arXiv:2302.00311v1 [math.AP] 1 Feb 2023

扩展 Lugiato–Lefever 方程中的钉扎

Lukas Bengel、Dmitry Pelinovsky 和 Wolfgang Reichel

摘要。我们研究 Lugiato-Lefever 方程（LLE）的一种变体。LLE 是定义在一维环面上的、带有外力和阻尼的非线性薛定谔方程；在此基础上，我们加入了一个带势 $\varepsilon V(x)$ 的一阶导数项。该势打破了 LLE 的平移不变性。根据有效势 V_{eff}（即对 V 进行适当加权和积分所得的势）零点的存在性，我们证明，从 $\varepsilon = 0$ 出发的定常解可以局部延拓到值域 $\varepsilon \neq 0$ 中。此外，ε 延拓解的极值点位于 V_{eff} 的零点附近。因此，我们将这一现象称为定常解的钉扎。如果进一步假设 $\varepsilon = 0$ 处的初始定常解具有谱稳定性，并且由平移不变性导致的简单零特征值是虚轴上唯一的特征值，那么根据 V_{eff} 的零点处 V'eff 的符号以及 ε 的符号，我们可以证明其 ε 延拓具有渐近稳定性或不稳定性。LLE 的这一变体源于对克尔非线性环形微腔中光学频率梳的描述；该微腔由两个频率和功率均不同的连续单色光源泵浦。我们通过数值模拟展示了分析结果。

1. 引言

Lugiato-Lefever 方程 [19] 是描述由强连续激光源泵浦的谐振腔内电磁场最常用的模型。电磁场在腔内传播，并因曲率和／或材料缺陷而遭受损耗。最重要的是，腔体由克尔非线性材料构成，因此，在调制不稳定性的触发下，电磁场可能发生腔内泵浦模式与谐振增强模式之间的非线性相互作用。在谐振腔和激光器处于适当驱动条件时，腔内可能形成稳定的克尔频率梳；它是一种空间局域的宽频谱波形。

自 2005年 诺贝尔奖得主 Theodor Hänsch 发现频率梳以来，频率梳已在极其广泛的领域得到应用，例如高容量光通信 [22], 、超快光学测距 [32], 、光学频率计量 [33], 或光谱学 [29, 35]。Lugiato-Lefever 方程（LLE）是借助慢变包络近似推导出的腔内电磁场振幅方程。

以下假设腔体为周长归一化为 2π 的环形微腔。使用无量纲量，并令 $u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$

日期：2023年2月2日。2000数学主题分类。主要分类：34C23、34B15；次要分类：35Q55、34B60。关键词与短语。非线性薛定谔方程、分岔理论、延拓法。1

表示电磁场缓慢变化且 2π-周期振幅时，LLE 的原始形式 [19]可写为

$$\mathrm{i}\partial_t u = -d\partial_x^2 u + (\zeta - \mathrm{i}\mu)u - |u|^2 u + \mathrm{i}f_0, \qquad (x,t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

其中， $\mathbb{T}$ 是长度为 2π 的圆。谐振腔中第 k 个傅里叶模态的色散关系可表示为 $\omega_k = \omega_0 + d_1 k + d_2 k^2$，其中 $d := \frac{2}{\kappa} d_2$ 是归一化色散系数， $\kappa > 0$是腔衰减率。失谐值 ζ 表示激光频率 ω_{p_0} 与谐振腔零模 $k_0 = 0$ 的最近谐振频率 ω_0 之间的偏移，而数值 μ 量化了阻尼系数。最后，f_0 表示功率为 $|f_0|^2$ 的泵浦强度。

近年来，人们还讨论了新的泵浦方案 [31], : 此时不再使用单色激光泵浦，而是将具有两个不同频率的双激光泵浦用作源项。再次使用无量纲量，所得方程为

$$\mathrm{i}\partial_t u = -d\partial_x^2 u + (\zeta - \mathrm{i}\mu)u - |u|^2 u + \mathrm{i}f_0 + \mathrm{i}f_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 x - \nu_1 t)}, \qquad (x,t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

详细推导参见 [10, 11, 31] 。与 (1.1) 不同，现在还有第二个源项，其泵浦强度为 f_1，而 k_1 表示第二个泵浦模态（第一个泵浦模态仍为 $\mathrm{k}_0 = 0$）。这产生了两个失谐变量 $\zeta = \frac{2}{\kappa}(\omega_0 - \omega_{p_0})$、$\zeta_1 = \frac{2}{\kappa}(\omega_{k_1} - \omega_{p_1})$，它们定义了 $\nu_1 = \zeta - \zeta_1 + \mathrm{dk}_1^2$。 [11]的主要结论之一是，与 (1.1) 的稳态相比，(1.2) 的稳态局域性强得多；在所有满足 $\mathrm{f}_0^2 + \mathrm{f}_1^2$ 保持恒定的功率分布中，当 $\mathrm{f}_0 = \mathrm{f}_1$ 时，可以获得最佳结果。

然而，在某些情况下，功率分布 $|f_0| \gg |f_1|$ 在物理实验中更为适用。在这种情况下，附录A 表明，可以从 (1.2) 推导出如下形式的受扰 LLE

$$\mathrm{i}\partial_t u = -d\partial_x^2 u + \mathrm{i}\varepsilon V(x)\partial_x u + (\zeta - \mathrm{i}\mu)u - |u|^2 u + \mathrm{i}f_0, \qquad (x,t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

在物理背景下，$\mathrm{V(x)} = \omega_1 - 2\mathrm{dk}_1^2 \mathrm{f}_1\mathrm{f}_0 \cos(\mathrm{x})$，且 $\varepsilon = 1$。然而，如果 ω_1 and $\mathrm{k}_1^2 \mathrm{f}_1 / \mathrm{f}_0$ 较小，我们将（1.3）视为受扰LLE，其中 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ 较小，而 $\mathrm{V} \in \mathrm{C}^1([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ 是一个一般的周期势。回顾一下，（1.3）已经设定在移动坐标系中。其稳态形式的方程变为

$$-du'' + \mathrm{i}\varepsilon V(x)u' + (\zeta - \mathrm{i}\mu)u - |u|^2 u + \mathrm{i}f_0 = 0, \qquad x \in \mathbb{T}. \tag{1.4}$$

本文探讨的主要问题是方程（1.3）的稳态解的存在性与稳定性。我们的主要结果在第2节中作了详细陈述，可概括如下：

- 在定理1 中，我们证明了当 ε 较小时，方程（1.4）的解的存在性，条件是有效势 Veff变号，其中Veff是系数函数V的加权积分形式。
- 在定理2 和3中，我们证明了定理1 所得到的解在（1.3）的时间演化下的稳定性/不稳定性性质。

- 在第3节中，我们通过数值模拟展示了定理的研究结果。数值模拟表明，对于较小的 ε，ε-延拓解的强度极值位置不会发生显著变化。因此，我们将这一现象称为有效势 V 零点处解的钉扎*eff*。

方程（1.1）的解的存在性和分岔行为已得到相当充分的研究，参见 [8, 9, 12, 13, 21, 23, 24, 25, 26] ，其稳定性也已在[3, 4, 14, 15, 16, 28, 30]中进行了研究。关于（1.2）的分析和数值研究最近已有报道 [10, 11]。相比之下，我们尚未发现对（1.3）的任何研究。然而，有一个相关问题：在非线性薛定谔方程中，以$\varepsilon V(x)u'$ 替代的项是 $\varepsilon V(x)u$ 这一形式，该问题已得到相当充分的研究，参见 [1, 7, 27]。在这种情况下，解钉扎在V_{eff} 的非退化临界点附近，而不是像我们的问题中那样钉扎在V_{eff} 的零点附近。

2. 主要结果

本节介绍关于方程（1.3）的定常解的存在性与稳定性的主要结果。对于 $\varepsilon = 0$ ，存在大量非平凡（非常数）的定常解，参见 [8, 21]。我们从满足以下定义所述非退化条件的这类解开始讨论。

定义1。对于 $u \in H^2_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$，若方程（1.4）的非常数解 $\varepsilon = 0$ 的线性化算子的核

$$L_u\varphi := -d\varphi'' + (\zeta - \mathrm{i}\mu - 2|u|^2)\varphi - u^2\bar{\varphi}, \quad \varphi \in H^2_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$$

仅由 $\operatorname{span}\{u'\}$ 构成。

注1。注意，$L_u : H^2_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \to L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 是同构 $-d\partial_x^2 + \operatorname{sign}(d) : H^2_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \to L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 的紧扰动，因此是一个 Fredholm 算子。还需注意，由于 $\varepsilon = 0$ 中关于 x 的平移不变性，$\operatorname{span}\{u'\}$ 始终属于 L_u 的核。非退化意味着，除了显然的候选解 u' （及其任意实数倍）之外，L_u 的核中不存在其他元素。

可以提出这样一个问题：定义1中 $\varepsilon = 0$ 处的非恒定非退化解能否延拓到 $\varepsilon \neq 0$区域。为描述这种延拓，我们将这类解记为 u_0 ，其空间平移记为 $u_\sigma(x) := u_0(x - \sigma)$。非退化性假设意味着 $\ker L_{u_\sigma} = \operatorname{span}\{u'_\sigma\}$。由于伴随算子 $L^*_{u_\sigma}$ 也有一维核，因此存在 $\phi^*_\sigma \in H^2_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$，使得 $\ker L^*_{u_\sigma} = \operatorname{span}\{\phi^*_\sigma\}$。注意，$\phi^*_\sigma(x) = \phi^*_0(x - \sigma)$。

Befor在陈述存在性结果之前，我们先说明关于势 V 的假设 .

(A1) 势 $V : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto V(x)$ 是一个 2π-周期连续可微函数。

存在性结果由以下定理给出。

定理1。 设 $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，$f_0$，$\zeta$，$\mu \in \mathbb{R}$ 为固定值，并假设 *(A1)* 成立。此外，设 $u_0 \in H^2_{\text{per}}([-\pi,\pi], \mathbb{C})$ 是 (1.4) 在 $\varepsilon = 0$上的非常数非退化解。如果 σ_0 是函数的一个

单零点

$$\sigma \mapsto V_{\text{eff}}(\sigma) := \text{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \text{i}V(x+\sigma)u_0'\bar{\phi}_0^* \, dx \tag{2.1}$$

于是存在一条连续曲线 $(-\varepsilon^*, \ \varepsilon^*) \ni \varepsilon \to u(\varepsilon) \in H^2_{\text{per}}([-\pi,\pi], \ \mathbb{C})$ 由方程的解组成 (1.4)，其中 $\|u(\varepsilon) - u_0(\cdot - \sigma_0)\|_{H^2} \le C\varepsilon$，其中 $C > 0$为某个常数。

注2。 σ_0 的取值由线性非齐次方程的唯一解的存在性决定 $v \in H^2_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$

$$L_{u_{\sigma_0}} v = -\text{i}V(x)u_{\sigma_0}'$$

满足如下性质： $v \perp_{L^2} u_{\sigma_0}'$。Fredholm条件表明 σ_0 是 V_{eff}的零点。V_{eff} 的零点是单零点，因此得到定理 1的结论。

为研究定常解的稳定性，u 我们引入展开式

$$u(x) + v(x,t) = u_1(x) + \text{i}u_2(x) + v_1(x,t) + \text{i}v_2(x,t)$$

并将其代入受扰LLE（1.3）。忽略v 中的二次项和三次项，并分离实部和虚部后，我们得到关于$\boldsymbol{v} = (v_1,v_2)$ 的线性化系统，其形式如下：

$$\partial_t \boldsymbol{v} = \widetilde{L}_{u,\varepsilon}\boldsymbol{v}$$

线性化的形式为

$$\widetilde{L}_{u,\varepsilon} = JA_u - I(\mu - \varepsilon V(x)\partial_x) \tag{2.2}$$

with

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_u := \begin{pmatrix} -d\partial_x^2 + \zeta - (3u_1^2 + u_2^2) & -2u_1u_2 \\ -2u_1u_2 & -d\partial_x^2 + \zeta - (u_1^2 + 3u_2^2) \end{pmatrix}.$$

下文中，我们通常将 $\mathbb{C}$ 中的函数视为 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$中的向量值函数，并采用如下记号

$$u = u_1 + \text{i}u_2 \in \mathbb{C} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

我们将 $\widetilde{L}_{u,\varepsilon}$ 在$L^2([-\pi,\pi]) \times L^2([-\pi,\pi])$ 中的谱记为 $\sigma(\widetilde{L}_{u,\varepsilon})$，并将$L_{u,\varepsilon}$ 的预解式集合记为 $\rho(L_{u,\varepsilon})$。

为了得到稳定性结果，我们还需要对非$\widetilde{}$退化解u_0 作出一项关于$L_{u_0,0}$的谱的额外假设。

$\widetilde{}$(A2) 特征值 $0 \in \sigma(L_{u_0,0})$ 是代数单重的，且存在 $\xi > 0$ 使得

$$\sigma(\widetilde{L}_{u_0,0}) \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}\, z \le -\xi\} \cup \{0\}.$$

注 3. 根据 Fredholm 理论，$\widetilde{L}_{u_0,0}$ 的零特征值为单重的假设等价于 $u_0' \notin$ 值域 $\widetilde{L}_{u_0,0} =$ 张成空间$\{J\phi_0^*\}^\perp$。采用归一化 $\langle u_0', J\phi_0^*\rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} u_0' \cdot J\phi_0^*\,dx = 1$将很方便。我们还注意到

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_0' \cdot J\phi_0^*\,dx = \mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{i}u_0'\bar{\phi}_0^*\,dx.$$

在陈述稳定性结果之前，我们先澄清，$\ker L_u^*$ 和 $\ker L_u$ 线性无关，因此V_{eff} 通常非零。我们还说明当u_0 关于x为偶函数时，$\ker L_u^*$ 和 $\ker L_u$ 中的特征函数的奇偶性。这对于许多实际计算是有用的。

引理 1。 设 $u_0 \in H^2_{per}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 是 (1.4) 的一个非常数、非退化解，其中$\varepsilon = 0$。则有以下结论：

(i) u_0' 和 ϕ_0^* 线性无关；*(ii)* 若 u_0 为偶函数，则 ϕ_0^* 为奇函数。

证明。 部分 (i)：利用分解式（2.2），其中 $u = u_0$ 以及 $\varepsilon = 0$，特征值问题 $L_{u_0}u_0' = 0$ 和 $L_{u_0}^*\phi_0^* = 0$等价于

$$JA_{u_0}\begin{pmatrix} u_{01}' \\ u_{02}' \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} u_{01}' \\ u_{02}' \end{pmatrix}, \qquad JA_{u_0}\begin{pmatrix} \phi_{01}^* \\ \phi_{02}^* \end{pmatrix} = -\mu\begin{pmatrix} \phi_{01}^* \\ \phi_{02}^* \end{pmatrix}.$$

但是，由于（u_{01}', u_{02}'）和（ϕ_{01}^*, ϕ_{02}^*）分别是JA_{u_0}对应于不同特征值 μ 和 $-\mu$的特征向量，因此它们线性无关。

（ii）部分：根据假设，我们有 $\ker L_{u_0} = \mathrm{span}\{u_0'\}$，且$u_0'$ 是奇函数。令L_{u_0} 在奇函数空间上的限制为

$$L_{u_0}^{\#} : H^2_{\mathrm{per,odd}} \to L^2_{\mathrm{per,odd}},\ \varphi \mapsto L_{u_0}\varphi.$$

那么$L_{u_0}^{\#}$ 仍是一个指标为 0 的 Fredholm 算子，且 $\ker L_{u_0}^{\#} = \mathrm{span}\{u_0'\}$。此外，我们有 $(L_{u_0}^{\#})^* = (L_{u_0}^*)^{\#}$，其中

$$(L_{u_0}^*)^{\#} : H^2_{\mathrm{per,odd}} \to L^2_{\mathrm{per,odd}},\ \varphi \mapsto L_{u_0}^*\varphi$$

是伴随算子在奇函数空间上的限制。但是，由于 $1 = \dim\ker (L_{u_0}^*)^{\#} = \dim\ker L_{u_0}^*$，因此 $\ker (L_{u_0}^*)^{\#} = \ker L_{u_0}^*$，从而 $\phi_0^* \in H^2_{\mathrm{per,odd}}$，如所述。□

稳定性结果由以下两个定理给出。若方程（1.4）的定常解 u~对所有特征值 λ of $L_{u,\varepsilon}$均满足 $\mathrm{Re}(\lambda) \le 0$，则称其为谱稳定。若存在一个特征值 λ 满足 $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$，则称其为谱不稳定。

定理 2. 令 $d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$，$f_0$，$\zeta$，$\mu \in \mathbb{R}$ 为固定值，并假设 *(A1)* 和 *(A2)* 成立。设 σ_0为 V 的单零点$_{\mathrm{eff}}$，如定理 1中所述，则有

$$V_{\mathrm{eff}}'(\sigma_0) = \mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{i}V'(x+\sigma_0)u_0'\bar{\phi}_0^*\,dx = \langle V'(\cdot+\sigma_0)u_0', J\phi_0^*\rangle_{L^2} \neq 0.$$

那么存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得在方程 *(1.4)* 的解分支 $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \ni \varepsilon \to u(\varepsilon) \in H^2_{\rm per}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 上，其中 $u(0) = u^{\sigma_0}$，当 $V'_{\rm eff}(\sigma_0)\cdot\varepsilon > 0$ 时，解 $u(\varepsilon)$ 谱稳定；当 $V'_{\rm eff}(\sigma_0)\cdot\varepsilon < 0$ 时，解谱不稳定。

定理 *3.* 设 $u(\varepsilon) \in H^2_{\rm per}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 是方程 *(1.3)* 的谱稳定定常解，其中 ε 取值较小，如定理 *2* 所述。那么 $u(\varepsilon)$ 渐近稳定，即存在 η、δ、$C > 0$，使得下述性质成立。若 $\varphi \in C([0,T), H^1_{per}([-\pi,\pi],\mathbb{C}))$ 是方程 *(1.3)* 的一个解，其最大存在时间为 T，且

$$\|\varphi(\cdot,0) - u(\varepsilon)\|_{H^1} < \delta$$

那么 $T = \infty$，且

$$\|\varphi(\cdot,t) - u(\varepsilon)\|_{H^1} \le Ce^{-\eta t}\|\varphi(\cdot,0) - u(\varepsilon)\|_{H^1} \quad \textit{for all } t \ge 0.$$

注4. 由于 $V_{\rm eff}$ 在 $\mathbb{T}$ 上的周期性，$V_{\rm eff}$ 的单零点成对出现。根据定理 2 和 3，每个单零点都会产生一个解分支，其中的解对 ε 的任意符号均渐近稳定。此外，在分岔点 $\varepsilon = 0$ 处会发生稳定性交换，即零特征值以非零速度穿过虚轴。

注5。 在 [4, 14] 作者构造了u 作为（1.4）的谱稳定解，适用于 $\varepsilon = 0$反常色散的情形$d > 0$。这些解满足谱条件$\sim\sigma(L_u, 0) \subset \{-2\mu\} \cup \{\mathrm{Re}\, z = -\mu\} \cup \{0\}$，因此是非退化初始解，我们的主要结果定理1、2和3 均适用于这些解。

注6。 若u 是（1.4）的解，则关系式

$$\int_{-\pi}^{\pi} (u'\bar{u} - \bar{u}'u)dx = 0$$

成立。每个偶函数u都满足这一约束。事实上，我们所知的在1.4）中 $\varepsilon = 0$ 的方程（$x = 0$ 的解，除了平移外，都关于该点为偶函数。

注 7。 在u_0 高度局域于0附近的极限下（例如极限$d \to 0\pm$），且势V 较宽时，有效势 $V_{\rm eff}$ 可由实际势V很好地近似。更准确地说，我们得到如下渐近关系

$$V_{\rm eff}(\sigma) = \mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{i}V(x+\sigma)u_0'\bar{\phi}_0^*\,dx \approx V(\sigma)\,\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{i}u_0'\bar{\phi}_0^*\,dx = V(\sigma)$$

给定 $\langle \mathrm{i}u_0', \phi_0^*\rangle_{L^2} = 1$。因此，渐近稳定分支从$V$ 的单零点 σ_0 处发生分岔，其中$V'(\sigma_0)\varepsilon > 0$。

注 8. 定理2 中关于孤立波定常解稳定性的判据，在 μ 较小时可写成更精确的形式。附录 B讨论了这一极限。

总而言之，我们的主要结果表明，对于 $\varepsilon = 0$, 若有效势 $V_{\rm eff}$ 存在变号，则方程 (1.4) 的非退化解可在小 $\varepsilon \neq 0$ 的情况下局部延拓。根据$V_{\rm eff}$ 在单零点处的导数，我们确定了这些解的稳定性。对于V 或 $V_{\rm eff}$，目前仍未找到适用于 $|\varepsilon|$ 较大时、用于判断定常解存在性与稳定性的准则。

3. 数值模拟

下面我们介绍方程 (1.4) 解的数值模拟。取$f_0 = 2$, $\mu = 1$, $V(x) = 0。1 + 0.5\cos(x)$以及 $d = \pm 0.1$。所有计算均借助 MATLAB 软件包 `pde2path` 完成（参见 [5, 34]），该软件包旨在对偏微分方程组的边值问题进行数值延拓和分岔分析。

我们首先描述 LLE 的定常解（1.1），它们与 1.4）的解相同，其中 $\varepsilon = 0$。相应结果主要取自[8, 21]。存在一条平凡的空间常数解曲线，参见图 1中的黑线；反常色散（$d = 0.1$）和正常色散（$d = -0.1$）对应的曲线相同。接下来可以发现，平凡解曲线上有有限个分岔点（蓝点）。根据色散参数 d 的符号，可以找到周期区域 $\mathbb{T}$上的单孤子分支。在以下描述中，我们始终沿着平凡解的路径，从 ζ的负值开始。

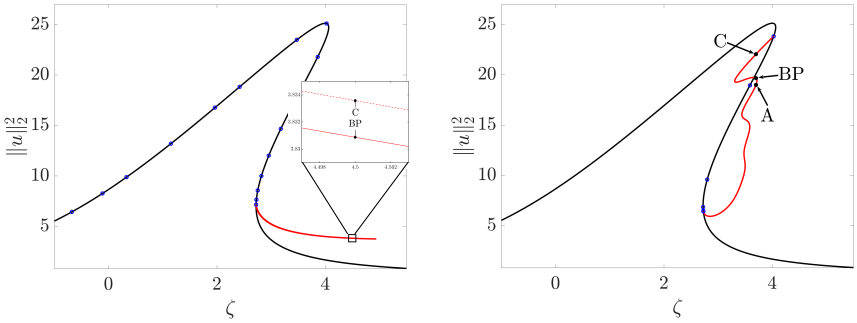

图1。情形 $\varepsilon = 0$的分岔图。蓝点表示平凡解曲线（黑线）上的分岔点。红色曲线表示单孤子解分支。选择 BP 点作为定理 1的起点。同一分支上、参数 ζ取相同值时的其他解，在左图中标记为 C，在右图中标记为 A、C。左图对应 $d = 0.1$，右图对应 $d = -0.1$。

对于$d = 0.1$（图1左图）中，沿着平凡分支存在一个最后的分岔点，由此产生一条单一的亮孤子分支（红线）。该分支有一个转折点，在此处解从不稳定（虚线）变为稳定（实线）；越过转折点后，它又逐渐趋近平凡分支。因此，图1 左图中的红线实际上代表两条不同但几乎重合的曲线，在放大的插图中可以看出这一点。我们选择了稳定分支上 BP 点处的一个解，作为阐述定理1和2的起始点。

在 $d = -0.1$（图 1右图）中，沿着平凡分支存在第一个分岔点，单暗孤子分支（红线）从该点分岔而出。在该分支的第二个转折点附近，存在局域性最强的单孤子；我们选择了点 BP 处的一个稳定暗孤子解，作为说明定理 1和 2的起点。

接下来，我们解释图2中从图1的 $\varepsilon = 0$ 情形出发，对所选点 BPs 在 ε 中进行延拓的整体图景。局部图景由定理1描述。首先注意以下对称性：由于 V(x) 关于 $x = 0$ 为偶函数，我们发现 $(u(x), \varepsilon)$ 是 (1.4) 的解，当且仅当 $(u(-x), -\varepsilon)$ 满足 (1.4)。由于反射 u 不会影响 L^2 范数，因此对于 $\varepsilon > 0$，我们得到与 $\varepsilon < 0$ 完全镜像的图景。

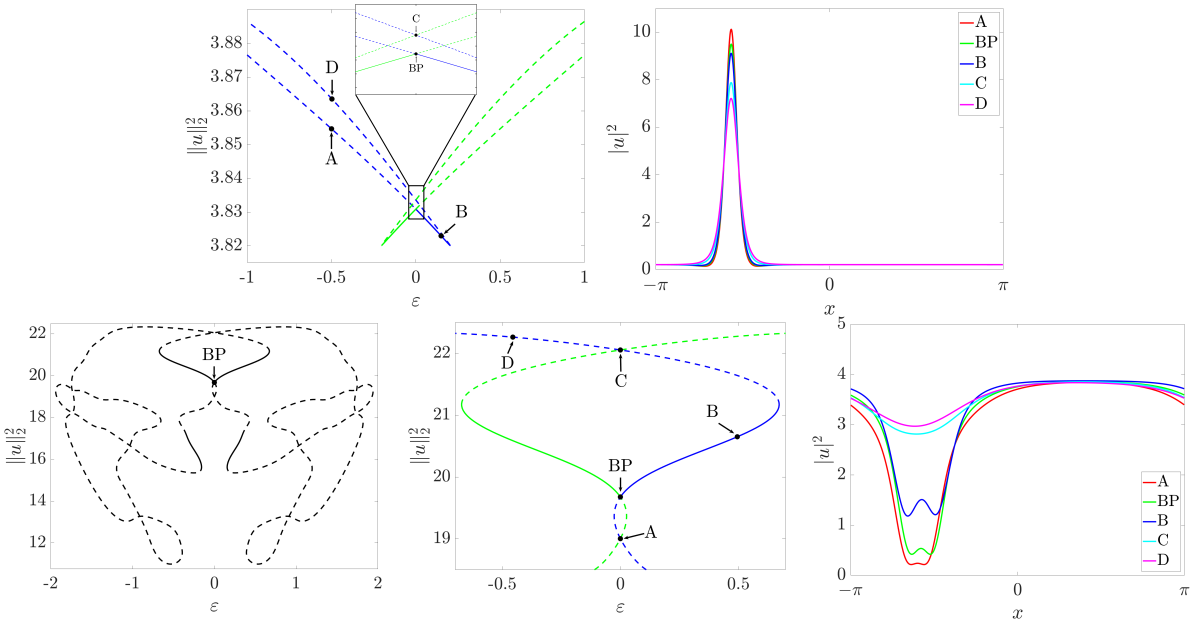

图2. 关于 ε 的延拓图，标示了稳定性区域（实线 = 稳定；虚线 = 不稳定）以及指定点处的解。V_{eff} 的两个不同零点产生了两条不同的延拓曲线（蓝色和绿色）。上排图：$d = 0.1, \zeta = 3.7$。下排图：$d = -0.1, \zeta = 4.5$，中间图放大显示了起点附近的延拓曲线。

接下来我们观察到，ε 中的延拓曲线在 $d = 0.1$ 时似乎无界（图2左上图），而在 $d = -0.1$ 时则闭且有界（图2左下图）。在我们的例子中，映射 $\sigma \mapsto V_{\text{eff}}(\sigma) := \text{Re} \int_{-\pi}^{\pi} iV(x + \sigma)u_0' \bar{\phi}_0^* \, dx$ 在周期区域 $\mathbb{T}$ 内有两个零点，分别记为 σ_0 和 σ_1。此外，由于 u_0 是偶函数，因此 u_0', ϕ_0^* 是奇函数，我们可知有效势 V_{eff} 也是偶函数，因而$\sigma_0 = -\sigma_1$。因此，对于起点 $u_0(\cdot - \sigma_0)$（蓝色曲线）和 $u_0(\cdot + \sigma_0)$（绿色曲线），ε 是可行的，其中 $\sigma_0 < 0$。正如定理 2 的预测，在 $\varepsilon = 0$ 的一侧局部存在稳定解，另一侧则存在不稳定解。图2右上图和右下图展示了延拓图中若干解的 $|u|^2$ 图像。左上图和左下图表明，ε-延拓曲线在 $\varepsilon = 0$ 处与图1中的所有其他非平凡点相交（$d = 0.1$ 时为 C，$d = -0.1$ 时为 A、C）。

在图3 中，我们展示了初始解$u_0(x - \sigma_0)$ 和$u_0(x - \sigma_1)$，以及势$V(x)$。这里，有效势V_{eff} 的零点 $\sigma_0 < 0 < \sigma_1$ 显示为

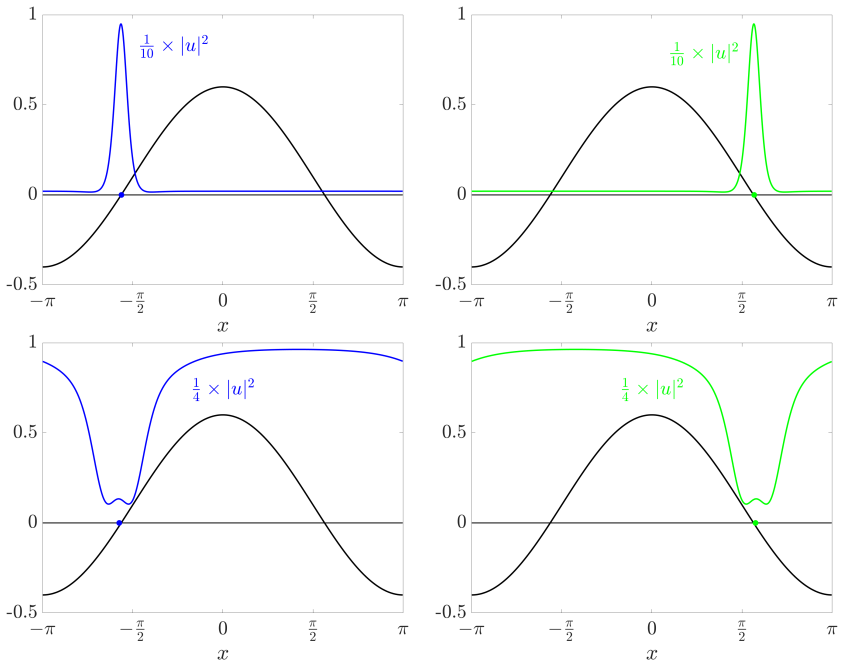

图 3. 上排：$d = 0.1$；下排：$d = -0.1$。左侧图：初始解 $u_0(x - \sigma_0)$ 以及 $V(x)$ 和 V_{eff} 的负零点 σ_0（蓝点）。$\varepsilon > 0$ 时稳定，$\varepsilon < 0$ 时不稳定。右侧图：初始解$u_0(x + \sigma_0)$ 以及 $V(x)$ 和 V_{eff} 的正零点 $\sigma_1 = -\sigma_0$（绿点）。$\varepsilon < 0$ 时稳定，$\varepsilon > 0$ 时不稳定。

蓝色和绿色圆点；我们此前已观察到 $\sigma_0 = -\sigma_1$，这是由于V 和V_{eff}都具有偶对称性。由于 u_0 高度局域化，V_{eff} 的零点可由V 的零点很好地近似，因此初始解的中心位于V的零点附近。因此，根据备注7，我们看到，在蓝色分岔点，孤子中心处V 的斜率为正，这表明 ε-延拓在 $\varepsilon > 0$ 下稳定，而在 $\varepsilon < 0$下不稳定。绿色分岔点的稳定性行为恰好相反。对于$d = 0.1$和$d = -0.1$，稳定性结论均成立。

最后，我们通过图 ε中的延拓来展示其谱稳定性4。对于 $\varepsilon = 0$，左图显示了u_0 附近线性化的谱，其中大部分谱的实部为 -1，这是阻尼 $\mu = 1$ 造成的；此外，复左半平面内还有其他谱，以及由平移不变性导致的零特征值。现在我们考察临界特征值随 ε 变化时的行为。我们考虑如下情形：起始孤子位于V_{eff} 的一个零点处，且该处斜率为正，参见图3中的蓝色分岔点。正如预测的那样，当 $\varepsilon > 0$时，临界特征值移入复左半平面，使 ε延拓稳定。由于起始孤子充分局域化，$-V'(\sigma_0)$ 能够很好地预测临界特征值的斜率，参见引理3 和注7。

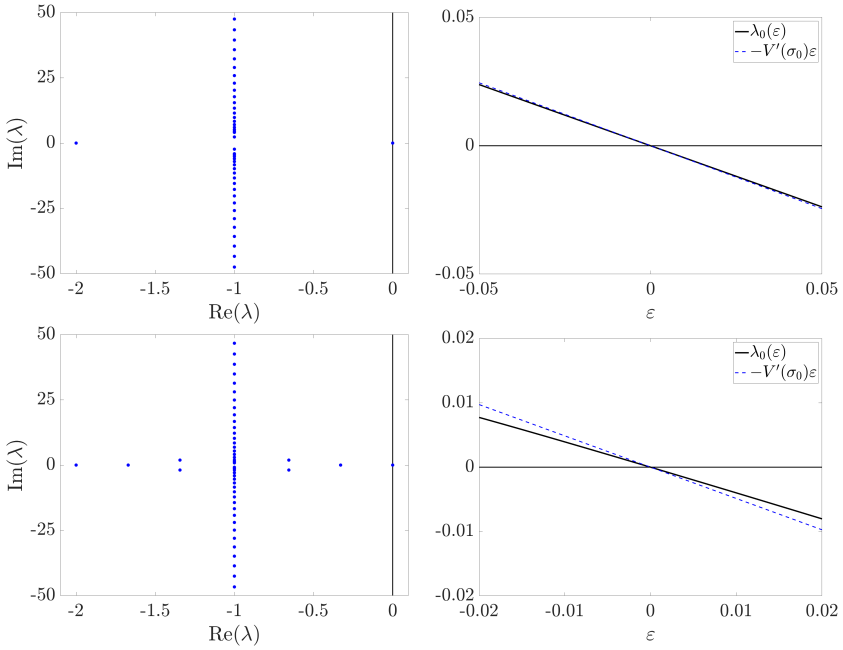

图 4。上：$d = 0.1$，下：$d = -0.1$。左：$\varepsilon = 0$ 的谱。右：临界特征值 $\lambda_0(\varepsilon)$ 以及 $-V'(\sigma_0)\varepsilon$ 关于 ε 的函数。

4. 存在性结果的证明

定理1将通过 Lyapunov-Schmidt 约化和隐函数定理证明。固定 d、ζ、μ 以及 f_0的取值。令 $u_0 \in H^2_{per}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 为 (1.4) 的一个非退化解，其中 $\varepsilon = 0$，并回顾一下，当 $\sigma \in \mathbb{R}$ 时，其平移后的函数 $u_\sigma(x) := u_0(x - \sigma)$ 也是 (1.4) 的解，其中 $\varepsilon = 0$。

定理 *1* 的证明：我们寻找如下形式的 u，满足 (1.4)

$$u = u_\sigma + v, \quad \langle v, u_\sigma' \rangle_{L^2} = 0, \quad v \in H^2_{per}([-\pi,\pi],\mathbb{C}).$$

Ins将其代入 (1.4，得到关于修正项 v 的以下方程 ：

$$L_{u_\sigma} v + i\varepsilon V(u_\sigma' + v') - N(v,\sigma) = 0 \tag{4.1}$$

非线性项由下式给出

$$N(v,\sigma) = \bar{u}_\sigma v^2 + 2u_\sigma |v|^2 + |v|^2 v.$$

该非线性项是关于 v 的二次项和三次项之和。由于 H^2_{per} 是巴拿赫代数，显然，对于每个 $R > 0$，都存在 $C_R > 0$ 使得

$$\|N(v,\sigma)\|_{L^2} \le C_R \|v\|^2_{H^2}, \quad \text{for every } v \in H^2_{per} : \ \|v\|_{H^2} \le R. \tag{4.2}$$

此外，由于 $V \in L^\infty$，可得

$$\|i\varepsilon V(u_\sigma' + v')\|_{L^2} \le |\varepsilon| \|V\|_{L^\infty} \|u_\sigma + v\|_{H^2}.$$

接下来，我们根据 Lyapunov–Schmidt 约化方法求解（4.1）。定义正交投影

$$P_\sigma : L^2 \to \operatorname{span}\{u'_\sigma\} \subset L^2, \quad Q_\sigma : L^2 \to \operatorname{span}\{\phi^*_\sigma\}^\perp \subset L^2$$

onto $\ker L_{u_\sigma}$ 和 $(\ker L^*_{u_\sigma})^\perp$ =张成$\{\phi^*_\sigma\}^\perp$ =L 的值域 L_{u_σ}，分别如此。于是，(4.1) 可分解为一个非奇异方程和一个奇异方程

$$Q_\sigma \left(L_{u_\sigma}(I - P_\sigma)v + \mathrm{i}\varepsilon V(u'_\sigma + v') - N(v,\sigma) \right) = 0, \tag{4.3}$$

$$\langle \mathrm{i}\varepsilon V u'_\sigma, \phi^*_\sigma \rangle_{L^2} + \langle \mathrm{i}\varepsilon V v' - N(v,\sigma), \phi^*_\sigma \rangle_{L^2} = 0. \tag{4.4}$$

注意，(4.3) 中的线性部分 $Q_\sigma L_{u_\sigma}(I - P_\sigma)$ 在 σ 依赖的子空间 $(\ker L_{u_\sigma})^\perp$ 与 L_{u_σ} 的值域之间可逆。因此，不能直接应用隐函数定理来求解 (4.3)。然而，(4.3) 等价于 $F(v, \varepsilon, \sigma) = 0$，其中

$$F(v,\varepsilon,\sigma) := Q_\sigma \left(L_{u_\sigma}(I - P_\sigma)v + \mathrm{i}\varepsilon V(u'_\sigma + v') - N(v,\sigma) \right) + \phi^*_\sigma \langle v, u'_\sigma \rangle_{L^2}$$

并且 $F\colon H^2_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$。这里，添加项 $\phi^*_\sigma \langle v, u'_\sigma \rangle_{L^2}$ 用于保证 $v \perp u'_\sigma$。对于任意固定的 $\sigma_0 \in \mathbb{R}$，有 $F(0,0,\sigma_0) = 0$。由于

$$D_v F(0,0,\sigma_0)\varphi = L_{\sigma_0}\varphi + \phi^*_{\sigma_0} \langle \varphi, u'_{\sigma_0} \rangle_{L^2}$$

是从 H^2_{per} 到 L^2, 的同构，因此我们可以对函数 F 应用隐函数定理，从而得到一个光滑函数 $v = v(\varepsilon,\sigma)$，它满足方程 $F(v(\varepsilon,\sigma), \varepsilon, \sigma) = 0$，其中 (ε,σ) 属于 $(0,\sigma_0)$ 的某个邻域。根据构造，v 是 (4.3) 的一个解，并满足正交条件

$$\langle v(\varepsilon,\sigma), u'_\sigma \rangle_{L^2} = 0$$

正如证明开始时所要求的那样。此外，由 (4.3) 可知 $F(0,0,\sigma) = 0$，因此 $v(0,\sigma) = 0$，这意味着有如下界

$$\|v(\varepsilon,\sigma)\|_{H^2} \le C|\varepsilon|. \tag{4.5}$$

因此，$\|v'(\varepsilon,\sigma)\|_{L^2} \le C|\varepsilon|$，其中 $v'(\varepsilon,\sigma)$ 表示 v 关于 x的导数。将 $v(\varepsilon,\sigma)$ 代入奇异方程（4.4），我们得到二维问题

$$f(\varepsilon,\sigma) := \langle \mathrm{i}\varepsilon V u'_\sigma, \phi^*_\sigma \rangle_{L^2} + \langle \mathrm{i}\varepsilon V v'(\varepsilon,\sigma) - N(v(\varepsilon,\sigma),\sigma), \phi^*_\sigma \rangle_{L^2} = 0.$$

对于所有 $\sigma \in \mathbb{R}$，我们都有如下渐近关系

$$|\langle \mathrm{i}\varepsilon V v'(\varepsilon,\sigma) - N(v(\varepsilon,\sigma),\sigma), \phi^*_\sigma \rangle_{L^2}| = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{as} \quad \varepsilon \to 0$$

这由界（4.2）和（4.5）可得。因此f可以写成

$$f(\varepsilon,\sigma) = \varepsilon \langle \mathrm{i}V u'_\sigma, \phi^*_\sigma \rangle_{L^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{as} \quad \varepsilon \to 0.$$

注意，如果 $\langle \mathrm{i}V u'_\sigma, \phi^*_\sigma \rangle_{L^2} \neq 0$ 函数$f(\varepsilon,\sigma)$除了平凡根 $(0,\sigma)$之外，在$(0,\sigma)$附近没有其他根。然而，根据我们对有效势V_{eff} 的假设，存在$\sigma_0 \in \mathbb{R}$使得

$$\langle \mathrm{i}V u'_{\sigma_0}, \phi^*_{\sigma_0} \rangle_{L^2} = \mathrm{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{i}V(x) u'_{\sigma_0} \bar{\phi}^*_{\sigma_0} dx = V_{\mathrm{eff}}(\sigma_0) = 0$$

and

$$\partial_\sigma \langle \mathrm{i}Vu'_\sigma, \phi^*_\sigma \rangle_{L^2}\big|_{\sigma=\sigma_0} = \partial_\sigma \,\mathrm{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{i}V(x) u'_\sigma \bar{\phi}^*_\sigma dx \Big|_{\sigma=\sigma_0} = V'_{\mathrm{eff}}(\sigma_0) \neq 0.$$

因此，可以对函数 $\varepsilon^{-1}\mathrm{f}(\varepsilon,\sigma)$ 应用隐函数定理，从而得到奇异方程 $\mathrm{f}(\varepsilon,\sigma) = 0$ 的一条唯一非平凡解曲线 $\sigma = \sigma(\varepsilon)$，使得 $\sigma(0) = \sigma_0$。最后，我们得出结论：当 ε较小时，$\mathrm{u}(\varepsilon) = \mathrm{u}_0(\cdot - \sigma(\varepsilon)) + \mathrm{v}(\varepsilon, \sigma(\varepsilon))$ 是方程 (1.4) 的解。□

5. 稳定性结果的证明

在本节中，我们将确定定理 1 中作为稳定解 u_0 （LLE 的 1.1）的延拓所得到的定常解，在受扰 LLE（1.3）中针对共周期扰动谱稳定的条件。此外，我们还将证明谱稳定定常解的非线性渐近稳定性。

5.1. **预备说明**。 对于稳定性分析，我们将（1.3）视为一个二维系统，将函数 $u = u_1 + \mathrm{i}u_2$ 分解为实部和虚部。这将我们引向动力学方程组

$$\begin{cases} \partial_t u_1 = -d\partial_x^2 u_2 + \varepsilon V(x)\partial_x u_1 + \zeta u_2 - \mu u_1 - (u_1^2 + u_2^2)u_2 + f_0, \\ \partial_t u_2 = d\partial_x^2 u_1 + \varepsilon V(x)\partial_x u_2 - \zeta u_1 - \mu u_2 + (u_1^2 + u_2^2)u_1, \end{cases} \tag{5.1}$$

配备 2π-周期边界条件于 $\mathbb{R}$上。与非线性系统（5.1）相关的谱问题可写为

$$\widetilde{L}_{u,\varepsilon}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \boldsymbol{v} \in H^2_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \times H^2_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$$

~以及线性化算子 $\mathrm{L}_{u,\varepsilon}$ 由（2.2）给出。注意，在分解式（2.2）中，算子 A_u 在 $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \times \mathrm{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 上是自伴的，而 ~$\mathrm{L}_{u,\varepsilon}$ 是一个指标为 0 的 Fredholm 算子。此外，我们看到，如果 u_0 是（1.4）的非退化解，对于$\varepsilon = 0$，则线性化算子满足以下关系：

$$\ker \widetilde{L}_{u_0,0} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{u}'_0\}, \quad \ker \widetilde{L}^*_{u_0,0} = \mathrm{span}\{J\phi^*_0\},$$

其中向量 $\boldsymbol{u}'_0 = (u'_{01}, u'_{02})$ 和 $\phi^*_0 = (\phi^*_{01}, \phi^*_{02})$ 由$u'_0 = u'_{01} + \mathrm{i}u'_{02}$和 $\phi^*_0 = \phi^*_{01} + \mathrm{i}\phi^*_{02}$得到。我们回顾一下，由于归一化，$\langle \boldsymbol{u}'_0, J\phi^*_0 \rangle_{L^2} = 1$ 参见注3。

最后，我们注意到，由于嵌入

$$H^2_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \times H^2_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \hookrightarrow L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \times L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$$

~是紧的，线性化具有紧预解式，因此$L_{u,\varepsilon}$ 的谱由孤立的特征值组成，且这些特征值具有有限重数，其唯一可能的聚点为 ∞。在下文中，我们将使用这些空间

$$H^2_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C}) =: X, \quad H^1_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C}) =: Y, \quad L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}) =: Z.$$

定理 2和定理 3的证明都依赖于下述引理，该引理针对线性化~算子 $L_{u(\varepsilon),\ \varepsilon}$ 其中 $u(\varepsilon)$ 位于定理 1 的解分支上，且 $|\varepsilon|$ 很小。该

引理给出了虚部较大的特征值的谱界，以及一致预解式估计。证明见第 5.4 节。

引理 2。 记 $\Lambda_{\lambda^*} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{实部}(\lambda) \geq 0,\ |\text{虚部}(\lambda)| \geq \lambda^*\}$。给定足够小的 $\varepsilon_1 > 0$，存在 $\lambda^* > 0$，使得我们有一致的预解式界

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_{\lambda^*}} \|(\lambda I - \widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon})^{-1}\|_{L^2 \to L^2} < \infty$$

对所有 $\varepsilon \in [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ 均成立。

注 9。 预解式估计在虚轴上的一致性允许我们将上述结果加强如下。若将 S 定义为引理 2 中的上确界，并令$0 < \delta < 1/S$，则估计式

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_{\lambda^*} - \delta} \|(\lambda I - \widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon})^{-1}\|_{L^2 \to L^2} < \infty$$

成立。这可通过对恒等式两边取逆得到。

$$(\lambda - \delta - \widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}) = (\lambda - \widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon})(I - \delta(\lambda - \widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon})^{-1}).$$

5.2. **定理 2 的证明**。 对于 $\lambda \in \mathbb{C}$，我们研究谱问题

$$\widetilde{L}_{u,\varepsilon} \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}. \tag{5.2}$$

由于1.4在 $\varepsilon = 0$ 的情况下具有平移对称性，我们得到

$$\widetilde{L}_{u,0} \boldsymbol{u}' = 0.$$

对于 $\varepsilon \neq 0$，这种对称性被打破，零特征值预计会移入稳定半平面或不稳定半平面。因此，在我们的稳定性分析中，理解临界零特征值沿着由 $(-\varepsilon^*, \varepsilon^*) \ni \varepsilon \mapsto u(\varepsilon) \in X$ 给出的分岔解支上的变化至关重要，其中 $u(0) = u^{\sigma_0}$，且 σ_0 是定理 1中所述的 V_{eff} 的一个单零点。对于以下计算，我们将把 $u(\varepsilon)$ 视为向量值函数 $\boldsymbol{u}(\varepsilon) : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$，并将其写作 $\boldsymbol{u}(\varepsilon) \in X \times X$。

我们首先跟踪这个临界单零特征值，并建立受扰特征值 $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon)$ 所满足的方程：

$$\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon} \boldsymbol{v}(\varepsilon) = \lambda_0(\varepsilon) \boldsymbol{v}(\varepsilon).$$

经过可能的重新缩放，我们得到 $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{u}'_{\sigma_0}$，并利用单特征值的正则微扰理论（参见 [17, 18], 映射 $(-\varepsilon^*, \varepsilon^*) \ni \varepsilon \mapsto \lambda_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ 是连续可微的。我们的首要目标是推导 $\lambda_0'(0)$ 的公式。若 $\lambda_0'(0) > 0$，这意味着当 $\varepsilon > 0$ 时，解 $u(\varepsilon)$ 谱不稳定。相反，若 $\lambda_0'(0) < 0$，则当 $\varepsilon > 0$ 时，解 $u(\varepsilon)$ 谱稳定。

引理 3. 令 $\varepsilon \mapsto \lambda_0(\varepsilon)$ 为扰动后零特征值的 C^1 参数化。则下式成立：

$$\lambda_0'(0) = -\int_{-\pi}^{\pi} V'(x) \boldsymbol{u}'_{\sigma_0} \cdot J \boldsymbol{\phi}^*_{\sigma_0} dx.$$

证明。 一方面，如果我们对该方程求导

$$\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}\boldsymbol{v}(\varepsilon) = \lambda_0(\varepsilon)\boldsymbol{v}(\varepsilon).$$

关于 ε，并在 $\varepsilon = 0$ 处求值，我们得到

$$\widetilde{L}_{u_{\sigma_0},0}\partial_\varepsilon \boldsymbol{v}(0) - JN_u\boldsymbol{u}'_{\sigma_0} + V(x)\boldsymbol{u}''_{\sigma_0} = \lambda_0'(0)\boldsymbol{u}'_{\sigma_0},$$

其中 N_u 由下式给出

$$N_u = 2\begin{pmatrix} 3u_{\sigma_0 1}\partial_\varepsilon u_1(0) + u_{\sigma_0 2}\partial_\varepsilon u_2(0) & u_{\sigma_0 1}\partial_\varepsilon u_2(0) + u_{\sigma_0 2}\partial_\varepsilon u_1(0) \\ u_{\sigma_0 1}\partial_\varepsilon u_2(0) + u_{\sigma_0 2}\partial_\varepsilon u_1(0) & u_{\sigma_0 1}\partial_\varepsilon u_1(0) + 3u_{\sigma_0 2}\partial_\varepsilon u_2(0) \end{pmatrix}.$$

另一方面 另一方面，如果我们对 1.4 关于 ε 在 $\varepsilon = 0$处求导，则得到

$$\widetilde{L}_{u_{\sigma_0},0}\partial_\varepsilon \boldsymbol{u}(0) + V(x)\boldsymbol{u}'_{\sigma_0} = 0.$$

如果我们对该方程关于 x 求导，则得到

$$\widetilde{L}_{u_{\sigma_0},0}\partial_\varepsilon \boldsymbol{u}'(0) + V(x)\boldsymbol{u}''_{\sigma_0} + V'(x)\boldsymbol{u}'_{\sigma_0} - JN_u\boldsymbol{u}'_{\sigma_0} = 0.$$

结合两个方程可得

$$\widetilde{L}_{u_{\sigma_0},0}[\partial_\varepsilon \boldsymbol{v}(0) - \partial_\varepsilon \boldsymbol{u}'(0)] - V'(x)\boldsymbol{u}'_{\sigma_0} = \lambda_0'(0)\boldsymbol{u}'_{\sigma_0}$$

~并用 $J\boldsymbol{\phi}^*_{\sigma_0} \in \ker L^*_{u_{\sigma_0},0}$ 检验该方程，我们得到

$$-\int_{-\pi}^{\pi} V'(x)\boldsymbol{u}'_{\sigma_0}\cdot J\boldsymbol{\phi}^*_{\sigma_0}dx = -\langle V'(x)\boldsymbol{u}'_{\sigma_0}, J\boldsymbol{\phi}^*_{\sigma_0}\rangle_{L_2} = \lambda_0'(0)\langle \boldsymbol{u}'_{\sigma_0}, J\boldsymbol{\phi}^*_{\sigma_0}\rangle_{L_2} = \lambda_0'(0)$$

由此完成证明。 □

根据引理 3，我们可以控制沿分岔解支靠近原点的谱的临界部分。事实上，利用标准扰动理论，参见 [17], ，我们知道~$L_{u(\varepsilon),\varepsilon}$ 的所有特征值都随参数 ε 连续变化。然而，这种依赖通常并不对所有特征值一致，因此我们必须确保远离原点处不会出现不稳定谱。此时值得指出的是，我们对谱有如下先验界：

$$\exists \lambda_* = \lambda_*(u(\varepsilon),\varepsilon) > 0: \quad \lambda \in \sigma(\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}) \implies \mathrm{Re}(\lambda) \le \lambda_*.$$

~该界由 Hille–Yoshida 定理得出，因为 $L_{u(\varepsilon),\ \varepsilon}$ 在 C_0-半群上生成 $Z \times Z$，参见下文引理 4 。也可以通过用相应的特征函数检验特征值问题并进行分部积分，直接证明这一点。由此可知，若能证明存在 $\lambda^* > 0$ 使得

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \le \mathrm{Re}(\lambda) \le \lambda_*, |\mathrm{Im}(\lambda)| \ge \lambda^*\} \subset \rho(\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}).$$

这一关系作为引理2 的一部分给出，并由后续备注9将其扩展到原点左侧。由于在任意矩形 $\{\lambda \in \mathbb{C}: -M \le \mathrm{Re}(\lambda) \le \lambda_*, |\mathrm{Im}(\lambda)| \le \lambda^*\}$~中，$L_{u(\varepsilon)}$的特征值只有有限个，$\varepsilon$ 且它们随 ε（一致地）连续变化，因此我们关于$L_{u_0},0$ 的假设 (A2) 表明，这些特征值中没有任何一个（除了

可能的临界特征值）会在 $|\varepsilon|$ 足够小时进入右半平面。因此，只有临界特征值的变化决定谱稳定性，定理 2 因此成立。

5.3. **定理 3 的证明**。 为了证明方程 (5.1) 的定常解具有非线性渐近稳定性，只需证明其线性化在 $Y \times Y$ 上生成的半群具有指数稳定性，参见例如 [2]。为证明定理 3，我们将分以下三个步骤：

(i) 证明 $L_{u(\varepsilon),\varepsilon}$ 是 $Z \times Z$ 上一个 C_0-半群的生成元。(ii) 证明 $(e^{L_{u(\varepsilon),\varepsilon}t})_{t\geq 0}$ 在 $Z \times Z$ 中指数衰减。(iii) 证明 $(e^{L_{u(\varepsilon),\varepsilon}t})_{t\geq 0}$ 在 $Y \times Y$ 中指数衰减。对于步骤 (i)，我们将证明线性化在 $Z \times$ 中满足生成元的性质

Z.

引理 4。 算子 $L_{u(\varepsilon),\varepsilon}$ 在 $Z \times Z$ 上生成一个 C_0-半群。

证明。 我们将算子分解为

$$\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon} = L_1 + L_2 + L_3,$$

其中，$L_1 : X \times X \to Z \times Z$、$L_2 : Y \times Y \to Z \times Z$，以及$L_3 : Z \times Z \to Z \times Z$ 定义如下：

$$L_1 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -d\varphi_2'' - \mu\varphi_1 \\ d\varphi_1'' - \mu\varphi_2 \end{pmatrix},$$

$$L_2\varphi := \varepsilon V(x)\varphi' - \frac{|\varepsilon|}{2}\|V'\|_{L^\infty}\varphi,$$

and

$$L_3 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{|\varepsilon|}{2}\|V'\|_{L^\infty} - 2u_1u_2 & \zeta - (u_1^2 + 3u_2^2) \\ -\zeta + 3u_1^2 + u_2^2 & \frac{|\varepsilon|}{2}\|V'\|_{L^\infty} + 2u_1u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

我们将证明

(i) L_1 生成一个压缩半群。(ii) L_2 是耗散的，且相对于L_1有界。(iii) L_3 是$Z \times Z$上的有界算子。

利用半群理论，即可证明总和$L_1 + L_2 + L_3$ 是$Z \times Z$上的一个C_0-半群的生成元。

第(i)部分：由此可知，对于每个 $\varphi \in X \times X$，均有 $\mathrm{Re}\langle L_1\varphi, \varphi\rangle_{L^2} = -\mu\|\varphi\|^2{}_{L_2} \leq 0$，且对于每个 $\lambda > 0$，$\lambda - L_1$可逆；这一点可通过傅里叶变换看出。根据 Lumer–Phillips 定理，我们得到L_1在$Z \times Z$上生成一个压缩半群。

第 (ii) 部分：我们需要证明

$$\forall \varphi \in Y \times Y : \quad \mathrm{Re}\langle L_2\varphi, \varphi\rangle_{L^2} \leq 0$$

and

$$\forall a > 0, \exists b > 0 : \quad \|L_2\varphi\|_{L^2} \leq a\|L_1\varphi\|_{L^2} + b\|\varphi\|_{L^2} \quad \forall \varphi \in X \times X.$$

令 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in Y \times Y$，并注意到分部积分可得

$$\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon V(x)(\varphi_1'\bar{\varphi}_1 + \varphi_2'\bar{\varphi}_2) - \frac{|\varepsilon|}{2}\|V'\|_{L^\infty}|\varphi|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\varepsilon}{2}V'(x)|\varphi|^2 - \frac{|\varepsilon|}{2}\|V'\|_{L^\infty}|\varphi|^2 dx \le 0$$

这表明 示L_2 是耗散的。此外，若 $\varphi \in X \times X$，则对每个$a > 0$，有

$$\begin{aligned}\|\varepsilon V\varphi' - \frac{|\varepsilon|}{2}\|V'\|_{L^\infty}\varphi\|_{L^2} &\le |\varepsilon|\|V\|_{L^\infty}\|\varphi'\|_{L^2} + \frac{|\varepsilon|}{2}\|V'\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^2} \\ &\le |\varepsilon|a\|V\|_{L^\infty}\|\varphi''\|_{L^2} + \frac{|\varepsilon|}{4a}\|V\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^2} + \frac{|\varepsilon|}{2}\|V'\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^2} \\ &\le \frac{|\varepsilon|a}{|d|}\|V\|_{L^\infty}\|L_1\varphi\|_{L^2} + |\varepsilon|\left(\left(\frac{a\mu}{|d|} + \frac{1}{4a}\right)\|V\|_{L^\infty} + \frac{1}{2}\|V'\|_{L^\infty}\right)\|\varphi\|_{L^2}\end{aligned}$$

其中我们用到了不等式

$$\forall \varphi \in X \times X,\ \forall a > 0: \quad \|\varphi'\|_{L^2} \le a\|\varphi''\|_{L^2} + \frac{1}{4a}\|\varphi\|_{L^2}.$$

因此，根据耗散扰动定理（参见 [6], 生成元相关的$L_1 + L_2 : X \times X \to Z \times Z$ 生成一个压缩半群。

部分 (iii)：由此可知，L_3 在$Z \times Z$上有界。于是，关于生成元的有界扰动定理（参见第三章定理 1.3） [6], 推出$L_{u(\varepsilon),\varepsilon} = L_1 + L_2 + L_3$在$Z \times Z$ 上生成一个C_0-半群，正如所需。□

注 10. 采用类似的论证，可以证明$L_{u(\varepsilon),\varepsilon}$ 是C_0-半群在$Y \times Y$上的生成元。

对于步骤 (ii)，我们使用一种用于刻画希尔伯特空间上半群指数衰减的方法，即 Gearhart-Greiner-Prüss 定理，参见 [6] 中第五章定理 1.11。

定理 4 (Gearhart-Greiner-Prüss 定理)。 设 L 是复希尔伯特空间 H 上一个 C_0-半群$(e^{Lt})_{t\ge 0}$ 的生成元。那么，$(e^{Lt})_{t\ge 0}$ 在 H 中指数稳定，当且仅当

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) \ge 0\} \subset \rho(L) \quad \textit{and} \quad \sup_{\mathrm{Re}\,\lambda \ge 0} \|(\lambda I - L)^{-1}\|_{H\to H} < \infty.$$

由定理 3 的假设可知，解 u(ε) 的谱稳定性得以保证，因此我们只需证明在 $\{\lambda \in \mathbb{C}$ 上的一致预解式估计：$\mathrm{Re}(\lambda) \ge 0\}$。利用引理 2，我们可找到 $\lambda^* \gg 1$，使得 $(\lambda \mathrm{I} - \widetilde{\mathrm{L}}_{u(\varepsilon),\varepsilon})^{-1}$ 在集合 $\Lambda_{\lambda^*}\widetilde{\ }$ 上一致有界，其中 ε 足够小。此外，由于 $\mathrm{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}$ 是状态空间 $\mathrm{Z} \times \mathrm{Z}$ 上 C_0-半群的生成元，Hille-Yosida 定理保证预解式在 $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) > \lambda_*\}$ 上一致有界，其中某个常数为 $\lambda_* > 0$。由于 $\lambda \mapsto (\lambda \mathrm{I} - \widetilde{\mathrm{L}}_{u(\varepsilon),\varepsilon})^{-1}$ 是亚纯函数，且在 $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) \ge 0\}$ 内没有极点，因此预解式在 $\mathbb{C}$ 于 $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) \ge 0\}$ 内的紧子集上一致有界。由此可得~，$\mathrm{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}$ 满足 Gearhart-Greiner-Prüss 预解式界，进而在 $\mathrm{Z} \times \mathrm{Z}$ 中具有指数稳定性。

最后，对于步骤 (iii)，我们将在以下空间之间对衰减估计进行插值：$Z \times Z$和 $X \times X$。为此，我们需要在 $X \times X$ 上建立界，这将在下一个引理中完成。随后进行的插值论证沿用引理 5 的思路， [30] 并且还将得到更一般插值空间 $H^s_{\mathrm{per}} \times H^s_{\mathrm{per}}$ 在 $s \in [0,2]$时的衰减估计。

引理 5. 对于任意的 $s \in [0,2]$ 以及充分小的 ε，半群 $(\mathrm{e}^{L_{u(\varepsilon),\varepsilon}t})_{t\geq 0}$ 在 $H^s_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \times H^s_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$中指数衰减，即存在 $C_s > 0$ 使得

$$\|\mathrm{e}^{\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}t}\|_{H^s\to H^s} \leq C_s \mathrm{e}^{-\eta t} \quad \textit{for } t \geq 0,$$

其中 $-\eta < 0$ 是此前得到的半群在 $Z \times Z$ 中的增长界 .

证明。 我们仅考虑 $d > 0$ 的情形，因为另一种情形可通过将JAu改写为 $-J(-Au)$并使用下文相同的论证来证明。若$d > 0$，则当 $\gamma > 0$ 充分大时，算子$A_{u(\varepsilon)} + \gamma I$是正自伴的。因此，对于$z \in \mathbb{C}$，我们可以定义复幂：

$$(A_{u(\varepsilon)} + \gamma I)^z \boldsymbol{v} = \int_0^\infty \lambda^z dE_\lambda \boldsymbol{v}, \quad \text{for } \boldsymbol{v} \in \mathrm{dom}(A_u u(\varepsilon) + \gamma I)^z,$$

其定义域为

$$\mathrm{dom}(A_{u(\varepsilon)} + \gamma I)^z = \left\{ \boldsymbol{v} \in Z \times Z : \|(A_{u(\varepsilon)} + \gamma I)^z \boldsymbol{v}\|^2_{L^2} = \int_0^\infty \lambda^{2\,\mathrm{Re}\, z} d\|E_\lambda \boldsymbol{v}\|^2_{L^2} < \infty \right\}$$

并且E_λ 对于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是与$A_{u(\varepsilon)} + \gamma I$相关联的自伴谱投影族。注意，对于 $\theta \in [0,1]$，关系

$$\mathrm{dom}(A_{u(\varepsilon)} + \gamma I)^\theta = H^{2\theta}_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \times H^{2\theta}_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$$

成立，参见 [20] 定理 4.36；此外，对于任意$r \in \mathbb{R}$，算子$(A_{u(\varepsilon)} + \gamma I)^{\mathrm{i}r}$ 在$Z \times Z$上是酉的。如果 $\theta = 0$，我们将证明存在$C_\theta > 0$ 使得

$$\forall r \in \mathbb{R},\ \forall t \geq 0,\ \forall \boldsymbol{v} \in X \times X,: \quad \|(A_{u(\varepsilon)} + \gamma I)^{\theta+\mathrm{i}r} \mathrm{e}^{\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}t} \boldsymbol{v}\|_{L^2} \leq C_\theta \mathrm{e}^{-\eta t} \|\boldsymbol{v}\|_{H^{2\theta}},$$

这意味着

$\forall r \in \mathbb{R},\ \forall t \geq 0,\ \forall \theta \in (0,1),\ \forall \boldsymbol{v} \in X \times X$: $\|(A_{u(\varepsilon)} + \gamma I)^{\theta+\mathrm{i}r} \mathrm{e}^{L_{u(\varepsilon),\varepsilon}t} \boldsymbol{v}\|_{L^2} \leq C_0^{1-\theta} C_1^\theta \mathrm{e}^{-\eta t} \|\boldsymbol{v}\|_{H^{2\theta}}$，由复插值可得，参见 [20]定理 2.7。特别地，我们看到

$$\|\mathrm{e}^{\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}t}\|_{H^s\to H^s} \leq C_0^{1-s} C_1^s \mathrm{e}^{-\eta t}$$

这正是我们的主张。$\theta = 0$ 的估计已在前面的讨论中给出，因此只需验证 $\theta = 1$的估计。令 $\boldsymbol{v} \in X \times X$，并注意到

$$\begin{aligned}
\|(A_{u(\varepsilon)} + \gamma I)^{1+\mathrm{i}r} \mathrm{e}^{\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}t} \boldsymbol{v}\|_{L^2} &= \|(A_{u(\varepsilon)} + \gamma I) \mathrm{e}^{\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}t} \boldsymbol{v}\|_{L^2} \\
&= \|(\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon} + J\gamma + I(\mu - \varepsilon V(x)\partial_x)) \mathrm{e}^{\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}t} \boldsymbol{v}\|_{L^2} \\
&\leq \|\mathrm{e}^{\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}t} \widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon} \boldsymbol{v}\|_{L^2} + C\|\mathrm{e}^{\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}t} \boldsymbol{v}\|_{L^2} + |\varepsilon| \|V\|_{L^\infty} \|\partial_x \mathrm{e}^{\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}t} \boldsymbol{v}\|_{L^2}
\end{aligned}$$

$$\leq Ce^{-\eta t}\|\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}\boldsymbol{v}\|_{L^2} + Ce^{-\eta t}\|\boldsymbol{v}\|_{L^2} + |\varepsilon|\|V\|_{L^\infty}\|e^{\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}t}\boldsymbol{v}\|_{H^1}$$
$$\leq Ce^{-\eta t}\|\boldsymbol{v}\|_{H^2} + |\varepsilon|C\|e^{\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}t}\boldsymbol{v}\|_{H^2},$$

由此得到 $\|(A_{u(\varepsilon)}+\gamma I)^{1+ir}e^{L_{u(\varepsilon),\varepsilon t}}\boldsymbol{v}\|_{L^2} \leq Ce^{-\eta t}\|\boldsymbol{v}\|_{H^2}$，如果 ε 足够小，这是由于范数等价性 $\|\boldsymbol{v}\|_{H^2} \sim \|(A_{u(\varepsilon)}+\gamma I)\boldsymbol{v}\|_{L^2}$。□

特别是，引理 5 证明了 $Y \times Y$ 中线性化的指数稳定性，因此我们已经证明了定理 3。

5.4. **引理 2 的证明**。若能找到一个常数 $C > 0$ 与 $\lambda \in \Lambda_{\lambda^*}$ 无关，使得

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in X \times X: \quad \|(\lambda I - \widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon})\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2} \geq C\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2}. \tag{5.3}$$

为简化问题，我们引入在$Z \times Z$ 上的旋转如下：

$$R\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$$

其中角度随空间变化 $\theta(x) = \frac{\varepsilon}{2d}\int_{-\pi}^{x}[V(y) - \hat{V}_0]dy$ 其中 $\hat{V}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}V(y)dy$ 是势 V 的平均值。由于 R 是 $Z \times Z$ 上的等距变换，预解式估计（5.3）等价于

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in X \times X: \quad \|(\lambda I - R\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}R^{-1})\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2} \geq C\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2},$$

其中注意到 $\sigma(\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}) = \sigma(R\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}R^{-1})$。考虑算子$R\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}R^{-1}$ 的优点在计算下式时便显而易见

$$R\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon}R^{-1} = J\tilde{A}_{u(\varepsilon),\varepsilon,V} - I(\mu - \varepsilon\hat{V}_0\partial_x)$$

其中算子 $A_{u(\varepsilon),\varepsilon,V}$ 定义为

$$\tilde{A}_{u(\varepsilon),\varepsilon,V} := \begin{pmatrix}-d\partial_x^2 + W_1 & W_2 + W_4\\ W_2 - W_4 & -d\partial_x^2 + W_3\end{pmatrix}$$

其中势函数为

$$W_1 = \zeta + \cos^2\theta U_1 + 2\cos\theta\sin\theta U_2 + \sin^2\theta U_3 + d\theta'^2 - \varepsilon\theta' V,$$
$$W_2 = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)U_2 + \cos\theta\sin\theta(U_3 - U_1),$$
$$W_3 = \zeta + \sin^2\theta U_1 - 2\cos\theta\sin\theta U_2 + \cos^2\theta U_3 + d\theta'^2 - \varepsilon\theta' V,$$
$$W_4 = d\theta'',$$

且函数为

$$U_1 = -(3u_1^2(\varepsilon) + u_2^2(\varepsilon)),\ U_2 = -2u_1(\varepsilon)u_2(\varepsilon),\ U_3 = -(u_1^2(\varepsilon) + 3u_2^2(\varepsilon)).$$

显然，现在一阶导数乘上的是一个常数，而非空间变化的势函数；后续计算中将用到这一点。我们还注意到，函数 $W_i \in X$、$i = 1$、2、3 取决于解 u 和势 V，而

$W_4 \in X$ 仅取决于势函数V。为证明预解式估计，我们采用了 [30], 中介绍的技巧；该文作者为未扰动的 LLE 构造了预解式（1.1）。

我们需要以下命题，它是 [30]中的引理 4。

命题 1. 设 $d \neq 0$ *and* $\mu > 0$。那么存在一个依赖于 d 和 μ 的 $\lambda^* > 0$，使得对所有 $\omega \geq \lambda^*$，至多存在一个 $k_0 = k_0(\omega, \mu) \in \mathbb{N}$ 满足

$$\omega \geq |d^2 k_0^4 + \mu^2 - \omega^2|.$$

对于所有其他的 $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm k_0(\omega, \mu)\}$，我们有

$$|d^2 k^4 + \mu^2 - \omega^2| \geq \frac{1}{10} \max\{d^2 k^2, \omega\}^{3/2}.$$

此外，我们得到 $k_0(\omega, \mu) = \mathcal{O}(\omega^{1/2})$，当 $\omega \to \infty$ 时。

现在我们可以开始构造并估计预解式。根据 Hille–Yoshida 定理，当 $\mathrm{Re}\,\lambda$ 足够大时，一致预解式估计成立。因此，剩下要考虑的是 $\lambda = \delta + \mathrm{i}\omega \in \Lambda_{\lambda^*}$，其中某个 $\lambda^* > 0$，且 $\delta \geq 0$ 取值于一个紧集。由于 δ 在 $\lambda \mathrm{I} - \mathrm{L}_{u(\varepsilon)}$ 中替代了 μ，ε 由 $\mu + \delta$ 给出，并且命题 1 的估计对紧集中的任意 $\mu > 0$ 都成立，所以只需证明 $\delta = 0$ 的一致估计。暂且不指定 λ^* 的值，因为证明稍后会确定它。我们可以限制在 $\omega \geq \lambda^*$ 的情形，因为 $\omega \leq -\lambda^*$ 的证明可由谱问题在复共轭下的对称性推出。对于 $\boldsymbol{v} \in \mathrm{X} \times \mathrm{X}$，我们定义

$$(\lambda I - R\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon} R^{-1})\boldsymbol{v} =: \boldsymbol{\psi} \in Z \times Z \tag{5.4}$$

并证明存在有界算子 T_1 和 T_2，作用于 $Z \times Z$ 上，且依赖于 λ，其范数满足 $\|T_1\|_{L^2 \to L^2} = \mathcal{O}(\omega^{-1/2})$ 以及 $\|T_2\|_{L^2 \to L_2} = \mathcal{O}(1)$ 当 $\omega \to \infty$ 时，使得 (5.4) 蕴含

$$(I + T_1)\boldsymbol{v} = T_2 \boldsymbol{\psi}. \tag{5.5}$$

若 λ^* 充分大，则可推出 $I + T_1$ 是恒等算子的小扰动，因此可逆，且其范数关于 λ 一致有界，这正是我们要证明的结论。因此，剩下的就是证明 (5.5)。我们引入矩阵值势

$$W = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 + W_4 \\ W_2 - W_4 & W_3 \end{pmatrix}$$

以便写成

$$\lambda I - R\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon} R^{-1} = \mathrm{i}\omega I - J(-d\partial_x^2 + W) + I(\mu - \varepsilon \hat{V}_0 \partial_x).$$

现在，令 $A = \lambda I - R\widetilde{L}_{u(\varepsilon),\varepsilon} R^{-1} + JW$，并注意到 $A\boldsymbol{v}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k \hat{\boldsymbol{v}}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$，其中 $\boldsymbol{v}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\boldsymbol{v}}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$，且傅里叶乘子

$$A_k = A_k^1 + A_k^2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\omega + \mu & -dk^2 \\ dk^2 & \mathrm{i}\omega + \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\varepsilon \hat{V}_0 k & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\varepsilon \hat{V}_0 k \end{pmatrix}.$$

A_k^1 的逆为

$$(A_k^1)^{-1} = \frac{1}{\det(A_k^1)} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\omega + \mu & dk^2 \\ -dk^2 & \mathrm{i}\omega + \mu \end{pmatrix}$$

并且根据命题 1 至多存在一个 $k_0 = k_0(\omega, \mu) \in \mathbb{N}$ 使得

$$|\det(A_k^1)| \geq |d^2k^4 + \mu^2 - \omega^2| \geq \frac{1}{10} \max\{d^2k^2, \omega\}^{3/2} \text{ for all } k \neq \pm k_0$$

假设 λ^* 足够大。因此 A_k^1 可逆，且对所有 $\mathrm{k} \neq \pm \mathrm{k}_0$，有界 $\|(\mathrm{A}_k^1)^{-1}\|_{\mathbb{C}^{2\times 2}} \leq \mathrm{C}/\max\{\omega^{1/2}, \mathrm{k}\}$。再次利用命题 1，可得渐近关系 $\mathrm{k}_0 = \mathrm{k}_0(\omega) = \mathcal{O}(\omega^{1/2})$，当 $\omega \to \infty$时成立。因此，若 $|\varepsilon|$ 足够小，则 $\mathrm{A}_k = \mathrm{A}_k^1(\mathrm{I} + (\mathrm{A}_k^1)^{-1}\mathrm{A}_k^2)$，$\mathrm{k} \neq \pm \mathrm{k}_0$，也可逆，且有界 $\|(\mathrm{A}_k)^{-1}\|_{\mathbb{C}^{2\times 2}} = \mathcal{O}(\omega^{-1/2})$，当 $\omega \to \infty$时成立。接下来，对于上述 $\mathrm{k}_0 \in \mathbb{N}$，我们引入正交投影 P、Q、$\mathrm{Q}_1$，$\mathrm{Q}_2 : \mathrm{Z} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}$，如下所示：

$$Q_1 \boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{v}}_{k_0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0(\cdot)}, \quad Q_2 \boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{v}}_{-k_0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(\cdot)}$$

and

$$Q = Q_1 + Q_2, \quad P = I - Q.$$

由此可将（5.4）分解如下：

$$PAP\boldsymbol{v} - PJW\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{\psi}, \tag{5.6}$$

$$QAQ\boldsymbol{v} - QJW\boldsymbol{v} = Q\boldsymbol{\psi}. \tag{5.7}$$

由前述论证可知

$$\|(PAP)^{-1}\|_{L^2 \to L^2} = \mathcal{O}(\omega^{-1/2}) \text{ as } \omega \to \infty$$

这意味着（5.6）等价于

$$P\boldsymbol{v} - (PAP)^{-1}PJW\boldsymbol{v} = (PAP)^{-1}\boldsymbol{\psi} \tag{5.8}$$

其上界为 $\|(PAP)^{-1}JW\|_{L^2 \to L^2} = \mathcal{O}(\omega^{-1/2})$，其中 $\omega \to \infty$。

接下来考察（5.7），并再次将其分解，得到

$$Q_1AQ_1\boldsymbol{v} - Q_1JWQ_1\boldsymbol{v} - Q_1JWQ_2\boldsymbol{v} - Q_1JWP\boldsymbol{v} = Q_1\boldsymbol{\psi}, \tag{5.9}$$

$$Q_2AQ_2\boldsymbol{v} - Q_2JWQ_1\boldsymbol{v} - Q_2JWQ_2\boldsymbol{v} - Q_2JWP\boldsymbol{v} = Q_2\boldsymbol{\psi}. \tag{5.10}$$

两个方程都可以用类似的方法处理，因此我们只关注第一个方程。利用（5.8），可将（5.9）写成

$$[Q_1AQ_1 - Q_1JWQ_1]\boldsymbol{v} - Q_1JWQ_2\boldsymbol{v} - Q_1JW(PAP)^{-1}PJW\boldsymbol{v} = Q_1JW(PAP)^{-1}\boldsymbol{\psi} + Q_1\boldsymbol{\psi}.$$

算子 $B := Q_1AQ_1 - Q_1JWQ_1$ 在值域 Q_1 上的作用类似于傅里叶乘子，其矩阵为

$$B_{k_0} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}(\omega - \varepsilon\hat{V}_0k_0) + \mu - (\hat{W}_2)_0 + (\hat{W}_4)_0 & -dk_0^2 - (\hat{W}_3)_0 \\ dk_0^2 + (\hat{W}_1)_0 & \mathrm{i}(\omega - \varepsilon\hat{V}_0k_0) + \mu + (\hat{W}_2)_0 + (\hat{W}_4)_0 \end{pmatrix}$$

并且我们观察到

$$|\det(B_{k_0})| \geq |\operatorname{Im}\det(B_{k_0})| = 2|\omega - \varepsilon\hat{V}_0 k_0||\mu + (\hat{W}_4)_0| \sim \omega$$

由于 $k_0 = \mathcal{O}(\omega^{1/2})$ 且 $\omega \gg 1$。这意味着 B^{k_0} 可逆，且 $\|B^{-1}{}_{k_0}\|_{\mathbb{C}^{2\times 2}}$ 在 $\omega \gg 1$ 中一致有界，因此算子 B 也具有相同性质。对 B 求逆可得

$$Q_1\boldsymbol{v} - B^{-1}[Q_1JWQ_2 + Q_1JW(PAP)^{-1}PJW]\boldsymbol{v} = B^{-1}Q_1JW(PAP)^{-1}\boldsymbol{\psi} + B^{-1}Q_1\boldsymbol{\psi}$$

并且由于对$i = 1$、2、3、4，我们有 $W_i \in Y$，因此可以利用傅里叶系数的衰减

$$|(\hat{W}_i)_k| \leq \frac{C}{\sqrt{1+k^2}} \quad \text{for all } k \in \mathbb{Z}$$

来估计 $Q_1JWQ_2\boldsymbol{v} = (\hat{\ }JW)^{2k_0}\,\hat{\boldsymbol{v}}_{-k_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0(\cdot)}$:

$$\|Q_1JWQ_2\|_{L^2\to L^2} = \mathcal{O}(k_0(\omega,\mu)^{-1}) = \mathcal{O}(\omega^{-1/2}) \text{ as } \omega \to \infty.$$

最后，由第一部分的界可推得

$$\|Q_1JW(PAP)^{-1}PJW\|_{L^2\to L^2} = \mathcal{O}(\omega^{-1/2}) \text{ as } \omega \to \infty,$$
$$\|Q_1JW(PAP)^{-1}\|_{L^2\to L^2} = \mathcal{O}(\omega^{-1/2}) \text{ as } \omega \to \infty$$

由此我们得出结论（5.5），这正是我们需要证明的全部内容。

附录 A. 受扰LLE的推导

下面从双激光泵浦方程（1.3）推导受扰LLE（1.2）。首先，取（1.2）的一个解 $u = u(x,t)$。转到一个移动坐标系中，令 $\tilde{u}(x,t) = u(k_1x - \nu_1 t, t)$，可得 $\tilde{u}$ 满足

$$\mathrm{i}\partial_t\tilde{u} - \mathrm{i}\nu_1\partial_\xi\tilde{u} = -dk_1^2\partial_\xi^2\tilde{u} + (-\mathrm{i}\mu + \zeta)\tilde{u} - |\tilde{u}|^2\tilde{u} + \mathrm{i}f_0 + \mathrm{i}f_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}, \tag{A.1}$$

其中 $\xi := k_1x - \nu_1 t$。接下来，利用小 $|s|$ 时 $\arctan s \approx s$ 的近似，对于$|f_0| \gg |f_1|$，可得

$$f_0 + f_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} = \sqrt{f_0^2 + 2f_0f_1\cos\xi + f_1^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\frac{f_1\sin\xi}{f_0+f_1\cos\xi}} \approx f_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{f_1}{f_0}\sin\xi}.$$

将其代入（A.1），可得以下方程近似成立，其中 $\tilde{u}$

$$\mathrm{i}\partial_t\tilde{u} - \mathrm{i}\nu_1\partial_\xi\tilde{u} = -dk_1^2\partial_\xi^2\tilde{u} + (-\mathrm{i}\mu + \zeta)\tilde{u} - |\tilde{u}|^2\tilde{u} + \mathrm{i}f_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{f_1}{f_0}\sin\xi}. \tag{A.2}$$

这表明应设定 $\tilde{u}(\xi, t) = w(\xi, t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}_{f_1/f_0}\sin\xi}$，使得 w 满足

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\partial_t w =& -dk_1^2\partial_\xi^2 w + \left(\mathrm{i}\nu_1 - \mathrm{i}2dk_1^2\frac{f_1}{f_0}\cos\xi\right)\partial_\xi w \\ &+ \Big(-\mathrm{i}\mu + \zeta \underbrace{-\nu_1\frac{f_1}{f_0}\cos\xi + dk_1^2\frac{f_1^2}{f_0^2}\cos^2\xi + \mathrm{i}dk_1^2\frac{f_1}{f_0}\sin\xi}_{=:\alpha(\xi)}\Big)w - |w|^2w + \mathrm{i}f_0.\end{aligned}$$

利用 $|f_1| \ll |f_0|$，我们看到，项 $\alpha(\xi)$ 远小于 $-\mathrm{i}\mu+\zeta$。对于物理上相关的（归一化）$\mu = \mathcal{O}(1)$ 和 ζ 在 $\mathcal{O}(1)$ 至 $\mathcal{O}(10)$之间的取值，忽略$\alpha(\xi)$ 后，我们得到

$$\mathrm{i}\partial_t w = -dk_1^2\partial_\xi^2 w + \mathrm{i}\underbrace{\left(\nu_1 - 2dk_1^2\frac{f_1}{f_0}\cos\xi\right)}_{=:V(\xi)}\partial_\xi w + (-\mathrm{i}\mu+\zeta)w - |w|^2 w + \mathrm{i}f_0$$

这就是我们的目标方程（1.3），适用于 $\varepsilon = 1$ 且将 d 替换为 dk_1^2.

附录 B. 小 μ 极限下孤立波的稳定性判据

定理 2 中的稳定性判据在 $\mu \to 0$ 下的孤立波 $\mathbb{R}$ 聚焦情形 $d > 0$下变得更加明确。因此，我们考虑如下形式的定态 LLE:

$$-du'' + (\zeta - \mathrm{i}\mu)u - |u|^2 u + \mathrm{i}\mu f_0 = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{B.1}$$

这里，泵浦项 $\mathrm{i}\mu f_0$ 和耗散项 $-\mathrm{i}\mu u$ 都很小，且在 μ 中阶数相同。当 μ 较小时，解可渐近展开为

$$u = u^{(0)} + \mu u^{(1)} + \mathcal{O}(\mu^2). \tag{B.2}$$

这里 $u^{(0)}$ 是非线性薛定谔方程（NLSE）的孤立波，当 $d > 0$ 时存在，而 $u^{(1)}$ 则由线性非齐次方程求得

$$(-d\partial_x^2 + \zeta - 2|u^{(0)}|^2)u^{(1)} - (u^{(0)})^2\bar{u}^{(1)} = \mathrm{i}u^{(0)} + \mathrm{i}f_0. \tag{B.3}$$

~采用向量形式 $u = u_1 + \mathrm{i}u_2$ 以及线性化算子 $L_u = JA_u - \mu I$，如式（2.2）所示，我们可以将式（B.3）改写为：$JA_{u^{(0)}}\boldsymbol{u}^{(1)} = \boldsymbol{u}^{(0)} + f_0$。回想一下，

$$\ker \widetilde{L}_u = \mathrm{span}\{\boldsymbol{u}'\}, \quad \ker \widetilde{L}_u^* = \mathrm{span}\{J\boldsymbol{\phi}^*\},$$

根据假设 (A2)，这意味着

$$JA_u\boldsymbol{u}' = \mu\boldsymbol{u}', \qquad JA_u\boldsymbol{\phi}^* = -\mu\boldsymbol{\phi}^*.$$

展开式（B.2）在 $\mathcal{O}(\mu)$ 的阶上给出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}' &= (\boldsymbol{u}^{(0)})' + \mu(\boldsymbol{u}^{(1)})' + \mathcal{O}(\mu^2),\\ \boldsymbol{\phi}^* &= C\left[(\boldsymbol{u}^{(0)})' + \mu[(\boldsymbol{u}^{(1)})' + 2\boldsymbol{v}^{(1)}] + \mathcal{O}(\mu^2)\right],\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{v}^{(1)}$是线性非齐次方程$JA_{u^{(0)}}\boldsymbol{v}^{(1)} = -(\boldsymbol{u}^{(0)})'$的一个解，而常数$C = C(\mu) \in \mathbb{C}$ 由归一化条件 $\langle \boldsymbol{u}', J\boldsymbol{\phi}^*\rangle_{L^2} = 1$确定。方程$JA_{u^{(0)}}\boldsymbol{v}^{(1)} = -(\boldsymbol{u}^{(0)})'$在直线 $\mathbb{R}$ 上的解可以显式写出：

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = -\frac{1}{2d}xJ\boldsymbol{u}^{(0)},$$

其中，$\boldsymbol{u}^{(0)}(x) \to 0$ 在孤立波情形下随$x| \to \infty$ 指数快速衰减，且$d > 0$。这使我们能够通过分部积分计算：

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{u}', J\boldsymbol{\phi}^* \rangle_{L^2} &= C\left[2\mu \int_{\mathbb{R}} [(u_1^{(0)})' v_2^{(1)} - (u_2^{(0)})' v_1^{(1)}] dx + \mathcal{O}(\mu^2)\right] \\ &= C\left[\mu d^{-1} \int_{\mathbb{R}} x[(u_1^{(0)})' u_1^{(0)} + (u_2^{(0)})' u_2^{(0)}] dx + \mathcal{O}(\mu^2)\right] \\ &= C\left[-\frac{\mu}{2d}\|u^{(0)}\|_{L^2}^2 + \mathcal{O}(\mu^2)\right].\end{aligned}$$

归一化 $\langle \boldsymbol{u}' J\boldsymbol{\phi}^* \rangle_{L^2} = 1$ 按如下方式渐近地定义 C：

$$C = -\frac{2d}{\mu\|u^{(0)}\|_{L^2}^2}\left[1 + \mathcal{O}(\mu)\right].$$

定理 2 的稳定性条件用 $V'_{\text{eff}}(\sigma_0)$的符号表示，其中 σ_0是 V_{eff}的一个单根。现在，有效势可以更明确地写为

$$\begin{aligned}V_{\text{eff}}(\sigma_0) &= \langle V(\cdot + \sigma_0)\boldsymbol{u}', J\boldsymbol{\phi}^* \rangle_{L^2} \\ &= C\left[\mu d^{-1} \int_{\mathbb{R}} xV(x+\sigma_0)[(u_1^{(0)})' u_1^{(0)} + (u_2^{(0)})' u_2^{(0)}] dx + \mathcal{O}(\mu^2)\right] \\ &= \frac{1}{\|u^{(0)}\|_{L^2}^2} \int_{\mathbb{R}} [xV'(x+\sigma_0) + V(x+\sigma_0)]|u^{(0)}|^2 dx + \mathcal{O}(\mu).\end{aligned}$$

若 $V_{\text{eff}}(\sigma_0) = 0$，则当 $\mu = 0$ 较小时，定态 LLE（B.1）的孤立波可在扰动方程中针对较小的 ε 唯一延拓，且当 $V'_{\text{eff}}(\sigma_0) \cdot \varepsilon > 0$时，该唯一延拓是谱稳定的。

致谢

L. Bengel 和 W. Reichel 感谢德国研究基金会（DFG）提供资助——项目编号 258734477——SFB 1173。D. E. Pelinovsky 感谢亚历山大·冯·洪堡基金会授予洪堡研究奖并提供支持。

我们感谢卡尔斯鲁厄理工学院光子学与量子电子学研究所（IPQ）的彭焕发博士，感谢他向我们展示如何从 LLE 的双模泵浦变体（1.3）推导出我们的主方程（1.2）。

参考文献

[1] Stan Alama、LiaBronsard、Andres Contreras 和 Dmitry E. Pelinovsky。耦合格罗斯-皮塔耶夫斯基方程中的畴壁。《*Archive Rational Mech Appl.*》，215：579–615，2015年。[2] Thierry Cazenave 和 Alain Haraux。半线性演化方程导论，数学与应用牛津讲座系列第13卷。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1998年。由 Yvan Martel 从1990年法文原版译出，并由作者修订。[3] Lucie Delcey 和 Mariana Haragus。Lugiato-Lefever 方程周期波的不稳定性。《*Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*》，63(4)：377–399，2018年。

[4] Lucie Delcey 和 Mariana Haragus。图灵不稳定性出现时 Lugiato-Lefever 方程的周期波。英国皇家学会哲学汇刊 A 辑，376(2117)：20170188，2018年。doi:10.1098/rsta.2017. 0188。[5] Tomas Dohnal、Jens Rademacher、Hannes Uecker 和 Daniel Wetzel。pde2path 2.0：多参数延拓与周期区域。2014年。[6] Klaus-Jochen Engel 和 Rainer Nagel。线性演化方程的单参数半群，数学研究生教材第194卷。Springer-Verlag，纽约，2000年。另有 S. Brendle、M. Campiti、T. Hahn、G. Metafune、G. Nickel、D. Pallara、C. Perazzoli、A. Rhandi、S. Romanelli 和 R. Schnaubelt 撰写的补充内容。[7] J Fröhlich、S. Gustafson、B. L. G. Jonsson 和 I. M. Sigal。外部势场中的孤立波动力学。《数学物理通讯》，250：613–642，2004年。[8] J. Gärtner、P. Trocha、R. Mandel、C. Koos、T. Jahnke 和 W. Reichel。基于分岔理论的耗散型克尔孤子频率梳带宽与转换效率分析。《物理评论 A》，100：033819，2019年9月。URL： https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.100.033819，doi: 10.1103/PhysRevA.100.033819。[9] Janina Gärtner 和 Wolfgang Reichel。通过解析与数值延拓法求解 Lugiato–Lefever 方程的孤子解。载于 Willy Dörfler、Marlis Hochbruck、Dirk Hundertmark、Wolfgang Reichel、Andreas Rieder、Roland Schnaubelt 和 Birgit Schörkhuber 编，《波现象数学》，数学新进展，179–195页。Birkhäuser 巴塞尔，2020年10月。doi:10.1007/ 978-3-030-47174-3_11。[10] Elias Gasmi、Tobias Jahnke、Michael Kirn 和 Wolfgang Reichel。通过双模泵浦获得的频率梳 Lugiato–Lefever 模型解的全局连续分支。CRC 1173 预印本 2022/56，卡尔斯鲁厄理工学院，2022年10月。URL: https://www.waves.kit.edu/downloads/ CRC1173_Preprint_2022-56.pdf, doi:10.5445/IR/1000151945。[11]Elias Gasmi、Huanfa Peng、Christian Koos 和 Wolfgang Reichel。反常色散双泵浦谐振腔中克尔孤子频率梳的带宽与转换效率分析。CRC 1173 预印本 2022/55，卡尔斯鲁厄理工学院，2022年10月。URL：https://www.waves.kit. edu/downloads/CRC1173_Preprint_2022-55.pdf，doi:10.5445/IR/1000151944。[12] Cyril Godey。Lugiato-Lefever 方程的分岔分析。《欧洲物理学杂志 D》，71(5)：131，2017年5月。doi:10.1140/epjd/e2017-80057-2。[13] Cyril Godey、Irina V. Balakireva、Aurélien Coillet 和 Yanne K. Chembo。反常与正常色散区间内克尔光学频率梳时空 Lugiato-Lefever 模型的稳定性分析。《物理评论 A》，89：063814，2014年。URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA. 89.063814，doi:10.1103/PhysRevA.89.063814。[14] Sevdzhan Hakkaev、Milena Stanislavova 和 Atanas G. Stefanov。周期性光波导 Lugiato-Lefever 模型中稳定克尔频率梳的生成。《SIAM 应用数学杂志》，79(2)：477–505，2019年。doi:10.1137/18M1192767。[15] Mariana Haragus、Mathew A. Johnson 和 Wesley R. Perkins。谱稳定的 Lugiato-Lefever 周期波的线性调制与次谐波动力学。《微分方程杂志》，280：315–354，2021年。doi:10.1016/j.jde.2021.01.028。[16] Mariana Haragus、Mathew A. Johnson、Wesley R. Perkins 和 Björn de Rijk。谱稳定的 Lugiato-Lefever 周期波的非线性调制动力学，2021年。URL: https://arxiv.org/abs/ 2106.01910，doi:10.48550/ARXIV.2106.01910。[17] Tosio Kato。线性算子扰动理论。数学经典。Springer-Verlag，柏林，1995年。1980年版的重印本。[18] Hansjörg Kielhöfer。分岔理论，应用数学科学第156卷。Springer，纽约，第二版，2012年。偏微分方程应用导论。doi:10.1007/ 978-1-4614-0502-3。

[19] L. A. Lugiato 和 R. Lefever. 被动光学系统中的空间耗散结构。《物理评论快报》，58:2209–2211，1987年。网址：http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.2209，doi:10.1103/PhysRevLett.58.2209。[20] Alessandra Lunardi. 插值理论。讲义。比萨高等师范学校（新系列）。[讲义。比萨高等师范学校（新系列）]。Edizioni della Normale，比萨，第二版，2009年。[21] Rainer Mandel 和 Wolfgang Reichel. Lugiato-Lefever 方程模型中频率梳的先验界与整体分岔结果。《SIAM 应用数学杂志》，77(1):315–345，2017年。doi:10. 1137/16M1066221。[22] Pablo Marin-Palomo、Juned N Kemal、Maxim Karpov、Arne Kordts、Joerg Pfeifle、Martin HP Pfeiffer、Philipp Trocha、Stefan Wolf、Victor Brasch、Miles H Anderson 等. 用于大规模并行相干光通信的微谐振器基孤子。《自然》，546(7657):274–279，2017年。[23] T. Miyaji、I. Ohnishi 和 Y.Tsutsumi. 一维空间中 Lugiato-Lefever 方程的分岔分析。《物理学D辑》，239(23-24):2066–2083，2010年。网址：http://dx.doi.org/10.1016/j.physd.2010. 07.014，doi:10.1016/j.physd.2010.07.014。[24]Pedro Parra-Rivas、Damià Gomila、Lendert Gelens 和 Edgar Knobloch. 反常色散下 Lugiato-Lefever 方程局域态的分岔结构。《物理评论E辑》，97(4):042204，2018年。网址：https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.97.042204，doi:10.1103/PhysRevE.97.042204。[25] Pedro Parra-Rivas、Damià Gomila、François Leo、Stéphane Coen 和 Lendert Gelens. 三阶色散使克尔频率梳稳定。《光学快报》，39(10):2971–2974，2014年。网址：http: //ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-39-10-2971，doi:10.1364/OL.39.002971。[26] Pedro Parra-Rivas、Edgar Knobloch、Damià Gomila 和 Lendert Gelens. 正常色散下 Lugiato-Lefever 方程中的暗孤子。《物理评论 A》，93(6):1–17，2016年。网址：https://journals.aps.org/pra/abstract/10.1103/PhysRevA.93.063839，doi:10.1103/PhysRevA.93.063839。[27] Dmitry E. Pelinovsky 和 P. G. Kevrekidis. 外势中的暗孤子。《应用数学与物理杂志》，59:559–599，2008年。[28] Nicolas Périnet、Nicolas Verschueren 和 Saliya Coulibaly. Lugiato-Lefever 模型中的 Eckhaus 不稳定性。《欧洲物理学杂志 D》，71(9):243，2017年9月。doi:10.1140/epjd/e2017-80078-9。[29] Nathalie Picqué 和 Theodor W Hänsch. 频率梳光谱学。《自然·光子学》，13(3):146–157，2019年。[30] Milena Stanislavova 和 Atanas G. Stefanov. 周期波导中谱稳定的 Lugiato-Lefever 孤子的渐近稳定性。《数学物理杂志》，59(10):101502，12，2018年。doi:10.1063/1.5048017。[31] Hossein Taheri、Andrey B. Matsko 和 Lute Maleki. 克尔孤子的光学晶格阱。《欧洲物理学杂志 D》，71(6)，2017年6月。网址：https://doi.org/10.1140%2Fepjd%2Fe2017-80150-6，doi: 10.1140/epjd/e2017-80150-6。[32] Philipp Trocha、M Karpov、D Ganin、Martin HP Pfeiffer、Arne Kordts、S Wolf、J Krockenberger、Pablo Marin-Palomo、Claudius Weimann、Sebastian Randel 等. 利用微谐振器孤子频率梳进行超快光学测距。《科学》，359(6378):887–891，2018年。[33] Th. Udem、R. Holzwarth 和 T. W. Hänsch. 光学频率计量。《自然》，416(6877):233–237，2002年。网址：http://www.nature.com/doifinder/10.1038/416233a，doi:10.1038/416233a。[34] Hannes Uecker、Daniel Wetzel 和 Jens D.M. Rademacher. pde2path——用于二维椭圆系统连续延拓与分岔分析的 MATLAB 软件包。《NMTMA》，(7):58–106，2014年。[35] Qi-Fan Yang、Myoung-Gyun Suh、Ki Youl Yang、Xu Yi 和 Kerry J Vahala. 微谐振器孤子双梳光谱学。载于 CLEO：科学与创新，页码 SM4D–4。Optica 出版集团，2017年。

L. BENGEL 卡尔斯鲁厄理工学院（KIT）分析研究所，D-76128 卡尔斯鲁厄，德国电子邮件地址：lukas.bengel@kit.edu

D. PELINOVSKY 数学与统计学系，麦克马斯特大学，汉密尔顿，安大略省，加拿大，L8S 4K1电子邮件地址：dmpeli@math.mcmaster.ca

W. REICHEL 分析研究所，卡尔斯鲁厄理工学院（KIT），D-76128 卡尔斯鲁厄，德国电子邮件地址：wolfgang.reichel@kit.edu