arXiv:2302.00309v1 [math.NT] 1 Feb 2023

模 p^m 奇异 Siegel 模形式的结构定理

Siegfried B¨ocherer 和 Toshiyuki Kikuta

2023年2月2日

2020年数学学科分类：主要分类 11F33 · 次要分类 11F46 关键词：Siegel 模形式、模形式同余、傅里叶系数、模 p^m 奇异。

摘要

我们证明，所有级为 N、次数为 $n+r$、 p-秩为 r 且具有 $n \geq r$ 的模 p^m 奇异形式，都模 p^m 同余于若干个与某个级的二次型相联系的次数为 r 的 θ 级数的线性组合。此外，我们证明，θ 级数的级具有“p-幂 $\times N$”的形式。另外，在某些具有最小可能权的模 p 奇异形式的情形下，我们证明 θ 级数的级应为 p。

1 引言

Freitag [10] 证明了关于奇异（Siegel 模）形式的以下性质。

- 权为 k 、次数为 n 的 Siegel 模形式是奇异形式，当且仅当$k < n/2$。
- 奇异秩为 r 的奇异形式，其权 k 应为 $k = r/2$。
- 所有奇异秩为 r 的奇异模形式，都是附属于矩阵大小为 r的二次型的 θ 级数的线性组合。

这里还应提及，Resnikoff [21]以及晚得多的 Shimura [24] 曾研究更一般管域上的奇异模形式。

在 [4], 中，作者定义了模 p^m 奇异形式的概念，并证明权 k 与模 p 奇异秩 r （我们称之为 p-秩）之间满足一个同余关系。更确切地说，我们证明了 $2k - r \equiv 0$ 模 $(p-1)p^{m-1}$。这可以视为 Freitag 关于权的结果的模 p^m 类比。我们还在同一篇论文中提到，可以从任意真正的奇异模形式以及一些 1 级 Siegel-Eisenstein 级数构造出一些例子。

Nagaoka [18] 和 Katsurada-Nagaoka [14], 的研究提供了另一类例子。他们研究了 Siegel-Eisenstein 级数的 p-进极限，并证明在某些情况下，这些极限等于某些具有奇异秩的属 theta 级数。特别是，他们研究的某些 Siegel-Eisenstein 级数与奇异 theta 级数的线性组合同余，也就是说，它们是真正的奇异形式。我们的猜想是，所有模 p^m 奇异形式都模 p^m 同余于具有某个级的真正奇异形式，即具有奇异权（$< \frac{n}{2}$）和某个级的 theta 级数的线性组合。

本文主要讨论这一猜想，并在许多情形下证明它，尤其是对于“强”模 p^m 奇异形式。更准确地说，我们证明了以下性质。

- 所有级为 N、次数为 $n+r$、p-秩为 r 且满足 $n \geq r$ 的模 p^m 奇异形式，模 p^m 同余于附属于某个级的二次型的次数为 r 的 θ 级数的线性组合（定理 3.2 (1)）。
- 我们证明，θ 级数的级具有如下形式： $p^e N$ ，其中某个$e \in \mathbb{N}$ （定理 3.2 (2)）。
- 在某种意义下权取最小可能值的情形中，θ 级数的级应为 p；对于秩为 2 的模 p 奇异形式，这一点已得到证明（定理 3.6）。

当然，我们的结果可以看作 Freitag 结果的同余版本。然而，模 p 的情形存在许多新的困难。例如，若一个二次型 S 的次数为 n 的 θ 级数模 p 同余于一个一级模形式，那么这并不能确定 S 的级。这是与 $\mathbb{C}$ 上的情形的主要区别之一。我们可以利用 θ 级数的滤过（权）作为一种替代，但其性质相当弱。作为新的工具，我们使用强形式的 q-展开原理，以及 Kitaoka θ 级数变换公式的次数为 n 的版本。这些内容将在本文的附录中证明，也可能具有独立的研究价值。

我们说明一下，我们选择只考虑群 $\Gamma_0(N)$ 上具有二次 nebentypus 特征的模形式。这使我们能够考虑模有理素数的同余（而非模适当代数数域中的素理想的同余）；此外，我们也希望避免处理关于具有非二次 Nebentypus 特征的 Siegel 模形式同余的一些微妙问题。相反，我们在本文正文末尾说明，如何将我们的一些结果推广到任意 m 的 mod p^m 奇异形式情形。

本文组织如下。第 2 节中，我们规定记号和定义，并回顾已知事实。第 3 节中，我们阐述本文的猜想和主要结果。第 4 节中，我们给出一个主要工具：任意模形式的秩 r 部分的傅里叶展开，以及其对于 p 次秩的模 p^m 奇异形式的表述。随后在第 5 节中，我们专注于模 p 情形。首先，我们为模 p 奇异形式给出一种 Sturm 界，并利用它证明每个强模 p 奇异模形式都可以表示为某些二次型的 θ 级数的线性组合

。第 6 节中，我们尝试确定这些二次型的级。我们还讨论具有 p 秩 2 且其权为可能的最小值的模 p 奇异形式。第 7 节中，我们通过对 m 进行归纳法，将第 5 节和第 6 节中证明的模 p 情形的结果（确切地说，是关于一般强模 p 奇异形式的结果）推广到模 p^m 情形。第 8 节和第 9 节为附录：我们给出第 6 节确定级时所需的两个工具，即 q 展开原理的一个修正版，以及 Kitaoka 变换公式关于 θ 级数的次数 n 推广。

2 预备知识

2.1 Siegel 模形式

令 $\mathbb{H}_n$ 为次数为 n的 Siegel 上半空间。我们令

$$\mathrm{GSp}_n^+(\mathbb{R}) := \{g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid {}^t g J_n g = n(g) J_n \text{ for some } n(g) > 0\},$$

其中 $J_n := \left(\begin{smallmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{smallmatrix}\right)$。我们定义 $\mathrm{GSp}_n^+(\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{H}_n$ 上的作用为 $gZ = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$，其中 $Z \in \mathbb{H}_n$, $g \in \mathrm{GSp}_n^+(\mathbb{R})$。对于全纯函数 $F\colon \mathbb{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$和矩阵 $g = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GSp}_n^+(\mathbb{R})$，我们按通常方式定义斜杠算子；

$$(F|_k\, g)(Z) := n(g)^{\frac{nk}{2}} \det(CZ + D)^{-k} F(gZ).$$

令 N为自然数，且 $\Gamma_n := \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ 为 Siegel 模群（分量属于 $\mathbb{Z}$的辛群）。本文主要讨论 Γ_n 的级为 N 的同余子群 $\Gamma_0^{(n)}(N)$，其定义如下：

$$\Gamma_0^{(n)}(N) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \,\middle|\, C \equiv 0_n \bmod N \right\}.$$

我们还将使用以下群

$$\Gamma_1^{(n)}(N) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \,\middle|\, C \equiv 0_n \bmod N,\ \det A \equiv \det D \equiv 1 \bmod N \right\},$$

$$\Gamma^{(n)}(N) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \,\middle|\, B \equiv C \equiv 0_n \bmod N,\ A \equiv D \equiv 1_n \bmod N \right\},$$

其中 $\Gamma^{(n)}(N)$ 是所谓的 N 级主同余子群。我们注意到

$$\Gamma^{(n)}(N) \subset \Gamma_1^{(n)}(N) \subset \Gamma_0^{(n)}(N) \subset \Gamma_n.$$

对于自然数 k 和狄利克雷特征 χ：$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$，权为 k 且具有特征 χ 的 Siegel 模形式空间 $M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$ 由所有满足以下条件的全纯函数 $F\colon \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ 组成

$$(F|_k\, g)(Z) = \chi(\det D) F(Z) \quad \text{for} \quad g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0^{(n)}(N).$$

如果 $n=1$，则还应加入尖点处的通常条件。当 χ 为平凡特征时，我们将 $M_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi)$ 简写为 $M_k(\Gamma_0^{(n)}(N))$。

令 $\Gamma \supset \Gamma^{(n)}(N)$。与上文类似，我们用 $M_k(\Gamma)$ 表示由所有满足以下条件的全纯函数 $F\colon \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ 组成的空间

$$(F|_k\, g)(Z) = F(Z) \quad \text{for} \quad g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

在这种情况下，我们还必须像通常那样，在尖点处添加条件，当 $n=1$ 时。

对于素数 p，令 Γ 为 $\Gamma_0^{(n)}(p^m)\cap\Gamma^{(n)}(N)$ 或 $\Gamma_0^{(n)}(p^m)\cap\Gamma_1^{(n)}(N)$，并令 χ 为模 p 的狄利克雷特征。本文有时也会对这类 Γ 使用符号 $M_k(\Gamma,\chi)$ 和 $M_k(\Gamma)$，但其定义与上文相同。

注意，对于任意模 N 的狄利克雷特征 χ，我们有

$$M_k(\Gamma^{(n)}(N)) \supset M_k(\Gamma_1^{(n)}(N)) \supset M_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi).$$

当 $F \in M_k(\Gamma)$ 且 $\Gamma \supset \Gamma^{(n)}(N)$ 时，N 称为 F 的“级”。有时，Γ 本身也称为 F 的级。

任意的 $F \in M_k(\Gamma^{(n)}(N))$ 都有如下形式的傅里叶展开

$$F(Z) = \sum_{0\le T\in \frac{1}{N}\Lambda_n} a_F(T)\boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(TZ)), \quad Z\in\mathbb{H}_n,$$

其中 $\boldsymbol{e}(x) := e^{2\pi i x}$，

$$\Lambda_n := \{T=(t_{ij})\in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{Q}) \mid t_{ii},\ 2t_{ij}\in\mathbb{Z}\},$$

且 $\mathrm{Sym}_n(R)$ 是由分量属于 R 的 n 阶对称矩阵构成的集合。特别地，若 $F\in M_k(\Gamma_1^{(n)}(N))$，则 F 的傅里叶展开具有如下形式

$$F(Z) = \sum_{0\le T\in\Lambda_n} a_F(T)\boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(TZ)).$$

众所周知，

$$M_k(\Gamma_1^{(n)}(N)) = \bigoplus_{\chi:(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times\to\mathbb{C}^\times} M_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi),$$

其中 χ N $F\in$ 遍历模 的所有狄利克雷特征。我们指出，若 $M_k\ \Gamma_0^{(n)}\ N\ \chi$ ，则有

$$a_F(T[U]) = (\det U)^k \chi(\det U) a_F(T)$$

对每个 $T\in\Lambda_n$ 和 $U\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$。这里我们将其记作 $T[U] := {}^tUTU$。特别地，若 $\chi(-1)=(-1)^k$，则对每个 $T\in\Lambda_n$ 和 $U\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$，有 $a_F(T[U])=a_F(T)$。

设 Φ 为 Siegel Φ-算子，其定义如下:

$$\Phi(F)(Z') := \lim_{t\to\infty} F\begin{pmatrix} Z' & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix},$$

其中 $F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N)\ \chi)$、 $Z' \in \mathbb{H}_{n-1}$ 和 $t \in \mathbb{R}$。众所周知，我们有$\Phi(F) \in M_k(\Gamma_0^{(n-1)}(N)\ \chi)$，而 $\Phi(F)$ 的傅里叶展开可表示为

$$\Phi(F)(Z') = \sum_{0\le T\in\Lambda_{n-1}} a_F\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(TZ')).$$

假设 $F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N)\ \chi)$ 满足 $\Phi(F) \neq 0$(接着 $F \neq 0$)。取$g \in \Gamma_0^{(n)}(N)$ 为 $g = \left(\begin{smallmatrix} -1_n & 0_n \\ 0_n & -1_n \end{smallmatrix}\right)$，由 F 的变换律可得 $F|_k g = (-1)^{nk}F = \chi(-1)^n F$。因此，我们有 $\chi(-1)^n = (-1)^{nk}$。另一方面，根据 $\Phi(F) \neq 0$ 的相同性质，可得 $\chi(-1)^{n-1} = (-1)^{(n-1)k}$。这说明 $\chi(-1) = (-1)^k$。在这种情况下（ $\Phi(F) \neq 0$），对于每个 $T \in \Lambda_n$ 和 $U \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$，我们自动有$a_F(T[U]) = a_F(T)$。

对于 $\mathbb{C}$ 的子环 R，令 $M_k(\Gamma,\chi)_R$ （分别地， $M_k(\Gamma)_R$）表示 $M_k(\Gamma,\chi)$（分别地， $M_k(\Gamma)$）中所有傅里叶系数属于 R 的模形式所构成的 R-模。

2.2 模形式的同余

令 p 为一个素数， $\mathbb{Z}_{(p)}$ 为 p-整有理数的集合。令 F_i $(i = 1, 2)$ 为两个形如以下形式的形式幂级数

$$F_i = \sum_{T\in\frac{1}{N}\Lambda_n} a_{F_i}(T)\boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(TZ))$$

其中对所有 $T \in \frac{1}{N}\Lambda_n$，均有 $a_{F_i}(T) \in \mathbb{Z}_{(p)}$。若对所有 $T \in \frac{1}{N}\Lambda_n$，均有 $F_1 \equiv F_2 \bmod p^m$，当且仅当 $a_{F_1}(T) \equiv a_{F_2}(T) \bmod p^m$，我们记作 $F_1 \equiv F_2 \bmod p^m$。

令 $\widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N)\ \chi)_{p^m}$ 为满足 $F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N)\ \chi)^{\mathbb{Z}_{(p)}}$ 的 $\widetilde{F} = \sum_T \widetilde{a_F\ T}(\ )\boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(TZ))$ 的集合，其中 $\widetilde{a_F\ T}(\ ) := a_F(T) \bmod p^m$。若 $m = 1$，则我们简记 $\widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N)\ \chi)_{p^m}$ 为 $\widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N)\ \chi)$。注意， $\widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N)\ \chi)$ 是一个在 $\mathbb{F}_p$ 上的向量空间。

我们将滤过权定义为

$$\omega^n_{N,\chi,p^m}(F) := \min\{k \mid \widetilde{F} \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi)_{p^m}\}.$$

我们也记作 $\omega^n_{N,\ \chi}(F) := \omega^n_{N,\ \chi,\ p}(F)$。

定义 2.1。设 $F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N)\ \chi)^{\mathbb{Z}_{(p)}}$。如果 F是“模 p^m奇异的”，则称其为

- 对于任意满足秩$(T) > r$的 $T \in \Lambda_{n+r}$，我们有 $a_F(T) \equiv 0$模 p^m，

• 存在 $T \in \Lambda_{n+r}$，其秩$(T) = r$满足 $a_F(T) \not\equiv 0$模 p。

我们将这样的 r 称为 F的“p-秩”。此外，如果 $n \geq r$，我们称这样的 F为“强模 p^m 奇异”。

注 2.2. (1) 这种“强奇异”条件在 Freitag 的著作 *[10]* 中，对于 $\mathbb{C}$ 上任意同余子群的理论也起着至关重要的作用。(2) 若 F 模 p^m 非平凡奇异，则 F 满足 $\Phi(F) \neq 0$。这意味着，对每个 $T \in \Lambda_n$和 $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$，都有 $\chi(-1) = (-1)^k$以及 $a_F(T[U]) = a_F(T)$（见第 4 页）。换言之，在处理模 p^m 非平凡奇异模形式时，我们可以假设 $\chi(-1) = (-1)^k$。

定理 2.3（B¨ocherer-Kikuta [4]）。设 n、 r、 k、 N 为正整数， p 为满足 $p \geq 5$ 的素数。设 χ 为模 N 的二次狄利克雷特征，且 $\chi(-1) = (-1)^k$。假设 $F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)^{\mathbb{Z}_{(p)}}$是模 p^m 的 p-秩奇异模形式。则有 $2k - r \equiv 0$ 模 $(p-1)p^{m-1}$。特别地， r 应为偶数。

Serre [23]的一个经典结果表明，对于一级的两个椭圆模形式 f和 g，若它们模 p 同余，则其权模 $p-1$同余。我们需要一个适用于次数 n、包含各级和二次 Nebentypus 的版本：

命题 2.4. 设 p 为满足 $p \geq 5$ 的素数， N 为满足 $p \nmid N$的正整数。设 χ 和 χ' 是模 p 和 $F \in M_k$的两个二次狄利克雷特征（$\Gamma_0^{(n)}(p^m) \cap \Gamma_1^{(n)}(N), \chi$）， $F' \in M_{k'}(\Gamma_0^{(n)}(p^m) \cap \Gamma_1^{(n)}(N), \chi')$ 是满足 $F \equiv F'$ 模 p 的两个模形式。那么，对某个 $t \in \mathbb{Z}$，有 $k - k' = t \cdot \frac{p-1}{2}$成立，并且我们有

$$\chi = \chi' \iff t \quad even.$$

证明。我们希望应用 B¨ocherer-Nagaoka [5] 的结果，得到所需的权同余。注意，在 [5] 中，只讨论了级为 $\Gamma_1^{(n)}(N)$且 N与 p互素的情形。我们可以对 F和 F'进行层级变换，从而得到级为 $\Gamma_1^{(n)}(N)$的 G和G'，满足 $F \equiv G$模 p同余以及 $G' \equiv F'$模 p同余，权分别为 l和 l'。

若 $\chi = \chi'$，则有 $k \equiv l$模 $p-1$且 $k' \equiv l'$模 $p-1$，于是根据 [5] $k \equiv k'$模 $p-1$，即 t为偶数。

若 $\chi \neq \chi'$，不妨假设 χ是非平凡的。则$l \equiv k + \frac{p-1}{2}$模 $p-1$，而同余 $l \equiv l'$ 模 $p-1$ 意味着 t必为奇数。证明至此完成。 □

为了高效地表述我们的结果，我们引入以下（略显非标准的）定义。

定义 2.5. 假设对于某个 $t \in \mathbb{Z}$， $k - k' = t \cdot \frac{p-1}{2}$成立。对于素数$p$ 以及与 p 互素的自然数 N，令 χ 和 χ' 为模 pN的两个二次狄利克雷特征。记

$$\chi =' \chi'$$

若 $\chi_N = \chi'_N$，且 χ_p 和 χ'_p 如命题 2.4 中所述相关；即

$$\chi_p = \chi'_p \iff t \quad even.$$

这里， χ_N 和 χ_p 分别是 χ 的 N分量和 p分量（ χ'也同理）。换言之，我们有

$$\chi =' \chi' \iff \chi = \chi' \left(\frac{*}{p}\right)^t,$$

其中 $(\frac{*}{p})$ 是模 p 的唯一非平凡二次特征。

注意，这种记号取决于 k、 k' ，但上下文总会清楚地表明涉及哪些权。

2.3 二次型的 θ 级数

设 m 为正整数。对于 S、 $T \in \Lambda_m$，若存在 $U \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$ 使得 $S[U] = T$，则记 $S \sim T \bmod \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$。这里令 $S[U] :=\, {}^tUSU$。若 $S \sim T \bmod \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$，则称 S 和 T “$\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$-等价”。我们用 Λ_m^+ 表示 Λ_m 中所有正定元素的集合。令 $L :=\Lambda_m$ ，或 Λ_m^+。对于 $L/\sim$ ，我们将 L 中 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$-不等价类的代表元集合记为 $L/\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$。

设 m 为偶数。对于 $S \in \Lambda_m^+$，我们按通常方式定义次数为 n 的 θ 级数:

$$\theta_S^{(n)}(Z) := \sum_{X \in \mathbb{Z}^{m,n}} \boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(S[X]Z)) \quad (Z \in \mathbb{H}_n),$$

其中 $\mathbb{Z}^{m,\,n}$ 是由公因子为整数分量的 $m \times n$ 矩阵组成的集合，且 $S[X] := {}^tXSX$，并记 $\boldsymbol{e}(x) := e^{2\pi i x}$。我们将 S 的级定义为

$$\mathrm{level}(S) := \min\{N \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid N(2S)^{-1} \in 2\Lambda_m\}.$$

于是 $\theta_S^{(n)}$ 定义了 $M_{\frac{m}{2}}(\Gamma_0^{(n)}(N),\ \chi_S)$ 的一个元素，其中 N =级(S)， χ_S 是模 N 的狄利克雷特征，定义为

$$\chi_S(d) = \mathrm{sign}(d)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \det 2S}{|d|}\right).$$

我们用 $\mathrm{cont}(S)$ 表示 S 的公因子，定义为

$$\mathrm{cont}(S) := \max\{C \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid C^{-1}S \in \Lambda_n\}.$$

对于固定的 $S \in \Lambda_m^+$ 和 $T \in \Lambda_n$，我们设

$$A(S,T) := \sharp\{X \in \mathbb{Z}^{m,n} \mid S[X] = T\}.$$

使用此记号，我们可以将 θ 级数的傅里叶展开写成如下形式

$$\theta_S^{(n)}(Z) = \sum_{T \in \Lambda_n} A(S,T)\boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(TZ)).$$

在上述定义中， S和 T仅限于对称半整数矩阵，但相同的符号（如 $\theta_S^{(n)}(Z)$ 和 $A(S,T)$）也用于表示具有有理数分量的对称矩阵。于是， $A(S,S)$ 是 S的自同构群的阶；

$$A(S,S) = \sharp\{U \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}) \mid S[U] = S\}.$$

通过考察最小多项式可知，若 $p > m+1$，则 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$ 不可能包含阶为 p 的元素。由此我们得到一个非常有用的结论：

$$A(S,S) \not\equiv 0 \bmod p \quad \text{if} \quad p > m+1 \tag{2.1}$$

对于任意大小为 m 的有理正定对称矩阵 S。

为便于后续使用，我们介绍一些关于二元二次型表示数的结果：

定理 2.6（狄利克雷、韦伯（参见 Kani [13]，引理 8，第 4 页））。设 $T, T_i \in \Lambda_2 (i = 1, 2)$ 为本原型，即 $\mathrm{cont}(T) = \mathrm{cont}(T_i) = 1$。假设 T_1 和 T_2 具有相同的判别式 $D < 0$。那么有以下结论。

(1) 存在无穷多个素数 l，使得 $A(T,l) > 0$。(2) 若存在一个素数 l，满足 $l \nmid D$，使得 $A(T_1,l) > 0$ 且 $A(T_2,l) > 0$，则 $T_1 \sim T_2 \bmod \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$。

定理 2.7（B¨ocherer-Nagaoka [7]）。设 $S \in \Lambda_2^+$的级为 p。设 n 为正整数。则存在 $F \in M_{\frac{p+1}{2}}(\Gamma_n)^{\mathbb{Z}_{(p)}}$ 使得 $F \equiv \theta_S^{(n)}$ 模 p。

对于二次型 $S \in \Lambda_m^+$，记 $\omega_{N,\chi,p^m}^n(S) := \omega_{N,\chi,p^m}^n(\theta_S^{(n)})$，$\omega_{N,\chi}^n(S) := \omega_{N,\chi,p}^n(\theta_S^{(n)})$。

3 猜想与结果

我们首先在不指定权和级的最一般情形下陈述我们的猜想。

猜想 3.1。任意模 p^m 奇异形式都同余于某个真正的奇异形式，模 p^m。

我们的第一个结果表明，在强模 p^m 奇异情形下，该猜想成立（如果 p不太小）。

定理 3.2. 设 n、k、N 为正整数，r 为偶整数，且满足 $n \geq r$。设 p 为素数，且满足 $p > r+1$；χ 为模 N 的二次狄利克雷特征，满足 $\chi(-1) = (-1)^k$。假设 $F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)^{\mathbb{Z}_{(p)}}$ 是模 p^m 的奇异 Siegel 模形式，秩为 pr。那么有以下结论。

(1) 满足下式的 $S \in \Lambda_r^+$ 只有有限多个

$$F \equiv \sum_S c_S \theta_S^{(n+r)} \bmod p^m \quad (c_S \in \mathbb{Z}_{(p)})$$

和 $\theta_S^{(n)} \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)_{p^{m-\nu}}$（因此 $\omega_{N,\chi,p^{m-\nu}}^n(S) \le k$）。这里 $\nu := \nu_p(c_S)$，而 ν_p 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的加性赋值，且归一化为 $\nu_p(p) = 1$。此外，所有涉及的 S 均满足 $\chi = '\chi_S$。

(2) 对于一个适当的 $e \in \mathbb{N}$，(1) 中出现的所有 $S \in \Lambda_r^+$ 都满足 $\mathrm{level}(S) \mid p^e N$。

备注 3.3。(1) 实际上，每个 c_S 都可用 F 的 S 的本原傅里叶系数来描述。详情请参见第 7 节中的证明。

(2) 关于 $\theta_S^{(n)} \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \widetilde{\chi})_{p^{m-\nu}}$ 的陈述可改写为 $c_S\theta_S^{(n)} \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)_{p^m}$。另请注意，如果 $m = 1$，则 $\nu = 0$。(3) 我们强调，对于 e，我们一无所知。

我们预期上述定理在最一般的情形下成立：

猜想 3.4. 定理 3.2 应适用于任意素数（而不仅是 $p > r+1$），且不需要假设 $n \ge r$。

能够出现非真正奇异形式的模 p 奇异形式的最小权（见定理 2.3）特别值得关注。在这些情形下，我们还预期 θ 级数的层中 e 的 p 次幂是可能的最小值：

猜想 3.5. 设 n 为正整数，r 为偶整数，且 p 为满足 $p \ge n+r+3$ 的素数。令

$$k = k(p,r) := \begin{cases} r/2 + (p-1)/2 & \text{if } r \equiv 2 \bmod 4,\ p \equiv -1 \bmod 4 \\ r/2 + p - 1 & \text{if } r \equiv 0 \bmod 4. \end{cases}$$

设 N 为正整数，χ 为模 N 的二次狄利克雷特征，且 $\chi(-1) = (-1)^k$。假设 $F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)^{\mathbb{Z}_{(p)}}$ 是秩为 r 的模 p 奇异形式。那么

$$F \equiv \sum_{\substack{S \in \Lambda_r/\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \\ \mathrm{level}(S) \mid pN}} c_S \theta_S^{(n+r)} \bmod p \quad (c_S \in \mathbb{Z}_{(p)}).$$

在 $N = 1, r = 2$ 的特殊情形下，我们可以证明这个猜想：

定理 3.6. 设 n 是一个正整数，p 是一个满足 $p \ge n+5$ 的素数。假设 $F \in M_{\frac{p+1}{2}}(\Gamma_{n+2})^{\mathbb{Z}_{(p)}}$ 是模 p 奇异的，且具有 p-秩 2。那么我们有

$$F \equiv \sum_{\substack{S \in \Lambda_2/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \\ \mathrm{level}(S) = p}} c_S \theta_S^{(n+2)} \bmod p \quad (c_S \in \mathbb{Z}_{(p)}).$$

此外，对于任意这样的 F，一阶形式 $f := \Phi^{n+1}(F)$ 模 p 非零。

注 3.7. 我们指出，定理 3.6 有望在一些有趣的情形下证明傅里叶系数模 p 不为零。例如，满足 $\Phi^2(F) \equiv 0$ 模 p 的三次模形式不可能是模 p 奇异的。这意味着，在其傅里叶系数属于 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的前提下，与一个二次尖点形式 h 相联系的克林根-艾森斯坦级数 $F := E^{3,\,2}_{\,k}$ 存在一些模 p 不为零的秩 3 傅里叶系数 $a_F(T)$。请注意，此类傅里叶系数相当微妙：若 h 是海克特征形式，则它们由与 h 和 $T \in \Lambda_3^+$ 相联系的 L-级数的某些临界值给出（有关克林根-艾森斯坦级数的更多细节，见 *[3, 17]* ）。要涵盖更一般的情形，还需要关于模 h 的海克特征值所生成的域中的素理想同余的相应版本。

4 Freitag 展开的改进

本节受 Freitag [9, 10], 启发，给出任意模形式的傅里叶展开中“奇异部分”的形式展开，并将其应用于模 p^m 奇异形式。

我们先固定一些记号。令 $M_n(R)$ 表示所有分量属于 R 的 $n \times n$ 矩阵的集合。记 $M_{(r)n}(\mathbb{Z}) := \{M \in M_n(\mathbb{Z}) \mid \text{秩}(M) = r\}$ 且 $M_n^*(\mathbb{Z}) := M_{(n)n}(\mathbb{Z})$。类似地，我们写作 $\Lambda_n^{(r)} := \{T \in \Lambda_n \mid \text{秩}(T) = r\}$ $(\Lambda_n^+ = \Lambda_n^{(n)})$。设 F 为一个次数为 $n+r$ 的模形式，其傅里叶展开为

$$F(Z) = \sum_{T \in \Lambda_{n+r}} a(T)\boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(TZ)).$$

当 $S \in \Lambda_r$ 时，我们写作 $a(S) := a\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$。我们将 F 的一个子级数 $F_{[r]}$ 定义为

$$F_{[r]}(Z) := \sum_{T \in \Lambda_{n+r}^{(r)}} a(T)\boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(TZ)).$$

在 B¨ocherer-Raghavan [8] （见第 82 和 83 页）中，引入了“本原傅里叶系数”的概念；对于 S 正定矩阵，我们用 $a^*(S)$ 表示它。也就是说，$a^*(S)$ 定义为

$$a(S) = \sum_{\substack{G \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \backslash M_r^*(\mathbb{Z}) \\ S[G^{-1}] \in \Lambda_r}} a^*(S[G^{-1}]).$$

我们回顾一下，根据这个公式，我们可以从定义在 Λ_r 上的 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$-不变函数 $T \longmapsto a(T)$ 出发，定义一个新的 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$-不变函数 $a^*(S)$。

如 [8],中所述，这也可以写作

$$a(T) = \sum_{S \in \Lambda_r^+ / \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})} \frac{1}{\epsilon(S)} \sum_{\substack{W \in M_r^*(\mathbb{Z}) \\ S[W] = T}} a^*(S), \tag{4.1}$$

其中 $\epsilon(S) := A(S,S)$。我们采用这一版本。

利用傅里叶系数 $a(S)$ 及其修正，对 Freitag 的论证稍作改进，通过对傅里叶展开作形式上的重排，便得到我们的关键恒等式。请注意，这些陈述仅声称等式两边的傅里叶系数相等（不考虑收敛性问题！）。

引理 4.1. 设 χ 是模 N 的狄利克雷特征，使得 $\chi(-1) = (-1)^k$。令 $F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)$。则有

$$F_{[r]}(Z) = \sum_{S \in \Lambda_r^+/\mathrm{GL_r}(\mathbb{Z})} \frac{a^*(S)}{\epsilon(S)} \sum_{\substack{(X_1,X_2) \in \mathbb{Z}^{r,r} \times \mathbb{Z}^{r,n} \\ \mathrm{rank}(X_1,X_2)=r}} \boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(S[(X_1,X_2)]Z)). \tag{4.2}$$

注意

$$\sum_{(X_1,X_2) \in \mathbb{Z}^{r,r} \times \mathbb{Z}^{r,n}} \boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(S[(X_1,X_2)]Z)) = \sum_{X \in \mathbb{Z}^{r,n+r}} \boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(S[X]Z)) = \theta_S^{(n+r)}(Z).$$

因此，若能证明此引理，则 $F_{[r]}$ 可表示为 θ 级数（子级数）的无穷线性组合；

$$F_{[r]} = \sum_{S \in \Lambda_r^+/\mathrm{GL_r}(\mathbb{Z})} \frac{a^*(S)}{\epsilon(S)} (\theta_S^{(n+r)})_{[r]}. \tag{4.3}$$

引理 4.1 的证明。对于 $X_1 \in \mathbb{Z}^{r,\,r}$, $X_2 \in \mathbb{Z}^{r,\,n}$，我们可以取 $W \in M_r^*(\mathbb{Z})$，使得 $(X_1, X_2) = W(G_1, G_2)$ 且 $\begin{pmatrix} * & * \\ G_1 & G_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+r}(\mathbb{Z})$。这 W 可以视为 X_1 和 X_2 的“最大公因子”。我们注意到，这样的 W 在右乘 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$ 中的一个因子后是唯一的。我们将 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$ 的这一作用转移到 (G_1, G_2) 上。于是可以将 (4.2) 的右端写为

$$\sum_{S \in \Lambda_r^+/\mathrm{GL_r}(\mathbb{Z})} \frac{a^*(S)}{\epsilon(S)} \sum_{W \in M_r^*(\mathbb{Z})} \sum_{\substack{(G_1,G_2) \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{Z}^{r,r} \times \mathbb{Z}^{r,n} \\ \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ G_1 & G_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_{n+r}(\mathbb{Z})}} \boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(S[W][(G_1,G_2)]Z)) \tag{4.4}$$

其中 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{Z}^{r,\,r} \times \mathbb{Z}^{r,\,n} =: \backslash \mathbb{Z}^{r,\,r} \times \mathbb{Z}^{r,n}$ 并且 $(X_1, X_2) \sim (Y_1, Y_2)$ 表示对于某个 $G \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$，有 $(X_1, X_2) = G(Y_1, Y_2)$。

我们令 $S[W] = T$，并将对 S 的求和改写为对 T 的求和。于是得到 (4.4)

$$\sum_{T \in \Lambda_r^+} a(T) \sum_{\substack{(G_1,G_2) \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{Z}^{r,r} \times \mathbb{Z}^{r,n} \\ \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ G_1 & G_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_{n+r}(\mathbb{Z})}} \boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(T[(G_1,G_2)]Z)) \tag{4.5}$$

由 (4.1) 可知。

若令 $U := \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ G_1 & G_2 \end{smallmatrix}\right)$，则有 $T[(G_1, G_2)] = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{smallmatrix}\right)[U]$。因此，我们有$a(T) = a\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{smallmatrix}\right) = a(T[(G_1, G_2)])$。于是 (4.5) 可写为

$$\sum_{T \in \Lambda_r^+} \sum_{\substack{(G_1,G_2) \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{Z}^{r,r} \times \mathbb{Z}^{r,n} \\ \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ G_1 & G_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_{n+r}(\mathbb{Z})}} a(T[(G_1, G_2)]) \boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(T[(G_1, G_2)]Z))$$
$$= \sum_{T \in \Lambda_{n+r}^{(r)}} a(T) \boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(TZ)) = F_{[r]}(Z).$$

此公式中的第一个等式源于这样一个事实：若 $T \in \Lambda_r^+$ 和 (G_1, G_2) 按下标所述取值，则 $T[(G_1, G_2)]$ 遍历 $\Lambda_{n+r}^{(r)}$ 的所有元素。 □

注意， $F_{[r]}$ 不是模形式，因为傅里叶展开缺少一部分。

令 $Z_1 \in \mathbb{H}_r$, $Z_2 \in \mathbb{H}_n$。考虑将 F 限制到 $Z = \left(\begin{smallmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{smallmatrix}\right)$ 上；

$$F\begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix} = \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} T & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right) \in \Lambda_{n+r} \\ T \in \Lambda_r}} \phi_T(Z_2) \mathbf{e}(\mathrm{tr}(TZ_1)).$$

那么，对于任意 $T \in \Lambda_r$，我们有 $\phi_T(Z_2) \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$。关于这一事实的证明，请参见 Andrianov [1]（第 83 和 84 页）。

另一方面，我们用 $F^\sharp$ 表示 $F = \sum_{\mathfrak{T} \in \Lambda_{n+r}} a_F(\mathfrak{T}) \mathbf{e}(\mathrm{tr}(\mathfrak{T}Z))$ 的子级数，其特征为

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} T & * \\ * & * \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad T \in \Lambda_r^+.$$

也就是说，我们定义

$$F^\sharp(Z) := \sum_{\substack{\mathfrak{T} = \left(\begin{smallmatrix} T & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right) \in \Lambda_{n+r} \\ T \in \Lambda_r^+}} a_F(\mathfrak{T}) \mathbf{e}(\mathrm{tr}(\mathfrak{T}Z)).$$

于是我们有

$$F^\sharp\begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix} = \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} T & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right) \in \Lambda_{n+r} \\ T \in \Lambda_r^+}} \phi_T(Z_2) \mathbf{e}(\mathrm{tr}(TZ_1)).$$

注意，对任意 $T \in \Lambda_r^+$，仍有 $\phi_T(Z_2) \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$。

现在， 假设 F 是模 p^m 奇异的，且秩为 p， r。那么，由于 F 是模 p^m

a

奇异的，我们得到 $F^\sharp\left(\begin{smallmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{smallmatrix}\right) \equiv (F_{[r]})^\sharp\left(\begin{smallmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{smallmatrix}\right)$ 模 p^m。根据引理 4.1，我们有

$$\begin{aligned}
(F_{[r]})^\sharp \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix} &\equiv \left(\sum_{S \in \Lambda_r^+/\mathrm{GL_r}(\mathbb{Z})} \frac{a^*(S)}{\epsilon(S)} \sum_{\substack{(X_1,X_2)\in \mathbb{Z}^{r,r}\times\mathbb{Z}^{r,n} \\ \mathrm{rank}(X_1,X_2)=r}} \boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(S[X_1]Z_1)\boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(S[X_2]Z_2)) \right)^\sharp \\
&\equiv \sum_{S \in \Lambda_r^+/\mathrm{GL_r}(\mathbb{Z})} \frac{a^*(S)}{\epsilon(S)} \sum_{\substack{(X_1,X_2)\in \mathbb{Z}^{r,r}\times\mathbb{Z}^{r,n} \\ \mathrm{rank}(X_1)=r}} \boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(S[X_1]Z_1)\boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(S[X_2]Z_2)) \\
&\equiv \sum_{S \in \Lambda_r^+/\mathrm{GL_r}(\mathbb{Z})} \frac{a^*(S)}{\epsilon(S)} \sum_{\substack{X_1\in \mathbb{Z}^{r,r} \\ \mathrm{rank}(X_1)=r}} \boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(S[X_1]Z_1)) \sum_{X_2\in\mathbb{Z}^{r,n}} \boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(S[X_2]Z_2)) \\
&\equiv \sum_{S \in \Lambda_r^+/\mathrm{GL_r}(\mathbb{Z})} \frac{a^*(S)}{\epsilon(S)} (\theta_S^{(r)}(Z_1))_{[r]} \theta_S^{(n)}(Z_2) \mod p^m.
\end{aligned}$$

这意味着

$$\phi_T(Z_2) \equiv \sum_{S \in \Lambda_r^+/\mathrm{GL_r}(\mathbb{Z})} A(S,T) \frac{a^*(S)}{\epsilon(S)} \theta_S^{(n)}(Z_2) \bmod p^m$$

对任意 $T \in \Lambda_r^+$均成立。因此我们得到

$$\sum_{S \in \Lambda_r^+/\mathrm{GL_r}(\mathbb{Z})} A(S,T) \frac{a^*(S)}{\epsilon(S)} \theta_S^{(n)}(Z_2) \bmod p^m \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)_{p^m}.$$

在普通情形（在 $\mathbb{C}$ 上），Freitag 的设定中的关键在于，只有当 level$(S) \mid N$ 时，$a(S)$ 才可能不为零。在我们的模 p^m 设定中，对于满足 $a^*(S) \not\equiv 0 \mod p^m$ 的 $S \in \Lambda_r^+$，我们得到了关于 $\theta_S^{(n)}$ 滤过的一个条件。更准确地说，我们得到以下性质。

命题 4.2. 设 n、k、N 为正整数，r 为偶整数。设 p 为满足 $p > r+1$ 的素数，χ 为模 N 的二次狄利克雷特征，且 $\chi(-1) = (-1)^k$。假设 $F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)^{\mathbb{Z}_{(p)}}$ 是模 p^m 的奇异形式，且其 p-秩为 r。那么，对任意 $S \in \Lambda_r^+$，有 $a^*(S)\theta_S^{(n)} \mod p^m \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)_{p^m}$。特别地，若 $S \in \Lambda_r^+$ 满足 $a^*(S) \not\equiv 0 \mod p^m$，则有 $\theta_S^{(n)} \mod p^m \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)_{p^{m-\nu}}$（因此 ω_N^n、χ、$_{p^{m-\nu}}(S) \le k$），其中 $\nu := \nu_p(a^*(S))$。此外，$\chi =' \chi_S$ 成立。

证明。为导出矛盾，我们假设存在 S 使得该断言不成立。令 S_0 为满足条件的 S 之一，且 $\det S_0$ 在这些 S中取最小值。接下来我们

考虑

$$\begin{aligned}\phi_{S_0} - &\sum_{\substack{S\in\Lambda_r^+/\mathrm{GL_r}(\mathbb{Z})\\ \det S<\det S_0}} A(S,S_0)\frac{a^*(S)}{\epsilon(S)}\theta_S^{(n)}\\ &\equiv \sum_{\substack{S\in\Lambda_r^+/\mathrm{GL_r}(\mathbb{Z})\\ \det S\geq\det S_0}} A(S,S_0)\frac{a^*(S)}{\epsilon(S)}\theta_S^{(n)}\\ &\equiv A(S_0,S_0)\frac{a^*(S_0)}{\epsilon(S_0)}\theta_{S_0}^{(n)} \bmod p^m.\end{aligned}$$

这里最后一个同余由以下事实得出：$\det S > \det S_0$ 意味着 $A(S,S_0)=0$，而 $\det S = \det S_0$, $S \not\sim S_0 \bmod \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$意味着 $A(S,S_0)=0$。根据假设，我们有

$$\phi_{S_0} - \sum_{\substack{S\in\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})\backslash\Lambda_r^+\\ \det S<\det S_0}} A(S,S_0)\frac{a^*(S)}{\epsilon(S)}\theta_S^{(n)} \bmod p^m \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi)_{p^m}.$$

这意味着 $A(S_0,S_0)\,{}^{a^*(S_0)}\epsilon(S_0)\ \theta_{S_0}^{(n)} \bmod p^m \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N)\ \chi)_{p^m}$。由事实 (2.1)，我们有 $p \nmid A(S_0,S_0)$。这表明 $a^*(S_0)\theta_{S_0}^{(n)} \bmod p^m \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N)\ \chi)_{p^m}$。这就产生了矛盾。因此，对于任意 $S\in\Lambda_r^+$，我们有 $a^*(S)\theta_S^{(n)} \bmod p^m \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N)\ \chi)_{p^m}$。特别地，如果 $a^*(S)\not\equiv 0 \bmod p^m$，那么我们有 $\theta_S^{(n)} \bmod p^m \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N)\ \chi)_{p^{m-\nu}}$，其中 $\nu := \nu_p(a^*(S))$，因此$\omega_{N,\chi,p^{m-\nu}}^n(S) \leq k$。命题 $\chi =' \chi_S$ 由命题 2.4 得出。□

为后续使用，我们提及命题 4.2 在模 p情形下的一个简单推论。

推论 4.3. 设 n、 k、 N 为正整数， r 为满足 $n \geq r$的偶整数。设 p为满足 $p > r+1$的素数， χ为模 N的二次狄利克雷特征，且满足$\chi(-1) = (-1)^k$。假设 $F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N)\ \chi)^{\mathbb{Z}_{(p)}}$是模 p的奇异形式，秩为 pr。

(1) 对于任意满足 $a^*(S)\not\equiv 0$模 p的 $S\in\Lambda_r^+$，有 $\theta_S^{(r)} \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(r)}(N)\ \chi)$。
(2) 对于满足 $a(S)\not\equiv 0$ 模 p 的 $S\in\Lambda_r^+$，若 $\det S$ 在此类 S中取最小值，则我们有 $\theta_S^{(n)} \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N)\ \chi)$，因此$\omega_{N,\ \chi}^n(S) \leq k$。

注 4.4. 命题 (2) 也可以通过 *[10]* 中 Freitag 的原始论证的模 p 版本来证明。我们的方法可以视为对他的方法的改进。

推论 4.3 的证明。(1) 由命题 4.2，我们有 $\theta_S^{(n)} \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N)\ \chi)$。因此，结论可由 $\Phi^{n-r}(\theta_S^{(n)}) = \theta_S^{(r)}$ 立即得出。
(2) 如果 $S\in\Lambda_r^+$满足这样的最小性条件，根据 $a^*(S)$的定义，我们有 $a^*(S) = a(S)$。结论由此事实得出。□

5 模 p 情形的 θ 级数描述

本节中，我们证明 $m = 1$的定理 3.2 (1)。因此，本节讨论模 p 的情形。我们的目标是证明，所有强模 p 奇异模形式都可以表示为有限多个 θ 级数的线性组合。在我们的方法中，有两个新工具至关重要：用于检测模 p 奇异形式的“抽象 Sturm 界”的存在性，以及上一节所介绍的 Freitag 展开的改进。好在我们不必考虑 θ 级数的确切级。

5.1 摘要：Sturm 界

一般而言，“Sturm 界”给出一个显式有限集合 $T \in \Lambda_n$，使得：若一个次数为 n、傅里叶系数属于 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的模形式，其在该有限集合中所有 T 对应的傅里叶系数都能被 p 整除，则该模形式必定模 p同余于零，参见例如 [20, 25]。这样的显式有限集合通常会包含所有秩的二次型。为了检测模 p 的奇异形式，我们需要一个只涉及秩为 $> r$ 的二次型（有限多个）的版本。我们只需证明这样的集合存在，但不讨论其显式界。

设 χ为模 N的二次狄利克雷特征。设 $M_{k\,r}^{p\text{-sing}}(\Gamma_0^{(n+r)}(N),\ \chi)$ 为 $M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N),\ \chi)^{\mathbb{Z}_{(p)}}$ 中所有具有 p-秩 $\le r$的模 p 奇异模形式组成的子模。我们将 $M_{k\,r}^{p\text{-sing}}(\Gamma_0^{(n+r)}(N),\ \chi)$ 中元素模 p约化所得的集合记为 $\widetilde{M}_{k\,r}^{p\text{-sing}}(\Gamma_0^{(n+r)}(N),\ \chi)$。这是向量空间$\widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N),\ \chi)$上的 $\mathbb{F}_p$子空间。我们考虑商空间

$$V = V_{k,r} := \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)/\widetilde{M}_{k,r}^{p\text{-sing}}(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi).$$

于是我们有 $\dim V < \infty$。对于秩(T)为 $> r$ 的固定 $T \in \Lambda_{n+r}$，我们定义线性映射 $\ell_T : V \longrightarrow \mathbb{F}_p$ 为

$$\ell_T(\widetilde{F} + \widetilde{M}_{k,r}^{p\text{-sing}}(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)) := \widetilde{a_F(T)}.$$

显然，所有这类 ℓ_T 的集合 L 对于 V 是“完备”的，即所有 ℓ_T 的核的交集是平凡的。根据线性代数（V 是有限维的！），我们可以从 L 中选取一个有限子集 $\mathcal{T}_{n+r,r} = \{\ell_{T_1}, \ldots, \ell_{T_d}\}$，它对于 V 仍然是完备的。

结论：在上述情形下，存在有限多个 T_1，…，T_d，使得所有秩大于 r 的 T_j 满足：对于所有 $F \in M_k$，$(\Gamma_0^{(n)}(N)\ \chi)^{\mathbb{Z}_{(p)}}$，若对所有 T_j，$\widetilde{a_F\ T_j}(\ )$ 均为零，则 F 是模 p 奇异的 p-秩 $\le r$。

我们称这样的 $\mathcal{T}_{n+r,r}$ 为模 p奇异形式的“Sturm 集”。

5.2 定理 3.2 (1) 在 $m = 1$ 时的证明

对于对应于 $M_{k\,r-1}^{p\text{-sing}}(\Gamma_0^{(r)}(N))$ 的 Sturm 集 $\mathcal{T}_{r,r-1}(\subset \Lambda_r^+)$，我们取一个自然数 M，使得

$$M > \max\{\det T \mid T \in \mathcal{T}_{r,r-1}\}.$$

我们令

$$G := F - \sum_{\substack{S \in \Lambda_r^+/\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \\ \det S < M}} \frac{a^*(S)}{\epsilon(S)} \theta_S^{(n+r)}$$

并考察 $g := \Phi^n(G)$。注意，此处关于 S 的求和是有限的。于是有

$$g = \Phi^n(F) - \sum_{\substack{S \in \Lambda_r^+/\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \\ \det S < M}} \frac{a^*(S)}{\epsilon(S)} \theta_S^{(r)}$$

根据推论 4.3 (1)，有 $\widetilde{g} \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(r)}(N), \chi)$。

现在我们证明 $g \in M_{k\,r-1}^{p\text{-sing}}(\Gamma_0^{(r)}(N), \chi)$。只需检查所有 $T \in \mathcal{T}_{r,\,r-1}$ 对应的傅里叶系数 $a_g(T)$。由 (4.3) 可得

$$a_g(T) = \sum_{\substack{S \in \Lambda_r^+/\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \\ \det S \geq M}} \frac{a^*(S)}{\epsilon(S)} A(S,T)$$

对任意 $T \in \Lambda_r^+$。若 $S[X] = T$ 且 $X \in \mathbb{Z}^{r,\,r}$ 则 $\det S[X] = \det S(\det X)^2 = \det T$，因此 $\det S \leq \det T$。这意味着，对于满足 $\det T < \det S$ 的 T，有 $A(S,T) = 0$。因此，对任意 $T \in \mathcal{T}_{r,\,r-1}$，有 $a_g(T) = 0$。这意味着 $g \in M_{k\,r-1}^{p\text{-sing}}(\Gamma_0^{(r)}(N), \chi)$。

假设 $g \not\equiv 0 \mod p$。则 g 是某个 p-秩 $r' < r$ 的 mod p 奇异形式。由定理 2.3，得 $2k - r \equiv 2k - r' \equiv 0 \mod p-1$，因此 $r' \equiv r \mod p-1$。由于 $r' < r < p-1$，这是不可能的。这说明 $g \equiv 0 \mod p$。考虑到 F 和 G 都是 mod p 奇异形式，可得 $G \equiv 0 \mod p$。至此，定理 3.2 的 (1) 得证。 □

注记 5.1. 条件“$n \geq r$”是确保 $\widetilde{g} \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(r)}(N), \chi)$ 所必需的。

6 级的具体说明

6.1 当 $m = 1$ 时定理 3.2 (2) 的证明

在定理 3.2 的情形下，我们必须明确指定所涉及的 $S \in \Lambda_r^+$ 的层：为此，我们使用推论 9.3，它由修正后的 q-展开原理⌣和 Kitaoka 公式推出。我们注意到 $\theta_S^{(r)} \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(r)}(N), \chi)$；这里我们需要更强的条件 $p \geq r+3$（以及 $n \geq r$）。于是推论 9.3 表明

S 的级具有所要求的形式，并且关于 Nebentypus 特征的陈述也随之成立。

□

现在我们将在本节余下部分证明定理 3.6。具体而言，我们讨论 p-秩为 2，且权为允许模 p 奇异模形式的最小权的情形；这些模形式并非真正奇异，即 $1+\frac{p-1}{2}$。

6.2 定理 3.6 的证明

在定理 3.2 中，我们假设 $n \geq r$。本小节讨论 $n=1$ 和 $r=2$ 的特殊情形；这是“强模 p 奇异”这一条件不成立时最简单的情形。我们转而利用二元二次型的一些非常特殊的性质。

命题 6.1. 设 p 为奇素数。设 $S \in \Lambda_2^+$ 的级为 $N = p^j N'$，且 N' 与 p 互素。假设对某个 $\phi \in M_k(\Gamma_1)^{\mathbb{Z}_{(p)}}$，有 $\theta_S^{(1)} \equiv \phi$ 模 p。则 $N'=1$，即 level$(S) = p^j$。

注 6.2. 为了包含 $n=1$ 的情形，我们应考察次数为 1 的 θ 级数 $\theta_S^{(1)}$ 和 $\phi \in M_k(\Gamma_1)$。

证明。为导出矛盾，我们假设 $N' > 1$。我们将 Ki- taoka 原始结果中的定理 9.1 应用于 $n=1$，取 $\theta_S^{(1)}$ 和 $M = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ p^j & N' \end{smallmatrix}\right)$。于是有

$$\theta_S^{(1)} | M = \kappa \cdot \theta_{S'}^{(1)},$$

其中 S' 与命题 9.2 的证明中相同。于是 $N'S'$ 是半整数，$(N', \text{cont}(N'S')) = 1$，并且当 $p^\alpha \,||\, \text{cont}(S)$ 时，$\text{cont}(N'S') = p^\alpha$。于是 $\frac{N'}{p^\alpha} S' \in \Lambda_2^+$ 是本原的。因此，我们可以取一个素数 l，使得 $l \nmid N'$，满足

$$A\left(S', \frac{l \cdot p^\alpha}{N'}\right) = A\left(\frac{N'S'}{p^\alpha}, l\right) \not\equiv 0 \bmod p.$$

然而，由于 ϕ 的级为 1，我们还有

$$A\left(S', \frac{l \cdot p^\alpha}{N'}\right) \equiv a_\phi\left(\frac{l \cdot p^\alpha}{N'}\right) = 0 \bmod p.$$

这就产生了矛盾，因此我们得到 $N'=1$。

□

因此，在命题 6.1 的情形下，级(S) 是 p 的幂。于是，det$(2S)$ 也应当是 p 的幂。根据初等因子定理，我们可以找到 $U, V \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$，使得

$$U(2S)V = \begin{pmatrix} p^s & 0 \\ 0 & p^{s+t} \end{pmatrix}.$$

于是我们有 $U(2S) = \begin{pmatrix} p^s & 0 \\ 0 & p^{s+t} \end{pmatrix} V^{-1}$，因此

$$U(2S)^t U = p^s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^t \end{pmatrix} V^{-1t} U.$$

若令 $W := V^{-1t}U = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}$，则可写为

$$U(2S)^t U = p^s \begin{pmatrix} w_1 & p^t w_3 \\ w_2 & p^t w_4 \end{pmatrix}.$$

由于 $U(2S)^t U$ 是对称的，我们有 $w_2 = p^t w_3$，并且

$$U(2S)^t U = p^s \begin{pmatrix} w_1 & p^t w_3 \\ p^t w_3 & p^t w_4 \end{pmatrix}.$$

根据这些论证，我们可以假设 S 具有这种形式。特别地，若 $\det(2S)$ 是 p 的奇数次幂，则令 $b := p^j w_3$ 后，我们可以假设 S 具有如下形式

$$S = S(i,j) = p^i \begin{pmatrix} a & bp^{j+1} \\ bp^{j+1} & dp^{2j+1} \end{pmatrix}$$

其中 $adp - b^2 p^2 = p$。

现在我们试图证明，S 的级中 p 的高次幂意味着 $\theta_S^{(1)}$ 的滤过权很高：

命题 6.3。设 p 是一个奇素数，且 $S \in \Lambda_2^+$。假设 $\det(2S)$ 是 p 的奇数次幂。那么我们有

$$\omega(\theta_S^{(1)}) \geq p^{i+j} \cdot \frac{p+1}{2},$$

其中 i、j 由下式确定

$$S = S(i,j) = p^i \begin{pmatrix} a & bp^{j+1} \\ bp^{j+1} & dp^{2j+1} \end{pmatrix}$$

其中 $adp - b^2 p^2 = p$。

在证明这个命题之前，我们先确认一些记号，以及 Serre [23] 和 Swinnerton-Dyer [26]给出的次数 1 模 p 模形式滤过的相关事实。设 $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n) \boldsymbol{e}(nz)$是一个满足 $a_f(n) \in \mathbb{Z}_{(p)}$的形式幂级数。我们将$\omega(f)$记作 $\omega_{1,1}^1(f)$。设 $V(p)$、$U(p)$为由下式定义的算子

$$f|V(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n) \boldsymbol{e}(pnz),$$

$$f|U(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(pn) \boldsymbol{e}(nz).$$

于是我们有 $\omega(f|V(p)) = p\omega(f)$，$\omega(f|U(p)) \leq \omega(f)$。

我们令 $\omega(S(i,j)) := \omega(\theta_{S\,i(,\ j)}^{(1)})$。

命题 6.3 的证明。利用以下事实： $\theta^{(1)}_{S\ i(,\ j)} = \theta^{(1)}_{S\ (i-1,\ j)}|V(p)$， 以及 $\omega(f|V(p)) = p\omega(f)$，我们得到

$$\omega(S(i,j)) = p^i\omega(S(0,j)).$$

此外，通过比较 $A(S(0,j)\ pn)$ 和 $A(S(1,j-1)\ n)$ 的表示数，我们可以轻易确认

$$\theta^{(1)}_{S(0,j)}|U(p) = \theta^{(1)}_{S(1,j-1)}.$$

由于一般而言 $\omega(f) \geq \omega(f|U(p))$，我们有

$$\omega(S(0,j)) \geq \omega(S(1,j-1)) = p\omega(S(0,j-1)).$$

这意味着

$$\omega(S(i,j)) \geq p^{i+j}\omega(S(0,0)) = p^{i+j}\omega(S(0,0)) = p^{i+j}\cdot\frac{p+1}{2}.$$

这里最后一个等式由 $\omega(S(0,0)) = \frac{p+1}{2}$ 得出，这是定理 2.7（或 Serre 在 [23]中的结果）所致。至此，证明完成。 □

推论 6.4. 设 p 是一个素数，且 $S \in \Lambda_2^+$。假设对某个 $\phi \in M_{\frac{p+1}{2}}(\Gamma_1)^{\mathbb{Z}_{(p)}}$，有 $\theta^{(1)}_S \equiv \phi \mod p$。那么 level$(S) = p$。

证明. 假设 $\theta^{(1)}_S \equiv \phi \mod p$ 意味着

$$\omega(S) = \omega(S(i,j)) \leq \frac{p+1}{2}. \tag{6.1}$$

另一方面，由于命题 6.1， S 的级是 p 的幂。因此，det$(2S)$是 p的幂。这里需要注意的是，实际上在这种情况下，p 的幂是奇数。因为，二次特征 χ_S 应具有非平凡的 p-分量，否则应有$\frac{p+1}{2} \equiv 1$ 模 $p-1$ 成立，而这是不可能的。因此，我们可以假设 $S = S(i,j)$，如推论 6.3中所述。于是我们有

$$\omega(S) = \omega(S(i,j)) \geq p^{i+j}\cdot\frac{p+1}{2}.$$

C将其与（6.1）结合，我们得到 $i = j = 0$。也就是说，我们得到 level$(S) = p$. □

现在我们可以证明 p-秩为 2 时的结果。

定理 3.6 的证明。设 $\{T_1, \cdots, T_{h_p}\} \subset \Lambda_2/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 为 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$-不等价类中级为 p 的二元二次型的一组代表。注意到 $\theta^{(n)}_{T_i} \in M_1(\Gamma_0^{(n)}(p), (\frac{*}{p}))$, 且存在 $G_i \in M_{\frac{p+1}{2}}(\Gamma_n)$ 使得 $G_i \equiv \theta^{(n)}_{T_i}$

由定理 2.7，模 p。那么 G_i 是模 p 奇异的，因为 $\theta_{T_i}^{(n)}$ 是真奇异的。接下来我们考虑

$$H := F - \sum_{i=1}^{h_p} \frac{1}{2} a_F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_i \end{pmatrix} G_i \in M_{\frac{p+1}{2}}(\Gamma_{n+2})$$

这是一个某个 p 秩为 $r' \leq 2$ 的模 p 奇异形式 H。

现在我们假设仍有 $r' = 2$。于是可以取满足 $a_H\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right) \not\equiv 0$ 模 p 的 $S \in \Lambda_2^+$，使得 det S 最小。由推论 4.3，得到 $\theta_S^{(1)} \in \widetilde{M}_{\frac{p+1}{2}}(\Gamma_1)$。由推论 6.4，得到 level$(S) = p$，因此对于某个 j，有 $S \sim T_j$ 模 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$。然而，由于对任意 i，都有 $a_H\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_i \end{smallmatrix}\right) \equiv 0$ 模 p，可得 $a_H\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right) \equiv 0$ 模 p。这就产生了矛盾。

因此，我们有 $r' \leq 1$ 或 $H \equiv 0$ 模 p。若 $H \not\equiv 0$ 模 p，则由定理 2.3 可得 $p + 1 - r' \equiv 0$ 模 $p - 1$。这是不可能的。这意味着$H \equiv 0$ 模 p。这证明了定理 3.6 的主要结论。

为了证明关于 $\Phi^{n+1}(F) \not\equiv 0 \bmod p$ 的最后一项结论，只需确保所讨论的二元 theta 级数在 mod p 下线性无关：令 $\{T_1, \cdots, T_{h_p}\}$ 如上。正如 Kani [13] 中所述，$\theta_{T_j}^{(1)}(j = 1, \cdots, h_p)$ 在 $\mathbb{C}$ 上线性无关。现在我们可以证明 $\theta_{T_j}^{(1)}(j = 1, \cdots, h_p)$ 在 $\mathbb{F}_p$ 上线性无关：令 $\sum_{i=1}^{h_p} c_i \theta_{T_j}^{(1)} \equiv 0 \bmod p$。那么，对于任意 $n \geq 0$，有

$$\sum_{i=1}^{h_p} c_i A(T_i, n) \equiv 0 \bmod p.$$

对于每个 T_i，我们都可以找到无穷多个素数 l，使得 $A(T_i, l) > 0$。于是，对于任意 $j \neq i$，有 $A(T_j, l) = 0$。由于 $A(T_i, l) = 2, 4, 6 \not\equiv 0 \bmod p$，我们有 $c_j \equiv 0 \bmod p$。因此有 $c_i \equiv 0 \bmod p$。这表明，对于任意满足 $1 \leq i \leq h_p$ 的 i，都有 $c_i \equiv 0 \bmod p$。因此，$\theta_{T_j}^{(1)}(j = 1, \cdots, h_p)$ 在 $\mathbb{F}_p$ 上线性无关。定理 3.6 的证明到此完成。□

7 从模 p 到模 p^m

本节中，我们使用归纳法，将定理 3.2（已在前几节中针对 $m = 1$ 证明）推广到一般的 m 情形。我们之所以先给出模 p 版本，再将其推广到任意次幂，主要是因为尝试给出我们的抽象 Sturm 界的模 p^m 类比版本时，会遇到技术上的困难。这样处理便避免了这个问题。

我们先证明定理 3.2 的以下较弱版本。

定理 7.1（定理 3.2 的较弱版本）。设 n、k、N 为正整数，r 为满足 $n \geq r$ 的偶整数。设 p 为满足 $p > r+1$ 的素数，且 χ 为模 N 的二次 Dirichlet 特征，满足 $\chi(-1) = (-1)^k$。假设 $F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)^{\mathbb{Z}_{(p)}}$ 是

模 p^m 的 p-秩奇异形式。那么存在有限多个级为 $S \in \Lambda_r^+$ 且级整除$\frown p^e N$、满足 $\theta_S^{(n)} \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N)\ \chi)$（仅模 p）的对象，使得

$$F \equiv \sum_S c_S \theta_S^{(n+r)} \bmod p^m \quad (c_S \in \mathbb{Z}_{(p)}). \tag{7.1}$$

此外，所有涉及的 S 均满足 $\chi =' \chi_S$。

定理 7.1 的证明。我们对 m 使用归纳法证明该结论。我们已经证明了 $m = 1$ 的情形。假设对于任意满足 $m < m_0$ 的 m，定理 3.2 中的命题 (1)、(2) 均成立。我们考虑 $m = m_0$ 的情形。注意，由定理 2.3，$2k - r \equiv 0$ 模 $(p-1)p^{m_0-1}$。因此我们可以写成 $k = \frac{r}{2} + t \cdot \frac{p-1}{2} p^{m_0-1}$。

根据假设，F 是模 p^{m_0-1} 奇异的（因为它是模 p^{m_0} 奇异的），因此根据归纳假设，我们有

$$F \equiv \sum_{\substack{S \in \Lambda_r^+ \\ \mathrm{level}(S) | p^{e_1} N}} c_S \theta_S^{(n+r)} \bmod p^{m_0-1} \quad \text{with} \quad c_S \in \mathbb{Z}_{(p)},$$

对于某个 e_1，所有涉及的 S 均满足 $\chi =' \chi_S$。

我们从 [6] 中取 $\mathcal{E} \in M_{\frac{p-1}{2}}(\Gamma_0^{(n+r)}(p), (\frac{*}{p}))^{\mathbb{Z}_{(p)}}$，使得 $\mathcal{E} \equiv 1$ 模 p，并令$G := \sum_S c_S \theta_S^{(n+r)} \cdot \mathcal{E}^{tp^{m_0-1}}$。这里注意，$F, G \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(p^{e_1} N)\ \chi)^{\mathbb{Z}_{(p)}}$，这是因为 $\chi =' \chi_S$。考虑 $H := \frac{1}{p^{m_0-1}}(F - G) \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(p^{e_1} N)\ \chi)^{\mathbb{Z}_{(p)}}$。那么对于任意 T，我们有

$$a_F(T) = a_G(T) + p^{m_0-1} a_H(T).$$

由于对于任意满足秩$(T) > r$的 T，$a_F(T) \equiv a_G(T) \equiv 0$模 p^{m_0}，因此对于任意满足秩$(T) > r$的 T，$a_H(T) \equiv 0$模 p。这意味着 H 是某个p-秩的模 p 奇异形式。根据 $2k - r' \equiv 2k - r \equiv 0$ 模 $p-1$ 和 $0 \le r' \le r \le p-1$，我们有$r' = r$。因此，对于某个满足秩$(T) = r$的 T，$a_H(T) \not\equiv 0$模 p。再次根据我们关于 $m = 1$的定理，我们有

$$H \equiv \sum_{\substack{R \in \Lambda_r^+ \\ \mathrm{level}(R) | p^{e_2} N}} d_R \theta_R^{(n+r)} \bmod p \quad \text{with} \quad d_R \in \mathbb{Z}_{(p)},$$

其中涉及的所有 R都满足 $\chi =' \chi_R$。注意到 $G := \sum_S c_S \theta_S^{(n+r)} \cdot \mathcal{E}^{tp^{m_0-1}} \equiv \sum_S c_S \theta_S^{(n+r)}$模 p^{m_0}，我们有

$$\begin{aligned} F &\equiv G + p^{m_0-1} H \\ &\equiv \sum_{\substack{S \in \Lambda_r^+ \\ \mathrm{level}(S) | p^{e_1} N}} c_S \theta_S^{(n+r)} + p^{m_0-1} \sum_{\substack{R \in \Lambda_r^+ \\ \mathrm{level}(R) | p^{e_2} N}} d_R \theta_R^{(n+r)} \bmod p^{m_0}. \end{aligned}$$

定理 7.1 的证明至此完成。 □

定理 3.2 的证明。我们首先断言，在假设将 (7.1) 中的求和限制在 Λ_r^+ 中两两不等价（模 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$）的元素上的条件下，(7.1) 中的系数 c_S 模 p^m 与 $a^*_{(S)}\ \epsilon(S)$ 一致。为此，我们取任意一个 $S_0 \in \Lambda_r^+$。（以下将自由使用第 4 节中的记号。）

$$a(S_0) \equiv \sum_S c_S A(S, S_0) \bmod p^m$$

成立，并将其限制到本原傅里叶系数上，得到

$$a^*(S_0) \equiv \sum_S c_S A^*(S, S_0) \bmod p^m.$$

现在，若 S 和 S_0 在 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$ 下等价，则 $A^*(S, S_0) = \epsilon(S_0)$；否则为零；这就证明了上述结论。

为完成定理 3.2 的证明，我们还需证明 $\theta_S^{(n)} \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N)) \cap \mathbb{Z}^{m-1}$，这由命题 4.2 直接得到。至此，定理 3.2 的证明完成。

□

8 附录 A：修正的 q-展开原理

为了明确我们定理中 θ 级数的级，我们需要了解模形式的同余在切换到其他尖点时的行为。文献中现有的“q-展开原理”并未完全提供我们所需的信息。

我们固定一个素数 p 和一个与 p互素的自然数 N。对于 $m \geq 0$，令 R_m 为包含 $\mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{N \cdot p^m}}, e^{\frac{2\pi i}{3}}, \frac{1}{6}, \frac{1}{N}]$的 $\mathbb{C}$的子环。

定理 8.1. 设 p为满足 $p \geq n+3$的素数，N为满足 $p \nmid N$的正整数。设 $f \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(p^m) \cap \Gamma^{(n)}(N))$。那么，对于所有 $\gamma \in \Gamma_0^{(n)}(p^m)$，我们有

$$f \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(p^m) \cap \Gamma^{(n)}(N))_{R_m} \iff f|_k\gamma \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(p^m) \cap \Gamma^{(n)}(N))_{R_m}.$$

$m = 0$ 的情形是通常的 q-展开原理，其表述由 Pitale 等人给出。[19] 由 Katz [15] 对 $n = 1$ 证明，并由 Ichikawa [12] 对$n > 1$证明。我们这个版本的关键在于，f 和 $f|\gamma$ 具有相同的 p-整性性质。注意，只需证明定理的一个方向。附录 A 的目的是证明这一性质。

8.1 当 $m = 1$ 时的证明

我们将对 m 使用归纳法。我们需要存在一个模形式 $\mathcal{E} \in M_l(\Gamma_0^{(n)}(p))^{\mathbb{Z}_{(p)}}$，使得

$$\mathcal{E} \equiv 1 \bmod p$$
$$\mathcal{E}|\omega_j \equiv 0 \bmod p \quad (1 \leq j \leq n).$$

这里， ω_j 可以是任意元素（$\begin{smallmatrix}*&*\\C&D\end{smallmatrix}$） $\in \Gamma_n$，其中 C 在 $M_n(\mathbb{F}_p)$ 中的秩为 i。文献 [2], 在条件 $p \geq n+3$ 下说明了这种 $\mathcal{E}$ 的存在性。我们指出， $\mathcal{E}$ 的同余条件可以改述为：对于任意 $\gamma \in \Gamma_n$，都有

$$\mathcal{E}|\gamma \equiv 1 \bmod p \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma \in \Gamma_0^{(n)}(p)$$

以及 $\mathcal{E}|\gamma \equiv 0$ 模 p，对 $\gamma \notin \Gamma_0^{(n)}(p)$。

我们证明关于 $m=1$ 的命题。我们选取 $\mathcal{E}$ 的适当幂 α，并考虑从 $\Gamma_0^{(n)}(p)$ 级到 $\Gamma^{(n)}(N)$ 级的迹 $\cap\Gamma^{(n)}(N)$:

$$F = f\mathcal{E}^\alpha + \sum_{j \bmod p} (f\mathcal{E}^\alpha)|\delta_j$$

其中 δ_j 是不属于 $\Gamma_0^{(n)}(p)\cap\Gamma^{(n)}(N)$ 的左陪集代表元，特别是，$\mathcal{E}|\delta_j \equiv 0$模 p。应用 γ，可知 $\delta_j\cdot\gamma \notin \Gamma_0^{(n)}(p)$，因此 $(f\mathcal{E}^\alpha)|\delta_j\cdot\gamma \equiv 0$模 p。注意到 F 的级为 $\Gamma^{(n)}(N)$，因此我们可以应用通常的q-展开原理：于是有

$$F|\gamma \equiv (f|\gamma)\mathcal{E}^\alpha \equiv f|\gamma \bmod p.$$

特别地， $F|\gamma$ 是 p-整的，因此 $f|\gamma$ 也是 p-整的。至此，关于 $m=1$ 的证明完成。 □

8.2 $m \geq 2$的证明

我们对幂 m 使用归纳法来证明 $m \geq 2$。假设该命题对级 $\Gamma_0^{(n)}$（p^{m-1}）成立。令

$$\mathcal{F} := \mathcal{E}(p^{m-1}z) = p^{-(m-1)\frac{nl}{2}}\mathcal{E}|\begin{pmatrix} p^{m-1}\cdot 1_n & 0_n \\ 0_n & 1_n\end{pmatrix} \in M_l(\Gamma_0^{(n)}(p^m))_{\mathbb{Z}_{(p)}}.$$

这里， l 是 $\mathcal{E}$ 的权。取任意正整数 α，考虑 $f\mathcal{F}^\alpha$，以及从 $\Gamma_0^{(n)}$（p^m）$\cap\Gamma^{(n)}$（N）到 $\Gamma_0^{(n)}$（p^{m-1}）$\cap\Gamma^{(n)}$（N）的迹；

$$\begin{aligned} F = \mathrm{tr}(f\mathcal{F}^\alpha) &= f\mathcal{F}^\alpha + \sum_w^{p-1}(f\mathcal{F}^\alpha)|\gamma_w \\ &= f\mathcal{F}^\alpha + \sum_{j=1}^{p-1}(f|\gamma_w)(\mathcal{F}|\gamma_w)^\alpha, \end{aligned} \tag{8.1}$$

其中， $\gamma_w = \left(\begin{smallmatrix} 1_n & 0_n \\ p^{m-1}N_w & 1_n\end{smallmatrix}\right)$ 和 w 遍历模 p 的 n 阶整对称矩阵的完备代表集，但不包括平凡陪集 $p\cdot\mathrm{Sym}_n(\mathbb{Z})$。现在我们证明 $(f|\gamma_w)(\mathcal{F}|\gamma_w)^\alpha \equiv 0$模 p。通过直接计算，我们得到

$$\begin{pmatrix} p^{m-1}\cdot 1_n & 0_n \\ 0_n & 1_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_n & 0_n \\ p^{m-1}Nw & 1_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_n & 0_n \\ Nw & 1_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^{m-1}\cdot 1_n & 0_n \\ 0_n & 1_n\end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\mathcal{F}|\begin{pmatrix}1_n & 0_n\\ p^{m-1}Nw & 1_n\end{pmatrix} &= p^{-(m-1)\frac{nl}{2}}\mathcal{E}|\begin{pmatrix}p^{m-1}\cdot 1_n & 0_n\\ 0_n & 1_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1_n & 0_n\\ p^{m-1}Nw & 1_n\end{pmatrix}\\ &= p^{-(m-1)\frac{nl}{2}}\mathcal{E}|\begin{pmatrix}1_n & 0_n\\ Nw & 1_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p^{m-1}\cdot 1_n & 0_n\\ 0_n & 1_n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{E}|\left(\begin{smallmatrix}1_n & 0_n\\ Nw & 1_n\end{smallmatrix}\right) \equiv 0$ 模 p，并且我们可以对某个 p-整模形式 $X = X_w$ 取 $\mathcal{E}|\left(\begin{smallmatrix}1_n & 0_n\\ Nw & 1_n\end{smallmatrix}\right) = pX$。于是有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}|\begin{pmatrix}1_n & 0_n\\ p^{m-1}Nw & 1_n\end{pmatrix} &= p^{-(m-1)\frac{nl}{2}}\mathcal{E}|\begin{pmatrix}1_n & 0_n\\ Nw & 1_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p^{m-1}\cdot 1_n & 0_n\\ 0_n & 1_n\end{pmatrix}\\ &= p^{-(m-1)\frac{nl}{2}}(pX)|\begin{pmatrix}p^{m-1}\cdot 1_n & 0_n\\ 0_n & 1_n\end{pmatrix}\\ &= pX(p^{m-1}z) \equiv 0 \bmod p.\end{aligned}$$

因此，当 α 足够大时，$(f|\gamma_w)(\mathcal{F}|\gamma_w)^\alpha \equiv 0$ 模 p 成立。根据 f 是 p-整的假设，F 也是 p-整的。

现在令 $\delta \in \Gamma_0^{(n)}(p^m)$，我们可以应用归纳法，因为 F 的级为 $\Gamma_0^{(n)}(p^{m-1}N)$。我们从 F 的 (8.1) 式开始，并对其应用 δ：如果 f 是 p-整的，那么 F 也是 p-整的，进而 $F|\delta$ 也是 p-整的。由 (8.1) 式可得

$$F|\delta = (f|\delta)\mathcal{F}^\alpha + \sum_{j=1}^{p-1}(f\mathcal{F}^\alpha)|\gamma_w\delta$$

(8.1) 式右边的第一项模 p 同余于 $f|\delta$。我们证明 $(f\mathcal{F}^\alpha)|\gamma_w\delta \equiv 0$ 模 p。为此，我们必须在 (8.2) 式右侧乘以 $\delta = \left(\begin{smallmatrix}a & b\\ p^m c & d\end{smallmatrix}\right)$。得到

$$\begin{pmatrix}p^{m-1}\cdot 1_n & 0_n\\ 0_n & 1_n\end{pmatrix}\gamma_w\delta = \begin{pmatrix}a & p^{m-1}b\\ wNa+pc & wNp^{m-1}b+d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p^{m-1}\cdot 1_n & 0_n\\ 0_n & 1_n\end{pmatrix}.$$

由于 $p \nmid wNa$，并通过与上述类似的论证，我们得到 $\mathcal{F}|\gamma_w\delta \equiv 0$ 模 p。这表明，对于充分大的 α，$(f\mathcal{F}^\alpha)|\gamma_w\delta \equiv 0$ 模 p。这意味着 $F|\delta \equiv f|\delta$ 模 p，因此 $f|\delta$ 是 p-整的。

□

注 8.2. 如果 f 具有“模 p 的二次 Nebentypus 特征”，即 f（在与上述定理相同的条件下）满足 $f|_k\gamma = (\det(d)^p) \cdot f$，对所有带有特征 $(\frac{*}{p})$ 的 $\gamma \in \Gamma_0^{(n)}(p^m) \cap \Gamma^{(n)}(N)$ 均成立，那么上述证明稍作变通即可适用。上述证明只需修改“$m = 1$”这一步，此时必须使用一个具有 Nebentypus 特征 $(\frac{*}{p})$ 的函数 $\mathcal{E}$。

9 附录 B：Kitaoka 公式

在本附录中，我们将 Kitaoka 定理推广到更高次数，以明确我们定理中 θ 级数的级。随后，我们将其付诸实践并讨论级。

9.1 Kitaoka 公式的推广

在这里，我们会在（正定整）二次型S （或整对称矩阵）与欧几里得空间（$\mathbb{R}^m, \langle\ ,\ \rangle$）中的格 L 这两种表述之间自由切换。我们的目标是将 Kitaoka 的一个结果推广到次数 n；我们仅陈述足以满足应用且证明相当简短的版本。若采用更精细的版本来推广 Kitaoka 的计算，则可以得到更一般的结论。

定理 9.1. 设 L 是秩为 $m = 2k$、级为 N的偶整正定格。设 d 是 N 的正因子，且 $(d, \frac{N}{d}) = 1$，并且 $c := \frac{N}{d}$。取整数 a, b，使得 $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，并记 $\mathfrak{M}$ 为将 M对角嵌入 n次到 $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ 中的映射，即 $\mathfrak{M} := \left(\begin{smallmatrix} a\cdot 1_n & b\cdot 1_n \\ c\cdot 1_n & d\cdot 1_n \end{smallmatrix}\right)$。

于是，存在适当的常数 κ

$$\theta_L^{(n)}|_k\mathfrak{M} = \kappa \cdot \theta_{L'}^{(n)}, \tag{9.1}$$

其中 L' 是由下式刻画的格

$$L' \otimes \mathbb{Z}_p = \begin{cases} L \otimes \mathbb{Z}_p & \text{if } p \nmid d, \\ (L \otimes \mathbb{Z}_p)^* & \text{if } p \mid d, \end{cases}$$

并且 $*$ 表示其对偶。

在开始证明之前，我们需要准备一些其他记号并回顾以下事实：Kitaoka [16] 证明了该结论的次数为一的版本，适用于更一般类型的 θ 级数

$$\theta_L^{(1)}(q)(z) = \sum_{\mathfrak{x} \in L} q(\mathfrak{x}) e^{2\pi i \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle \cdot z}$$

允许将齐次调和多项式 q 作为 θ 级数中 $\mathbb{C}^m$ 的系数。检查他的证明可知，比例常数并不依赖于这些调和多项式。

Ibukiyama [11] 研究了 $\mathbb{H}_n$上的全纯微分算子 $\mathcal{D}$，它们是偏全纯导数的多项式，并在 $\mathrm{diag}(z_1, \cdots, z_n)$ 处取值；这样的算子 $\mathcal{D}$ 将定义在 $\mathbb{H}_n$ 上的全纯函数 F映射为定义在 $\mathbb{H}_1^n$ 上的全纯函数 $\mathcal{D}(F)$，使得根据上述记号

$$\mathcal{D}(F|_k\mathfrak{M}) = \mathcal{D}(F)|_{k_1}^{(z_1)}M \cdots |_{k_n}^{(z_n)}M$$

对于具有某些权 $k_i \geq k$的任意 $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，该式均成立。斜杠算子中的上标 z_i 表示应当相对于变量 z_i应用 $|_{k_i}M$。

他还证明了，可以从所有的 $\mathcal{D}(F)$ 中恢复 F 关于 $Z = (z_{ij})$ 的非对角系数的泰勒展开 $\in \mathbb{H}_n$。为了证明

该定理，只需证明两边在应用所有这类微分算子后相等。

为此，我们需要一些额外的记号：对于一个固定的 Ibukiyama 型微分算子 $\mathcal{D}$，它将变量 z_1、$\cdots$、z_n 中的自守因子从 $\det^k$ 变为k_1、$\cdots$、k_n，我们定义

$$\mathcal{D}e^{2\pi i\sum\langle w_i,w_j\rangle z_{ij}} = P(w_1,\cdots,w_n)e^{2\pi i\sum\langle w_i,w_i\rangle z_i}$$

其中 $z_i := z_{ii}$。那么 P 是关于每个变量 w_i 的调和多项式，因此我们可以将它写成有限个纯张量之和：

$$P(w_1,\cdots,w_n) = \sum_t q_{1,t}(w_1)\cdots q_{n,t}(w_n),$$

其中 $q_{i,\ t}$ 是变量 w_i的调和多项式。

定理 9.1 的证明。将 $\mathcal{D}$ 作用于 (9.1) 的右边，得到

$$\kappa\cdot\sum_t \theta^{(1)}_{L'}(q_{1,t})(z_1)\cdots\theta^{(1)}_{L'}(q_{n,t})(z_n).$$

将 $\mathcal{D}$ 作用于左边，得到

$$\sum_t \theta^{(1)}_{L}(q_{1,t})(z_1)\cdots\theta^{(1)}_{L}(q_{n,t})(z_n)|_{k_1}M\cdots|_{k_n}M.$$

现在需要使用 Kitaoka 的次数 1 结果来得到我们的断言。 □

9.2 应用

Kitaoka 公式使我们能够排除模形式与高层 θ 级数之间的某些同余（就级的与 p 互素的部分而言）：

命题 9.2. 设 n 为偶正整数，p 为满足 $p \geq n+1$ 的素数。设 N、N' 与 p 互素，且 $S \in \Lambda_n^+$ 的级为 p^aN。假设

$$p^bN' \mid p^aN \quad and \quad \phi \equiv \theta_S^{(n)} \bmod p$$

对于某个 $\phi \in M_k$，有 $\Gamma_0^{(n)}(p^bN')$ $\chi^{\mathbb{Z}_{(p)}}$，其中 $\chi^2 = 1$。那么 $N = N'$ 和 $\chi_N = (\chi_S)_N$。

证明。我们希望应用修正后的 q-展开原理。为此，我们必须修改 ϕ and $\theta_S^{(n)}$，使它们具有相同的权以及相同的（二次）p-Nebentypus 特征分量：我们回顾 B¨ocherer-Nagaoka [6] 的结果，其中存在次数为 n 的模形式 $\mathcal{E}$ for $\Gamma_0^{(n)}(p)$，其权为 $\frac{p-1}{2}$，且具有非平凡的二次 Nebentypus 特征。于是，命题 2.4 允许我们选择 $t \in \mathbb{N}$，使得 $\theta_S^{(n)}\cdot\mathcal{E}^t$ 和 ϕ 具有相同的

权以及相同的 p-Nebentypus 特征分量（当 $k \geq \frac{n}{2}$ 时这一点成立；对于不等式方向相反的情形，作相应修改即可）。因此，我们确实可以将定理 8.1 应用于 $\frac{1}{p}\left(\phi - \theta_S^{(n)} \cdot \mathcal{E}^t\right)$。

我们可以扩大 b （如果需要）以得到 $a = b$。假设存在一个不同于 p 的素数 q，满足 $q^r || N$，且 $q^s || N'$ 满足 $s < r$。我们将 Kitaoka 定理应用于 $\theta_S^{(n)}$ ，其中

$$M = \begin{pmatrix} * & * \\ p^a \cdot \frac{N}{q^r} & q^r \end{pmatrix}.$$

由修正后的 q-展开原理定理 8.1，我们有 $\theta_S^{(n)}|\mathfrak{M} \equiv \pm\phi|\mathfrak{M}$ 模 p，其中的 $\pm$ 来自将 M 应用于 $\mathcal{E}^t$。

令 L 对应于 S，并令 L' 对应于 S'。于是 S' 是一个有理对称矩阵，其分母中出现 q^r。$\theta_S^{(n)}|\mathfrak{M} = \kappa \cdot \theta_{S'}^{(n)}$ 的傅里叶展开有一个 S' 次傅里叶系数，该系数为

$$\kappa \cdot A(S', S').$$

由条件 $p > n+1$，可知 $A(S', S') \not\equiv 0$ 模 p。另一方面，$\phi|\mathfrak{M}$ 在 S' 处没有非零傅里叶系数，因为对于 $\Gamma_0^{(n)}(p^a N')$，尖点 $\mathfrak{M}$ 的宽度的 q-部分为 q^s，且 $s < r$。因此，$\kappa \cdot A(S', S')$，从而 κ 必须被 p 整除，即 $\kappa \in p \cdot R_{p^a}$。但是，修正后的 q-展开原理告诉我们，$\theta_{S'}^{(n)}|\mathfrak{M}^{-1} = \frac{1}{\kappa} \cdot \theta_S^{(n)}$ 是 p-整的，特别是 $\frac{1}{\kappa} \in R_{p^a}$。这就产生了矛盾，从而得到 $N' = N$。

关于 Nebentypus 特征的 N-分量的陈述，可通过对任意满足 $C \equiv 0_n \bmod p^r N$ 且 $\det(D) \equiv 1 \bmod p$ 的整数矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ 应用修正后的 q-展开原理定理 8.1 得出。 □

推论 9.3. 设 n 是正偶整数，p 是满足 $p > n+3$ 的素数。设 $S \in \Lambda_n^+$。假设对于某个满足 $\chi^2 = 1$ 的 $\phi \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$，有 $\theta_S^{(n)} \equiv \phi \bmod p$。那么 level($S$) 的形式为 "$p$- 次幂 $\times N'$"，其中某个 $N' \mid N$ 和 $\chi = '\chi_S$。

致谢

作者谨向 G. Nebe 教授和 R. Schulze-Pillot 教授致谢，感谢他们提供的宝贵建议，尤其是关于二次型的自同构群的阶，以及 Kitaoka 变换公式的推广方面的建议。他们还要感谢 T. Yamauchi 教授提供 q-展开原理的相关信息。本研究得到日本学术振兴会科学研究费助成事业编号 22K03259 的资助。

参考文献

[1] A. N. Andrianov，《二次型与 Hecke 算子》。数学科学基础丛书 [基础数学科学原理],286。Springer-Verlag，柏林，1987。xii+374 页。[2]S. B¨ocherer，《 p-进 Siegel 模形式浅介》。 L-函数与自守形式，317-332，数学与计算机科学贡献，10，施普林格，沙姆，2017。.[3] S. B¨ocherer，《关于 Siegel Eisenstein 级数的傅里叶-Jacobi 展开》。数学杂志 183 (1983)，第 1 期，21-46。[4] S. B¨ocherer，T. Kikuta，《关于模 p 奇异模形式》。Forum Math. 28 (2016)，第 6 期，1051-1065。[5]S. B¨ocherer，S. Nagaoka，《 Siegel 模形式及其权的同余》。Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 80 (2010)，第 2 期，227-231。[6] S. B¨ocherer，S. Nagaoka，《关于 Siegel 模形式的模 p 性质》。数学年刊 338 (2007)，第 2 期，421-433。[7] S. B¨ocherer，S. Nagaoka，《关于级 p Siegel 模形式及其模 p性质》。Manuscripta Math. 132 (2010)，第 3-4 期，501-515。[8] S. B¨ocherer，S. Raghavan，《关于 Siegel 模形式的傅里叶系数》。J. Reine Angew. Math. 384 (1988)，80-101。[9] E. Freitag，《稳定模形式》。数学年刊 230 (1977)，第 3 期，197-211。[10] E. Freitag，《奇异模形式与 θ 关系》。《数学讲义》，1487。Springer-Verlag，柏林，1991。iv+172 页。[11] T. Ibukiyama，《Siegel 模形式上的一般微分算子与特殊多项式》。Selecta Math. (N.S.) 26 (2020)，第 5 期，论文编号 66，50 页。[12]T. Ichikawa，《Siegel 模形式之间的同余》。数学年刊 342 (2008)，第 3 期，527-532。[13] E. Kani，《二元 θ 级数空间》。Ann. Sci. Math. Québec 36 (2012)，第 2 期，501-534 (2013)。[14]H. Katsurada，S. Nagaoka，《关于 p-进 Siegel Eisenstein 级数的一则注记》，arXiv:2204.01261v2 [math.NT]。[15] N. M. Katz，《关于特征 p下模形式的一个结果》。单变量模函数，V（第二届国际会议论文集，波恩大学，波恩，1976），第 53-61 页。《数学讲义》，第 601 卷，施普林格，柏林，1977。

[16] Y. Kitaoka，关于与正定二次型相关的θ函数变换公式的一则注记。《数论杂志》12 (1980)，第2期，224-229页。[17] H. Klingen，关于Siegel模形式的表示定理。《数学杂志》102 (1967)，30-43页。[18] S. Nagaoka，关于Serre的例子中 p-进 Eisenstein 级数的一则注记。《数学杂志》235 (2000)，第2期，227-250页。[19] A. Pitale，R. Schmit，A. Saha，近全纯Siegel Eisenstein级数拉回的整性与尖点性。《数学出版物》66 (2022)，第1期，405-434页。[20] M. Raum，O. Richter，Siegel 模形式的 Sturm 界。《数论研究》1 (2015)，论文编号5，共8页。[21] H. L.Resnikoff，奇异权的自守形式是奇异形式。《数学年刊》215 (1975)，173-193页。[22] J.-P. Serre，某些算术函数的可除性。《数学教学》（第2辑）22 (1976)，第3-4期，227-260页。[23] J.-P. Serre，模形式与 p-进 ζ 函数。单变量模函数，III（国际暑期学校论文集，安特卫普大学，安特卫普，1972），第191-268页。《数学讲义》，第350卷，施普林格，柏林，1973。[24] G. Shimura，微分算子、全纯投影与奇异形式。《杜克数学杂志》76 (1994)，第1期，141-173页。[25] J. Sturm，关于模形式的同余。数论（纽约，1984-1985），275-280页，《数学讲义》1240，施普林格，柏林，1987。[26] H. P. F. Swinnerton-Dyer，关于 l-进表示及模形式系数的同余。单变量模函数，III（国际暑期学校论文集，安特卫普大学，安特卫普，1972），第1-55页。《数学讲义》，第350卷，施普林格，柏林，1973。Siegfried B¨ocherer Kunzenhof 4B 79177 弗赖堡，德国 电子邮箱：siegfried.boecherer@uni-mannheim.de Toshiyuki Kikuta 信息工程学院 信息与系统工程系 福冈工业大学 和白东3-30-1，东区，福冈 811-0295，日本 电子邮箱：kikuta@fit.ac.jp