1,\dots,n$。

证明。设 $p_I=(U_{(i)})^{i\in[n]}$。则有 $U^{(i)}=\mathrm{span}\{v_j^{(i)}:\ \ j\in R_i\}$对于某些子集 $R_i\subset[\omega n]$。我们注意到以下结论成立：

$$R_i=\begin{cases}\{a+1,\ a\in R_{i-1}\}, & i\notin I,\\ \{a+1,\ a\in R_{i-1}, a\ne\omega n\}\cup\{1\}, & i\in I.\end{cases}\tag{6.6}$$

现在设 $\Psi p_I = (\Psi p_I)_i$ $(i \in \mathbb{Z})$。那么每个空间 $(\Psi p_I)_i$ 都是由元素 t^a、 $a \in S_i$ 张成的向量空间，其中 $S_i \subset \mathbb{Z}$为一个子集。根据定义$w(I)(i) = S_i \setminus S_{i-1}$ （见注 5.2）。公式 (6.2) 和 (6.3) 表明

$$S_i = \{i - k\omega + n\omega + 1 - r, r \in R_i\} \cup \mathbb{Z}_{\leq i-k\omega}.$$

考虑等式 (6.6)，我们得到

$$S_i \setminus S_{i-1} = \begin{cases} i - k\omega, & i \notin I, \\ i - k\omega + n\omega, & i \in I \end{cases}.$$

□

注 6.8. 由于 $|I| = k$，因此有 $\sum_{i\in[n]}(w(I)(i) - i) = 0$。

设 $\mathfrak{B} \subset GL_n(\mathbb{C}[z])$ 为由满足如下条件的矩阵$\tilde{g}(z)$组成的伊wahori 子群：$\tilde{g}(0)$ 是下三角矩阵。

命题 6.9. 映射 Ψ将 $\mathrm{Aut}_{\Delta_n}(U_{n\omega})$ 在$_\sim X(k, n, \omega)$上的作用转化为其像上的 $\mathfrak{B}$ 作用。

证明. 回顾伊wahori群在仿射旗簇上的显式作用，该仿射旗簇嵌入佐藤格拉斯曼簇的乘积中。固定一个 n维空间 W，其基为 $w_1,\dots,w_n$。我们通过映射将空间$\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ 与 $W \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ 等同

$$\varphi : t^{(n-k)\omega - rn - s} \mapsto w_s \otimes z^r,\ r \in \mathbb{Z}, s = 0, \dots, n-1.$$

下面讨论映射 φ 的选取。回顾一下（见 (6.2)）映射$\psi^{(i)}$： $M^{(i)} \to \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, 它将 $v^{(i)}_{n\omega+1-j}$映射到 $t^{i-k\omega+j}$。映射 φ的选取使得复合映射 $\varphi\psi^{(0)}$：$M^{(0)} \to W \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ （见 (6.2)）由下式给出

$$\varphi\psi^{(0)} : v^{(0)}_{rn+s} \mapsto w_s \otimes z^r.$$

一般的复合映射 $\varphi\psi^{(i)}$： $M^{(i)} \to W \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ 为

$$\varphi\psi^{(i)} : v^{(i)}_{rn+s+i} \mapsto w_s \otimes z^r.$$

群 $GL_n(\mathbb{C}[z])$（因而也包括伊wahori 子群 $\mathfrak{B}$）在空间 $W \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ 上的自然作用，通过上述识别在 $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ 上诱导出作用。每个伊wahori群元素 $\tilde{g}(z)$ 都在$F^{(i)}$ 上诱导出线性自同态，并在嵌入到射影空间乘积$\mathbb{P}(F^{(i)}$ 中的 $\mathcal{AF}_n$ 上诱导出映射。

回忆一下（见命题 2.10），自同构群 $\mathrm{Aut}_{\Delta_n}(U_{n\omega})$ 的元素是映射的集合 $A_i \in \mathrm{End}(M^{(i)})$，满足

$$A_i = \begin{pmatrix} a^{(i)}_{1,1} & & & & \\ a^{(i)}_{2,1} & a^{(i-1)}_{1,1} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a^{(i)}_{n\omega-1,1} & a^{(i-1)}_{n\omega-2,1} & \dots & a^{(i-n\omega+2)}_{1,1} & \\ a^{(i)}_{n\omega,1} & a^{(i-1)}_{n\omega-1,1} & \dots & a^{(i-n\omega-2)}_{2,1} & a^{(i-n\omega+1)}_{1,1} \end{pmatrix}$$

写成基 $v^{(i)}_j$ 。

给定一组映射 $A = (A_i) \in \mathrm{Aut}_{\Delta_n}(U_{n\omega})$，我们构造一个伊wahori群元素 $\tilde{g}(z) \in GL_n(\mathbb{C}[z])$，使得 $\Psi A = \tilde{g}(z)$。回忆一下，映射 $\Psi : X(k,n,\omega) \to \mathcal{AF}_n$ 是由映射 (6.2) 诱导的。于是可以证明，下面的 $\tilde{g}(z)$ 正是所需的：

$$\begin{pmatrix} \sum_{l=0}^{\omega-1} z^l a^{(0)}_{1+nl,1} & z\sum_{l=0}^{\omega-1} z^l a^{(-1)}_{n+nl,1} & \cdots & z\sum_{l=0}^{\omega-1} z^l a^{(-n+1)}_{2+nl,1} \\ \sum_{l=0}^{\omega-1} z^l a^{(0)}_{2+nl,1} & \sum_{l=0}^{\omega-1} z^l a^{(-1)}_{1+nl,1} & \cdots & z\sum_{l=0}^{\omega-1} z^l a^{(-n+1)}_{3+nl,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \sum_{l=0}^{\omega-1} z^l a^{(0)}_{n-1+nl,1} & \sum_{l=0}^{\omega-1} z^l a^{(-1)}_{n-2+nl,1} & \cdots & z\sum_{l=0}^{\omega-1} z^l a^{(-n+1)}_{n+nl,1} \\ \sum_{l=0}^{\omega-1} z^l a^{(0)}_{n+nl,1} & \sum_{l=0}^{\omega-1} z^l a^{(-1)}_{n-1+nl,1} & \cdots & \sum_{l=0}^{\omega-1} z^l a^{(-n+1)}_{1+nl,1} \end{pmatrix}$$

□

推论6.10. 对每个 $I \in \binom{[n]}{k}$，都有等式

$$\Psi \mathrm{Aut}_{\Delta_n}(U_{n\omega}) p_I = \mathfrak{B} p_{w(I)}.$$

证明. 根据命题 6.9，如果用伊wahori群的GL_n 版本代替 $\mathfrak{B}$，所需等式便成立。然而，$\mathfrak{B} p_{w(I)}$ 与点 $p_{w(I)}$的 GL_n 伊wahori群轨道重合。□

注6.11. 上述推论断言，对于任意 $A \in \mathrm{Aut}_{\Delta_n}(U_{n\omega})$ 以及任意 $I \in \binom{[n]}{k}$，都存在一个元素 $g(z) \in \mathfrak{B}$，使得 $Ap_I = g(z)^{p_{w(I)}}$。我们注意到，$g(z)$ 确实依赖于 I；但若将 $\mathfrak{B}$ 扩展到 GL_n 对应的伊wahori 子群（如命题 6.9 中所做的那样），那么 $g(z)$ 就只依赖于A。

我们将上述讨论总结如下。

定理6.12。箭图格拉斯曼簇 $X(k,n,\omega)$ 同构于所有 $I \in \binom{[n]}{k}$ 对应的舒伯特簇 $X_{w(I)} \subset \mathcal{AF}_n$ 的并。

例6.13。我们以一个关于 $n = 2$ 的例子结束本节。我们感兴趣的箭图格拉斯曼簇具有如下形式：$X(1,2,\omega)$。魏尔群 W_2 由 s_0 和 s_1 生成；W_2 的元素具有 $s_1 s_0 s_1 \ldots$ 和 $s_0 s_1 s_0 \ldots$ 的形式。特别地，对于每个 $\omega > 0$，恰好存在两个长度为 ω 的元素 $\sigma_1(\omega)$ $\sigma_2(\omega) \in W_2$。箭图格拉斯曼簇 $X(1,2,\omega)$ 在仿射旗簇 $\mathcal{AF}_2$ 中的像等于舒伯特簇 $X_{\sigma_1(\omega)} \cup X_{\sigma_2(\omega)}$ 的并。

致谢。M.L感谢PRIN2017 CUP E8419000480006，以及由MUR资助、于2023年—2027年期间面向罗马第二大学数学系的“卓越系”MatMod@TOV项目。

Appendix A. Flatness: an example

考虑 $\mathbb{P}^2 = \mathrm{Gr}(1,3)$ 退化为箭图格拉斯曼量 $X(1,3) = X(1,3,1)$ 的情形。[FLP22] 中声称，这种退化不是平坦的。更确切地说，原文声称，$X(1,3)$ 的齐次坐标环的次数 $(1,1,1)$ 分量的维数大于 10（而 $\mathrm{Gr}(1,3)$ 的齐次坐标环的三次分量的维数为 10）。

然而，该论证存在错误（我们指出，根据 [G01]，任意 Gr(k,n) 退化为 $X(k,n)$ 都是平坦的）。下面我们将纠正这一错误。

代数簇 $X(1,3)$ 位于 $\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$ 内。相应的齐次坐标环是三重分次的。我们将 i 个 $\mathbb{P}^2$ 中的齐次坐标记为 $x_i,y_i,z_i(i=1,2,3)$。特别地，坐标环的次数为 (1, 1, 1) 的齐次分量包含在变量为 $x_\bullet,y_\bullet,z_\bullet$ 的多项式环中；它由对每组变量 $x_i,y_i,z_i(i=1,2,3)$ 都是线性的多项式构成。

回顾一下，$X(1,3)$ 有三个不可约分支；这些不可约分支中的开胞腔具有如下形式

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\a_1&1&0\\b_1&a_1&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&1&0\\0&a_2&1\\1&b_2&a_2\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&a_3\\a_3&1&b_3\end{pmatrix}.$$

这里，第 j 个矩阵对应于第 j 个不可约分支（$j=1,2,3$）；对于 $i=1,2,3$，第 i 个矩阵的第 j 列给出了第 j 个不可约分支的开胞腔中各点的齐次坐标 x_i,y_i,z_i（注意，$a_\bullet$ 和 $b_\bullet$ 是自由参数）。

格拉斯曼簇 Gr(1, 3) 的坐标环的三次齐次分量的维数为十。因此，我们需要证明格拉斯曼簇 $X(1,3)$ 的坐标环的次数 (1, 1, 1) 齐次分量的维数也等于 10。我们断言，以下十个单项式构成次数 (1, 1, 1) 分量的一组基：

$$\begin{gathered}y_1y_2z_3=(a_1,0,0),\quad y_1z_2y_3=(0,0,a_3),\quad y_1z_2z_3=(a_1^2,0,b_3),\\z_1y_2y_3=(0,a_2,0),\quad z_1y_2z_3=(b_1,a_2a_3,0),\quad z_1z_2y_3=(0,b_2,a_1a_3),\\z_1z_2z_3=(b_1a_2,b_2a_3,b_3a_1),\\x_1y_2z_3=(1,0,0),\quad x_1y_3z_3=(0,1,0),\quad y_1z_2x_3=(0,0,1).\end{gathered}$$

这里，每个等式右边的值是相应单项式在三个开胞腔上的取值。上述单项式显然线性无关。所有其他次数 (1, 1, 1) 单项式的取值要么为零，要么与上述某个单项式的取值相同。例如，$x_1x_2z_3=0$ 和$x_1z_2z_3=(a_1,0,0)=y_1y_2z_3$。

References

[BB73] A. Bialynicki-Birula, *Some theorems on actions of algebraic groups*, 《数学年刊》第二辑，98（1973），第3期，480–497。[CR08] P. Caldero 和 M. Reineke, *On the quiver Grassmannian in the acyclic case*, 《纯粹与应用代数杂志》，第212卷（2008），第11期，2369–2380。[CI11] G. Cerulli Irelli, *Quiver Grassmannians associated with string modules*, 《代数组合学杂志》，33（2011），259–276。[CI20] G. Cerulli Irelli, *Three lectures on quiver Grassmannians* 载于《表示论及其他》，《当代数学》758，Jan ˇSt'ovíˇcek、Jan Trlifaj 编，美国数学学会，2020，57–88。[CFR 12] G. Cerulli Irelli、E. Feigin、M. Reineke, *Quiver Grassmannians and degenerate flag varieties*, 《代数与数论》, **6** (2012), no. 1, 165–194。[CFR 13] G. Cerulli Irelli、E. Feigin、M. Reineke, *Desingularisation of quiver Grassmannians for Dynkin quivers*, 《高等数学》, **245** (2013), 182–207。

[CFFFR 17] *Linear degener-* G. Cerulli
ations of flag varieties **287** 2017 1, 615 654
Irelli、X. Fang、E. Feigin、G. Fourier、M. Reineke, , 《数学杂志》, （）, 第–期。[CL15] G.
Cerulli Irelli、M. Lanini, *Degenerate flag varieties of type A and C are Schubert*
varieties Int. Math. Res. Not. 2015 15, 6353 6374 , （）, 第–期。[F
12] E. Feigin, $\mathbb{G}_a^M$ *degeneration of flag varieties*, 《Selecta Mathematica》18:3（2012）, 513–537。[
FF13] E. Feigin、M. Finkelberg, *Degenerate flag varieties of type A: Frobenius splitting*
and BW theorem **275** 2013 1 2, 55 77 , 《数学杂志》,
（）, 第–期, –。[FFR
17] *Degenerate affine Grassmannians and loop* E. Feigin、M.
quivers **57** 2017 2, 445 474
Finkelberg、M. Reineke, , 《京都数学杂志》, 第（）, 第–期。[FLP
22] ¨ *Totally nonnegative Grassmannians Grass-* E. Feigin、M.
mann necklaces and quiver Grassmannians 2022
Lanini、A. Putz, , 《加拿大数学杂志》（）。https://doi.org/
10 4153 0008414 22000232 。/S X GKM M. Goresky、R. Kottwitz、R.
[98]
MacPherson, *Equivariant cohomology Koszul du-* , , ,
ality and the localization theorem **131** 1998 25 83
《数学发明》, （）, –。[G01] U. G¨ortz,
On the flatness of models of certain Shimura varieties of PEL-type, 《数学年刊》321（2001）, 689–
727。[G03] U. G¨ortz, *On the flatness of local models for the symplectic group*, 《高等数学》176（
2003）, 第1期, 89–115。[HG02] T. Haines、B.C. Ngˆo,
Nearby cycles for local models of some Shimura varieties, 《Compositio Mathematica》133（2002）,
第2期, 117–150。[Kn08] A. Knutson, *The cyclic Bruhat decomposition of* $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$
from the affine Bruhatdecomposition of $AFlag_k^\circ$, Bert Kostant 80岁生日会议报告（2008）,
http://pi.math.cornell.edu/∼allenk/positroid.pdf [KLS13] A. Knutson、T. Lam、D.E. Speyer,
Positroid varieties: juggling and geometry, 《Compositio Mathematica》, 149(10):1710–1752,
2013。[KS14] B. Keller、S. Scherotzke, *Desingularisations of quiver Grassmannians via graded*
quiver varieties 256 2014 318 347 , 《高等数学》（）–。
[Kum02] S. Kumar, 《Kac–Moody群、其旗簇与表示论》。数学进展，第204卷（Birkh¨auser，波士顿，
2002年）[Lam16] T. Lam, *Totally nonnegative Grassmannian and Grassmann polytopes*, 《数学当前
发展》2014，51–152，Int. Press，马萨诸塞州萨默维尔，2016年。[LP20] M. Lanini、A. P
¨ *GKM-Theory for Torus Actions on Cyclic Quiver Grassman-* utz, ,
nians 2008 13138
http://arxiv.org/abs/。。[LP23] M. Lanini、A. P
¨ *Permutation actions on Quiver Grassmannians for the* utz, 《代数组合学
equioriented cycle via GKM-Theory 2023
杂志》（）。https://doi.org/ 10 1007 10801 022 01211 5 。/s - - - Lus G.
[94] *Total positivity in reductive groups*
Lusztig, , 《李理论与几何》, 531–568, 《数学进展》123，Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，
1994年。[Lus98a] G. Lusztig, *Total positivity in partial flag manifolds*, 《表示论》2（1998）70–78。
[Lus98b] G. Lusztig, *Introduction to total positivity*, 载于《李理论中的正性：开放问题》, J. Hilgert
等编，de Gruyter，1998，133–145。[P18] G. Pappas, *Arithmetic models for Shimura varieties*, 《国
际数学家大会——2018年里约热内卢》。第二卷。特邀报告，377–398，World Sci. Publ.，新泽西州哈肯
萨克，2018年。[PRS13] G. Pappas、M. Rapoport、B. Smithling, *Local models of Shimura varieties*,
I. 几何与组合学, 《模空间手册》第III卷, 《高等数学讲义》（ALM）, 第26卷，Int. Press，马萨诸塞州
萨默维尔，2013年，第135–217页。[PZ13] G. Pappas、X. Zhu,
Local models of Shimura varieties and a conjecture of Kottwitz, 《数学发明》194（2013）, 第1期,
147–254。[PZ22] G. Pappas、I. Zachos, *Regular integral models for Shimura varieties of orthogonal*
type 158 2022 4, 831 867 , 《Compositio
Mathematica》（）, 第–期。[Pos06] A. Postnikov, *Total positivity, Grassmannians, and networks*,
预印本，http://math.mit.edu/~apost/papers/tpgrass.pdf，2006年。[Pue19] A. P¨utz,
Degenerate Affine Flag Varieties and Quiver Grassmannians, 论文，波鸿鲁尔大学（2019年）。
https://doi.org/10.13154/294-6576

[Pue22] A. P¨utz, *Degenerate Affine Flag Varieties and Quiver Grassmannians*, 《代数表示论》, 25（2022年）, 91–119。[PR23] A. P
¨ *Desingularizations of Quiver Grassmannians for the Equior-* utz,
iented Cycle
M. Reineke, [Re13] M. Reineke, *Every projective variety is a quiver Grassmannian*,
《代数与表示论》16（2013年）, 1313–1314。[Rie99] K. Rietsch,
An algebraic cell decomposition of the nonnegative part of a flag variety 213 1999 1, 144 154 ,

《代数杂志》（）, 第 – 期。[S17] S. Scherotzke,
Desingularisation of quiver Grassmannians via Nakajima categories, 《代数与表示论》20, 231–243（2017年）。[Sch14] R. Schiffler, *Quiver Representations*, 《数学中的CMS丛书》, Springer-Verlag, 瑞士沙姆, 2014年。[Scho92] A. Schofield,
General representations of quivers, 《伦敦数学学会会刊》（第3辑）65（1992年）, 第1期, 46–64。[W05] L. Williams, *Enumeration of totally positive Grassmann cells*,
《数学进展》190（2005年）, 第2期, 319–342。
E. Feigin:HSE University,
Faculty of Mathematics, Usacheva 6, Moscow 119048, Russia
Faculty of Mathematics and Computer Science,
Weizmann Institute of Sci-ence, POB 26, Rehovot 76100, Israel
Email address: evgfeig@gmail.comM. Lanini:Dipartimento di Matematica,
Università di Roma "Tor Vergata", Via dellaRicerca Scientifica 1,
I-00133 Rome, Italy*Email address*: lanini@mat.uniroma2.itA. Pütz:
Faculty of Mathematics, Ruhr-University Bochum,
Universitätsstrasse 150, 44780 Bochum, Germany*Email address*:
alexander.puetz@ruhr-uni-bochum.de