arXiv:2302.00312v1 [math.AP] 1 Feb 2023

经典函数空间上傅里叶积分算子的有界性

Anders Israelsson、Tobias Mattsson 和 Wolfgang Staubach

谨以此文缅怀我们的朋友 Gustav Hammarhjelm

摘要。我们研究振幅属于一般 Hörmander 类 $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$、 $\rho,\delta\in[0,1]$，且具有任意秩 $\kappa\in\{0,1,\dots,n-1\}$ 的非退化相位函数的傅里叶积分算子，在 Besov-Lipschitz $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 和 Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 空间中的整体有界性，其中阶为 s 和 $0<p\le\infty$,$0<q\le\infty$。所得结果均达到端点且是尖锐的，并应用于上述函数空间中 Klein-Gordon型振荡积分的正则性。

目录

1. 引言 1 2. 预备知识 5 2.1. 经典函数空间简述 6 2.2. 傅里叶积分算子相关的基本定义 11 2.3. 将相位属于 Φ^2 的 FIOS 约化为相位属于 Φ^1 13 的 FIOS 2.4. L^2 傅里叶积分算子的有界性 13 2.5. 低频 Besov-Lipschitz 和 Triebel-Lizorkin 估计 13 2.6. 关于 $p>2$ 13 的一个 Triebel-Lizorkin 有界性定理 3. 一般 Hörmander 类中参数依赖的 ΨDO 与傅里叶积分算子的左复合 14 4. 常秩傅里叶积分算子的分解 20 5. 傅里叶积分算子估计 34 5.1. 与经典型和奇异型振幅相关的 Triebel-Lizorkin 估计 36 5.2. 与禁戒型振幅相关的 Triebel-Lizorkin 估计 44 5.3. Besov-Lipschitz 估计 50 6. 与 Klein-Gordon 方程相关的振荡积分估计 51 参考文献 52

1. 引言

本文研究以下形式的振荡积分算子的全局正则性

$$T^\varphi_a f(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\varphi(x,\xi)}\,a(x,\xi)\,\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

2010 数学主题分类。 主要分类：35S30、42B35、42B37；次要分类：42B20。关键词和短语。 傅里叶积分算子、Hörmander 类、Besov-Lipschitz空间、Triebel-Lizorkin 空间、Klein-Gordon 方程。第二作者获得 Knut and Alice Wallenberg 基金会资助。

其中振幅属于一般 Hörmander类$S^m_{\rho,\,\delta}(\mathbb{R}^n)$（定义 2.12），且算子作用于阶为 s 、满足 $0 < p \le \infty$ 和$0 \le q < \infty$. 的 Besov-Lipschitz $B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ 空间及 Triebel-Lizorkin $F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ 空间。全文假设相位函数 $\varphi(x,\ \xi)$ 关于 ξ 正齐次，次数为一，强非退化（定义 2.17），且秩为 κ （定义 2.18）。算子 T^φ_a 因而称为傅里叶积分算子，这一术语由 L. Hörmander [13],提出；对于 $\rho \in (\frac{1}{2}, 1]$和 $\delta = 1-\rho$）的情形，他建立了局部理论和微积分。请注意，此处相位的秩 κ 是介于 0 和 $n-1$ 之间的整数。 $\kappa = 0$ 的情形对应于伪微分算子，而 $\kappa = n-1$ 的情形则适用于固定时间 $t,$ 下的波算子 $e^{it\sqrt{-\Delta}}$ ；波算子是傅里叶积分算子的典型例子。

关于 Fourier 积分算子在 Besov-Lipschitz 和 Triebel-Lizorkin 空间中的正则性，在 [2] P. Brenner 证明，在对函数 f_0 和 f_1满足适当的正则性假设时，若

$$f_+ := \frac{1}{2}\big(f_0 - i(\sqrt{-\Delta})^{-1} f_1\big)$$

and

$$f_- := \frac{1}{2}\big(f_0 + i(\sqrt{-\Delta})^{-1} f_1\big)$$

则对于固定的时间 $t > 0$ ，有如下估计

$$\big\|e^{it\sqrt{-\Delta}} f_+ + e^{-it\sqrt{-\Delta}} f_-\big\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le C_t \left(\|f_0\|_{B^{s+m}_{p',q}(\mathbb{R}^n)} + \|f_1\|_{B^{s+m-1}_{p',q}(\mathbb{R}^n)}\right), \tag{1}$$

其中 $s \in \mathbb{R}$、 $p \in [2,\infty)$、 $p' = \frac{p}{p-1}$、 $q \in [1,\infty]$和 $(n+1)\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| \le m \le 2n\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$。

在 [16] L. V. Kapitanskiĭ 将 Brenner 的结果扩展并改进至范围$p \in [2,\infty]$和 $(n-1)\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| \le m \le n\left|1 - \frac{2}{p}\right|$.

Brenner 和 Kapitanskiĭ 的开创性成果，以及 Q.J. Qiu [20] 后来关于 Besov-Lipschitz空间的研究，均关注秩等于 $n-1$ 的傅里叶积分算子的估计，其中振幅属于 Hör- mander 类 $S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n)$，适用于某个 m ；同时也研究了上述函数空间的 Banach空间尺度。

对于振幅属于其他 Hörmander 类的算子，H. Triebel [28] 采用 Triebel-Lizorkin 空间的 Frazier-Jawerth 原子分解，研究了傅里叶积分算子在这些空间上的正则性。具体而言，设 $m \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{N}$ 和 $N \in \mathbb{N}$。若对任意 $R > 0$ ，均存在常数 $c_R > 0$ ，使得 $b(x,\xi)$ 属于符号类 $S^m{}_{\mathrm{loc}1}(M,N)$，则称其属于该符号类，其中

$$\sup_{|x| \le R} \left|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x b(x,\xi)\right| \le c_R |\xi|^{m-|\alpha|+|\beta|}, \quad |\xi| \ge 1, |\alpha| \le M, |\beta| \le N \tag{2}$$

Triebel [28] 证明了以下结论：设 $0 < p \le 1 < q \le \infty$ 和 $s > n\left(\frac{1}{p} - 1\right)$。设 $N \in \mathbb{N}$ 满足 $N > 1 + \frac{n}{p}$ 和 $m \ge 0, \quad m' \ge 0$ 并且

$$(\varphi(x,\xi) - x\cdot\xi) \in S^{m'\,\mathrm{loc}}_1(1+[s],N), \quad a(x,\xi) \in S^{-m\,\mathrm{loc}}_1(1+[s],N) \tag{3}$$

满足 $m \geq m'(1+[s]+N)$。还假设

$$\sup_{|x|\leq R} \left|\partial_x^\alpha \left(e^{i(\varphi(x,\xi)-x\cdot\xi)}\, a(x,\xi)\right)\right| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_\xi) \tag{4}$$

对所有 $|\alpha| \leq 1+[s]$ 和所有 $R>0$ 均成立。于是，傅里叶积分算子 T_a^φ 将 $F^s{}_{\mathrm{comp}p,\,q}(\mathbb{R}^n) \to F^s{}_{\mathrm{loc}p,\,q}(\mathbb{R}^n)$。Triebel 的这一结果是首个关于振幅属于所谓禁用 Hörmander 类 $S^m_{1,\,1}(\mathbb{R}^n)$，的傅里叶积分算子在 Triebel-Lizorkin 空间中正则性的已知结果。

从本文工作的角度来看，M. Pramanik、K. Rogers 和 A. Seeger 在论文 [19] 中取得了突破，推动了对 Triebel-Lizorkin 空间（因此也包括 Besov-Lipschitz 空间）上积分算子正则性的研究。在该论文中，作者证明了一种 Calderón-Zygmund型估计，并将其应用于多个问题，包括 Radon变换和傅里叶积分算子的正则性，仅举两例。具体而言，作者考察了局部傅里叶积分算子 T_a^φ，其中 $a(x,\,\xi) \in S^m_{1,\,0}(\mathbb{R}^n)$ 的支集是紧的，且 x 上的 $\varphi(x,\,\xi)$ 在 $a(x,\,\xi)$ 的支集上非退化。利用文献 [19], 中的 Calderón-Zygmund 估计，他们证明了若 $n \geq 2,\ 2<p<\infty,\ q>0$，则 $T_a^\varphi: F^0_{p,\,p}(\mathbb{R}^n) \to F^0_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$，条件是 $m = -(n-1)\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|$.

近年来，第二和第三作者与 S. Rodríguez- López 合作 [14], 证明，对于任意 $s \in \mathbb{R}$、$\dfrac{n}{n+1} < p \leq \infty$ 和 $0<q\leq\infty$，振幅为 $a \in S^m_{1,\,0}(\mathbb{R}^n)$ 且具有属于类 Φ^2 的强非退化相位函数的傅里叶积分算子（见定义2.16）满足

$$T_a^\varphi : B^{s+m-m_c}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \to B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n),$$

前提是 $m_c = -(n-1)\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|$。此外，在相位及参数 s 和 p 满足相同条件时，还证明了 T_a^φ 是从 $F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ 到 $F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$，的有界算子，前提是 $a \in S^{-(n-1)\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}_{1\,0}{}_{,}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\min\{2,p\} \leq q \leq \max\{2,p\}$. 这是通过在垂直方向上对 $F^s_{p,\,p}(\mathbb{R}^n) = B^s_{p,\,p}(\mathbb{R}^n)$ 与 $F^s_{p,\,2}(\mathbb{R}^n)$ 之间进行复插值实现的（如**图1**所示）。

然而，对于 $q \in [0,\infty]$ 的取值范围，迄今为止最好的结果仅适用于振幅 $a \in S^{-(n-1)\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|-\varepsilon}_{1\,0}{}_{,}(\mathbb{R}^n)$，其中 $\varepsilon>0$ 可取任意值，因此预期的最优端点正则性结果尚付阙如。不过，正如 M. Christ 和 A. Seeger [4], 所指出的，在研究 q's 的 Triebel-Lizorkin 有界性时，有必要限制其取值范围；对于阶为 $m = -(n-1)\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|$ 的傅里叶积分算子，p 和 q 取任意值时，相关结果实际上并不成立。顺便提一下，具有 $\varepsilon-$ 损失的有界性对于振幅更一般的算子也成立，参见本文中的引理5.9。

上述有界性结果的讨论表明，傅里叶积分算子的正则性估计可以从三个方面得到改进：一是Besov-Lipschitz 空间和Triebel-Lizorkin 空间的尺度范围，即 s、p 和 q；二是振幅的阶和类型，即m，ρ 和 δ；三是傅里叶积分算子的秩。本文尝试在这三个方面进行改进，并取得最优

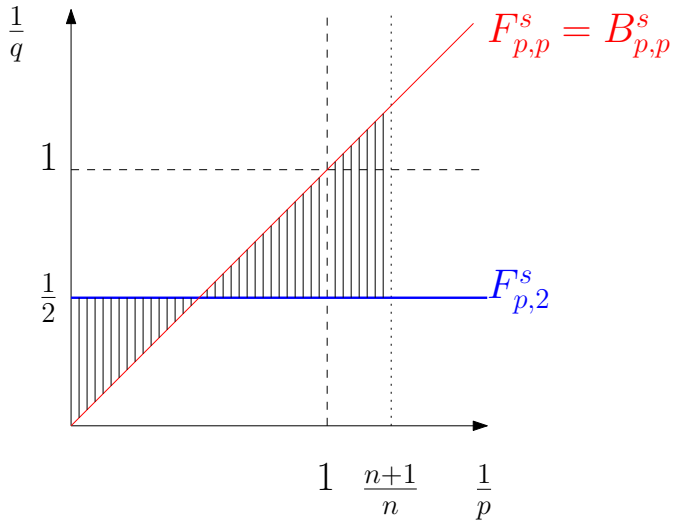

图1. 特里贝尔-利佐金尺度上的整体有界性。

在这三个方向上均取得成果。

考虑与$\rho = 1$、 $\delta = 0$不同类型以及与 $n-1$ 不同秩的傅里叶积分算子的动机，来自偏微分方程、散射理论、反问题和断层成像等理论，仅举数例。在论文 [3] 中，作者按照以下方案对算子的振幅进行了分类。类型为$\rho \in (0,1]$ 和 $\delta \in [0,1)$ 的振幅称为$a \in S^m_{\rho,\,\delta}(\mathbb{R}^n)$、经典型；具有 $\rho = 0$ 和 $\delta \in [0,1)$的振幅称为奇异型；类型为 $\rho \in [0,1]$ 和 $\delta = 1$的振幅则称为禁戒型。

本文通过在频率空间中采用某种分解，建立依赖参数的伪微分算子作用于傅里叶积分算子的复合定理（比 [13]中的局部定理一般得多），并利用 Frazier-Jawerth[8, 9, 10], 思想下的 Triebel-Lizorkin 空间的原子分解和分子分解，以及 Pramanik-Rogers-Seeger 的向量值不等式，显著扩展了上述 [19] 和 [14] 中的结果。例如，比较展示先前结果的**图1** 与**图6** （见第5.1小节），后者展示了本文得到的扩展结果。

作为我们结果的一个应用，我们还可以考虑与 Klein-Gordon 方程相关的振荡积分算子。这些算子对应于算子 $T^\varphi_a$where $\varphi(x,\ \xi) = x\cdot\xi + \langle\xi\rangle$。尽管这些算子并非傅里叶积分算子（因为其相位函数缺乏齐次性），但正如我们将在定理 6.2 中看到的，这个问题可以归结为傅里叶积分算子的情形。

更具体地说，在定理5.11、5.12、5.13（以及定理5.14、5.16、5.17）中，我们得到了关于振幅属于类 $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 的经典型、奇异型和禁戒型尺度，且相位函数秩任意的傅里叶积分算子在 Triebel-Lizorkin（以及 Besov-Lipschitz 空间）上的正则性结果。这些结果在端点处均成立。此外，我们还得到了振幅属于最差的 Hörmander类 $S^m_{0,1}(\mathbb{R}^n)$ 的算子，以及振幅属于禁戒类 $S^m_{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 的算子的正则性结果；对于后者，甚至

端点 L^2–有界性一般也不可能成立。文献 [3] 证明，对于带有禁戒振幅的算子，可以建立伪微分算子的 Meyer-Stein 结果的类似结论，即振幅属于 $S^0_{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 且相位函数的秩为 $n-1$ 的傅里叶积分算子，在任意 $s>0$ 下都在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 上有界。本文将这一结果（定理5.13）推广至秩为 $\kappa \in \{0,1,\dots,n-1\}$、阶为 $m=-\kappa\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|$、型为 $\rho=\delta=1$, 的算子，并证明它们在满足 $s>n\left(\frac{1}{\min\{1,p,q\}}-1\right)$ 且 p 和 q 取值范围 admissible 的 Triebel-Lizorkin 空间 $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性。这大大扩展了 Triebel [28], 以及上文提到的第二作者和第三作者与 Rodríguez-López [3], 的结果。

本文结构安排如下：第2节介绍傅里叶分析和微局部分析所需的预备知识，并补充函数空间理论的必要背景。第3节证明一个依赖参数的复合（或微积分）定理，这对于证明振幅属于一般 Hörmander 类的算子在 Besov-Lipschitz 空间和 Triebel-Lizorkin 空间中的正则性结果至关重要。第4节介绍常秩傅里叶积分算子的分解；该分解不同于 [24], 中给出的分解，因为它适用于振幅为 $\rho\in[0,\frac{2}{3}]$ 型的算子。请注意， [24] 中给出的分解适用于 $\rho\in[\frac{1}{2},1]$。本节还给出了算子核的重要估计。第5节利用原子分解和分子分解估计傅里叶积分算子本身，并证明这些算子在 Triebel-Lizorkin 空间和 Besov-Lipschitz 空间中的主要正则性定理。最后，第6节讨论与 Klein-Gordon 方程相关的振荡积分算子的正则性，并说明该情形下也成立与波动方程情形类似的结果。

致谢。第二作者受到克努特与爱丽丝·瓦伦堡基金会的资助。作者还感谢 Andreas Strömbergsson 的支持与鼓励。

2. 预备知识

按照惯例，我们用 C 表示不等式中的正数常数。它们可由具体情形下已知的参数确定，但其取值对当前问题并不重要。本文中的此类参数包括 m、 p、 s、 n, 以及与各种振幅或相位函数的半范数相关的常数。 C 的取值可能随行而异，但必要时均可估计。我们还用 $a\lesssim b$ 简记 $a\le Cb$ ，此外，当 $a\lesssim b$ 和 $b\lesssim a$ 时，将使用记号 $a\sim b$ 。

我们首先回顾 Littlewood–Paley单位分解的定义；这是对所研究算子进行频率分解时最基本的工具。

定义 2.1. 设 $\psi_0\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $B(0,1)$ 上等于1 ，且其支集位于$B(0,2)$内。接着令

$$\psi_j(\xi):=\psi_0\left(2^{-j}\xi\right)-\psi_0\left(2^{-(j-1)}\xi\right),$$

其中 $j\ge1$ 是一个整数，且 $\psi(\xi):=\psi_1(\xi)$。于是 $\psi_j(\xi)=\psi\left(2^{-(j-1)}\xi\right)$ ，并且有如下 *Littlewood–Paley*单位分解

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(\xi) = 1, \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

有时，定义一个由光滑且紧支撑函数 Ψ_j 构成的序列也很有用，其中 $\Psi_j = 1$ 在 ψ_j 的支集上成立，并且在稍大的紧集之外满足 $\Psi_j = 0$ 。例如，可以令

$$\Psi_j := \psi_{j+1} + \psi_j + \psi_{j-1},$$

其中 $\psi_{-1} := \psi_0$。

下文将 Littlewood-Paley 算子定义为

$$\psi_j(D)\, f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_j(\xi)\, \widehat{f}(\xi)\, e^{ix\cdot\xi}\, \text{đ}\xi,$$

其中 đξ 表示归一化的勒贝格测度 d$\xi/(2\pi)^n$ ，且

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\, f(x)\, \mathrm{d}x,$$

是 f 的傅里叶变换。

2.1. **经典函数空间简述**。这里我们回顾 Besov-Lipschitz 空间和 Triebel-Lizorkin 空间的定义及一些基本事实，这些内容将在本文中贯穿使用。我们首先通过以下方式定义函数序列 $\{f_k\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ 的混合范数

$$\|\{f_k\}\|_{L^p(\ell^q)} := \Big\| \sum_k |f_k(\cdot)|^q \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1/q},$$
$$\|\{f_k\}\|_{\ell^q(L^p)} := \Big(\sum_k \|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q \Big)^{1/q}.$$

现在利用定义 2.1 中的 Littlewood-Paley 分解，定义*Triebel-Lizorkin*空间 $F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ 和 *Besov-Lipschitz*空间 $B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$如下:

定义 2.2。 设 $s \in \mathbb{R}$ 和 $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$。*Triebel-Lizorkin*空间定义为

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \Big\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \,:\, \|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \|2^{js}\psi_j(D)f\|_{L^p(\ell^q)} < \infty \Big\},$$

其中 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 表示缓增分布空间。

定义 2.3。 设 $0 < p, q \le \infty$ 和 $s \in \mathbb{R}$。*Besov-Lipschitz*空间定义为

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \Big\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \,:\, \|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \|2^{js}\psi_j(D)f\|_{\ell^q(L^p)} < \infty \Big\}.$$

注 2.4。 选择不同的基底 $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$ 会得到 $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 的等价范数，见定义 2.2，例如 [26]。我们将使用 $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$ 或 $\{\Psi_j\}_{j=0}^{\infty}$ 来定义 $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 的范数。

注意，对于 $p=q=\infty$ 和 $0<s\le 1$，我们得到熟知的 Lipschitz空间 $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$，即 $B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)=\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$。对于 $-\infty<s<\infty$ 和 $1\le p<\infty$,$F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)=H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$（各种基于 L^p 的 Sobolev 和 Sobolev-Slobodeckij空间），对于 $0<p<\infty$, $F^0_{p,2}(\mathbb{R}^n)=h^p(\mathbb{R}^n)$（局部Hardy空间）。此外，$F^0_{1,2}(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间是 bmo（局部BMO空间）。

其他一些对我们有用的事实如下

(i) 对于 $-\infty<s<\infty$ 和 $0<p\le\infty$，有

$$B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)=F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n), \tag{5}$$

and

$$F^{s+\varepsilon}_{p,q_0}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow F^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)\quad\text{and}\quad B^{s+\varepsilon}_{p,q_0}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow B^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \tag{6}$$

对于 $-\infty<s<\infty$、$0<p<\infty$、$0<q_0$，$q_1\le\infty$ 和所有 $\varepsilon>0$。

(ii) 对于 $s'\in\mathbb{R}$，算子 $(1-\Delta)^{s'/2}$ 将 $F^s_{p,\ q}(\mathbb{R}^n)$ 同构地映射到$F^{s-s'}_{p\,q}$，$(\mathbb{R}^n)$，并将 $B^s_{p,\ q}(\mathbb{R}^n)$ 同构地映射到 $B^{s-s'}_{p\,q}$，$(\mathbb{R}^n)$，参见 [26, 第 58] 页。

(iii) 设 $X^s_{p,\ q}(\mathbb{R}^n)$ 为 $B^s_{p,\ q}(\mathbb{R}^n)$ 或 $F^s_{p,\ q}(\mathbb{R}^n)$。则对于所有 $-\infty<s<\infty$ 和$0<p$，$q\le\infty$，有

$$\|fg\|_{X^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\lesssim\Big(\sum_{|\alpha|\le M}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha f(x)|\Big)\|g\|_{X^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}. \tag{7}$$

我们还需要以下结果（用于证明引理 2.8）。证明见 [26]。

定理 2.5. 设

$$\mathfrak{U}_p(\mathbb{R}^n):=\{a;\ a=\{a_k\}_{k=0}^\infty\subset\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)\cap L^p(\mathbb{R}^n),\\ \operatorname{supp}\widehat{a_k}\subseteq B(0,2^{k+1})\}.$$

这类序列 $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ 称为可容许序列。

(i) *If* $0<p,q<\infty$ *and* $s>n\Big(\frac{1}{\min\{p,q,1\}}-1\Big)$ *then*

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)=\{f;\ f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),\ \exists a=\{a_k\}_{k=0}^\infty\subset\mathfrak{U}_p(\mathbb{R}^n),\ f=\lim_k a_k,\\ \|a_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|2^{sk}(f-a_k)\|_{L^p(l^q)}<\infty\}.$$

此外，$\|f\|_{F^s_{p,\ q}}=$下确界$_a(\|a_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|2^{sk}(f-a_k)_{k\ge0}\|_{L^p(l^q)})$ 是 $F^s_{p,\ q}$· 上的一个等价拟范数

(ii) 若 $0<p$、$q\le\infty$ 且 $s>n\Big(\frac{1}{\text{最小值}\{p,1\}}-1\Big)$，则

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)=\{f;\ f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),\ \exists a=\{a_k\}_{k=0}^\infty\subset\mathfrak{U}_p(\mathbb{R}^n),\ f=\lim_k a_k,\\ \|a_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|2^{sk}(f-a_k)\|_{l^q(L^p)}<\infty\}.$$

此外，$\|f\|_{B^s_{p,\ q}}=$下确界$_a(\|a_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|2^{sk}(f-a_k)_{k\ge0}\|_{l^q(L^p)})$ 是$B^s_{p,\ q}$·上的一个等价拟范数

我们还需要以下结果，其证明见 [23]。

命题 2.6. 对于 $\nu = \text{最小值}\{1, p, q\}$ 有

$$\Big\| \sum_{j=0}^{\infty} f_j \Big\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|^{\nu}_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \Big)^{1/\nu} \tag{8}$$

and

$$\Big\| \sum_{j=0}^{\infty} f_j \Big\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|^{\nu}_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \Big)^{1/\nu}. \tag{9}$$

在研究 Triebel-Lizorkin 空间上线性算子的估计时，经常会遇到各种极大函数，其中一种是众所周知的 Hardy-Littlewood 极大函数

$$\mathcal{M} f(x) := \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| \, \mathrm{d}y,$$

其中上确界取遍所有包含 x 的球 B。对于 $0 < p < \infty$，也定义

$$(\mathcal{M}_p f(x) := \left(\mathcal{M}\left(|f|^p\right)\right)^{1/p}.$$

另一种是 J. Peetre 极大算子 [26]。

$$\mathfrak{M}_{a,b}(f)(x) := \Big\| \frac{f(x - \cdot)}{(1 + b|\cdot|)^a)} \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \tag{10}$$

其中 $0 < a, b < \infty$。对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$，若 $\operatorname{supp} f \subset \{\xi; |\xi| \leq 2b\}$ 且$a \geq \frac{n}{p}$，则有

$$\mathfrak{M}_{a,b} u(x) \lesssim \mathcal{M}_p u(x). \tag{11}$$

在 Triebel-Lizorkin 空间的背景下，涉及极大函数的主要工具是下述 Fefferman-Stein 向量值不等式，证明见 [7] 。

定理 2.7。 设 $0 < p < \infty$、 $0 < q \leq \infty$、 $0 < r <$ 最小值$\{p, q\}$。则对于序列 $(g_k)_{k \geq 0}$ 有

$$\Big\| \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathcal{M}_r g_k(\cdot)|^q \Big)^{1/q} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \Big\| \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |g_k(\cdot)|^q \Big)^{1/q} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{12}$$

现在我们将介绍以下较为抽象的引理，该引理将用于研究振幅属于类 $S^m_{0,1}$ 和 $S^m_{1,1}$的 FIOS 的有界性。

引理 2.8。 设 $X^s_{p,q}$ 为 $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 或 $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$。假设 $(u_k)_{k \geq 1} \in X^s_{p,q}$为满足下述条件的任意序列：

$$\big\| \{2^{ks} u_k\}_{k=0}^{\infty} \big\|_{L^p(l^q)} \lesssim \|f\|_{X^s_{p,q}}. \tag{13}$$

此外，设 $\{h_{k,l}(x)\}_{k,l \geq 0}$ 为一个序列，使得 $h_{k,l}(x)$ 的谱（即其傅里叶变换的支集）位于 $B(0, 2^{k+l+2})$ 中，并且存在某个充分大的 N，使得$h_{k,l}$ 满足点态估计，

$$|h_{k,l}(x)| \lesssim 2^{-Nl} \mathcal{M}_r u_k(x), \quad \text{for some } r \in (0, \min\{p, q\}). \tag{14}$$

设 $g_l = \sum_{k \geq 0} h_{k,l}$。若 $0 < p$、$q < \infty$ 和 $s > n\left(\frac{1}{\text{最小值}\{p,q,1\}} - 1\right)$，则

$$\Big\| \sum_{l \geq 0} g_l \Big\|_{X^s_{p,q}} \lesssim \|f\|_{X^s_{p,q}}. \tag{15}$$

证明。首先注意到，由命题 2.6 可得

$$\Big\|\sum_{l\geq 0} g_l\Big\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \Big(\sum_{l\geq 0}\|g_l\|^{\nu}_{F^s_{p,q}}\Big)^{1/\nu}, \tag{16}$$

其中 $\nu=\min\{1,p,q\}$。

为了逼近 $\|g_l\|_{F^s_{p,\ q}}$ 我们将应用定理 2.5。固定（但其他方面任意的 l），定义序列 $a=\{a_{k,l}\}_{k\geq 0}$ 如下：

$$a_{k,l}=\begin{cases}0 & k\leq l-1\\ \sum_{j=0}^{k-1} h_{j,l}(x) & k\geq l.\end{cases} \tag{17}$$

注意，由于 $h_{k,\ l}(x)$ 的谱位于 $B(0,\ 2^{k+l+2})$ 中，因此 $(a_{k,\ l})_{k\geq 0}$ 是定理 2.5 意义下的可容许序列。

因此，定理 2.5 给出：

$$\|g_l\|_{F^s_{p,q}} \lesssim \|a_{0,l}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \Big\|2^{sk}(g_l-a_{k,l})\Big\|_{L^p(l^q)}, \tag{18}$$

注意，对于所有 $l\geq 0$，$a_{0,\ l}=0$。现在，将 (18) 中最后一项拆分为两部分：

$$\|2^{sk}(g_l-a_{k,l})_{k\geq 0}\|_{L^p(l^q)} \leq \Big\|\{2^{ks}(g_l-a_{k,l})\}_{k=0}^{j-1}\Big\|_{L^p(l^q)} + \Big\|\{2^{ks}(g_l-a_{k,l})\}_{k=j}^{\infty}\Big\|_{L^p(l^q)}$$

对于第一部分，利用（14）、（13）以及 Fefferman-Stein 定理 2.7（指标为 k），我们得到

$$\begin{aligned}
\Big\|\{2^{ks}(g_l-a_{k,l})\}_{k=0}^{j-1}\Big\|_{L^p(l^q)} &= \Big\|\big(\sum_{k=0}^{l-1}2^{ksq}\big)^{1/q} g_l\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{ls}\|g_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&= 2^{ls}\Big\|\sum_{k\geq 0} h_{k,l}(x)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{ls}\Big\|\{2^{ks}h_{k,l}(x)\}_{k=0}^{\infty}\Big\|_{L^p(l^q)}\\
&\lesssim 2^{l(s-N)}\Big\|\{2^{ks}\mathcal{M}_r u_k(x)\}_{k=0}^{\infty}\Big\|_{L^p(l^q)} \lesssim 2^{l(s-N)}\Big\|\{2^{ks}u_k(x)\}_{k=0}^{\infty}\Big\|_{L^p(l^q)}\\
&\lesssim 2^{(s-N)l}\|f\|_{F^s_{p,q}}.
\end{aligned} \tag{19}$$

至于第二部分，对于任意 $\varepsilon>0$，我们有

$$\begin{aligned}
\Big\|\{2^{ks}(g_l-a_{k,l})\}_{k=l}^{\infty}\Big\|_{L^p(l^q)} &= \Big\|\{2^{ks}\Big(\sum_{j=k-(l-1)}^{\infty} h_{k,l}(x)\Big)\}_{k=l}^{\infty}\Big\|_{L^p(l^q)}\\
&= \Big\|\{2^{ks}\Big(\sum_{d=1}^{\infty} h_{k-l+d,l}\Big)\}_{k=l}^{\infty}\Big\|_{L^p(l^q)}\\
&= \Big\|\{2^{(l-d+\varepsilon)s}2^{(k-l+d-\varepsilon)s}\Big(\sum_{d=1}^{\infty} h_{k-l+d,l}\Big)\}_{k=l}^{\infty}\Big\|_{L^p(l^q)}\\
&\leq \Big\|\{2^{(l-d+\varepsilon)s}2^{(k-l+d)s}\Big(\sum_{d=1}^{\infty} h_{k-l+d,l}\Big)\}_{k=l}^{\infty}\Big\|_{L^p(l^q)}\\
&\leq \sum_{d=1}^{\infty}\Big\{2^{(l-d+\varepsilon)s}\Big\|\{2^{(k-l+d)s}h_{k-l+d,l}\}_{k=l}^{\infty}\Big\|_{L^p(l^q)}\Big\}
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\leq \sum_{d=1}^{\infty} \left\{ 2^{(l-d+\varepsilon)s} 2^{-Nl} \|f\|_{F^s_{p,q}} \right\}$$
$$\lesssim_{\varepsilon} 2^{(s-N)l} \|f\|_{F^s_{p,q}}$$

其中我们用到了（14）。现在，由（19）、（20）和（18）可得

$$\|g_l\|_{F^s_{p,q}} \lesssim 2^{(s-N)l} \|f\|_{F^s_{p,q}}. \tag{21}$$

将 (21) 代入 (16)，并取 $N > s$，可得

$$\Big\| \sum_{l\geq 0} g_l \Big\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \Big(\sum_{l\geq 0} 2^{(s-N)\nu l} \|f\|^{\nu}_{F^s_{p,q}} \Big)^{1/\nu} \lesssim \|f\|_{F^s_{p,q}}.$$

Besov-Lipschitz空间的证明可由类似的论证得出。 □

关于 Besov-Lipschitz空间和 Triebel-Lizorkin 空间，另一个重要且有用的事实如下：

定理 *2.9.* 设 $\eta\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，其中 $\eta(x) = (\eta_1(x) \ldots, \eta_n(x))$ 是一个微分同胚，满足 $|\det D\eta(x)| \geq c > 0$，$\forall x \in \mathbb{R}^n$（$D\eta$ 表示 η 的雅可比矩阵），并且 $\|\partial^\alpha \eta_j(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim 1$，对所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 和 $|\alpha| \geq 1$. 均成立。那么对于 $s \in \mathbb{R}$、$0 < p < \infty$ 和 $0 < q \leq \infty$，有

$$\|f \circ \eta\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

同样的不变性估计对 *Besov-Lipschitz*空间 $B^s_{p,\ q}$（$\mathbb{R}^n$）也成立，其中$s \in \mathbb{R}$、$0 < p \leq \infty$ 和 $0 < q \leq \infty$。

证明参见 J. Johnsen、S. Munch Hansen 和 W. Sickel [15,推论 25]，以及 H. Triebel [29, 定理 4.3。2]。

本节余下部分将为原子Hardy空间的讨论作准备，这些空间将用于傅里叶积分算子的 $h^p \to L^p$ 估计。

对于定义2.10和2.11，令 $[x]$ 表示 x的整数部分。

定义 2.10。对于一个闭立方体 Q，定义

(i) c_Q 为 Q的中心，*(ii)* l_Q 为 Q的边长，*(iii)* $k_Q := [1 - \log_2(l_Q)]$，*(iv)* χ_Q 为 Q的示性函数，即 $\chi_Q(x) := \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ 0, & x \notin Q。 \end{cases}$ *(v)*

cQ 为中心是 c_Q 且边长为 $l_{cQ} = c\, l_Q$的立方体，其中 $c \in \mathbb{R}_{>0}$。

注意，k_Q 是满足以下条件的唯一整数

$$2^{-k_Q} < l_Q \leq 2^{-(k_Q - 1)}.$$

定义 2.11. 若存在一个立方体 Q，使得以下三个条件都成立，则称函数 $\mathfrak{a}$ 为 h^p-原子：

(i) $\operatorname{supp} \mathfrak{a} \subset Q$,
(ii) $\sup_{x\in Q} |\mathfrak{a}(x)| \leq 2^{k_Q n/p}$,
(iii) *If* $k_Q \geq 1$, $M_{\mathfrak{a}} = \left[n\left(\frac{1}{p} - 1\right) \right]$, *then* $\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \mathfrak{a}(x)\, \mathrm{d}x = 0$, *for* $|\alpha| \leq M_{\mathfrak{a}}$. *No further condition is assumed if* $k_Q \leq 0$.

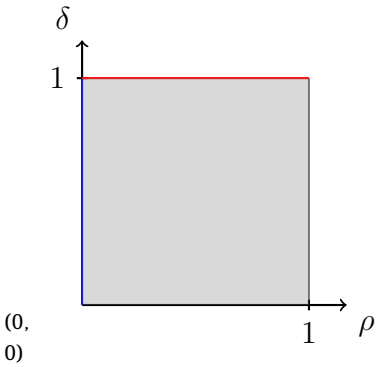

图 2. Hörmander 类。蓝色线上的类称为奇异型，红色线上的类称为禁戒型。

它是 众所周知（参见 [26]），分布 $f \in h^p$（$\mathbb{R}^n$）具有原子分解 n

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \mathfrak{a}_j, \tag{22}$$

其中， λ_j 是满足下列条件的常数

$$\inf_{\{\lambda_j\}} \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p \sim \|f\|^p_{h^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|^p_{F^0_{p,2}(\mathbb{R}^n)}$$

且 $\mathfrak{a}_j$ 是 h^p-原子。

2.2. **与傅里叶积分算子相关的基本定义**。接下来，我们定义 FIOS 和伪微分算子的基本构件。这些构件是振幅（在伪微分算子框架下称为符号）和相位函数。本文所考虑的振幅类最初由 L. Hörmander 在 [12] 中引入。

定义 2.12。设 $m \in \mathbb{R}$ 和 $\rho, \delta \in [0,1]$。类 $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 中的振幅(符号) $a(x,\xi)$ 是满足以下估计的函数 $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

$$\left|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x a(x,\xi)\right| \lesssim \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

对所有多重指标 α 和 β 以及$(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$，其中 $\langle \xi \rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$.此后，我们将 m 称为振幅的阶，将 ρ, δ 称为振幅的型。我们将 $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 类（其中 $0 < \rho \leq 1, 0 \leq \delta < 1$）称为经典型，将 $S^m_{0,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 类（其中 $0 \leq \delta < 1$）称为非典型类，并将 $S^m_{\rho,1}(\mathbb{R}^n)$（其中 $0 \leq \rho \leq 1$）称为振幅的禁戒类。

在本文接近结尾处，讨论禁戒振幅时，我们将用到齐格蒙德类 $C^r_*(\mathbb{R}^n)$，现回顾其定义。

定义 2.13。令 $r \in \mathbb{R}$。齐格蒙德类定义为

$$C^r_*(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \,:\, \|f\|_{C^r_*(\mathbb{R}^n)} := \sup_{j \geq 0} 2^{jr} \|\psi_j(D) f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}.$$

若 $C^r(\mathbb{R}^n)$ 表示霍尔德空间，且 $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n)$ 表示具有连续导数（阶数至 r，含 r 阶）的连续函数空间，则有

$$C^r_*(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n) \quad \text{for } r \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+ \quad \text{and} \quad \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n) \subset C^r_*(\mathbb{R}^n) \quad \text{for } r \in \mathbb{Z}_+. \tag{23}$$

与齐格蒙德类的定义相关，还有另一类振幅，它们在 x 变量上的正则性较低，G. Bourdaudin [1] 曾研究过这一类振幅。

定义 2.14。设 $m \in \mathbb{R}$, $0 \le \delta \le 1$ 和 $r > 0$。若振幅 (（符号） $a(x,\xi)$ 属于类 $C^r_* S^m_{1,\delta}(\mathbb{R}^n)$，且它关于 ξ 变量为 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$，并满足以下估计：

$$\|\partial_\xi^\alpha a(\cdot,\xi)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim \langle\xi\rangle^{m-|\alpha|},$$

and

$$\|\partial_\xi^\alpha a(\cdot,\xi)\|_{C^r_*(\mathbb{R}^n)} \lesssim \langle\xi\rangle^{m-|\alpha|+\delta r},$$

对所有多重指标 α 和 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 均成立。

需要注意的是，对于所有 $r > 0$, $S^m_{1,1}(\mathbb{R}^n) \subset C^r_* S^m_{1,1}(\mathbb{R}^n)$，；这一点可由式（23）推出。

给定上述定义的符号类，可将符号对应到其*Kohn-Nirenberg* 量子化，如下所示：

定义 2.15。设 a 为一个符号。定义伪微分算子 (Ψ简称 DO （）为算子

$$a(x,D)f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\, a(x,\xi)\, \widehat{f}(\xi)\, \text{đ}\xi,$$

其先验定义于施瓦茨类 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$上。

为了定义本文所研究的傅里叶积分算子，我们考虑 D. Dos Santos Ferreira 和 W. Staubach 在 [5] 中引入的相位函数类

定义 2.16。类 Φ^k, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 中的相位函数 $\varphi(x,\xi)$ 是一个函数$\varphi(x,\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$，关于频率变量 ξ 是一次正齐次的，并满足以下估计

$$\sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} |\xi|^{-1+|\alpha|} \left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x,\xi)\right| \le C_{\alpha,\beta}, \tag{24}$$

对于任意一对多重指标 α 和 β，满足 $|\alpha| + |\beta| \ge k$.

遵循例如 [5, 22], 中关于那些论文所建立的整体 L^p 有界性结果的方法，我们也定义以下稍强的非退化性概念：

定义 2.17. 如果相位函数 $\varphi(x,\xi)$ 满足强非退化条件 (或简称为 φ 强非退化)，则称

$$\left|\det(\partial^2_{x_j\xi_k}\varphi(x,\xi))\right| \ge \delta, \qquad \textit{for some } \delta > 0 \textit{ and all } (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{25}$$

Hav根据现有振幅和相位函数的定义，可以 s

定义 2.18。 一个傅里叶积分算子(傅里叶积分算子 简称) T_a^φ，其振幅为 a，相位函数为 φ，是一个算子，其定义(同样先验地定义在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$) 为

$$T_a^\varphi f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\varphi(x,\xi)}\, a(x,\xi)\, \widehat{f}(\xi)\, \text{đ}\xi, \tag{26}$$

其中 $\varphi(x,\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 关于 ξ 是一阶正齐次的。若 φ 满足对所有 秩 $\partial_{\xi\xi}^2 \varphi(x,\xi) = \kappa$ 和 $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$，则称其秩为 κ。

取 $\varphi(x,\xi) = x\cdot\xi$，即可得到与 Hörmander 符号类（定义 2.12）相关的伪微分算子类。

2.3. **将相位属于 Φ^2 的傅里叶积分算子约化为相位属于 Φ^1的傅里叶积分算子**。 正如 [3, 第 3], 节所证明的，具有 SND 相位函数 $\varphi \in \Phi^2$ 的傅里叶积分算子 T_a^φ 的整体有界性研究，可以约化为具有 SND 相位函数 $x\cdot\xi + \theta(x,\xi)$ 且满足 $\theta \in \Phi^1$ 的傅里叶积分算子的整体有界性研究。对于如下形式的傅里叶积分算子，结论同样成立

$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} a(y,\xi)\, e^{i\varphi(y,\xi)-ix\cdot\xi}\, f(y)\, \text{đ}\xi\, \mathrm{d}y,$$

对于 $\varphi \in \Phi^2$，问题可归结为研究如下形式的傅里叶积分算子

$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \sigma(y,\xi)\, e^{i\theta(y,\xi)+i(y-x)\cdot\xi}\, f(y)\, \text{đ}\xi\, \mathrm{d}y, \tag{27}$$

其中 $\sigma(y,\ \xi)$ 属于与 $a(y,\ \xi)$ 相同的类，且 $\theta(y,\ \xi) \in \Phi^1$.

2.4. L^2 **傅里叶积分算子的有界性**。 我们回顾 Dos Santos Ferreira 和 Staubach 关于一般 Hörmander 类中带振幅的傅里叶积分算子的最优 L^2 有界性结果 [5, 定理 2.7], ，该结果将在傅里叶积分算子有界性的证明中用到。

定理 *2.19.* 设 $\rho,\delta \in [0,1]$, $\delta \neq 1$。假设 $a(x,\xi) \in S_\rho^m$，$\delta(\mathbb{R}^n)$ 且 $\varphi(x,\xi)$ 属于类 Φ^2，并且是强非退化的。那么，傅里叶积分算子 T_a^φ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界，当且仅当 $m = -n\max\{0,(\delta-\rho)/2\}$。当 $\rho \in [0,1]$, $\delta = 1$ 时， L^2 有界性成立当且仅当 $m < n(\rho-1)/2$。

2.5.**低频 Besov-Lipschitz 和 Triebel-Lizorkin 估计**。 这里回顾 FIOS 低频部分的主要有界性结果。为此，设 $a_0(x,\ \xi) := a(x,\ \xi)\psi_0(\xi)$，其中 ψ_0 是一个 Littlewood-Paley 分块（见定义 2.1）。那么，以下由 Israelsson、Rodríguez-López 和 Staubach 得出的结果，处理了具有紧频率支撑的 FIOS 在所有尺度的 Besov-Lipschitz 空间和 Triebel-Lizorkin 空间上的情形。证明见 [14, 命题 5.7]和 [14, 命题 6.4]。

定理 *2.20.* 对于 $\rho,\delta \in [0,1]$，设 $a(x,\xi) \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n)$。另假设 $0 < q_1, q_2 \le \infty$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$。那么，如果 $\varphi(x,\xi) \in \Phi^2$ 满足强非退化条件，则有 $T_{a_0}^\varphi : F_{p,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \to F_{p,q_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n)$，其中 $\frac{n}{n+1} < p \le \infty$ 此外，上述 *Triebel-Lizorkin* 估计可替换为相应的 *Besov-Lipschitz* 估计。

2.6. **关于 $p > 2$ 的 Triebel-Lizorkin 有界性定理**。 以下定理由 M. Pramnanik、K. Rogers 和 A. Seeger 提出，可见于 [19, 定理 2.1]。

定理 2.21。 设 $2 < p < \infty$、 $0 < q \le \infty$ 和 $0 < b < n$。假设算子 S_j 满足

$$\sup_{j>0} 2^{jb/p} \|S_j\|_{L^p \to L^p} \lesssim 1, \tag{28}$$

$$\sup_{j>0} 2^{jb/2} \|S_j\|_{L^2 \to L^2} \lesssim 1. \tag{29}$$

˜此外，假设对于每个立方体 Q ，都存在一个可测集 $\mathcal{E}_{\tilde{Q}}$ 和一个常数 $\Gamma \ge 1$ ，使得

$$|\mathcal{E}_{\tilde{Q}}| \le \Gamma \max\{l_{\tilde{Q}}^{n-b}, l_{\tilde{Q}}^{n}\},$$

˜其中 $l_{\tilde{Q}}$ 是 Q 的边长，如定义 2.10中所述；此外，假设对于每个 $j \in \mathbb{N}$ 以及每个满足 $2^j l_{\tilde{Q}} \ge 1$的立方体 $\tilde{Q}$ ，都有

$$\sup_{x \in \tilde{Q}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{E}_{\tilde{Q}}} |K_j(x,y)| \, \mathrm{d}y \lesssim \max\{(2^{-j\varepsilon} l_{\tilde{Q}}^{-\varepsilon}, 2^{-j\varepsilon}\}, \tag{30}$$

对于某个 $\varepsilon > 0$。

Then

$$\Big\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jbq/p} |\Psi_j(D) S_j f_j|^q \Big)^{1/q} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \Big)^{1/p}.$$

其中 $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$， $\Psi_j(D) \colon = \Psi(2^{-j} D)$ ，并且 f_j 是一个函数序列。

3. 一般 Hörmander 类中依赖参数的 Ψ微分算子与傅里叶积分算子的左复合

本节将陈述并证明一个复合结果，使我们能够追踪依赖参数的 ΨDO从左侧作用于一个傅里叶积分算子时的参数。这对于证明禁戒振幅的傅里叶积分算子在 Sobolev 空间上的有界性，以及处理其他情形，至关重要。

定理 3.1. 设 $m, s \in \mathbb{R}$ $\rho \in [0,1]$, $\delta \in [0,1)$。假设 $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$,$b(x,\xi) \in S^s_{1,0}(\mathbb{R}^n)$ 且 φ 是一个在支撑 a 上光滑并满足以下条件的相位函数

$$|\xi| \lesssim |\nabla_x \varphi(x,\xi)| \lesssim |\xi|, \qquad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x,\xi)| \lesssim \langle \xi \rangle^{1-|\alpha|} \tag{31}$$

对所有(x,ξ) ∈支撑 a 中的点以及所有 $|\alpha| \ge 0$和所有 $|\beta| \ge 1$均成立。对于 $0 < t \le 1$ ，考虑依赖参数的伪微分算子

$$b(x,tD) f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \, b(x,t\xi) \, \widehat{f}(\xi) \, đ\xi,$$

以及振荡积分算子

$$T_a^\varphi f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\varphi(x,\xi)} \, a(x,\xi) \, \widehat{f}(\xi) \, đ\xi.$$

L设 σ_t 为复合算子 $T_{\sigma_t}^\varphi \colon = b(x,tD) T_a^\varphi$的振幅，其定义如下

$$\sigma_t(x,\xi) := \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} a(y,\xi) \, b(x,t\eta) \, e^{i(x-y)\cdot\eta + i\varphi(y,\xi) - i\varphi(x,\xi)} \, đ\eta \, \mathrm{d}y.$$

那么，对于任意的 $M \ge 1$ 以及所有 $0 < \varepsilon < 1 -$ 最大值$\{\delta, 1/2\}$，可将 σ_t 写为

$$\sigma_t(x,\xi) = b(x, t\nabla_x\varphi(x,\xi))\, a(x,\xi) + \sum_{0<|\alpha|<M} \frac{t^{\varepsilon|\alpha|}}{\alpha!}\, \sigma_\alpha(t,x,\xi) + t^{\varepsilon M} r(t,x,\xi), \tag{32}$$

其中，对于所有多重指标 β，γ 均有

$$|\partial_\xi^\beta \partial_x^\gamma \sigma_\alpha(t,x,\xi)| \lesssim t^{\min\{s,0\}} \langle\xi\rangle^{s+m-(1-\max\{\delta,1/2\}-\varepsilon)|\alpha|-\rho|\beta|+\delta|\gamma|},$$

$$|\partial_\xi^\beta \partial_x^\gamma r(t,x,\xi)| \lesssim t^{\min\{s,0\}} \langle\xi\rangle^{s+m-\Big(1-\max\{\delta,1/2\}-\varepsilon\Big)M-\rho|\beta|+\delta|\gamma|}.$$

证明。证明的思路与 [21], 中所证明的渐近展开类似，不过由于微积分推广到了所有振幅类 $S^m_{\rho,\,\delta}(\mathbb{R}^n)$，其中 $\rho \in [0,1]$, $\delta \in [0,1)$，因此细节略有不同。注意，我们可以将 M 取为任意大的值，因为可以将 (32) 的主要部分中的项并入余项。

设 $\chi(x-y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$，满足 $0 \le \chi \le 1$，$\chi(x-y) \equiv 1$ 对 $|x-y| < \kappa_2/2$ 成立，且 $\chi(x-y) = 0$ 对 $|x-y| > \kappa_2$ 成立，其中 κ_2 为稍后指定的某个小量。现在，我们将 $\sigma_t(x,\ \xi)$ 分解为两部分 $\mathbf{I}_1(t,\ x,\ \xi)$ 和 $\mathbf{I}_2(t,\ x,\ \xi)$，其中

$$\mathbf{I}_1(t,x,\xi) := \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} a(y,\xi)\, b(x,t\eta)\, (1-\chi(x-y))\, e^{i(x-y)\cdot\eta + i\varphi(y,\xi) - i\varphi(x,\xi)}\, \text{đ}\eta\, \text{d}y,$$

and

$$\mathbf{I}_2(t,x,\xi) := \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} a(y,\xi)\, b(x,t\eta)\, \chi(x-y)\, e^{i(x-y)\cdot\eta + i\varphi(y,\xi) - i\varphi(x,\xi)}\, \text{đ}\eta\, \text{d}y.$$

步骤 1 – 对 $\mathbf{I}_1(\mathbf{t},\mathbf{x}\ \boldsymbol{\xi})$ 的分析

为此，我们引入微分算子

$$L_\eta := -i\frac{x-y}{|x-y|^2}\cdot\nabla_\eta \quad \text{and} \quad L_y := \frac{1}{\langle\nabla_y\varphi(y,\xi)\rangle^2 - i\Delta_y\varphi(y,\xi)}(1-\Delta_y).$$

由 (31) 可知

$$|\langle\nabla_y\varphi(y,\xi)\rangle^2 - i\Delta_y\varphi(y,\xi)| \ge \langle\nabla_y\varphi(y,\xi)\rangle^2 \gtrsim \langle\xi\rangle^2.$$

现在通过分部积分得到

$$\mathbf{I}_1(t,x,\xi) = \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} (L_\eta^*)^{N_2}\{e^{-iy\cdot\eta}\, a(y,\xi)\, (L_\eta^*)^{N_1}[(1-\chi(x-y))\, b(x,t\eta)]\} \times e^{ix\cdot\eta + i\varphi(y,\xi) - i\varphi(x,\xi)}\, \text{đ}\eta\, \text{d}y.$$

现在，由于 $0 < t \le 1$，在 $0 < N_3 < N_1 - s$ 的条件下，我们有

$$\begin{aligned}\left|\partial_{\eta_j}^{N_1} b(x,t\eta)\right| &\lesssim t^{N_1}\langle t\eta\rangle^{s-N_1} = t^{N_1}\langle t\eta\rangle^{-N_3}\langle t\eta\rangle^{s-(N_1-N_3)} \\ &\lesssim t^{N_1}(t^2+|t\eta|^2)^{-N_3/2}\langle t\eta\rangle^{s-(N_1-N_3)} \lesssim t^{N_1-N_3}\langle\eta\rangle^{-N_3}.\end{aligned}$$

因此，选择 $N_1 > n$ 和 $2N_2 < N_3 - n$

$$\begin{aligned}|\mathbf{I}_1(t,x,\xi)| &\lesssim t^{N_1-N_3}\langle\xi\rangle^{-2N_2+m} \iint_{|x-y|>\kappa} \langle\eta\rangle^{2N_2}|x-y|^{-N_1}\langle\eta\rangle^{-N_3}\, \text{đ}\eta\, \text{d}y \\ &\lesssim t^{N_1-N_3}\langle\xi\rangle^{-2N_2+m}.\end{aligned}$$

对 $\mathbf{I}_1(t,x,\xi)$ 关于 x 和 ξ 的导数进行估计，可能会引入可由 $\langle\xi\rangle$、$\langle\eta\rangle$ 和 $|x-y|$ 的幂估计的因子，而这些因子都可以通过适当选择 N_1 和 N_2 来处理。因此，对于所有 N 以及任意 $\nu>0$

$$\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta \mathbf{I}_1(t,x,\xi)\right| \lesssim t^\nu\langle\xi\rangle^{-N},$$

因此，$\mathbf{I}_1(t,\ x,\ \xi)$ 构成了式 (32) 中误差项 $t^{\varepsilon M}r(t,\ x,\ \xi)$ 的一部分。

步骤 2 – 对 $\mathbf{I}_2(\mathbf{t},\ \mathbf{x}\ \boldsymbol{\xi})$ 的分析

首先，在定义$\mathbf{I}_2(t,\ x,\ \xi)$ 的积分中作变量代换 $\eta=\nabla_x\varphi(x,\ \xi)+\zeta$，然后将 $b(x,\ t\eta)$ 展开为泰勒级数，得到

$$\begin{aligned} b(x,t\nabla_x\varphi(x,\xi)+t\zeta) &= \sum_{0\le|\alpha|<M} t^{|\alpha|}\frac{\zeta^\alpha}{\alpha!}(\partial_\eta^\alpha b))(x,t\nabla_x\varphi(x,\xi)) \\ &\quad + t^M\sum_{|\alpha|=M} C_\alpha\zeta^\alpha r_\alpha(t,x,\xi,\zeta), \end{aligned}$$

其中

$$r_\alpha(t,x,\xi,\zeta) := \int_0^1 (1-\tau)^{M-1}(\partial_\eta^\alpha b)(x,t\nabla_x\varphi(x,\xi)+\tau t\zeta)\,\mathrm{d}\tau. \tag{33}$$

若设

$$\Phi(x,y,\xi) := \varphi(y,\xi)-\varphi(x,\xi)+(x-y)\cdot\nabla_x\varphi(x,\xi),$$

我们得到

$$\mathbf{I}_2(t,x,\xi) = \sum_{|\alpha|<M}\frac{t^{\varepsilon|\alpha|}}{\alpha!}\,\sigma_\alpha(t,x,\xi) + t^{\varepsilon M}\sum_{|\alpha|=M} C_\alpha\, R_\alpha(t,x,\xi),$$

利用分部积分，我们有

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(t,x,\xi) &:= t^{(1-\varepsilon)|\alpha|}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\zeta+i\Phi(x,y,\xi)}\,\zeta^\alpha\,a(y,\xi) \\ &\qquad\times\chi(x-y)\,(\partial_\eta^\alpha b)(x,t\nabla_x\varphi(x,\xi))\,\mathrm{d}y\,\text{đ}\zeta \\ &= t^{(1-\varepsilon)|\alpha|}(\partial_\eta^\alpha b)(x,t\nabla_x\varphi(x,\xi))(i)^{-|\alpha|}\partial_y^\alpha\left[e^{i\Phi(x,y,\xi)}\,a(y,\xi)\,\chi(x-y)\right]_{|_{y=x}}, \end{aligned}$$

and

$$R_\alpha(t,x,\xi) := t^{(1-\varepsilon)|\alpha|}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\zeta}e^{i\Phi(x,y,\xi)}\zeta^\alpha\,a(y,\xi)\,\chi(x-y)\,r_\alpha(t,x,\xi,\zeta)\ \mathrm{d}y\,\text{đ}\zeta.$$

步骤 2.1 – 对 $\boldsymbol{\sigma_\alpha}$（$\mathbf{t}$，$\mathbf{x}$ $\boldsymbol{\xi}$）的分析

现在我们断言

$$\left|\partial_y^\gamma e^{i\Phi(x,y,\xi)}{}_{|_{y=x}}\right| \lesssim \langle\xi\rangle^{|\gamma|/2}. \tag{34}$$

我们首先注意到，当 $\gamma=0$ 时，(34) 显然成立。为了在 $\gamma\neq0$ 的情况下得到 (34)，我们回顾法阿·迪·布鲁诺公式

$$\partial_y^\gamma e^{i\Phi(x,y,\xi)} = \sum_{\gamma_1+\cdots+\gamma_k=\gamma} C_\gamma\Big(\partial_y^{\gamma_1}\Phi(x,y,\xi)\Big)\cdots\Big(\partial_y^{\gamma_k}\Phi(x,y,\xi)\Big)\,e^{i\Phi(x,y,\xi)},$$

其中求和范围为满足 $|\gamma_j|\ge1$ 的 γ_j，对于 $j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$，且对于某个 $k\in\mathbb{Z}_+$ 有 $\gamma_1+\cdots+\gamma_k=\gamma$。由于 $\Phi(x,\ x,\ \xi)=0$ 且 $\partial_y\Phi(x,\ y,\ \xi)|_{y=x}=0$，在上述展开式中令 $y=x$ 后，只留下对所有 $j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$ 都满足 $|\gamma_j|\ge2$ 的项。但是

$\sum_{j=1}^{k}|\gamma_j|\le|\gamma|$，因此我们实际上有 $2k\le|\gamma|$，即 $k\le|\gamma|/2$。对相位应用估计 (31) 可知，$|\partial_y^{\gamma_j}\Phi(x,\ y,\ \xi)|\lesssim\langle\xi\rangle$，所以

$$\left|\partial_y^{\gamma}e^{i\Phi(x,y,\xi)}{}_{|_{y=x}}\right|\lesssim\langle\xi\rangle\cdots\langle\xi\rangle\lesssim\langle\xi\rangle^{k}\lesssim\langle\xi\rangle^{|\gamma|/2},$$

即式（34）。

若利用 $t\le1$ 这一事实以及相位函数 φ 满足的假设（31），则可得

$$\begin{aligned}|\sigma_\alpha(t,x,\xi)|&\lesssim t^{(1-\varepsilon)|\alpha|}\langle t\nabla_x\varphi(x,\xi)\rangle^{s-|\alpha|}\langle\xi\rangle^{|\alpha|\max\{\delta,1/2\}}\langle\xi\rangle^{m}\\&\lesssim t^{(1-\varepsilon)|\alpha|}\left\langle t\xi\right\rangle^{s-(1-\varepsilon)|\alpha|}\left\langle t\xi\right\rangle^{-\varepsilon|\alpha|}\left\langle\xi\right\rangle^{m+|\alpha|\max\{\delta,1/2\}}\\&\lesssim t^{\min\{s,0\}}\langle\xi\rangle^{s+m-(1-\max\{\delta,1/2\}-\varepsilon)|\alpha|},\end{aligned}$$

当 $|\alpha|>0$ 时。

根据定理的假设，对 b 求关于 x 或 ξ 的导数不会改变估计，对 $\partial_y^{\alpha}e^{i\Phi(x,y,\xi)}|_{y=x}$ 求导时也同样如此。因此，对所有多重指标 β、$\gamma\in\mathbb{Z}_+$，

$$\left|\partial_\xi^{\beta}\partial_x^{\gamma}\sigma_\alpha(t,x,\xi)\right|\lesssim t^{\min\{s,0\}}\langle\xi\rangle^{s+m-(1-\max\{\delta,1/2\}-\varepsilon)|\alpha|-\rho|\beta|+\delta|\gamma|},$$

如所需。

步骤 2.2 – $\mathbf{R_\alpha(t,\ x\ \xi)}$ 的分析

取 $g\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $g\equiv1$ 对于 $|x|\le\kappa_1/2$ 且 $g\equiv0$ 对于 $|x|\ge\kappa_1$，其中$\kappa_1>0$ 稍后选定。接着我们将其分解

$$\begin{aligned}R_\alpha(t,x,\xi)&=t^{(1-\varepsilon)|\alpha|}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}e^{i(x-y)\cdot\zeta}g\Big(\frac{\zeta}{\langle\xi\rangle}\Big)\\&\qquad\times\partial_y^{\alpha}\left[e^{i\Phi(x,y,\xi)}\,\chi(x-y)\ a(y,\xi)\,r_\alpha(t,x,\xi,\zeta)\right]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{đ}\zeta\\&\quad+t^{(1-\varepsilon)|\alpha|}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}e^{i(x-y)\cdot\zeta}\Big(1-g\Big(\frac{\zeta}{\langle\xi\rangle}\Big)\Big)\\&\qquad\times\partial_y^{\alpha}\left[e^{i\Phi(x,y,\xi)}\,\chi(x-y)\ a(y,\xi)\,r_\alpha(t,x,\xi,\zeta)\right]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{đ}\zeta\\&=:R_\alpha^{I}(t,x,\xi)+R_\alpha^{I\!I}(t,x,\xi).\end{aligned}$$

步骤 2.2.1 – $\mathbf{R_\alpha^{I}(t,\ x\ \xi)}$ 的分析

注意，不等式

$$\langle\xi\rangle\le1+|\xi|\le\sqrt{2}\langle\xi\rangle,$$

由此得到

$$\langle t\nabla_x\varphi(x,\xi)+t\tau\zeta\rangle\le(C_2\sqrt{2}+\kappa_1)\langle t\xi\rangle,$$

and

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\langle t\nabla_x\varphi(x,\xi)+t\tau\zeta\rangle&\ge1+|t\nabla_x\varphi|-|t\zeta|\\&\ge1+C_1|t\xi|-t\kappa_1\langle\xi\rangle\\&\ge(1-\kappa_1)+(C_1-\kappa_1)|t\xi|\ge(\min\{1,C_1\}-\kappa_1)\langle t\xi\rangle.\end{aligned}$$

因此，若我们选择 $\kappa_1 < \min\{1, C_1\}$，那么对于任意 $\tau \in (0,\ 1)$，$\langle t\nabla_x\varphi(x,\ \xi) + t\tau\zeta\rangle$ 和 $\langle t\xi\rangle$ 是等价的。

由此可得，对于 $|\zeta| \le r\langle\xi\rangle$，$\partial_\zeta^\beta r_\alpha(t,x,\xi,\zeta)$，其上界为 $t^{|\beta|}\langle t\xi\rangle^{s-|\alpha|-|\beta|}$.此外，对于 $t \le 1$，由 r_α 的表示式 (33) 可得

$$
\begin{aligned}
&\Big|\partial_\zeta^\beta\Big(g\Big(\frac{\zeta}{\langle\xi\rangle}\Big)r_\alpha(t,x,\xi,\zeta)\Big)\Big| \lesssim \sum_{\gamma\le\beta}\Big|\partial_\zeta^\gamma g\Big(\frac{\zeta}{\langle\xi\rangle}\Big)\partial_\zeta^{\beta-\gamma} r_\alpha(t,x,\xi,\zeta)\Big| \\
&\le C_{\alpha,\beta}\sum_{\gamma\le\beta} t^{|\beta|-|\gamma|}\langle\xi\rangle^{-|\gamma|}\langle t\xi\rangle^{s-|\alpha|-|\beta|+|\gamma|} \\
&\lesssim \sum_{\gamma\le\beta} t^{\min\{s,0\}+|\beta|-|\gamma|-(1-\varepsilon)|\alpha|}\langle\xi\rangle^{-|\gamma|} \\
&\qquad\qquad \times \langle\xi\rangle^{s-(1-\varepsilon)|\alpha|} t^{-(|\beta|-|\gamma|)}\langle\xi\rangle^{-(|\beta|-|\gamma|)} \\
&\lesssim t^{\min\{s,0\}-(1-\varepsilon)|\alpha|}\,\langle\xi\rangle^{s-(1-\varepsilon)|\alpha|-|\beta|}.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

此处我们还需要估计 $\partial_y^\alpha e^{i\Phi(x,y,\xi)}$ 在非对角线处的情形，即当$x \ne y.$时。该导数至多包含 $|\alpha|$ 个项 $\nabla_y\varphi(y,\xi) - \nabla_x\varphi(x,\xi)$ 的幂，且可能还乘以至多 $|\alpha|$ 个高阶导数 $\partial_y^\beta\varphi(y,\xi)$，后者可利用 (31) 通过 $(|y-x|\langle\xi\rangle)^{|\alpha|}$ 估计。含差值$\nabla_y\varphi(y,\xi) - \nabla_x\varphi(x,\xi)$ 的项是至多 $|\alpha|/2$ 个 $\partial_y^\beta\varphi(y,\xi)$ 型项的乘积，由 (31) 可知，其可由 $\langle\xi\rangle^{|\alpha|/2}$ 估计。由此可得

$$
\Big|\partial_y^\alpha e^{i\Phi(x,y,\xi)}\Big| \lesssim (1+|x-y|\langle\xi\rangle)^{|\alpha|}\langle\xi\rangle^{|\alpha|/2},
$$

因此，我们还有

$$
\big|\partial_y^\alpha\big[e^{i\Phi(x,y,\xi)}\chi(x-y)\big]\big| \lesssim (1+|x-y|\langle\xi\rangle)^{|\alpha|}\langle\xi\rangle^{|\alpha|/2}. \tag{36}
$$

Let

$$
L_\zeta := \frac{(1-\langle\xi\rangle^2\Delta_\zeta)}{1+\langle\xi\rangle^2|x-y|^2}, \quad \text{so} \quad L_\zeta^N e^{i(x-y)\cdot\zeta} = e^{i(x-y)\cdot\zeta}.
$$

对 L_ζ 进行分部积分，得到

$$
\begin{aligned}
R_\alpha^I(t,x,\xi) &= t^{(1-\varepsilon)|\alpha|}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{e^{i(x-y)\cdot\zeta}\,\partial_y^\alpha\big[\chi(x-y)\,a(y,\xi)\,e^{i\Phi(x,y,\xi)}\big]}{(1+\langle\xi\rangle^2|x-y|^2)^N} \\
&\qquad \times (1-\langle\xi\rangle^2\Delta_\zeta)^N\Big\{g\Big(\frac{\zeta}{\langle\xi\rangle}\Big)\,r_\alpha(t,x,\xi,\zeta)\Big\}\,\mathrm{d}y\,đ\zeta \\
&= t^{(1-\varepsilon)|\alpha|}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{e^{i(x-y)\cdot\zeta}\,\partial_y^\alpha\big[\chi(x-y)\,a(y,\xi)\,e^{i\Phi(x,y,\xi)}\big]}{(1+\langle\xi\rangle^2|x-y|^2)^N} \\
&\qquad \times \sum_{|\beta|\le 2N} c_\beta\langle\xi\rangle^{|\beta|}\Big\{\partial_\zeta^\beta\Big(g\Big(\frac{\zeta}{\langle\xi\rangle}\Big)r_\alpha(t,x,\xi,\zeta)\Big)\Big\}\,\mathrm{d}y\,đ\zeta.
\end{aligned}
$$

利用估计(35)、(36)，以及 $g(\zeta/\langle\xi\rangle)$在 ζ 中的支集大小有界于$(\kappa_1\langle\xi\rangle)^n$，我们得到

$$\begin{aligned}|R_\alpha^I(t,x,\xi)| &\lesssim t^{\min\{s,0\}}\sum_{|\beta|\le 2N}\langle\xi\rangle^{n+|\beta|}\langle\xi\rangle^{-(1-\varepsilon)|\alpha|-|\beta|}\langle\xi\rangle^{\max\{\delta,1/2\}+s+m}\\ &\qquad\times\int_{|x-y|<\kappa}\frac{(1+|x-y|\langle\xi\rangle)^{|\alpha|}}{(1+\langle\xi\rangle^2|x-y|^2)^N}\,\mathrm{d}y\\ &\lesssim t^{\min\{s,0\}}\sum_{|\beta|\le 2N}\langle\xi\rangle^{n+|\beta|}\langle\xi\rangle^{s-(1-\varepsilon)|\alpha|-|\beta|}\langle\xi\rangle^{\max\{\delta,1/2\}+m}\\ &\qquad\times\langle\xi\rangle^{-n}\int_0^\infty\frac{\tau^{n-1}(1+\tau)^{|\alpha|}}{(1+\tau^2)^N}\,\mathrm{d}\tau\\ &\lesssim t^{\min\{s,0\}}\langle\xi\rangle^{s+m-(1-\max\{\delta,1/2\}-\varepsilon)|\alpha|},\end{aligned}$$

如果我们选择 $N>(n+|\alpha|)/2$，并且估计中的隐常数与 t 无关（这是由 (35) 得到的）。对 $R_\alpha^I(t,\ x,\ \xi)$ 关于 x 和 ξ 的导数会在积分中多产生一个 ζ 次幂。这相当于对 y 求更多阶导数，从而得到 $\langle\xi\rangle$. 的更高次幂。然而，对于余项 $R_\alpha^I(t,\ x,\ \xi)$ 的给定阶数的导数，我们可以自由地将 $M=|\alpha|$ 取得任意大，因此 $\langle\xi\rangle$ 的更高次幂不会造成问题。因此，对于所有多重指标 β、 γ，以及足够大的 $|\alpha|$，我们有

$$|\partial_\xi^\beta\partial_x^\gamma R_\alpha^I(t,x,\xi)|\lesssim t^{\min\{s,0\}}\langle\xi\rangle^{s+m-(1-\max\{\delta,1/2\}-\varepsilon}|\alpha|-\rho|\beta|),$$

其中，估计中的隐常数不依赖于 t。

步骤 2.2.2 – 对 $\mathbf{R_\alpha^{II}(t,\ x\ \xi)}$定义

$\Psi(x,y,\xi,\zeta):=(x-y)\cdot\zeta+\Phi(x,y,\xi)=(x-y)\cdot(\nabla_x\varphi(x,\xi)+\zeta)+\varphi(y,\xi)-\varphi(x,\xi)$。由 (31) 可知，若我们取 $\kappa_2<\kappa_1/8C_0$，那么由于在 χ 的支集上 $|x-y|<\kappa_2$，因此（利用我们处于区域 $|\zeta|\ge\kappa_1\langle\xi\rangle/2$ 这一点）

$$|\nabla_y\Psi|=|-\zeta+\nabla_y\varphi-\nabla_x\varphi|\le 2C_2(|\zeta|+\langle\xi\rangle),\quad\text{and}$$

$$|\nabla_y\Psi|\ge|\zeta|-|\nabla_y\varphi-\nabla_x\varphi|\ge\frac{1}{2}|\zeta|+\Big(\frac{\kappa_1}{4}-C_0|x-y|\Big)\langle\xi\rangle\ge C(|\zeta|+\langle\xi\rangle).$$

现在，利用 (31)，对任意 β，我们有如下估计

$$\Big|\partial_y^\beta\Big(e^{-i\Phi(x,y,\xi)}\,\partial_y^\gamma e^{i\Phi(x,y,\xi)}\Big)\Big|\lesssim\langle\xi\rangle^{|\gamma|}. \tag{37}$$

对于 $M=|\alpha|>s$，我们还注意到

$$|r_\alpha(t,x,\xi,\zeta)|\lesssim 1. \tag{38}$$

对于定义为如下形式的微分算子

$$L_y:=i|\nabla_y\Psi|^{-2}\sum_{j=1}^n(\partial_{y_j}\Psi)\,\partial_{y_j},$$

归纳法表明， L_y^N具有如下形式

$$(L_y^*)^N=\frac{1}{|\nabla_y\Psi|^{4N}}\sum_{|\beta|\le N}P_{\beta,N}\,\partial_y^\beta,$$

其中

$$P_{\beta,N} := \sum_{|\mu|=2N} c_{\beta\mu\gamma_j} \, (\nabla_y \Psi)^\mu \, \partial_y^{\gamma_1} \Psi \cdots \partial_y^{\gamma_N} \Psi,$$

$|\gamma_j| \geq 1$和 $\sum_{j=M}^{N} |\gamma_j| + |\beta| = 2N$。由 (31) 可得$|P_{\beta,N}| \leq C(|\zeta| + \langle\xi\rangle)^{3N}$.现在应用莱布尼茨法则可得

$$\begin{aligned}
R_\alpha^{I\!I}(t,x,\xi) &= t^{(1-\varepsilon)|\alpha|} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\zeta} \Big(1 - g\Big(\frac{\zeta}{\langle\xi\rangle}\Big)\Big) \, r_\alpha(x,\xi,\zeta) \\
&\qquad \times \partial_y^\alpha \left[e^{i\Phi(x,y,\xi)} \, a(y,\xi) \, \chi(x-y) \right] \, \mathrm{d}y \, đ\zeta \\
&= t^{(1-\varepsilon)|\alpha|} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\Psi(x,y,\xi,\zeta)} \Big(1 - g\Big(\frac{\zeta}{\langle\xi\rangle}\Big)\Big) \, r_\alpha(t,x,\xi,\zeta) \\
&\qquad \times \sum_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=\alpha} \Big(e^{-i\Phi(x,y,\xi)} \partial_y^{\gamma_1} e^{i\Phi(x,y,\xi)} \Big) \, \partial_y^{\gamma_2} \chi(x-y) \, \partial_y^{\gamma_3} a(y,\xi) \, \mathrm{d}y \, đ\zeta \\
&= t^{(1-\varepsilon)|\alpha|} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\Psi(x,y,\xi,\zeta)} |\nabla_y \Psi|^{-4N} \sum_{|\beta| \leq N} P_{\beta,N}(x,y,\xi,\zeta) \\
&\qquad \times \Big(1 - g\Big(\frac{\zeta}{\langle\xi\rangle}\Big)\Big) r_\alpha(t,x,\xi,\zeta) \sum_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=\alpha} \partial_y^\beta \Big[\Big(e^{-i\Phi(x,y,\xi)} \Big) \\
&\qquad \times \partial_y^{\gamma_1} e^{i\Phi(x,y,\xi)} \, \partial_y^{\gamma_2} \chi(x-y) \, \partial_y^{\gamma_3} a(y,\xi) \Big] \, \mathrm{d}y \, đ\zeta.
\end{aligned}$$

现在由 (37) 和 (38) 可得

$$\begin{aligned}
|R_\alpha^{I\!I}(t,x,\xi)| &\lesssim t^{(1-\varepsilon)|\alpha|} \int_{|\zeta| \geq \kappa_1 \langle\xi\rangle/2} \int_{|x-y|<\kappa} (|\zeta| + \langle\xi\rangle)^{-N} \langle\xi\rangle^{|\alpha|+m} \, \mathrm{d}y \, đ\zeta \\
&\lesssim t^{(1-\varepsilon)|\alpha|} \langle\xi\rangle^{|\alpha|+m} \int_{|\zeta| \geq \kappa_1 \langle\xi\rangle/2} |\zeta|^{-N} \, đ\zeta \leq C \langle\xi\rangle^{|\alpha|+n+m-N},
\end{aligned}$$

当 $N > |\alpha| + n$ 时，这就给出了所需的估计。对于 $R_\alpha^{I\!I}(t,x,\xi)$ 的导数，我们可以像处理 R_α^I 的情形那样，得到 ζ 的一个额外幂次；通过选择足够大的 N，并利用 $|x-y| < \kappa_2$. 这一事实，即可处理该项。因此，对所有多重指标 $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+$,

$$\Big| \partial_\xi^\beta \partial_x^\gamma R_\alpha^{I\!I}(t,x,\xi) \Big| \lesssim \langle\xi\rangle^{|\alpha|+n+m-N},$$

其中，估计中隐含的常数不依赖于 t。定理 3.1 的证明至此完成。□

4. 常秩傅里叶积分算子的分解

在研究傅里叶积分算子的 L^p-正则性时，Seeger、Sogge 和 Stein [24]基于 C. Fefferman [6], 的一个想法，在初步的 Littlewood-Paley 分解之上又引入了第二次二进分解。

请注意，由于我们处理的是振幅属于一般 Hörmander 类的 FIOS，因此必须调整现有工具，以纳入对 $\rho \in [0, \frac{1}{2}$ 型振幅的处理，而这一点在 [24] 的分析中有所缺失。这里我们遵循 Dos Santos Ferreira-Staubach [5] 中对频率空间的分解。

首先，考虑一个 FIO T_a^φ，其振幅为 $a(x,\ \xi)\in S^m_{\rho,\ \delta}(\mathbb{R}^n)$，$0<\rho\le\frac{2}{3}$、$0\le\delta<1$、$m\in\mathbb{R}$，并且对于 $0\le\kappa\le n-1$、$\varphi\in\Phi^2$，在 $a(x,\ \xi)$ 的支集上有 $\operatorname{rank}\partial^2_{\xi\xi}\varphi(x,\ \xi)=\kappa$，以及其 Littlewood-Paley 分解

$$T_a^\varphi=\sum_{j=0}^{\infty}T_a^\varphi\psi_j(D)=:\sum_{j=0}^{\infty}T_j, \tag{39}$$

其中，K_j T_j 的核由下式给出

$$\begin{aligned}K_j(x,y)&:=\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\varphi(x,\xi)-iy\cdot\xi}\,\psi_j(\xi)\,a(x,\xi)\ \mathrm{d}\!\!^{-}\xi\\&=2^{jn\rho}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i2^{j\rho}\varphi(x,\xi)-i2^{j\rho}y\cdot\xi}\,\psi_j(2^{j\rho}\xi)\,a(x,2^{j\rho}\xi)\,\mathrm{d}\!\!^{-}\xi\end{aligned} \tag{40}$$

这里，每个 ψ_j 都支撑在一个二进壳层 $\{2^{j-1}\le|\xi|\le2^{j+1}\}$ 中（如定义 2.1 所述），因此第二个积分中被积函数的 ξ-支集为

$$A_j:=\{\xi\in\mathbb{R}^n:2^{j(1-\rho)-1}\le|\xi|\le2^{j(1-\rho)+1}\}. \tag{41}$$

接下来将利用以下构造把壳层 A_j 分解为截断圆锥：

由于 φ 在 $a(x,\xi)$ 的支集上具有常秩 κ，我们可以假设存在某个 κ 维子流形 $S_\kappa(x)$，它包含于 $\mathbb{S}^{n-1}\cap\Gamma$，并且存在一个足够窄的锥 Γ，使得 $\mathbb{S}^{n-1}\cap\Gamma$ 可由 $\bar\xi=\bar\xi_x(u,v)$ 参数化，其中 (u,v) 取遍 $(0,0)$ 附近某个有界开集 $U\times V\in\mathbb{R}^\kappa\times\mathbb{R}^{n-\kappa-1}$；此外，$\bar\xi_x(u,v)\in S_\kappa(x)$ 当且仅当 $v=0$，并且 $\nabla_\xi\varphi(x,\xi_x(u,v))=\nabla_\xi\varphi(x,\xi_x(u,0))$。

定义 4.1. 对于每个 $j\in\mathbb{Z}_{>0}$、$0<\rho\le1$ 和 $0\le\kappa\le n-1$，设 $\{u_j^\nu\}$ 是 U 中的一个点集，使得，

(i) $|u_j^\nu-u_j^{\nu'}|\ge2^{-j\rho/2}$，只要 $\nu\ne\nu'$。(ii) 若 $u\in U$，

则存在一个 u_j^ν，使得 $|u-u_j^\nu|<2^{-j\rho/2}$。

令 $\xi_j^\nu=\xi_x(u_j^\nu,0)$。可以通过选取一个满足条件 ***(i)*** 的极大集合$\{\xi_j^\nu\}$ 来构造这样的序列，随后 ***(ii)*** 即可得出。现在，记所需锥的数量为 $\mathscr{N}_j$。图 3 展示了 $\mathbb{S}^2$ 和 $\kappa=1$ 的情形。

令 Γ_j^ν 表示 ξ 空间中的锥，其顶点位于原点，中心方向为 ξ_j^ν，即

$$\Gamma_j^\nu:=\left\{\xi\in\mathbb{R}^n;\,\xi=s\bar\xi_x(u,v),\left|\frac{u}{|u|}-u_j^\nu\right|<2^{-j\rho/2},v\in V,s>0\right\} \tag{42}$$

还可以在 Γ 上定义如下单位分解。为构造它，取

$$\tilde\eta_j^\nu(u):=\phi\Big(2^{j\rho/2}\Big(\frac{u}{|u|}-u_j^\nu\Big)\Big)$$

其中 ϕ 是 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的一个非负函数，满足 $\phi(u)=1$，当 $|u|\le1$ 时成立，并且 $\phi(u)=0$，当 $|u|\ge2$ 时成立，使得

$$\tilde\chi_j^\nu(u):=\frac{\tilde\eta_j^\nu(u)}{\sum_{\nu=1}^{\mathscr{N}_j}\tilde\eta_j^\nu(u)}.$$

相应的齐次单位分解 χ_j^ν 定义如下：

$$\chi_j^\nu(s\bar\xi_x(u,v))=\tilde\chi_j^\nu(u), \tag{43}$$

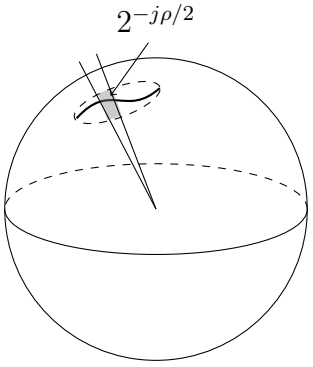

图 3. $\mathbb{S}^2$ 和 $\kappa = 1$情形的示意图。粗线¯表示开集 ξ_x（$U \times V$）中的子流形 S_1（x）。曲线 S_1（x）在灰色区域内的长度不超过 $2^{-j\rho/2}$。

其中 $v \in V$和 $s > 0$。

利用定义 4.1，我们可以对核 (40) 作第二次二进分解，得到

$$K_j^\nu(x,y) := 2^{jn\rho} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2^{j\rho}\varphi(x,\xi) - i2^{j\rho} y\cdot\xi}\, \psi_j(2^{j\rho}\xi)\, \chi_j^\nu(\xi)\, a(x, 2^{j\rho}\xi)\, \text{đ}\xi \tag{44}$$

并观察到

$$K_j(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\mathscr{N}_j} K_j^\nu(x,y).$$

现在回到 (41) 中的壳层，我们将每个 A_j 分解为截断圆锥$\Gamma_j^\nu \cap A_j$。我们断言 $\mathscr{N}_j = O\big(2^{j\rho\kappa/2}\big)$，并且每个截断圆锥的体积约为 $O\big(2^{jn(1-\rho)-j\rho\kappa/2}\big)$

事实上，注意到根据定义 (42)，对于每个截断圆锥$\Gamma_j^\nu \cap A_j$，有 κ 个方向的长度（大致）等于 $2^{j(1-\rho)}2^{-j\rho/2}$，以及 $n-\kappa-1$个方向的长度大致等于 $2^{j(1-\rho)}$（这是 A_j 的厚度）。因此我们推知

$$|\Gamma_j^\nu \cap A_j| \sim \big(2^{-j\rho/2}2^{j(1-\rho)}\big)^\kappa\, 2^{j(n-\kappa-1)(1-\rho)}2^{j(1-\rho)} = 2^{jn(1-\rho)-j\rho\kappa/2}. \tag{45}$$

由此还可以得出，大约需要

$$\frac{2^{jn(1-\rho)}}{2^{jn(1-\rho)-j\rho\kappa/2}} = 2^{j\rho\kappa/2}$$

个这样的截断圆锥才能覆盖一个壳层 A_j，这就证明了该结论。请参见**图4** 以作示意。

对于下面的引理以及论文余下部分，我们选择 ξ 空间中的坐标轴，使得 $\xi'' \in T_{\xi_j^\nu} S_\kappa(x)$ 和 $\xi' \in \big(T_{\xi_j^\nu} S_\kappa(x)\big)^\perp$，从而$\xi = (\xi'', \xi')$。注意，由于 $\frac{|\xi'|}{|\xi|} \lesssim 2^{-j\rho/2}$，有

$$|\xi'| \lesssim 2^{j(1-\rho)}2^{-j\rho/2} = 2^{j(1-3\rho/2)}, \tag{46}$$

对于 $\xi \in \Gamma_j^\nu \cap A_j$.

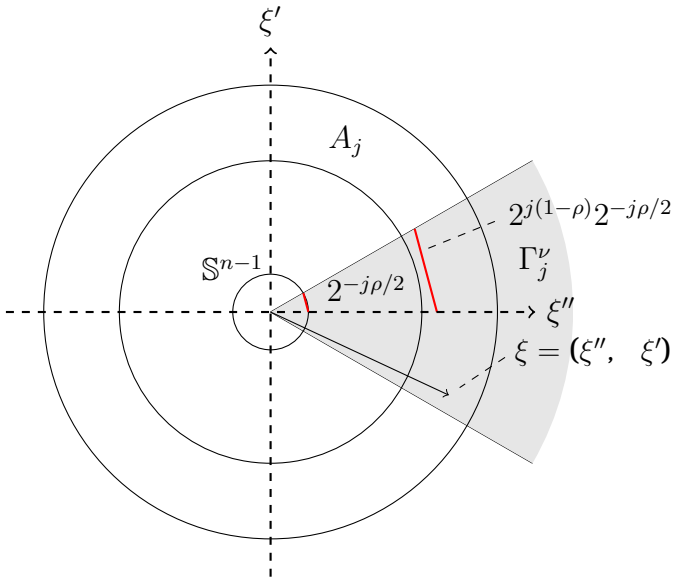

图4. A_j 与 Γ_j^ν相交的示意图，其中包含大小为 $2^{j(1-\rho)}$的频率 ξ 。

引理 4.2. 函数 χ_j^ν 属于 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ，且支集包含于锥 Γ_j^ν 中。它们在 ν: 中的和为 1

$$\sum_{\nu=1}^{\mathscr{N}_j} \chi_j^\nu(\xi) = 1, \quad j \in \mathbb{N} \quad and\, \xi \neq 0$$

而且它们满足以下估计

$$|\partial_\xi^\alpha \chi_j^\nu(\xi)| \lesssim 2^{j\rho|\alpha|/2}|\xi|^{-|\alpha|}, \tag{47}$$

对于所有多重指标 α 以及

$$|\partial_{\xi''}^\beta \chi_j^\nu(\xi)| \lesssim |\xi|^{-|\beta|}, \tag{48}$$

对于所有 $\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-\kappa}$ 。

证明。 注意，由 (43) 可知，只需对 $\tilde{\chi}_j^\nu$ 证明结论，因为 ξ_x 是一个微分同胚。在证明 (47) 时，我们注意到 η_j^ν 的自变量包含因子 $2^{j\rho/2}$，后面跟着一个零次齐次因子。因此， α 阶导数会产生因子 $2^{j\rho|\alpha|/2}$ 和一个 $-|\alpha|$ 次齐次函数。为证明 (48)，注意在 χ_j^ν 的支集上可以写成

$$\partial_{\xi_\ell''} = \partial_r + O(2^{-j\rho/2}) \cdot \nabla_\xi,$$

对任意 $1 \leq \ell \leq n - \kappa$，其中 ∂_r 是径向导数，且 $\partial_r \tilde{\chi}_j^\nu = 0$ ，因为 $\tilde{\chi}_j^\nu$ 是零次齐次的。□

我们将把相位 $\varphi(x,\ \xi) - y \cdot \xi$ 分解为两个不同的部分：$(\nabla_\xi \varphi(x,\ \xi_j^\nu) - y) \cdot \xi$（它关于 ξ 是线性的），以及 $\varphi(x,\ \xi) - \nabla_\xi \varphi(x,\ \xi_j^\nu) \cdot \xi$。下面的引理给出了对第二个非线性部分的估计。

引理 4.3。 令 $\varphi\ (x, \xi)\ \in \mathcal{C}^\infty\ (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 关于 ξ 是一次正齐次的。对于 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $1 \leq \nu \leq \mathscr{N}_j$，定义

$$h_j^\nu(x, \xi) := \varphi(x, \xi) - \nabla_\xi \varphi(x, \xi_j^\nu) \cdot \xi.$$

那么对于 $0<\rho\leq\frac{2}{3}$ 以及对于 ξ 中的 $A_j\cap\Gamma_j^\nu$，参见 （41）和 （42），有

$$|\partial_{\xi'}^\alpha h_j^\nu(x,\xi)|\lesssim\begin{cases}|\xi'||\xi|^{-|\alpha|} & if\ |\alpha|=1\\ |\xi|^{1-|\alpha|} & if\ |\alpha|\geq 2\end{cases}\lesssim 2^{-j\rho/2}.$$

此外，对于 $\beta\in\mathbb{Z}_{>0}^{n-\kappa}$，有

$$|\partial_{\xi''}^\beta h_j^\nu(x,\xi)|\lesssim|\xi'|^2|\xi|^{-|\beta|-1}\lesssim 2^{-j\rho}.$$

证明。 证明基于 (46) 中简单的泰勒展开和齐次性考量，见 [25, 第 407] 页。□

注 4.4. 注意，由前一个引理可得估计

$$|\nabla_\xi h_j^\nu(x,\xi)|\lesssim 2^{-j\rho/2}, \tag{49}$$

f对于所有 $\xi\in\Gamma_j^\nu$ 均成立，这是因为 $\nabla_\xi h_j^\nu(x,\xi)$ 关于 ξ.

在 [24] 中，作者定义了与 SND 相位函数φ相关的“影响集”。我们需要作出类似的定义，但必须使其适用于此处考虑的更一般的振幅类。为此，我们有

定义 4.5。 假设 φ 是类 Φ^2 中秩为 κ 的强非退化 相位函数，且 Q 是一个立方体。对 $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$、$1\leq\nu\leq\mathscr{N}_j$，定义集合 R_j^ν 如下

$$R_j^\nu:=\left\{x\in\mathbb{R}^n:|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-\bar{y})''|\leq c2^{-\rho j},\quad|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-\bar{y})'|\leq c2^{-\rho j/2}\right\}.$$

这里，c 是一个较大的常数，取决于 φ 的海森矩阵的大小，但与 j 和 ν 无关，具体取值将在后面说明。现在令

$$Q_\rho^*:=\begin{cases}\bigcup\limits_{j=k_Q}^{\infty}\bigcup\limits_{\nu=1}^{\mathscr{N}_j}R_j^\nu, & \rho\in(0,1]\ and\ k_Q\geq 1\\ 2\sqrt{n}Q, & \rho=0\ or\ k_Q\leq 0.\end{cases} \tag{50}$$

关于这一点，我们有以下估计。

引理 4.6。 假设 φ 是类 Φ^2 中秩为 κ 的强非退化 相位函数，且 Q 是满足 $k_Q\geq 1$ 的立方体。此外，设 Q_ρ^* 按(50)中的定义给出。那么对于$\rho\in(0,1]$，我们有以下性质。

(i) Q_ρ^* 的测度满足

$$|Q_\rho^*|\lesssim 2^{-k_Q\rho(n-\kappa)}.$$

(ii) 如果 $x\in\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*$ 和 $y\in Q$，那么对于定义 4.5 中足够大的 c，我们有

$$2^{2j\rho}|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-y)'|^2+2^{j\rho}|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-y)''|^2\gtrsim 2^{(j-k_Q)\rho},\quad j\geq k_Q \tag{51}$$

Re标记 4.7. 通过类似的论证，可以证明以下版本的(51).

$$2^{2j\rho}|(x-\nabla_\xi\varphi(y,\xi_j^\nu))'|+2^{j\rho}|(x-\nabla_\xi\varphi(y,\xi_j^\nu))''|\gtrsim 2^{(j-k_Q)\rho},\quad j\geq k_Q. \tag{52}$$

这将用于证明伴随算子的 $h^p\to L^p$ 有界性。

证明。 回忆一下，$\mathscr{N}_j=O\big(2^{j\rho\kappa/2}\big)$, $k_Q:=[1-\log_2(l_Q)]$，且 c_Q 是 Q. 的中心

步骤 1 – （i）的证明

由于 R_j^ν 在大小为 $2^{j\rho/2}$ 的方向上且在其他 $n-\kappa$ 个方向上为 $O(2^{-j\rho})$，对于 $0<\rho\le 1$，我们有

$$|Q_\rho^*|\le\sum_{j=k_Q}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\mathscr{N}_j}|R_j^\nu|\lesssim\sum_{j=k_Q}^{\infty}2^{j\rho\kappa/2}\,2^{-j(\rho(n-\kappa)+\rho\kappa/2)}\lesssim 2^{-k_Q\rho(n-\kappa)}.$$

步骤 2 – （ii）的证明

注意到，(51) 等价于

$$2^{(j+k_Q)\rho/2}|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-y)''|+2^{k_Q\rho/2}|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-y)'|\gtrsim 1,\quad j\ge k_Q.$$

此外，只需证明

$$2^{k_Q\rho}|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-y)''|+2^{k_Q\rho/2}|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-y)'|\gtrsim 1. \tag{53}$$

由于 $\xi_j^\nu\in\mathbb{S}^{n-1}$，根据定义 4.1 的第 (ii) 部分，存在一个单位向量 $\xi_{k_Q}^{\nu'}$，使得

$$|\xi_j^\nu-\xi_{k_Q}^{\nu'}|<2^{-k_Q\rho/2}. \tag{54}$$

现在我们陈述并证明以下三个断言，以完成证明。注意，(55) 中的 c 来自定义 4.5。

$$2^{k_Q\rho}|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_{k_Q}^{\nu'})-c_Q)''|+2^{k_Q\rho/2}|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_{k_Q}^{\nu'})-c_Q)'|\ge c, \tag{55}$$

$$|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-\nabla_\xi\varphi(x,\xi_{k_Q}^{\nu'}))'|\lesssim 2^{-k_Q\rho/2}, \tag{56}$$

$$|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-\nabla_\xi\varphi(x,\xi_{k_Q}^{\nu'}))''|\lesssim 2^{-k_Q\rho} \tag{57}$$

在证明上述断言之前，我们先证明

$$|\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-\nabla_\xi\varphi(x,\xi_{k_Q}^{\nu'})|\lesssim 2^{-k_Q\rho/2}. \tag{58}$$

事实上，注意到由于 $\varphi\in\Phi^2$，有 $|\partial_{\xi\xi}^2\varphi(x,\ \xi)|\lesssim|\xi|^{-1}$，对所有 x 以及所有 $\xi\neq 0.$ 均成立。因此，由中值定理和 (54) 可知，存在某个 $t\in[0,1]$，使得对所有 $k_Q\ge 1$ 均有

$$\begin{aligned}&|\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-\nabla_\xi\varphi(x,\xi_{k_Q}^{\nu'})|\le|\xi_j^\nu-\xi_{k_Q}^{\nu'}||\xi_j^\nu+t(\xi_{k_Q}^{\nu'}-\xi_j^\nu)|^{-1}\\&\le 2^{-k_Q\rho/2}(1-t2^{-k_Q\rho/2})^{-1}\le 2^{-k_Q\rho/2}(1-2^{-\rho/2})^{-1}\lesssim 2^{-k_Q\rho/2}.\end{aligned}$$

这就证明了 (58)。

步骤 2.1 – (55) 和 (56) 的证明

首先，(55) 可直接由 $x\in\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*\subset\mathbb{R}^n\setminus R_{k_Q}^{\nu'}$ 得出。而 (56) 则由 (58) 显然可得。

步骤 2.3 – (57) 的证明

我们首先断言

$$|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-\nabla_\xi\varphi(x,\xi_{k_Q}^{\nu'}))\cdot\xi_{k_Q}^{\nu'}|\lesssim 2^{-k_Q\rho}. \tag{59}$$

为说明这一点，利用 φ 的齐次性（由 Φ^2 条件决定），我们得到

$$\begin{aligned}&(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-\nabla_\xi\varphi(x,\xi_{k_Q}^{\nu'}))\cdot\xi_{k_Q}^{\nu'}\\&=(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-\nabla_\xi\varphi(x,\xi_{k_Q}^{\nu'}))\cdot(\xi_{k_Q}^{\nu'}-\xi_j^\nu)+\varphi(x,\xi_j^\nu)-\nabla_\xi\varphi(x,\xi_{k_Q}^{\nu'})\cdot\xi_j^\nu\\&=(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-\nabla_\xi\varphi(x,\xi_{k_Q}^{\nu'}))\cdot(\xi_{k_Q}^{\nu'}-\xi_j^\nu)+h_{k_Q}^{\nu'}(x,\xi_j^\nu),\end{aligned}$$

其中

$$h^{\nu'}_{k_Q}(x,\xi) := \varphi(x,\xi) - \nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q})\cdot\xi.$$

此外，由 (49) 可得估计

$$|(\nabla_\xi h^{\nu'}_{k_Q})(x,\xi)| \le 2^{-k_Q\rho/2}, \tag{60}$$

对所有 $\xi\in\Gamma^{\nu'}_{k_Q}$。回想一下，$\xi^\nu_j$ 属于 $\mathbb{S}^{n-1}$，(54) 表明 ξ^ν_j 也属于锥 $\Gamma^{\nu'}_{k_Q}$，因此对所有 $t\in[0,1]$，表示连接 ξ^ν_j 和 $\xi^{\nu'}_{k_Q}$ 的线段的表达式 $\xi^\nu_j + t(\xi^{\nu'}_{k_Q}-\xi^\nu_j)$ 属于 $\Gamma^{\nu'}_{k_Q}$，这是由于锥的凸性。因此，(60) 推出对所有 $t\in[0,1]$

$$|(\nabla_\xi h^{\nu'}_{k_Q})(x,\xi^\nu_j + t(\xi^{\nu'}_{k_Q}-\xi^\nu_j))| \lesssim 2^{-k_Q\rho/2}.$$

现在我们还注意到 $h^{\nu'}_{k_Q}(x,\ \xi^{\nu'}_{k_Q}) = 0$。因此，利用中值定理和 (54)，很容易看出 $h^{\nu'}_{k_Q}(x,\ \xi^\nu_j) = O(2^{-k_Q\rho})$。

对于这一项 $(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j) - \nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q}))\cdot(\xi^{\nu'}_{k_Q}-\xi^\nu_j)$，我们只需使用柯西-施瓦茨不等式、(54) 和 (58)，即可完成 (59) 的证明。

现在我们转而证明 (57)。根据初始约定，即 ξ^ν_j 沿着ξ_1-轴，利用三角不等式、柯西-施瓦茨不等式、(54)、(58) 和 (59)，可得

$$\begin{aligned}
&|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j) - \nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q}))''| = |(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j) - \nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q}))\cdot\xi^\nu_j|\\
&= |(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j) - \nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q}))(\xi^\nu_j-\xi^{\nu'}_{k_Q}) + (\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j) - \nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q}))\cdot\xi^{\nu'}_{k_Q}|\\
&\le |\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j) - \nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q})|\,|\xi^\nu_j-\xi^{\nu'}_{k_Q}| + |(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j) - \nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q}))\cdot\xi^{\nu'}_{k_Q}|\\
&\lesssim 2^{-k_Q\rho}.
\end{aligned}$$

步骤 3 – (53) 的证明

最后，为了证明 (53)（正如上文所述，这意味着所需的估计 (51)），我们使用三角不等式、(55)、(56) 和 (57)，得到

$$\begin{aligned}
&2^{k_Q\rho}|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j)-y)''| + 2^{k_Q\rho/2}|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j)-y)'|\\
&= 2^{k_Q\rho}\big|\big(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j) - c_Q - (y-c_Q)\big)''\big| + 2^{k_Q\rho/2}\big|\big(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j) - c_Q - (y-c_Q)\big)'\big|\\
&\ge 2^{k_Q\rho}\big|\big(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j) - c_Q\big)''\big| - 2^{k_Q\rho}|y''-c_Q''| + 2^{k_Q\rho/2}\big|\big(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j) - c_Q\big)'\big|\\
&\qquad - 2^{k_Q\rho/2}|y'-c_Q'|\\
&\ge 2^{k_Q\rho}\big|\big(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j) - c_Q\big)''\big| + 2^{k_Q\rho/2}\big|\big(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j) - c_Q\big)'\big|\\
&\qquad - A2^{k_Q\rho}2^{-k_Q} - A2^{k_Q\rho/2}2^{-k_Q}\\
&= 2^{k_Q\rho}\big|\big(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j) - \nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q}) + \nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q}) - c_Q\big)''\big|\\
&\qquad + 2^{k_Q\rho/2}\big|\big(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j) - \nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q}) + \nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q}) - c_Q\big)'\big|\\
&\qquad - A2^{k_Q\rho}2^{-k_Q} - A2^{k_Q\rho/2}2^{-k_Q}\\
&\ge 2^{k_Q\rho}\big|\big(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q}) - c_Q\big)''\big| - 2^{k_Q\rho}\big|\big(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j) - \nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q})\big)''\big|\\
&\qquad + 2^{k_Q\rho/2}\big|\big(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q}) - c_Q\big)'\big| - 2^{k_Q\rho/2}\big|\big(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^\nu_j) - \nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q})\big)'\big|\\
&\qquad - A2^{k_Q\rho}2^{-k_Q} - A2^{k_Q\rho/2}2^{-k_Q}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq 2^{k_Q\rho}\big|\big(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q})-c_Q\big)''\big|+2^{k_Q\rho/2}\big|\big(\nabla_\xi\varphi(x,\xi^{\nu'}_{k_Q})-c_Q\big)'\big|\\
&\qquad -2^{k_Q\rho}B2^{-k_Q}-2^{k_Q\rho/2}C2^{-k_Q/2}-A2^{k_Q\rho}2^{-k_Q}-A2^{k_Q\rho/2}2^{-k_Q}\\
&\geq c-2^{k_Q\rho}B2^{-k_Q}-C2^{k_Q\rho/2}2^{-k_Q/2}\\
&= c-B2^{-k_Q(1-\rho)}-C2^{-k_Q(1-\rho)/2}-A2^{-k_Q(1-\rho)}-A2^{-k_Q(1-\rho/2)}\\
&\geq c-A-B-C,
\end{aligned}
$$

其中常数 $A=2\sqrt{n}$、 B 来自估计 (57)，而 C 来自 (56)。因此，取足够大的 c，即可得到 (51)。

注 4.8。 注意，对于 $\rho>\frac{2}{3}$，我们不使用（40）中的缩放，而是沿用 [24]中的推理思路。这也意味着，从定义 4.1开始，直到引理 4.6（含）为止的讨论，都必须根据 [24], 第247–248 页给出的分解作相应修改；该分解确实适用于$\rho\geq\frac{1}{2}$。 _

□

引理 4.9。设 $\tilde m\leq 0,\quad n\geq 1,\quad \rho\in[0,1],\quad \delta\in[0,1)$ 且

$$
m:=\tilde m-n\max\left\{0,\frac{\delta-\rho}{2}\right\}.
$$

设 $a\in S^m_{\rho,\,\delta}(\mathbb{R}^n)$，并且 $a(x,\xi)$ 在 $\xi=0$ 的某个邻域内消失。此外，设 φ 是类 Φ^2 中秩为 κ 的强非退化相位函数。那么，见定义 2.18， T^φ_a 满足

$$
\|T^\varphi_a f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\lesssim\|f\|_{h^{2n/(n-2\tilde m)}(\mathbb{R}^n)}. \tag{61}
$$

伴随算子也满足

$$
\|(T^\varphi_a)^* f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\lesssim\|f\|_{h^{2n/(n-2\tilde m)}(\mathbb{R}^n)}. \tag{62}
$$

证明。 由于算子 $T^\varphi_a(1-\Delta)^{-\tilde m/2}$ 是相位为 φ、振幅属于 $S^{-n\max\{(\delta-\rho)/2,0\}}_{\rho\,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 的傅里叶积分算子，因此根据定理 2.19，它是 L^2-有界的。结合贝塞尔势算子的估计（用 Triebel-Lizorkin 空间的嵌入重新表述，见 [30, 推论 2.7]），这一有界性可得

$$
\begin{aligned}
\|T^\varphi_a f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}&=\|T^\varphi_a(1-\Delta)^{-\tilde m/2}(1-\Delta)^{\tilde m/2}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim\|(1-\Delta)^{\tilde m/2}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\lesssim\|f\|_{h^{2n/(n-2\tilde m)}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}
$$

这就证明了 (61)。注意， $\tilde m$ 的取值范围选择意味着 $0<2n/(n-2\tilde m)\leq 2$。

接下来证明 (62)。根据定理 3.1，复合算子 $(1-\Delta)^{-m'/2}T^\varphi_a$ 是相位为 φ 、振幅属于 $S^{-n\max\{(\delta-\rho)/2,0\}}_{\rho\,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 的傅里叶积分算子，因此是 L^2-有界的。最后，注意到

$$
\|(T^\varphi_a)^*(1-\Delta)^{-m'/2}\|_{L^2\to L^2}=\|(1-\Delta)^{-m'/2}T^\varphi_a\|_{L^2\to L^2},
$$

可以按照上述方法继续进行。 □

记号。 此后我们将设

$$
m_c(p):=-\big(\kappa+(n-\kappa)(1-\rho)\big)\Big|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\Big|-n\max\left\{0,\frac{\delta-\rho}{2}\right\}, \tag{63}
$$

这将证明是有界傅里叶积分算子的振幅的临界阶（见第 5 节）。

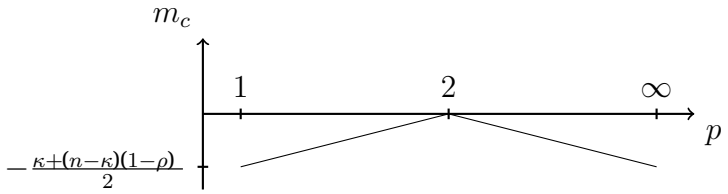

图5. 当 $\rho \geq \delta$ 时的临界阶。

引理 4.10. 设 T_a^φ 是一个振幅为 $a \in S^{m_c(p)}{}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 的傅里叶积分算子，其中 $-\rho \in [0, \frac{2}{3}]$, $\delta \in [0,1)$ 和 $m_c(p)$ 满足(63)。设 $\varphi \in \Phi^2$ 是秩为 κ、满足定义 2.18中条件的强非退化 相位函数。此外， $T_j := T_a^\varphi \psi_j(D)$，其中$\psi_j(D)$ 是定义 2.1 中的 *Littlewood-Paley* 分块。此外，假设 f 支撑在一个立方体 Q 中，其

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{k_Q n(1/p-1)}.$$

此外，令 Q_ρ^* 如(50)所示。

(i) 若 $0 < p < \frac{2n-2n\rho+2\kappa\rho}{2n-n\rho+\kappa\rho}$，则

$$\sum_{j=\max\{k_Q+1,1\}}^{\infty} \|T_j f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)} \lesssim 1. \tag{64}$$

(ii) 若 $0 < p \leq 1$ 且 f 是一个 h^p-原子，参见定义 2.11，则

$$\sum_{j=1}^{\max\{k_Q,0\}} \|T_j f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)} \lesssim 1. \tag{65}$$

此外，伴随算子$(T_j)^*$.也满足相同的估计

注 4.11. 注意，引理 4.10 (i) 中关于 p 的条件排除了 $\kappa = 0$ 和 $\rho = 1$ 的情形。此情形在例如 [18], [27] 中进行了讨论。

引理 *4.10* 的证明。 注意，只需在 $k_Q \geq 1$ 时证明 (65)，否则该和显然为 0。此外，只需证明存在某个 $\epsilon > 0$,

$$\|T_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)} \lesssim 2^{(\max\{k_Q,0\}-j)\varepsilon}, \quad j \geq \max\{k_Q+1, 1\},$$
$$\|T_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)} \lesssim 2^{(j-k_Q)\varepsilon}, \qquad 1 \leq j \leq \max\{k_Q, 0\}.$$

我们先介绍一些有用的预备知识，以此开始证明这个引理。首先，在整个证明过程中，我们假设 $x \in \mathbb{R}^n \setminus Q_\rho^*$ 和 $y \in Q$。接下来，我们定义两种度量，以简化证明的阐述。

$$g(x,y) := 1 + |x-y|^2,$$
$$g_j^\nu(x,y) = \big(1 + 2^{2j\rho}|(\nabla_\xi \varphi(x,\xi_j^\nu) - y)''|^2\big)\big(1 + 2^{j\rho}|(\nabla_\xi \varphi(x,\xi_j^\nu) - y)'|^2\big).$$

此外，我们定义一些在整个证明过程中都会用到的变量。令 $p' := \frac{2p}{2-p}$，或等价地 $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$， $m' := -\big(\kappa + (n-\kappa)(1-\rho)\big)\big|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\big|$，以及 $\mathfrak{M} := \big[n\big(\frac{1}{p}-1\big)\big]$，如定义 2.11 所示。我们还需要 $N_1 > \frac{n}{2p'}$、 $N_2 > 8N_1$ 和 $N_3 > 2N_1 + \frac{N_2}{\rho} + n$。 —

接下来，我们证明以下两个断言。对于 $t \in [0,1]$， $x \in \mathbb{R}^n \setminus 2\sqrt{n}Q$ 和$y \in Q$,有

$$|x - c_Q| \lesssim |x - c_Q - t(y - c_Q)|. \tag{66}$$

对于所有整数 $N \geq 0$ 以及在式 (40) 中定义的核 $K_j(x,\ y)$,

$$\left\|g(x,y)^N\, K_j(x,y)\right\|_{L^2_x(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{j(n/2+m')}. \tag{67}$$

We 将此证明分为不同的步骤，首先证明上述断言 e.

步骤 1 – (66) 的证明

我们有

$$\begin{aligned}|x-c_Q| &\leq |x-c_Q-t(y-c_Q)| + t|y-c_Q| \leq |x-c_Q-t(y-c_Q)| + tl_Q \\ &\leq |x-c_Q-t(y-c_Q)| + \frac{t}{2\sqrt{n}}|x-c_Q|.\end{aligned}$$

该断言可通过对上述不等式进行重新排列得出。

步骤 2 – (67) 的证明

在这一步中，我们将使用第 2.3 节中的论证，该论证表明，只需考虑形如 $\varphi(x,\ \xi) = x\cdot\xi + \theta(x,\ \xi)$ 的相位函数，其中 $\theta(x,\ \xi) \in \Phi^1$。我们声称

$$\|(x-y)^\alpha\, \partial_y^\beta K_j(x,y)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{j(|\beta|+m'+n/2)}, \tag{68}$$

对所有多重指标 α 和 β 均成立。由于对 y 求 β 次导数只会引入大小为 $2^{j|\beta|}$, 的因子，因此只需对 $\beta = 0$ 证明（68）即可。现在，核的全局有界性（68）可以表述为如下形式的核的有界性

$$\tilde{K}_j^\alpha(x, x-y) := \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x,\xi)\,(x-y)^\alpha\, e^{i\theta(x,\xi)+i(x-y)\cdot\xi}\, đ\xi.$$

为此，取如定义 2.1 中的 Ψ_j，进行分部积分，并改写

$$\begin{aligned}\tilde{K}_j^\alpha(x,x-y) &= \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x,\xi)\, e^{i\theta(x,\xi)}\,(-i)^{|\alpha|}\,\partial_\xi^\alpha e^{i(x-y)\cdot\xi}\, đ\xi \\ &= i^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^\alpha\left[a_j(x,\xi)e^{i\theta(x,\xi)}\right] e^{i(x-y)\cdot\xi}\,\Psi_j(\xi)\, đ\xi \\ &= \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} C_{\alpha_1,\alpha_2}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^{\alpha_1} a_j(x,\xi)\,\partial_\xi^{\alpha_2} e^{i\theta(x,\xi)}\, e^{i(x-y)\cdot\xi}\,\Psi_j(\xi)\, đ\xi \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha \\ \lambda_1+\cdots+\lambda_r=\alpha_2}} C_{\alpha_1,\alpha_2,\lambda_1,\ldots\lambda_r}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^{\alpha_1} a_j(x,\xi) \\ &\qquad \times \partial_\xi^{\lambda_1}\theta(x,\xi)\cdots\partial_\xi^{\lambda_r}\theta(x,\xi)\, e^{i\theta(x,\xi)}\, e^{i(x-y)\cdot\xi}\,\Psi_j(\xi)\, đ\xi \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha \\ \lambda_1+\cdots+\lambda_r=\alpha_2}} C_{\alpha_1,\alpha_2,\lambda_1,\ldots\lambda_r} 2^{jm'}\int_{\mathbb{R}^n} b_j^{\alpha_1,\alpha_2,\lambda_1,\ldots,\lambda_r}(x,\xi)\, e^{i\theta(x,\xi)+ix\cdot\xi}\, e^{-iy\cdot\xi}\,\Psi_j(\xi)\, đ\xi \\ &=: \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha \\ \lambda_1+\cdots+\lambda_r=\alpha_2}} C_{\alpha_1,\alpha_2,\lambda_1,\ldots,\lambda_r} 2^{jm'}\, S_j^{\alpha_1,\alpha_2,\lambda_1,\ldots,\lambda_r}(\tau_{-y}\Psi_j^\vee)(x),\end{aligned}$$

其中，$S^{\alpha_1,\ \alpha_2\,\lambda_1\ \ \lambda_r,,\ldots,}_{\ j}$是一个傅里叶积分算子，其相位函数为 $\theta(x,\xi) + x\cdot\xi$，振幅为 $b^{\alpha_1,\ \alpha_2\,\lambda_1\ \ \lambda_r,,\ldots,}_{\ j}(x,\xi)$，定义如下

$$b_j^{\alpha_1,\alpha_2,\lambda_1,\ldots,\lambda_r}(x,\xi) := 2^{-jm'}\,\partial_\xi^{\alpha_1} a_j(x,\xi)\,\partial_\xi^{\lambda_1}\theta(x,\xi)\ldots\partial_\xi^{\lambda_r}\theta(x,\xi).$$

此外，$|\lambda_j| \geq 1$ 和 τ_{-y} 是一个平移，平移量为 $-y$。

我们注意到，对 j 一致地有 $b^{\alpha_1,}_{\ j\ \alpha_2\,\lambda_1\quad\lambda_r,,\ldots,}(x,\xi) \in S^{-n\max\{(\delta-\rho)/2,0\}}_{\rho\,\delta},(\mathbb{R}^n)$，因为$a \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\theta \in \Phi^1$。

因此，由定理 2.19，$S^{\alpha_1,}_{\ j\ \alpha_2\,\lambda_1\,\ldots\lambda_r\,,}$是一个 L^2-有界傅里叶积分算子，所以

$$\begin{aligned}\|\tilde{K}^\alpha_j(x,x-y)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\ \lambda_1+\cdots+\lambda_r=\alpha_2}} 2^{jm'}\|S^{\alpha_1,\alpha_2,\lambda_1,\ldots\lambda_r}_j(\tau_y\Psi^\vee_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim 2^{jm'}\|\Psi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{j(m'+n/2)},\end{aligned}$$

这证明了 (68)。

现在，对任意整数 $N \geq 0$，若对 $|\alpha| \leq 2N$ 求和，则 (68) 推出 (67)。

步骤 3 – $\rho = 0$ 的情形
结合 (67) 和 (66)（其中 $t = 1$），利用 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式可得

$$\begin{aligned}\|T_jf\|_{L^p(\mathbb{R}^n\setminus Q_0^*)} &= \Big\|\int_Q K_j(x,y)\,f(y)\,\mathrm{d}y\Big\|_{L^p_x(\mathbb{R}^n\setminus Q_0^*)}\\ &\leq \Big\|g(x,c_Q)^{N_1}\int_Q K_j(x,y)\,f(y)\,\mathrm{d}y\Big\|_{L^2_x(\mathbb{R}^n\setminus Q_0^*)}\,\Big\|\frac{1}{g(x,c_Q)^{N_1}}\Big\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim \int_Q \big\|g(x,c_Q)^{N_1}\,K_j(x,y)\,f(y)\big\|_{L^2_x(\mathbb{R}^n\setminus Q_0^*)}\,\mathrm{d}y\\ &\lesssim \int_Q |f(y)|\,\big\|g(x,y)^{N_1}\,K_j(x,y)\big\|_{L^2_x(\mathbb{R}^n\setminus Q_0^*)}\mathrm{d}y\\ &\lesssim 2^{-k_Q(n-n/p)}\,2^{j(n/2+m')} = 2^{-k_Q(n-n/p)}\,2^{j(n-n/p)},\end{aligned}$$

因为 $m' = -n\big(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\big)$。因此，当 $\rho = 0$ 时，(64) 得证。

将 $K_j(x,\ y)$ 在点$y = c_Q$处展开为 $\mathfrak{M}_\mathfrak{a}$ 阶泰勒多项式，可得

$$\begin{aligned}K_j(x,y) &= \sum_{|\beta|\leq\mathfrak{M}_\mathfrak{a}} \frac{(y-c_Q)^\beta}{\beta!}\,\partial_y^\beta K_j(x,y)\Big|_{y=c_Q}\\ &\quad+(\mathfrak{M}_\mathfrak{a}+1)\sum_{|\beta|=\mathfrak{M}_\mathfrak{a}+1}\frac{(y-c_Q)^\beta}{\beta!}\int_0^1(1-t)^{\mathfrak{M}_\mathfrak{a}}\,\partial_y^\beta K_j(x,y)\Big|_{y=c_Q+t(y-c_Q)}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由于定义 2.11 中原子的消失矩性质，即 (iii)，我们可以将算子表示为

$$T_jf(x) \sim \sum_{|\beta|=\mathfrak{M}_\mathfrak{a}+1}\int_Q\int_0^1 \frac{(y-c_Q)^\beta}{\beta!}\,(1-t)^{\mathfrak{M}_\mathfrak{a}}\,\partial_y^\beta K_j(x,y)\Big|_{y=c_Q+t(y-c_Q)}f(y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y.$$

注意到 $|(y-c_Q)^\beta| \lesssim 2^{-k_Q(\mathfrak{M}_\mathfrak{a}+1)}$，并结合估计 (68) 和 (66) 应用上述相同的过程，我们得到

$$\|T_jf\|_{L^p(\mathbb{R}^n\setminus Q_0^*)} \lesssim 2^{-k_Q(\mathfrak{M}_\mathfrak{a}+1-n/p+n)}\,2^{j(\mathfrak{M}_\mathfrak{a}+1+m'+n/2)}$$

$$= 2^{-k_Q(\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}}+1+n-n/p)}\, 2^{j(\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}}+1+n-n/p)}.$$

将此与 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}} > n/p - n - 1$ 这一事实结合起来，我们看到 (65) 对于 $\rho = 0$ 已得到证明。

步骤 4——当 $0 < \rho \le \frac{2}{3}$ 且 $k_Q \ge 1$ 时的情形

首先，我们注意到，Peetre不等式给出：

$$\begin{aligned}&\frac{(1+2^{2j\rho}|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-c_Q)''|^2)^{2N_1}}{(1+2^{2j\rho}|(\nabla\varphi(x,\xi_j^\nu)-y)''|^2)^{2N_1}}\frac{(1+2^{j\rho}|(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-c_Q)'|^2)^{2N_1}}{(1+2^{j\rho}|(\nabla\varphi(x,\xi_j^\nu)-y)'|^2)^{2N_1}}\\&\le (1+2^{2j\rho}|(c_Q-y)''|^2)^{2N_1}(1+2^{j\rho}|(c_Q-y)'|^2)^{2N_1},\end{aligned}$$

由此可知，对于 $y \in \operatorname{supp} f$ 和 $j \ge k_Q$,

$$g_j^\nu(x,c_Q)^{2N_1} \lesssim g_j^\nu(x,y)^{2N_1}\sum_{\ell=0}^{8N_1}2^{(j-k_Q)\ell} \lesssim \begin{cases} g_j^\nu(x,y)^{2N_1}\,2^{8N_1(j-k_Q)}, & j\ge k_Q,\\ g_j^\nu(x,y)^{2N_1}, & j<k_Q.\end{cases} \tag{69}$$

设 $K_j^\nu(x,y)$ 如（44）所示。则根据霍尔德不等式和闵可夫斯基积分不等式，有

$$\begin{aligned}&\Big(\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|K_j(x,y)\,f(y)|\,\mathrm{d}y\Big)^p\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\\&=\Big(\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*}\Big(\frac{1}{g_j^\nu(x,c_Q)^{N_1}}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{\nu=1}^{\mathscr{N}_j}|g_j^\nu(x,c_Q)^{N_1}\,K_j^\nu(x,y)\,f(y)|\,\mathrm{d}y\Big)^p\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\\&\le\sum_{\nu=1}^{\mathscr{N}_j}\Big\|\frac{1}{g_j^\nu(\cdot,c_Q)^{N_1}}\Big\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}\Big\|\int_{\mathbb{R}^n}|g_j^\nu(\cdot,c_Q)^{N_1}\,K_j^\nu(\cdot,y)\,f(y)|\,\mathrm{d}y\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}\\&\lesssim\sum_{\nu=1}^{\mathscr{N}_j}2^{-j\rho(n-\kappa/2)/p'}\int_{\mathbb{R}^n}\Big\|\int_{\mathbb{R}^n}|g_j^\nu(\cdot,c_Q)^{N_1}\,K_j^\nu(\cdot,y)\,f(y)|\,\mathrm{d}y\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}\end{aligned} \tag{70}$$

对于 $N_1 > n/2p'$。这里我们使用了

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{g_j^\nu(x,c_Q)^{N_1p'}}\,\mathrm{d}x \lesssim 2^{-j\rho(n-\kappa/2)} \tag{71}$$

对 c_Q 一致。

取引理 4.3 中的 $h_j^\nu(x,\xi) = \varphi(x,\xi) - \nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)\cdot\xi$，并定义

$$b_j^{\nu,\gamma}(x,\xi) := 2^{j\rho|\gamma|}\xi^\gamma\, a(x,2^{j\rho}\xi)\,\chi_j^\nu(\xi)\,\psi_j(2^{j\rho}\xi)\,e^{i2^{j\rho}h_j^\nu(x,\xi)},$$

$\mathbf{t}_j^\nu(x) := \nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)$，以及

$$L := \big(1-\Delta_{\xi''}^2\big)\big(1-2^{-j\rho}\Delta_{\xi'}\big).$$

注意， L 满足性质

$$g_j^\nu(x,y)^N\,e^{i2^{j\rho}(\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)-y)\cdot\xi} = L^N e^{i\nabla_\xi\varphi(x,\xi_j^\nu)\cdot\xi} \tag{72}$$

对所有 $N\in\mathbb{Z}_{\ge0}$.

利用引理 4.2 和引理 4.3，表 1 展示了 ξ-导数对 $b^{\nu}{}_{,j}{}^{\gamma}$ 中各项的作用。由此可见，对于所有 $N \ge 0$,

$$L^M b_j^{\nu,\gamma}(\mathbf{t}^{-1}(x+y),\xi) \in S^{m+|\gamma|}_{0,\delta}(\mathbb{R}^n)$$

因子	$\partial_{\xi'}^{\alpha}$	$\partial_{\xi''}^{\beta}$
$a(x,\ 2^{j\rho}\xi)$	$2^{j\rho\lvert\alpha\rvert}2^{j(m-\rho\lvert\alpha\rvert)}$	$2^{j\rho\lvert\beta\rvert}2^{j(m-\rho\lvert\beta\rvert)}$
$2^{j\rho\lvert\gamma\rvert}\xi^{\gamma}$	$2^{j\rho\lvert\gamma\rvert}2^{j\lvert\gamma-\alpha\rvert(1-\rho)}$	$2^{j\rho\lvert\gamma\rvert}2^{j\lvert\gamma-\beta\rvert(1-\rho)}$
$\chi_j^{\nu}(\xi)$	$2^{j\lvert\alpha\rvert(3\rho/2-1)}$	$2^{j\lvert\beta\rvert(\rho-1)}$
$\psi_j(2^{j\rho}\xi)$	$2^{j\lvert\alpha\rvert(\rho-1)}$	$2^{j\lvert\beta\rvert(\rho-1)}$
$e^{i2^{j\rho}h_j^{\nu}(x,\ \xi)}$	$\sum_{\gamma_1+\cdots+\gamma_k=\alpha}\big(\prod_{\ell=1}^{k}2^{j\gamma_\ell\rho}\,2^{-j\gamma_\ell\rho/2}\big)$	$\sum_{\gamma_1+\cdots+\gamma_k=\beta}\big(\prod_{\ell=1}^{k}2^{j\gamma_\ell\rho}\,2^{-j\gamma_\ell\rho}\big)$

表 1. 微分算子作用于 $b^{\nu}{}_{,j}{}^{\gamma}(x,\xi)$ 后，各因子大小的估计。求和遍及多重指标 $\alpha\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\kappa}$ 和 $\beta\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-\kappa}$ 的所有划分。$\partial_{\xi'}^{\alpha}$ 的作用会在有界性估计中引入因子 $2^{j|\alpha|/2}$，而 $\partial_{\xi''}^{\beta}$ 的作用则不会影响有界性。

因此

$$\big(L^N b_j^{\nu,\gamma}\big)(\mathbf{t}^{-1}(x+y),2^{-j\rho}\xi)\in S^{m+|\gamma|}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n) \tag{73}$$

关于 y 一致。

令 $\widehat{f_j^{\nu}}$ 为一个光滑截断函数，使得 $\widehat{f_j^{\nu}}(2^{j\rho}\cdot)$ 在 $b^{\nu}{}_{,j}{}^{\gamma}$ 的 ξ-支集上恒等于一，并且在略大于上述 ξ-支集的某个紧集之外为零。于是有

$$\begin{aligned}\|f_j^{\nu}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &\sim \|\widehat{f_j^{\nu}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = 2^{jn\rho}\|\widehat{f_j^{\nu}}(2^{j\rho}\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \lesssim 2^{jn\rho}|\Gamma_j^{\nu}\cap A_j|\\ &\lesssim 2^{jn\rho}\,2^{jn(1-\rho)-j\rho\kappa/2}=2^{j(n-\rho\kappa/2)}\end{aligned} \tag{74}$$

现在我们通过以下方式定义 L^2-有界算子 $S^{\nu}{}_{,M,j\,y}{}^{\gamma}$，

$$S_{j,y}^{\nu,N,\gamma}f_j^{\nu}(x):=2^{-j(m'+|\gamma|)}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}\,\big(L^N b_j^{\nu,\gamma}\big)(\mathbf{t}^{-1}(x+y),2^{-j\rho}\xi)\,\widehat{f_j^{\nu}}(\xi)\,\text{đ}\xi.$$

现在我们可以证明引理中的结论了。

步骤4.1 – 当 $k_Q\geq 1$注意，(70) 有界于 时对 (64) 的证明

$$\sum_{\nu=1}^{\mathscr{N}_j}2^{-j\rho(n-\kappa/2)/p'}\int_{\mathbb{R}^n}\|g_j^{\nu}(\cdot,c_Q)^{N_1}\,K_j^{\nu}(\cdot,y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}\,|f(y)|\,\mathrm{d}y$$

回顾 $N_2>8N_1$ 和 $N_3>2N_1+N_2/\rho+n$，我们利用 (72)、(51)、(69)、(71)、(74) 以及事实 $j\geq k_Q$，，推得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*}g_j^{\nu}(x,c_Q)^{2N_1}\,|K_j^{\nu}(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\\ &\lesssim\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*}\frac{g_j^{\nu}(x,c_Q)^{2N_1}\,2^{2jm'}\,\|S_{j,y}^{\nu,N_3,0}f_j^{\nu}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2}{g_j^{\nu}(x,y)^{N_3-N_2/\rho+N_2/\rho}}\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{75}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim 2^{-8k_QN_1}2^{8N_1j}2^{-N_2(j-k_Q)}\,2^{2jm'}\,\|f_j^\nu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{g_j^\nu(x,y)^{N_3-2N_1-N_2/\rho}}\,\mathrm{d}x\\
&\lesssim 2^{-8k_QN_1}2^{8N_1j}2^{-N_2(j-k_Q)}\,2^{2jm'}\,2^{j(n-\rho\kappa/2)}\,2^{-j\rho(n-\kappa/2)}\\
&= 2^{-8k_QN_1}2^{8N_1j}2^{-N_2(j-k_Q)}\,2^{j(\kappa\rho-2\rho n+2n)}2^{-2j(n-\rho n+\kappa\rho)/p}.
\end{aligned}
$$

利用这一点以及事实 $\mathscr{N}_j=O\big(2^{j\rho\kappa/2}\big)$，(70) 有如下界

$$
\begin{aligned}
&2^{-4k_QN_1}2^{4N_1j}2^{-N_2(j-k_Q)}\,2^{j(\kappa\rho-2\rho n+2n)/2}2^{-j(n-\rho n+\kappa\rho)/p}2^{j\rho\kappa/2}2^{-j\rho(n-\kappa/2)/p'}2^{-n(1/p-1)}\\
&\le 2^{-4k_QN_1-n(1/p-1)}2^{-N_2(j-k_Q)}\,2^{4N_1j-jn(1/p-1)}\\
&\lesssim 2^{j(-4k_QN_1-N_2-n(1/p-1))}2^{-k_Q(4N_1-N_2-n(1/p-1))}
\end{aligned}
$$

因此，当 $\rho\in(0,1]$ 和 $k_Q\ge 1$ 时，(64) 得证。

步骤 4.2——(65) 的证明观察

察看 t hat

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\Big\|\int_{\mathbb{R}^n}|g_j^\nu(\cdot,c_Q)^{N_1}\,K_j^\nu(\cdot,y)\,f(y)|\,\mathrm{d}y\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}\\
&=\Big\|\int_{\mathbb{R}^n}|g_j^\nu(\cdot,c_Q)^{N_1}\,K_j^\nu(\cdot,y)-p_j^\nu(x,y-c_Q)\,f(y)|\,\mathrm{d}y\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}\\
&\le\int_{\mathbb{R}^n}\|g_j^\nu(\cdot,c_Q)^{N_1}\,K_j^\nu(\cdot,y)-p_j^\nu(x,y-c_Q)\,f(y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}\,\mathrm{d}y\\
&\lesssim\sum_{|\alpha|=\mathfrak{M}_\mathfrak{a}+1}\int_{\mathbb{R}^n}|y-c_Q|^{\mathfrak{M}_\mathfrak{a}+1}\,\|g_j^\nu(\cdot,c_Q)^{N_1}\,\partial_y^\alpha K_j^\nu(\cdot,\tilde y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}\,|f(y)|\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

其中，p_j^ν 是 K_j^ν 在 c_Q 处的 $\mathfrak{M}_\mathfrak{a}$ 阶泰勒多项式，而 $\tilde y$ 是 y 与 c_Q 之间线段上的某个点。现在利用 (72)、(69)、(71)、(74) 和 $|\alpha|=\mathfrak{M}_\mathfrak{a}+1$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\|g_j^\nu(\cdot,c_Q)^{N_1}\,\partial_y^\alpha K_j^\nu(\cdot,\tilde y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}^2\\
&=\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*}g_j^\nu(x,c_Q)^{2N_1}\,|\partial_y^\alpha K_j^\nu(x,\tilde y)|^2\,\mathrm{d}x\\
&\lesssim 2^{2j(m'+\mathfrak{M}_\mathfrak{a}+1)}\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*}\frac{g_j^\nu(x,c_Q)^{2N_1}\,\|S_{j,\tilde y}^{\nu,3N_1,\alpha}f_j^\nu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2}{g_j^\nu(x,y)^{3N_1}}\,\mathrm{d}x\\
&\lesssim 2^{2j(m'+\mathfrak{M}_\mathfrak{a}+1)}\|\,f_j^\nu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{g_j^\nu(x,y)^{3N_1-2N_1}}\,\mathrm{d}x\\
&\lesssim 2^{2j(m'+\mathfrak{M}_\mathfrak{a}+1)}\,2^{j(n-\rho\kappa/2)}\,2^{-j\rho(n-\kappa/2)}\\
&\lesssim 2^{2j(\mathfrak{M}_\mathfrak{a}+1)}\,2^{j(\kappa\rho-2\rho n+2n)}2^{-2j(n-\rho n+\kappa\rho)/p}
\end{aligned}
$$

利用这一点以及 $\mathscr{N}_j=O\big(2^{j\rho\kappa/2}\big)$ 这一事实，可得 (70) 有界，且其上界为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{\mathscr{N}_j}2^{-j\rho(n-\kappa/2)/p'}\int_{\mathbb{R}^n}\|g_j^\nu(\cdot,c_Q)^{N_1}\,K_j^\nu(\cdot,y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}\,|f(y)|\,\mathrm{d}y\\
&\lesssim\sum_{\nu=1}^{\mathscr{N}_j}2^{-j\rho(n-\kappa/2)/p'}\sum_{|\alpha|=\mathfrak{M}_\mathfrak{a}+1}\int_{\mathbb{R}^n}|y-c_Q|^{\mathfrak{M}_\mathfrak{a}+1}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&\times \|g_j^\nu(\cdot,c_Q)^{N_1}\,\partial_y^\alpha K_j^\nu(\cdot,\tilde y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}\,|f(y)|\,\mathrm{d}y\\ &\lesssim 2^{j\rho\kappa/2}2^{-j\rho(n-\kappa/2)/p'}2^{-k_Q(\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}}+1)}2^{j(\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}}+1)}\,2^{j(\kappa\rho-2\rho n+2n)/2}2^{-j(n-\rho n+\kappa\rho)/p}\\ &\le 2^{(\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}}+1)(j-k_Q)}2^{-jn(1/p-1)}2^{kn(1/p-1)}\end{aligned}$$

注意到 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}}+1>n(1/p-1)$，因此当 $\rho\in(0,1]$ 且 $k_Q\ge$ 时，(65) 得证 1.

步骤 5 – 当 $k_Q\le 0$ 时证明 (64)
取 $\varepsilon:=-m'-n/2$。注意，关于 p 的条件意味着 $\varepsilon>0$。于是我们有

$$\begin{aligned}\|T_jf\|_{L^p(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}&=\Big\|\frac{g(x,c_Q)^{N_1}}{g(x,c_Q)^{N_1}}\,T_jf\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}\\ &\lesssim 2^{-j\varepsilon}\Big\|\frac{1}{g(x,c_Q)^{N_1}}\Big\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}\|g(x,c_Q)^{N_1}\,2^{j\varepsilon}T_jf\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}\end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned}(76)\quad \|g(x,c_Q)^{N_1}\,2^{j\varepsilon}T_jf\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}&\le\int_{\mathbb{R}^n}\|g(x,c_Q)^{N_1}\,2^{j\varepsilon}K_j(x,y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}f(y)\,\mathrm{d}y\\ &\lesssim 2^{k_Q(1/p-1)}\|g(x,y)^{N_1}\,2^{j\varepsilon}K_j(x,y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}\end{aligned}$$

其中我们用到了 (66)。现在，由假设可知 $k_Q\le 0$，因此由 (67) 可得 (76) 一致有界。于是

$$\|T_jf\|_{L^p(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)}\lesssim 2^{-j\varepsilon}$$

因此，当 $k_Q\le 0$ 时，(64) 得证。

步骤 6 – 伴随算子
关于伴随算子（T_j）* 的相应证明与上述证明类似，只需做少许修改。首先，就引理 4.9 中的 L^2 有界性而言，该引理中的估计（61）必须替换为（62）。其次，核对 x-和 y-的依赖关系互换。这意味着需要进行以下替换：

$$\begin{aligned}&\varphi(x,\xi)\longrightarrow x,\\ &y\longrightarrow\varphi(y,\xi),\\ &c_Q\longrightarrow\varphi(c_Q,\xi).\end{aligned}$$

这意味着应使用（52）而非（51），并且在对y-变量应用 β 导数时，必须考虑两个自变量中的 y-依赖关系。除此之外，证明保持不变。□

5. 傅里叶积分算子估计

本节致力于研究各种函数空间上傅里叶积分算子的估计。首先，我们将展示一个全局 $h^p\to L^p$ 结果，该结果适用于振幅属于$S^m_{\rho,\,\delta}$且 $\rho\in[0,1]$，$\delta\in[0,1)$ 以及 $0<p<\infty$的 FIOS。随后，在接下来的各节中，我们将这一结果提升到 Triebel-Lizorkin 空间和 Besov-Lipschitz空间。

命题 *5.1.* 设 T_a^φ 是一个傅里叶积分算子，其振幅为 $a\in S^{m_c(p)}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$，其中 $\rho\in[0,1]$，$\delta\in[0,1)$，且 $m_c(p)$ 满足式 *(63)*。设 $\varphi\in\Phi^2$ 是一个秩为 κ 、满足定义 *2.18* 中条件的 *SND* 相位函数。则 $T_a^\varphi:\ h^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)$，当$0<p<\infty$ 时；且 $T_a^\varphi:\ L^\infty(\mathbb{R}^n)\to$ 有界平均振荡空间$(\mathbb{R}^n)$，当 $p=\infty$时。

证明。情形 $\frac{2}{3} < \rho \leq 1$ 可先按 [24], 中概述的方法对傅里叶积分算子进行分解，再对满足$0 \leq \rho \leq \frac{2}{3}$ 的算子应用下文的方法得出。因此，我们只证明这一情形。

证明过程如下。首先证明当 $0 < p < \frac{2n-2n\rho+2\kappa\rho}{2n-n\rho+\kappa\rho}$ 时 $h^p \to L^p$ 对 T_a^φ 的有界性。为此，只需证明 $\|T_a^\varphi \mathfrak{a}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim 1$ 关于 h^p-原子 $\mathfrak{a}$ 一致有界。接着证明 $h^p \to L^p$ 对 $(T_a^\varphi)^*$ 的有界性。最后，利用 T_a^φ. 的 L^2 有界性进行 Riesz-Thorin 插值。

当 $\rho = 1$ 和 $\kappa = 0$ 时的特殊情形将在注 4.11 中讨论。

下文中，设 $\mathfrak{a}(x)$ 是一个支集包含于立方体 Q 的 h^p-原子。此外，令

$$m' = -\big(\kappa + (n-\kappa)(1-\rho)\big)\Big|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big|$$

与之前一样。我们将 $\|T_a^\varphi \mathfrak{a}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ 分成两部分。

$$\|T_a^\varphi \mathfrak{a}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|T_a^\varphi \mathfrak{a}\|_{L^p(Q_\rho^*)} + \|T_a^\varphi \mathfrak{a}\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus Q_\rho^*)}$$

其中， Q_ρ^* 由定义 4.5 给出。

我们先估计 $\|T_a^\varphi \mathfrak{a}\|_{L^p\,(Q_\rho^*)}$ 。我们将这一过程分为两个子步骤 s.

步骤 1 – 当 $k_Q \geq 1$ 且 $0 < \rho \leq \frac{2}{3}$ 时的情形 –

在此步骤中，我们取 $\mathfrak{b} := 2^{-k_Q n\,(1/p+m'/n-1/2)}\,\mathfrak{a}$。我们断言

$$\|\mathfrak{b}\|_{h^{2n/(n-2m')}} \lesssim 1$$

注意到

$$0 < p < \frac{2n-2n\rho+2\kappa\rho}{2n-n\rho+\kappa\rho} \Rightarrow \frac{2n}{n-2m'} < 1.$$

只需证明 $\mathfrak{b}$ 是一个 $h^{2n/(n-2m')}$-原子，即可得到该断言，因为此时 (22) 中的和只含一项。因此，只需证明 $\mathfrak{b}$ 满足定义 2.11 中关于 $h^{2n/(n-2m')}$ 的三个条件。(i) 显然。(ii) 成立，这是因为

$$\begin{aligned}\sup_{x\in Q}|\mathfrak{b}| &= 2^{-k_Q n(1/p+m'/n-1/2)} \sup_{x\in Q}|\mathfrak{a}| \lesssim 2^{-k_Q n(1/p+m'/n-1/2)} 2^{k_Q n/p} \\ &= 2^{-k_Q n(m'/n-1/2)} = 2^{k_Q n/(2n/(n-2m'))}.\end{aligned}$$

(iii) 成立，这是因为 $\frac{2n}{n-2m'} > p$ ，由此可知 $\mathfrak{M}_\mathfrak{b} < \mathfrak{M}_\mathfrak{a}$。

现在，为了完成步骤 1，由霍尔德不等式以及引理 4.6（i）和引理 4.9 中的结论可得

$$\begin{aligned}&\int_{Q_\rho^*} |T_a^\varphi \mathfrak{a}(x)|^p \,\mathrm{d}x \leq |Q_\rho^*|^{1-\frac{p}{2}} \Big(\int_{Q_\rho^*} |T_a^\varphi \mathfrak{a}(x)|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{p}{2}} \lesssim 2^{-k_Q\rho(n-\kappa)(1-\frac{p}{2})} \|T_a^\varphi \mathfrak{a}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^p \\ &\lesssim 2^{-k_Q\rho(n-\kappa)(1-\frac{p}{2})} \|\mathfrak{a}\|_{h^{2n/(n-2m')}(\mathbb{R}^n)}^p = \|\mathfrak{b}\|_{h^{2n/(n-2m')}(\mathbb{R}^n)}^p \lesssim 1\end{aligned}$$

步骤 2 – 当 $k_Q \le 0$ 或 $\rho = 0$在这种情况下
$Q_\rho^* = 2\sqrt{n}Q$，因此

$$\begin{aligned}\int_{Q_\rho^*} |T_a^\varphi \mathfrak{a}(x)|^p \,\mathrm{d}x &\le |Q_\rho^*|^{1-\frac{p}{2}} \Big(\int_{Q_\rho^*} |T_a^\varphi \mathfrak{a}(x)|^2 \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{p}{2}} \\ &\lesssim 2^{-k_Q n(1-p/2)} \|\mathfrak{a}\|_{L^2}^p \lesssim 2^{-k_Q n(1-p/2)} 2^{nk_Q} 2^{-k_Q p/2} = 1.\end{aligned}$$

步骤 3 – 对 $\|T_a^\varphi \mathfrak{a}\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus Q_\rho^*)}$ 的估计

利用定义 2.1 中引入的 Littlewood–Paley 分割单位，我们可以写成

$$T_a^\varphi = \sum_{j=1}^\infty T_a^\varphi \, \psi_j(D) =: \sum_{j=1}^\infty T_j. \tag{77}$$

现在，为了处理积分 $\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_\rho^*} |T_a^\varphi \mathfrak{a}(x)|^p \,\mathrm{d}x$，使用式 (77) 中的记号，我们注意到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_\rho^*} |T_a^\varphi \mathfrak{a}(x)|^p \,\mathrm{d}x \le & \sum_{j=1}^{\max\{k_Q,0\}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_\rho^*} |T_j \mathfrak{a}(x)|^p \,\mathrm{d}x \\ & + \sum_{j=\max\{k_Q+1,1\}}^\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_\rho^*} |T_j \mathfrak{a}(x)|^p \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

我们利用引理 4.10 和原子 $\mathfrak{a}$ 的性质，得出步骤 3。

步骤 4 – 伴随算子 $(T_a^\varphi)^*$ 的估计
$(T_a^\varphi)^*$ 的 $h^p \to L^p$ 有界性的证明与 T_a^φ本身的证明类似。唯一的区别是，此处使用引理 4.6（ii），而不是（i）。这尤其意味着（T_a^φ）*具有 $h^p \to L^p$ 有界性。

步骤 5 – 与 $L^2(\mathbb{R}^n)$进行插值
现在，我们已知当$0 < p < \frac{2n-2n\rho+2\kappa\rho}{2n-n\rho+\kappa\rho}$ 时， T_a^φ 本身及其伴随算子都从 $h^p(\mathbb{R}^n)$有界映射到 $L^p(\mathbb{R}^n)$，并且还具有 L^2 有界性。因~~此，可以~~运用标准的 Riesz-Thorin 插值论证，得出 T_a^φ 对所有 $0 < p < \infty$ 都从 $h^p(\mathbb{R}^n)$有界映射到 $L^p(\mathbb{R}^n)$，且当 $p = \infty$时从 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$有界映射到 $\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$。□

注 5.2。注意，结合使用命题 5.1 和定理 3.1，也可以将 $h^p \to L^p$ 有界性结果提升为 $h^p \to h^p$ 有界性，详情请参见 [14, 命题 6。2] 。还要注意，该结果也将推出$(T_a^\varphi)^*$ 的有界性，而利用对偶性可得 T_a^φ从$\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$的有界性。

5.1. **与经典型和奇异振幅相关的 Triebel-Lizorkin 估计**。本节陈述并证明具有经典型和奇异振幅的 Fourier 积分算子在 Triebel-Lizorkin 空间上的整体有界性。为此，我们定义 Triebel-Lizorkin 空间的分子表示。与 Hardy 空间的原子表示类似，这种表示可用于证明有界性结果。

定义 5.3 (记号)。 设 $\mathcal{D}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中所有二进立方体的集合，并定义以下集合:

$$(i)\ \mathcal{D}_j := \{Q \in \mathcal{D} : \ell(Q) = 2^{-j}\} \quad (ii)\ \mathcal{D}_+ := \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{D}_j$$

$$(iii)\ \mathcal{D}_j(Q) := \{R \in \mathcal{D}_j : R \subseteq Q\}.$$

注意，对于 $j < \ell(Q)$, $\mathcal{D}_j(Q) = \emptyset$.

我们先定义一个序列空间，它比 Triebel-Lizorkin 空间本身更容易处理。

定义 5.4。 对于复数序列 $b = \{b_Q\}_{Q\in\mathcal{D}}$ 我们定义$\ell(Q)\le 1$

$$g^{s,q}(b)(x) := \Big(\sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{D}_+} \big(2^{k_{\tilde{Q}}(s+n/2)} |b_{\tilde{Q}}| \chi_{\tilde{Q}}(x)\big)^q \Big)^{1/q}.$$

我们称 $b \in f^{s,\ q}_p$ 是

$$\|b\|_{f^s_{p,q}} := \|g^{s,q}(b)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

接下来，取 $\check{\Psi}^{\tilde{Q}}(x) := 2^{-nk_{\tilde{Q}}/2} \check{\Psi}_{k_{\tilde{Q}}}(x - c_{\tilde{Q}})$，其中 $\Psi_{k_{\tilde{Q}}}$（如定义 2.1 中所给）是通常的 Littlewood-Paley 分块。以下引理是 [8,定理 II B]的推论。

引理 5.5. 设 $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$. 对于满足 $\|b\|_{f^s_{p,q}} < \infty$ 的任意复数序列 $b = \{b_{\tilde{Q}}\}_{\tilde{Q}\in\mathcal{D}}$，有

$$f(x) := \sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{D}_+} b_{\tilde{Q}} \check{\Psi}^{\tilde{Q}}(x)$$

属于 $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 并且

$$\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|b\|_{f^s_{p,q}}.$$

证明。 函数 Ψ^Q 满足成为“光滑分子”的条件，也就是说，存在整数 M, N, $K > 0$，使得这些函数满足

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma \check{\Psi}^{\tilde{Q}} \, \mathrm{d}x = 0, & |\gamma| \le N \\ |\partial^\gamma \check{\Psi}^{\tilde{Q}}(x)| \lesssim \dfrac{|\tilde{Q}|^{-1/2-|\gamma|/n}}{1 + l_{\tilde{Q}}^{-1} |x - c_{\tilde{Q}}|^{M+|\gamma|}}, & |\gamma| \le K. \end{cases}$$

其余部分由 [8, 定理 II B]得出。注意， [8, 定理 II B] 的证明很容易修改，以适用于非齐次 Triebel-Lizorkin 空间，详情参见 [9, 第12]章。□

现在我们讨论引理 5.5 的逆命题，即 Triebel-Lizorkin 函数何时能够用分子和所谓的“∞-原子”表示，这里将其记为 $b_{\iota,\ \tilde{Q}}$。

引理 5.6. 假设 $0 < p \le 1$, $p \le q \le \infty$。每个 $f \in F^0_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 都有一个原子分解

$$f(x) = \sum_{\iota=1}^{\infty} \lambda_\iota \sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{D}_+} b_{\iota,\tilde{Q}} \check{\Psi}^{\tilde{Q}}(x), \qquad b_{\iota,\tilde{Q}} \in f^0_{\infty,q},$$

其中 $\{b_{\iota,\tilde{Q}}\}_{\tilde{Q}\in\mathcal{D}_+} =: b_\iota$ 满足

$$\|b_\iota\|_{f^0_{\infty,q}} \le 2^{k_{\tilde{Q}}n/p}.$$

此外

$$\|f\|_{F^0_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \sim \inf_{\{\lambda_\iota\}} \Big(\sum_{\iota=1}^{\infty} |\lambda_\iota|^p\Big)^{1/p}$$

证明。这可通过结合 [8, 定理 II A i] 和 [11, 定理 1]得到。再次注意，这很容易推广到非齐次 Triebel-Lizorkin 空间，详情参见 [9, 第 12] 章。□

接下来，我们定义 Hardy 空间原子的类似物，并将用它来证明我们的傅里叶积分算子的有界性结果。

引理 5.7。 设 $Q\in\mathcal{D}$、 $0<p\le 1$、 $0<q\le\infty$、 $j\ge 1$ 和$b=\{b_{\tilde{Q}}\}_{\tilde{Q}\in\mathcal{D}_+}\in f^0_{\infty,\,q}$ 满足$\|b\|_{f^0_{\infty,\,q}}\le 2^{k_Qn/p}$。定义

$$R_{Q,j}(x) := \sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{D}_j(Q)} b_{\tilde{Q}}\check{\Psi}^{\tilde{Q}}(x). \tag{78}$$

于是，对于 $j<k_{\tilde{Q}}$，$R_{Q,\,j}(x)=0$。此外，对于 $0<p<\infty$,

$$\|R_{Q,j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{k_Qn(1/p-1/2)}.$$

证明。 我们首先声称

$$|b_{\tilde{Q}}| \le 2^{k_Qn/p-nk_{\tilde{Q}}/2}. \tag{79}$$

事实上，利用 $b\in f^0_{\infty,\,q}$ 我们有

$$2^{nk_{\tilde{Q}}/2}|b_{\tilde{Q}}|\chi_{\tilde{Q}}(x) \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{D}_+}\left(2^{nk_{\tilde{Q}}/2}\,|b_{\tilde{Q}}|\,\chi_{\tilde{Q}}(x)\right)^q\Big)^{1/q} = \|b\|_{f^0_{\infty,q}} \le 2^{k_Qn/p}.$$

现在对左侧的 x 取上确界，即得所述结论。

由引理 5.5 可得

$$\|R_{Q,j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|R_{Q,j}\|_{F^0_{2,2}} \lesssim \Big\|\Big(\sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{D}_j(Q)}\Big(2^{nk_{\tilde{Q}}/2}\,|b_{\tilde{Q}}|\,\chi_{\tilde{Q}}(x)\Big)^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim 2^{k_Qn/p}\Big\|\Big(\sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{D}_j(Q)}\chi_{\tilde{Q}}(x)^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 2^{k_Qn/p}\|\chi_Q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 2^{k_Qn(1/p-1/2)}$$

□

现在我们开始讨论傅里叶积分算子到 Triebel-Lizorkin 空间的提升结果。为此，我们需要对 $R_{Q,\,j}$引入一个单位分解。我们分别估计各个部分。第一个估计见引理 5.8。

引理 5.8。 假设 $0<p<\frac{2n-2n\rho+2\kappa\rho}{2n-n\rho+\kappa\rho}$ 且 ~~$q\ge p$~~。令 $a(x,\xi)\in S^{m_c(p)\,\rho,\,\delta}(\mathbb{R}^n)$的支集位于原点某邻域之外，并且 $\varphi\in\Phi^2$ 是秩为 κ 的强非退化 。那么

$$\|T^\varphi_a\psi_j(D)\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 2\sqrt{n}Q}R_{Q,j}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{n(k_Q-j)}. \tag{80}$$

对于 $j\ge k_Q$。

证明。 我们提出两个断言：对于 N_1 和 N_2 正整数

$$|\check{\Psi}^{\tilde{Q}}(y)| \lesssim 2^{-nk_{\tilde{Q}}/2}2^{jn-jN_1}|y-c_Q|^{-N_1} \tag{81}$$

$$|\check{\Psi}_j(x-y)| \lesssim \frac{2^{jn+jN_2}|y-c_Q|^{N_2}}{\langle 2^j(x-c_Q)\rangle^{N_2}}, \qquad y \in \mathbb{R}^n \setminus 2\sqrt{n}Q \tag{82}$$

我们证明（81）。注意到

$$|y-c_Q| \le |y-c_{\tilde{Q}}| + |c_{\tilde{Q}}-c_Q| \le |y-c_{\tilde{Q}}| + \sqrt{n}l_Q \le |y-c_{\tilde{Q}}| + \frac{1}{2}|y-c_Q|$$

so

$$|\check{\Psi}^{\tilde{Q}}(y)| = 2^{-nk_{\tilde{Q}}/2}|\check{\Psi}_j(x-c_{\tilde{Q}})| \lesssim \frac{2^{-nk_{\tilde{Q}}/2}2^{jn-jN_1}}{|y-c_{\tilde{Q}}|^{N_1}} \lesssim \frac{2^{-nk_{\tilde{Q}}/2}2^{jn-jN_1}}{|y-c_Q|^{N_1}}$$

接下来证明（82）。由 Peetre不等式可得

$$\langle 2^j(x-y)\rangle^{-1} = \langle 2^j(x-c_Q)+2^j(c_Q-y)\rangle^{-1} \le \langle 2^j(x-c_Q)\rangle^{-1}(1+2^j|y-c_Q|)$$
$$\lesssim \langle 2^j(x-c_Q)\rangle^{-1}2^j|y-c_Q|(2^{k_Q-j}+1) \lesssim \langle 2^j(x-c_Q)\rangle^{-1}2^j|y-c_Q|$$

因此我们有

$$|\check{\Psi}_j(x-y)| \lesssim \frac{2^{jn}}{\langle 2^j(x-y)\rangle^{N_2}} \lesssim \frac{2^{jn+jN_2}|y-c_Q|^{N_2}}{\langle 2^j(x-c_Q)\rangle^{N_2}},$$

这就是（82）。

现在利用命题 5.1、（81）、（82）和（79），可得

$$\|T_j\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 2\sqrt{n}Q}R_{Q,j}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \lesssim \|\Psi_j(D)\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 2\sqrt{n}Q}R_{Q,j}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p$$
$$\le \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n\setminus 2\sqrt{n}Q}|\check{\Psi}_j(x-y)|\sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{D}_j(Q)}|b_{\tilde{Q}}|\,|\check{\Psi}^{\tilde{Q}}(y)|\,\mathrm{d}y\Big)^p\,\mathrm{d}x$$
$$= 2^{jp(N_2-N_1+2n)}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n\setminus 2\sqrt{n}Q}\sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{D}_j(Q)}|b_{\tilde{Q}}|2^{-nk_{\tilde{Q}}/2}\frac{|y-c_Q|^{N_2-N_1}}{\langle 2^j(x-c_Q)\rangle^{N_2}}\,\mathrm{d}y\Big)^p\,\mathrm{d}x$$
$$\lesssim 2^{jp(N_2-N_1+2n)}\Big(\sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{D}_j(Q)}|b_{\tilde{Q}}|2^{-nk_{\tilde{Q}}/2}\Big)^p\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n\setminus 2\sqrt{n}Q}\frac{|y-c_Q|^{N_2-N_1}}{\langle 2^j(x-c_Q)\rangle^{N_2}}\,\mathrm{d}y\Big)^p\,\mathrm{d}x$$
$$\lesssim 2^{jp(N_2-N_1+2n)-jn}2^{-k_Qp(n+N_2-N_1)}\Big(\sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{D}_j(Q)}2^{k_Qn/p-k_{\tilde{Q}}n}\Big)^p$$
$$\lesssim 2^{jp(N_2-N_1+2n)-jn}2^{-k_Qp(n+N_2-N_1)}2^{np(j-k_Q)}2^{-jpn}2^{k_Qn} = 2^{-n(j-k_Q)}$$

对于 $N_2 > n/p$ 和 $N_1 = n+N_2+1$，因为 $Q \in \mathcal{D}_j(Q)$ 中有 $O\big(2^{n(j-k_Q)}\big)$ 个元素。□

引理*5.9.* 设 $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$，且 T^φ_a是一个振荡积分算子，从 $F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$ 到 $F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$ 有界。那么，对于 $\sigma(x,\xi) \in S^{m-\varepsilon}_{\rho\,\delta}(\mathbb{R}^n)$，$T^\varphi_\sigma$从 $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 到$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 有界，其中 $\varepsilon > 0$ 任意。

证明。 利用嵌入 (6)、等式 (5)，以及 $(1-\Delta)^{-\varepsilon/4}$是从 $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 到 $F^{s+\varepsilon/2}_{p\,q}(\mathbb{R}^n)$ 的同构这一事实，可得

$$\|T^\varphi_\sigma f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|T^\varphi_\sigma(1-\Delta)^{\varepsilon/2}(1-\Delta)^{-\varepsilon/2}f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim \|T_\sigma^\varphi (1-\Delta)^{\varepsilon/2}(1-\Delta)^{-\varepsilon/2} f\|_{F_{p,p}^{s+\varepsilon/2}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|(1-\Delta)^{-\varepsilon/2} f\|_{F_{p,p}^{s+\varepsilon/2}(\mathbb{R}^n)}$$
$$\lesssim \|(1-\Delta)^{-\varepsilon/2} f\|_{F_{p,q}^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} \simeq \|f\|_{F_{p,q}^{s}(\mathbb{R}^n)}.$$

□

命题 *5.10.* 假设 $0 < p < \frac{2n-2n\rho+2\kappa\rho}{2n-n\rho+\kappa\rho}$ 和 $q \geq p$。设 $a(x,\xi) \in S^{m}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 的支集位于原点某个邻域之外，并且对所有 $(x,\xi) \in$ 支撑 a，$\varphi \in \Phi^2$ 均为秩为 κ 的强非退化算子。那么傅里叶积分算子 T_a^φ 是从 $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ 到 $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子。

证明。注意，对于 $\frac{2}{3} < \rho \leq 1$，必须根据 [24]，中的分解修改证明，之后即可采用与 $0 < \rho \leq \frac{2}{3}$ 情形相同的方法。因此，我们仅证明 $0 < \rho \leq \frac{2}{3}$ 的情形，这是本文的新贡献；至于 $\rho > \frac{2}{3}$ 的情形，详细证明留给感兴趣的读者。

注意，只需证明 $s = 0$ 的结果；根据包含关系 $F_{p,p}^0 \hookrightarrow F_{p,q}^0$，只需证明 T_a^φ 从 $F_{p,q}^0(\mathbb{R}^n)$ 到 $F_{p,p}^0(\mathbb{R}^n)$. 有界。

将一个 Littlewood-Paley 分块 $\psi_j(D)$ 与 T_a^φ 复合，并应用定理 3.1。由此得到

$$\psi_j(D) T_a^\varphi f(x) = T_a^\varphi \psi_j(\nabla_x \varphi(x,D)) f(x) + \sum_{\alpha \leq M} 2^{-j\varepsilon} Rf(x),$$

其中，$\varepsilon > 0$ 源自定理 3.1，而 R 是一个衰减更快的算子，因此由引理5.9可得

$$\Big\| \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\varepsilon} |Rf(x)| \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \sim \|Rf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{F_{p,2}^{-(1-\max\{\delta,1/2\}-\varepsilon)}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{F_{p,q}^0(\mathbb{R}^n)}.$$

因此，从现在起我们只需考虑第一项的 $F_{p,q}^0 \to L^p(\ell^q)$ 有界性。

设 $\mathbf{t}(\xi) = \nabla_x \varphi(x,\xi)$ 和 $\eta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是微分同胚，满足 $\eta(y) \cdot \mathbf{t}^{-1}(\xi) = y \cdot \xi$。则有

$$T_a^\varphi \psi_j(\nabla_x \varphi(x,D)) f(x) = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\varphi(x,\xi) - iy\cdot\xi}\, \psi_j(\mathbf{t}(\xi))\, a(x,\xi) f(y)\, \mathrm{d}y\, đ\xi$$
$$= \frac{1}{|\det(\nabla t)|} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\varphi(x,\mathbf{t}^{-1}(\xi)) - iy\cdot t^{-1}(\xi)}\, \psi_j(\xi)\, a(x,\mathbf{t}^{-1}(\xi)) f(y)\, \mathrm{d}y\, đ\xi$$
$$= \frac{|\det(\nabla \eta)|}{|\det(\nabla t)|} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\varphi(x,\mathbf{t}^{-1}(\xi)) - iy\cdot\xi}\, \psi_j(\xi)\, a(x,\mathbf{t}^{-1}(\xi)) f(\eta(y))\, \mathrm{d}y\, đ\xi$$
$$=: T_j(f \circ \eta)(x)$$

注意，由定理 2.9，从现在起只需考虑 $T_j f$。

根据引理 5.6，$f \in F_{p,q}^0$ 有一个原子分解

$$f(x) = \sum_{\iota=1}^{\infty} \lambda_\iota \sum_{\tilde{Q} \in \mathcal{D}_+} b_{\iota,\tilde{Q}}\, \check{\Psi}^{\tilde{Q}}(x), \qquad b_{\iota,\tilde{Q}} \in f_{p,q}^0 \cap f_{\infty,q}^0,$$

使得

$$\|f\|_{F^0_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \sim \inf_{\{\lambda_\iota\}} \Big(\sum_{\iota=1}^{\infty} |\lambda_\iota|^p\Big)^{1/p}.$$

由于 $\operatorname{supp}\ \psi_j \subset \operatorname{supp}\ \Psi^{\tilde{Q}}$ 因此只需考虑 $\tilde{Q} \in \mathcal{D}_j$，于是

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty} |T_j f|^p\Big)^{1/p}\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\Big|\sum_{\iota=1}^{\infty}\lambda_\iota T_j \sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{D}_j} b_{\iota,\tilde{Q}}\,\check{\Psi}^{\tilde{Q}}(x)\Big|^p\Big)^{1/p}\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim \Big(\sum_{\iota=1}^{\infty}|\lambda_\iota|^p \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{\infty}\Big|T_j\sum_{Q\in\mathcal{D}_j} b_{\iota,\tilde{Q}}\,\check{\Psi}^{\tilde{Q}}(x)\Big|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p}\\
&\lesssim \Big(\sum_{\iota=1}^{\infty}|\lambda_\iota|^p\Big)^{1/p}\sup_{\iota\in\mathbb{Z}_{>0}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\Big\|T_j\sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{D}_j} b_{\iota,\tilde{Q}}\,\check{\Psi}^{\tilde{Q}}(x)\Big\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/p}
\end{aligned}$$

因此，只需证明可以得到如下形式的表达式

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|T_j R_{Q,j}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim 1 \tag{83}$$

对 $Q \in \mathcal{D}$ 一致成立，其中

$$R_{Q,j}(x) := \sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{D}_j(Q)} b_{\tilde{Q}}\,\check{\Psi}^{\tilde{Q}}(x).$$

（回顾引理 5.7，$R_{Q,\ j}(x)\ = 0$ 对 $\ j < k_{\tilde{Q}}$ 成立。）

要证明 (83)，我们需要证明以下三个估计：

$$\sum_{j=\max\{1,k_Q\}}^{\infty}\|T_j R_{Q,j}\|^p_{L^p(Q^*_\rho)} \lesssim 1, \tag{84}$$

$$\sum_{j=\max\{1,k_Q\}}^{\infty}\|T_j \chi_{2\sqrt{n}Q} R_{Q,j}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n\setminus Q^*_\rho)} \lesssim 1, \tag{85}$$

$$\sum_{j=\max\{1,k_Q\}}^{\infty}\|T_j \chi_{\mathbb{R}^n\setminus 2\sqrt{n}Q} R_{Q,j}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n\setminus Q^*_\rho)} \lesssim 1, \tag{86}$$

步骤 1 – 证明 (84) 在 $k_Q \geq 1$ and $0 < \rho \leq 1$ 时成立。
利用引理 5.7 和定理 2.19，我们得到

$$\begin{aligned}
&\|T_j R_{Q,j}\|_{L^p(Q^*_\rho)} \leq |Q^*_\rho|^{1/p-1/2}\|T_j R_{Q,j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim 2^{-k_Q(n-\kappa)\rho(1/p-1/2)}2^{-j(\kappa+(n-\kappa)(1-\rho))(1/p-1/2)}\|R_{Q,j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim 2^{k_Q(\kappa+(n-\kappa)(1-\rho))(1/p-1/2)}2^{-j(\kappa+(n-\kappa)(1-\rho))(1/p-1/2)}
\end{aligned}$$

因此，(84) 式的左端有如下界

$$\sum_{j=\max\{1,k_Q\}}^{\infty} 2^{k_Q(\kappa+(n-\kappa)(1-\rho))(1-p/2)}2^{-j(\kappa+(n-\kappa)(1-\rho))(1-p/2)} \lesssim 1.$$

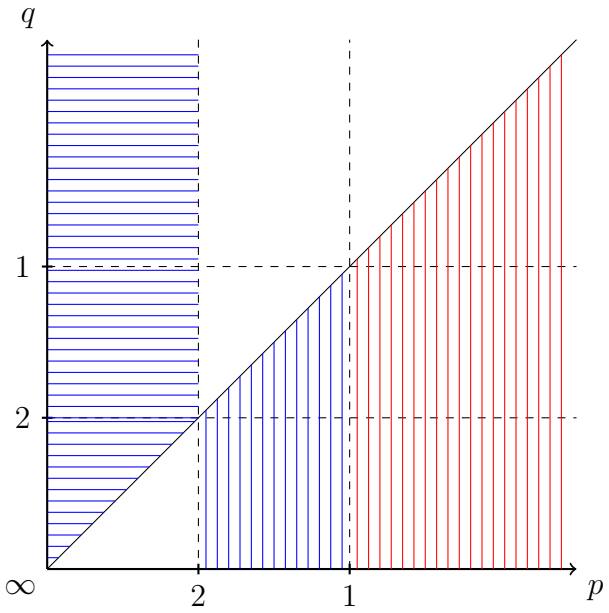

图6. 具有相应临界衰减的傅里叶积分算子的 Triebel-Lizorkin有界性。蓝色水平线表示定理 2.21。蓝色垂直线表示在 $p > 2$ 情形下通过对偶论证得到的有界性结果。红色垂直线表示命题 5.10 与蓝色垂直区域进行插值所得到的结果。

步骤 2 – 当 $k_Q \le 0$ 或 $\rho = 0$ 时，证明 (84)。
在这种情况下 $Q_\rho^* = 2\sqrt{n}Q$。再次利用定理 2.19，我们得到

$$\begin{aligned}&\|T_j R_{Q,j}\|_{L^p(Q_\rho^*)} \le |Q|^{1/p-1/2}\|T_j R_{Q,j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim 2^{-k_Q n(1/p-1/2)}2^{-j(\kappa+(n-\kappa)(1-\rho))(1/p-1/2)}\|R_{Q,j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{-j(\kappa+(n-\kappa)(1-\rho))(1/p-1/2)}\end{aligned}$$

因此，(84) 的左端有界于

$$\sum_{j=\max\{1,k_Q\}}^{\infty} 2^{-j(\kappa+(n-\kappa)(1-\rho))(1/p-1/2)} \lesssim 1$$

步骤 3 – 证明 (85) 和 (86)
(85) 可由引理 4.10 和引理 5.7 直接推出。(86) 可由引理 5.8 立即推出。至此证明完成。□

现在，我们已经具备了将 [19, 推论 3.2]推广所需的全部工具。

定理 5.11。设 $1 \le \kappa \le n-1$, $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \delta < 1$ 和 $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$其中

$$m = -\big(\kappa + (n-\kappa)(1-\rho)\big)\Big|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big| - n\max\left\{0, \frac{\delta-\rho}{2}\right\}.$$

还假设 $\varphi(x,\xi) \in \Phi^2$在 $a(x,\xi)$ 的支集上是强非退化的，且关于 ξ 是一次正齐次的，并且在 $a(x,\xi)$的支集上秩为 κ 。若 $s \in \mathbb{R}$且以下任一情形成立

(i) $2 < p < \infty$ 当 $0 < q \le p$
时，~~(ii)~~ $\frac{n}{n+1} < p < 2$ 当 $p \le q$ 时，
(iii) $p = q = 2$,

那么， T_a^φ从 $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 到 $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$是有界的。

（ p 和 q 取值范围如**图6**所示。）

证明。 与之前一样，我们只讨论 $0 \le \rho \le \frac{2}{3}$ 的情形，因为$\frac{2}{3} < \rho \le 1$ 对应的部分可按照 [24]中的分解，以类似方式处理。

我们将算子分为低频部分和高频部分。低频部分的结果由定理 2.20 得出，因此从现在起我们只考虑高频部分。

还需注意，(iii)的内容已包含在定理 2.19 中。因此从现在起，我们只需证明(i)和(ii)。

我们按照 p 和 q的不同取值范围，将证明分成几部分；这两部分分别对应**图6**中的蓝色区域和红色区域。

第一部分 – 当 $p > 2$ 且 $p \ge q > 0$W 时的证明

我们使用 T h定理 3.1 来写出

$$\psi_j(D)T_a^\varphi f(x) = T_a^\varphi \psi_j(\nabla_x\varphi(x,D))f(x) + Rf(x),$$

根据引理5.9，算子 R 是有界的。因此，从现在起我们只考虑第一项。记 $T_j := T_a^\varphi \psi_j(\nabla_x\varphi(x,\ D))$。

因此，我们可以将定理 2.21 应用于 $\mathcal{E}_{\tilde{Q}} := \alpha_n Q_\rho^*$（适当选取 α_n，从而得到该定理中的 $\Gamma \ge 1$）、 $b := \kappa + (n-\kappa)(1-\rho)$ 以及 $S_j := T_j(1-\Delta)^{-b/2p}$，以证明所需结果。注意， T_a^φ的 $h^p \to L^p$ 有界性（命题 5.1）和 L^2 有界性（定理 2.19）分别给出（28）和（29）。

我们有，对于 $0 < \rho \le 1$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_\rho^*} |K_j(x,y)|\,\mathrm{d}y \\
&\lesssim \sum_{\nu=1}^{\mathscr{N}_j} \Big\| \frac{1}{g_j^\nu(x,\cdot)^N} \Big\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)} \|g_j^\nu(x,\cdot)^N\, K_j^\nu(x,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus Q_\rho^*)} \\
&\lesssim \sum_{\ell=0}^{6N} 2^{(j-k_Q)\ell/2} 2^{-L(j-k_Q)/2}\, 2^{-jn(1/p-1)} 2^{kn(1/p-1)} \lesssim 2^{(j-k_Q)(3N-L/2)}\, 2^{(k-j)n(1/p-1)}
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式来自第二次二进分解（如第4节所述）和 Hölder 不等式，而第二个不等式则可通过与（75）中类似的论证得到。

定理 2.21 现在给出

$$\begin{aligned}
&\Big\| \Big(\sum_{j=0}^\infty 2^{jbq/p} |\Psi_j(D) T_j f_j|^q \Big)^{1/q} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \Big\| \Big(\sum_{j=0}^\infty 2^{jbq/p} |\Psi_j(D) S_j f_j|^q \Big)^{1/q} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \Big(\sum_{j=0}^\infty \|f_j\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

因此 $S_j\colon\ B^0_{p,p}\to F^{b/p}_{p\,q,}$这立即意味着 $T_j\colon\ B^{b/p}_{p,p}\to F^{b/p}_{p\,q,}$。现在，根据以下事实：$F^0_{p,q}\hookrightarrow F^0_{p,p}=B^0_{p,p}$，以及利用贝塞尔势的微积分和定理 3.1，即可得出该结论。

第 2 部分——当 $1<p<2$ 和 $p\le q$ 时的证明
利用 (27)，可以推导出一个与 (68) 类似的估计，用于 T^φ_a 的伴随算子的核；利用该估计，我们还可以得到 $(T^\varphi_a)^*$ 的核的估计 (30)。

第 3 部分——当 $0<p<1$，$p\le q\le\infty$根据命题 5.10，可得到 $0<p<\frac{2n-2n\rho+2\kappa\rho}{2n-n\rho+\kappa\rho}$ 和 $q\ge p$ 时的结果。

第 3.1 部分——当 $0<p\le q<1$ 时的证明
In 在此情形下，利用 Riesz-Thorin 插值并取 $F^s_{p,\ p}=B^s_{p,\ p,}$ 即可得到该结果 .

第 3.2 部分——当 $0<p<1\le q\le\infty$结合上文**第 2 部分**中的 Riesz-Thorin 插值，可得所需结论。

现在注意到 $(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}T^\varphi_a(1-\Delta)^{-\frac{s}{2}}$是一个类似的算子，它对应于振幅 $S^{m_{c(p)}}(\mathbb{R}^n)$ 和相位 φ，因此从 $F^0_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 到自身有界。因此，利用算子 $(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}$是从 $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 到 $F^0_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 的同构这一事实（其中 $0<\bar{p}\le\infty$），即可得到所需结论。□

5.2. **与禁戒振幅相关的 Triebel-Lizorkin 估计**。 众所周知，振幅属于 $S^m_{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 的傅里叶积分算子并非L^2-有界。然而，可以证明，对于 $s>0$，这些算子在$H^s(\mathbb{R}^n)$ 意义下是 Sobolev 有界的（见 [3]）；伪微分情形则可追溯至 E. Stein 和独立开展相关工作的 Y. Meyer。本节陈述并证明两个关于振幅属于 $S^m_{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 的傅里叶积分算子在 Triebel-Lizorkin 空间中的有界性结果，以及更差的情形 $S^m_{0,1}(\mathbb{R}^n)$；这将是下述定理的内容。

定理 5.12。 设 $n\ge1$ 并假设 $r\in[1,2]$、$r<p<\infty$、$r<q\le\infty$、$_n$以及 $\varphi\in\Phi^2$。那么，如果 $a\in S^{\bar{r}}_{0\,1,}(\mathbb{R}^n)$，且对于 $q<\infty$有 $s>n(\frac{1}{\text{最小值}\{1,p,q\}}-1)$，并且当 $q=\infty$ 时 $s>\frac{n}{p}$，则 傅里叶积分算子 T^φ_a从 $F^s_{p,\ q}(\mathbb{R}^n)\to F^s_{p,\ q}(\mathbb{R}^n)$到.....是有界的。

证明。这里我们使用相位的约化，将其化为 $x\cdot\xi+\theta(x,\xi)$ 的形式，其中 $\theta\in\Phi^1$。然后注意到，对于 $a(x,\xi)\in S^{\bar{-n}}_{0\,1}$，$(\mathbb{R}^n)$ 有 $a(x,\overline{\xi})e^{i\theta(x,\xi)}\in_{-n}S_{0}{}^{r}$，1 $(\mathbb{R}^n)$。因此，我们可以将研究 T^φ_a 在 F^s_{p}、$_q(\mathbb{R}^n)_{-n}$ 上的有界性，约化为研究具有符号 $a(x,\xi)\in S_{0}{}^{r}$、1 $(\mathbb{R}^n)$ 的伪微分算子 $a(x,D)$。首先，让我们将该算子改写为 —

$$T^\varphi_a f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}a(x,\xi)\,e^{ix\cdot\xi}\,\widehat{f}(\xi)\,đ\xi.$$

现在，我们将 $a(x,\ \xi)$ 分解为

$$a(x,\xi)=\sum_{k,l}a_{k,l}(x,\xi)$$

其中

$$a_{k,l}(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\eta}\,\psi_{k+l}(\eta)\,\psi_k(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\eta}\,a(y,\xi)\,\mathrm{d}y\,\text{đ}\eta \tag{87}$$
$$= \psi_{k+l}^{\vee} * (a(\cdot,\xi)\psi_k(\xi)), \quad k \geq 0, l > 0,$$

and

$$a_{k,0}(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\eta}\big(\psi_0 + \cdots + \psi_k\big)(\eta)\,\psi_k(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\eta}\,a(y,\xi)\,\mathrm{d}y\,\text{đ}\eta, \quad k \geq 0.$$

注意，$a_{k,\,l}(x,\ \xi)$ 的 ξ-支集包含于 $|\xi| \sim 2^{l+k}$。

现在我们断言，对于所有 α

$$|\partial_\xi^\alpha a_{k,l}(x,\xi)| \lesssim 2^{-lN} 2^{\frac{-kn}{r}}, \tag{88}$$

对于 $N > 0$。

为证明这一点，我们先考虑 $l = 0$ 的情形。利用杨氏卷积不等式可得

$$\begin{aligned}
&\|\partial_\xi^\alpha a_{k,0}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|\partial_\xi^\alpha(\mathcal{F}\big(\psi_0 + \cdots + \psi_k\big)) * (\psi_k(\xi)\,a(\cdot,\xi))(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|\mathcal{F}\big(\psi_0 + \cdots + \psi_k\big)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,\|\partial_\xi^\alpha(\psi_k(\xi)\,a(x,\xi))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|\partial_\xi^\alpha(\psi_k(\xi)\,a(x,\xi))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{\frac{-kn}{r}}.
\end{aligned}$$

令 $\psi_k a := a_k$，由于 $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_k(x,\ \xi)| \lesssim 2^{k(\frac{-n}{r}+|\beta|)}$，因此对任意 $M > 0$，有

$$\begin{aligned}
&|\partial_\xi^\alpha a_{k,l}(x,\xi)| = |(\mathcal{F}\psi_{k+l}) * \partial_\xi^\alpha a_k(\cdot,\xi))(x)| \\
&= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} |\eta|^{-2M}\,\psi_{k+l}(\eta)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\eta|^{2M}\partial_\xi^\alpha a_k(y,\xi)\,e^{-iy\cdot\eta}\,\mathrm{d}y\Big)\,e^{ix\cdot\eta}\,\mathrm{d}\eta\Big| \\
&= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} |\eta|^{-2M}\psi_{k+l}(\eta)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_y^M\partial_\xi^\alpha a_k(y,\xi)\,e^{-iy\cdot\eta}\,\mathrm{d}y\Big)\,e^{ix\cdot\eta}\,\mathrm{d}\eta\Big| \\
&= 2^{-2M(k+l)}2^{(k+l)n}\Big|\int_{\mathbb{R}^n} |\eta|^{-2M}\psi_1(\eta)\,\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_y^M\partial_\xi^\alpha a_k(y,\xi)\,e^{-i2^{k+l}y\cdot\eta}\,\mathrm{d}y\Big)\,e^{i2^{k+l}x\cdot\eta}\,\mathrm{d}\eta\Big| \\
&= 2^{-2M(k+l)}2^{(k+l)n}\Big|\int_{\mathbb{R}^n} \theta^\vee(2^{k+l}y)\,\Delta_y^M\partial_\xi^\alpha a_k(x-y,\xi)\,\mathrm{d}y\Big| \\
&= 2^{-2M(k+l)}2^{(k+l)n}\sup_y|\Delta_y^M\partial_\xi^\alpha a_k(y,\xi)|\int_{\mathbb{R}^n}|\theta^\vee(2^{k+l}y)|\,\mathrm{d}y \\
&= 2^{-2M(k+l)}2^{(k+l)n}2^{-(k+l)n}2^{2Mk}2^{\frac{-kn}{r}} \lesssim 2^{-2Ml}2^{\frac{-kn}{r}},
\end{aligned}$$

其中 $\theta(y) := |y|^{-2M}\psi_1(y) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$。因此，取 $N := 2M$ 即可证明（88）。

在 a_k 的支集上，l。

现在令

$$K_{k,l}(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} a_{k,l}(x,\xi)\,e^{i\langle y,\xi\rangle}d\xi = \check{a}_{k,l}(x,y),$$

其中，$\check{a}_k$ here 表示 $a_k(x,\ \xi)$ 关于 ξ 的逆傅里叶变换。注意到

$$\begin{aligned}|a_{k,l}(x,D)f_k(x)|^r &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} K_{k,l}(x,y)\, f_k(x-y)\,\mathrm{d}y\Big|^r \\ &= \Big|\int \mathbb{R}^n K_{k,l}(x,y)\,\sigma(y)\frac{1}{\sigma(y)}\, f_k(x-y)\,\mathrm{d}y\Big|^r,\end{aligned}$$

取权函数 $\sigma(y)$，其具体形式稍后确定。因此，由霍尔德不等式和 $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$ 可得

$$|a_{k,l}(x,D)f_k(x)|^r \le \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |K_{k,l}(x,y)|^{r'}\,|\sigma(y)|^{r'}\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{r}{r'}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f_k(x-y)|^r}{|\sigma(y)|^r}\,\mathrm{d}y\Big). \tag{89}$$

现在，对于一个 $\lambda>\frac{n}{2}$，我们定义 σ 为

$$\sigma(y)=\begin{cases}1, & |y|\le 1;\\ |y|^{\lambda}, & |y|>1.\end{cases}$$

由 Hausdorff–Young定理及估计 (88)，先对 $\alpha=0$ 再对 $|\alpha|=\lambda$，可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|K_{k,l}(x,y)|^{r'}\,\mathrm{d}y \le \int_{\mathbb{R}^n}|a_{k,l}(x,\xi)|^r d\xi \lesssim \int_{|\xi|\sim 2^{k+l}} 2^{-rlN}2^{-nk}d\xi \lesssim 2^{l(n-rN)},$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^n}|K_{k,l}(x,y)|^{r'}\,|y|^{r'\lambda}\,\mathrm{d}y \lesssim \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla_\xi^\lambda a_{k,l}(x,\xi)|^r\,d\xi \lesssim \int\limits_{|\xi|\sim 2^{k+l}} 2^{-rNl}2^{-kn}\,d\xi \lesssim 2^{l(\frac{n}{2}-rN)}.$$

因此，将积分拆分为 $|y|\le 1$ 和 $|y|>1$，可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|K_{k,l}(x,y)|^r\,|\sigma(y)|^r\,\mathrm{d}y \lesssim 2^{l(n-rN)}.$$

此外，我们还有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f_k(x-y)|^r\,\mathrm{d}y}{|\sigma(y)|^r} \lesssim \big(\mathcal{M}_r f_k(x)\big)^r$$

其中常数仅依赖于维数 n。因此，由（89）可得

$$|a_{k,l}(x,D)f_k(x)|^r \lesssim 2^{l(n-rN)}\big(\mathcal{M}_r f_k(x)\big)^r \tag{90}$$

由此我们得到逐点估计

$$|a_{k,l}(x,D)f_k(x)| \lesssim 2^{l(n-rN)/r}\mathcal{M}_r f_k(x)$$

现在回想一下，在证明开始时，我们将算子 T_a^φ 化简为 $a(\cdot,\ D)$。注意，同样的论证也使我们能够还原原算子，因为仔细考察该论证便会发现

$$T_a^\varphi f_k(x) = a(x,D)f_k(x)$$

因此

$$|T_{a_{k,l}}^\varphi f_k(x)| = |a_{k,l}(x,D)f_k(x)| \lesssim 2^{l(n-rN)/r}\mathcal{M}_r f_k(x). \tag{91}$$

现在取 $h_{k,l}(x)=T_{a_{k,l}}^\varphi f_k(x)$ 和 $g_l(x)=\sum_{k\ge 0}h_{k,l}(x)$ 以及 $u_k=f_k$，根据 Triebel-Lizorkin 范数的定义（定义 2.2），可得

$$\Big\|\{2^{ks}u_k\}_{k=0}^\infty\Big\|_{L^p(l^q)} \lesssim \|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}. \tag{92}$$

因此，对于 $0<p,q<\infty$ 和 $s>n\left(\frac{1}{\min\{p,q,1\}}-1\right)$，利用 (92)、(91) 和引理 2.8，可得

$$\|T_a^{\varphi}f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}=\Big\|\sum_{l\geq 0}g_l\Big\|_{L^p(l^q)}\lesssim\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}. \tag{93}$$

□

下面的结果是对 [3], 中关于正阶 Sobolev 空间上具有禁戒振幅的傅里叶积分算子有界性的推广；而该结果又是对 Meyer 和 Stein 关于上述 Sobolev 空间上具有禁用符号的伪微分算子有界性的未发表结果的推广。

定理 5.13. 设 $n\geq 1$，且 $m=-\kappa\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|$ 和 $a\in S^m_{1,1}(\mathbb{R}^n)$。假设 $0\leq\kappa\leq n-1$，且 $\varphi\in\Phi^2$ 是强非退化 的，并且在 $a(x,\xi)$ 的支集上秩为 κ。若 $s>n\left(\frac{1}{\text{最小值}\{1,p,q\}}-1\right)$、$0<\kappa\leq n-1$，并且以下情况之一成立

(i) $2<p<\infty$ 当 $0<q\leq p$ 时，

(ii) $\frac{n}{n+1}<p<2$ 当 $p\leq q$ 时，

(iii) $p=q=2$,

或者如果 $s>\frac{n}{p}$ 满足 $q=\infty$，那么 傅里叶积分算子 T_a^{φ} 是从 $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\to F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 有界的。

对于 $\kappa=0$ (伪微分算子属于此类)的情形，可以将有界性结果推广到范围 $0<p<\infty$ 和 $0<q\leq\infty$，以及前述 s 的范围。

证明。 注意到 $\mathbf{t}_x(\xi):=\nabla_x\varphi(x,\xi)$ 是一个整体微分同胚。这使我们可以将该算子改写为

$$T_a^{\varphi}f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\varphi(x,\xi)}\,\sigma(x,\mathbf{t}_x(\xi))\,\langle\xi\rangle^m\,\widehat{f}(\xi)\,\text{đ}\xi,$$

其中 $\sigma(x,\xi):=a(x,\mathbf{t}_x^{-1}(\xi))\,\langle\mathbf{t}_x^{-1}(\xi)\rangle^{-m}\in S^0_{1,1}(\mathbb{R}^n)$（这可利用以下事实验证： $a(x,\xi)\in S^m_{1,1}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi\in\Phi^2$ 以及 $|\mathbf{t}_x(\xi)|\sim|\xi|$）。

现在注意，对所有 $r>0$，都有 $S^0_{1,1}(\mathbb{R}^n)\subset C^r_*S^0_{1,1}(\mathbb{R}^n)$。因此，正如 [1, 17] 中对具有禁用符号的伪微分算子所做的那样，只需证明该结论对类 $C^r_*S^0_{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 中的初等振幅成立，其中$r>0$。

根据定义，初等振幅 $\sigma(x,\xi)\in C^r_*S^0_{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 具有如下形式

$$\sum_{k\geq 0}\alpha_k(x)\,\psi_k(\xi)$$

其中 ψ_k 在定义 2.1 中引入，且 $\alpha_k(x)$ 满足

$$|\partial^{\gamma}\alpha_k(x)|\lesssim 2^{k|\gamma|}\qquad\qquad\|\alpha_k(x)\|_{C^r_*(\mathbb{R}^n)}\lesssim 2^{kr} \tag{94}$$

对于 $|\gamma|\geq 0$， C^r_*-范数由定义 2.13 给出。

我们定义

$$\alpha_{k,l}(x) := \psi_{k+l}(D)\alpha_k(x)$$

（注意， α_k 不是 Littlewood-Paley 分块。）于是

$$\sigma(x,\mathbf{t}_x(\xi)) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k(x)\,\psi_k(\nabla_x\varphi(x,\xi)) = \sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0} \alpha_{k,l}(x)\,\psi_k(\nabla_x\varphi(x,\xi)).$$

我们断言，对于 $k\geq 1$ 和 $r>0$

$$\|\alpha_{k,l}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{-rl}. \tag{95}$$

为证明（95），我们注意到（94）的第二部分、关系式（23）以及以下事实

$$\int_{\mathbb{R}^n} 2^{(k+l)n}\,\psi^\vee\left(\frac{y}{2^{-(k+l)}}\right)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n}\psi^\vee(y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

可得（95）由下式推出

$$\begin{aligned}|\alpha_{k,l}(x)| &\lesssim \Big|\int_{\mathbb{R}^n} 2^{(k+l)n}\,\psi^\vee\Big(\frac{y}{2^{-(k+l)}}\Big)\,\big(\alpha_k(x-y)-\alpha_k(x)\big)\,\mathrm{d}y\Big| \\ &\lesssim 2^{-lr}\int_{\mathbb{R}^n}\Big|2^{(k+l)n}\psi^\vee\Big(\frac{y}{2^{-(k+l)}}\Big)\Big|\,\frac{|y|^r}{2^{-(k+l)r}}\,\mathrm{d}y \lesssim 2^{-lr},\end{aligned}$$

对于 $k>0$ 和 $l\geq 0$。对于 $k=l=0$，这是 L^∞ 有界性ψ_0（D）以及（94）中的第一个估计的推论。

现在令

$$F_k(x) := \int_{\mathbb{R}^n}\psi_k(\nabla_x\varphi(x,\xi))\,\langle\xi\rangle^m\; e^{i\varphi(x,\xi)}\,\widehat{f}(\xi)\,\text{đ}\xi,$$

then

$$T_a^\varphi f(x) = \sum_{\substack{k\geq 0\\ l\geq 0}} \alpha_{k,l}(x)\,F_k(x).$$

对于 $k=0$ 时的低频部分，我们只需使用定理 2.20，因此接下来只考虑 $k>0$的情形。

我们断言

$$|\alpha_{k,l}(x)\,F_k(x)| \lesssim 2^{-rl}\mathcal{M}f_k$$

此时，利用定理 3.1，我们得到如下表示

$$F_k(x) = \psi_k(D)T^\varphi_{\langle\xi\rangle^m}f(x) - 2^{-k\varepsilon}\,T^\varphi_{r_k}f(x)$$

with

$$|\partial_\xi^\beta\partial_x^\gamma r_k(x,\xi)| \lesssim \langle\xi\rangle^{m-(1/2-\varepsilon)-|\beta|},$$

其中上述估计关于 k是一致的。

另外，定义

$$F_k^1(x) = \psi_k(D)F(x) \tag{96}$$

$$F_k^2(x) = -2^{-k\varepsilon}\,T^\varphi_{r_k}f(x). \tag{97}$$

我们从 F_k^1 开始。

现在注意，若 χ 是一个在 ψ 的支集上取值为 1 的光滑截断函数，且 $F_k^1(x) = \Psi_k(D) F_k^1(x)$，其中 $\Psi_k(D)$ 是一个加宽的 Littlewood-Paley 算子，那么我们有

$$\begin{aligned}
&|F_k^1(x)| = |\chi_k(D) F_k^1(x)| \\
&= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\xi} \chi_k(\xi)\, \mathrm{đ}\xi\, F_k^1(x-y)\, \mathrm{d}y \Big| \\
&= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \check{\chi}_k(y)\, F_k^1(x-y)\, \mathrm{d}y \Big| \\
&= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \check{\chi}_k(y)\, (1+2^k|y|)^a\, \frac{\Psi_k(D) F_k^1(x-y)}{(1+2^k|y|)^a}\, \mathrm{d}y \Big| \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |\check{\chi}_k(y)|\, (1+2^k|y|)^a\, \mathrm{d}y\ \mathfrak{M}_{a,2^k}(F_k^1)(x) \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |\check{\chi}_k(y)\, |(1+2^k|y|)^a\, \mathrm{d}y\ \mathcal{M}_{p_0}(F_k^1)(x),
\end{aligned}$$

对于 $a \geqq \frac{n}{p_0}$。此时，我们断言，对于任意 $a > 0$，都有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\check{\chi}_k(y)|\, (1+2^k|y|)^a\, \mathrm{d}y \lesssim 1,$$

其中隐常数与 k 无关。

为此，记实数 a 的整数部分为 $[a]$，小数部分为 $\{a\}$。注意，对于满足 $-b + \{a+b\} < -n$ 且 $[a+b]$ 为偶自然数的 $b > 0$，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |\check{\chi}_k(y)|\, (1+2^k|y|)^a\, \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} 2^{-kn} |\check{\chi}_k(2^{-k}z)|\, (1+|z|)^a\, \mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathscr{F}_{\xi\to z}\chi_k(2^k\cdot)|\, (1+|z|)^{a+b}\, (1+|z|)^{-b}\, \mathrm{d}z \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |\mathscr{F}_{\xi\to z}\big\{(1-\Delta)^{[a+b]/2}\chi_k(2^k\cdot)\big\}|\, (1+|z|)^{-b+\{a+b\}}\, \mathrm{d}z \\
&\leq \|(1-\Delta)^{[a+b]/2}\chi_k(2^k\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|z|)^{-b+\{a+b\}}\, \mathrm{d}z \\
&\lesssim 1
\end{aligned}$$

这里利用了 $\chi_k(2^k z)$ 属于施瓦茨类，并且在 z 中具有固定的紧支集。

这表明

$$|\alpha_{k,l}(x) F_k^1(x)| \lesssim 2^{-rl} \mathcal{M}_{p_0} F_k^1(x), \tag{98}$$

对所有 r，p_0，$k > 0$ 和 $l \geq 0$。

现在取 $h_{k,\,l}(x) = \alpha_{k,\,l}(x) F_k^1(x)$ 和 $g_l(x) = \sum_{k\geq 0} h_{k,\,l}(x)$ 以及 $u_k = F_k^1(x)$，由 Triebel-Lizorkin 范数的定义（定义 2.2）和定理 5.11 可得

$$\|\{2^{ks}u_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{L^p(l^q)} \lesssim \|T^{\varphi}_{\langle\xi\rangle^m} f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}, \tag{99}$$

对于该定理中 p 和 q 的取值范围。
然而，如果 $\kappa = 0$，那么利用 [18] 中已证明的、符号属于 $S^m_{1,\,0}(\mathbb{R}^n)$ 的伪微分算子的有界性，就可以得到上述关于 $0 < p < \infty$ 和 $0 < q \le \infty$. 的有界性

因此，利用 (99) 和引理 2.8 可得

$$\Big\| \sum_{l\ge 0} g_l \Big\|_{L^p(l^q)} \lesssim \|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \tag{100}$$

接下来分析 F_k^2 项，我们注意到它是一个振幅属于 $S^{m-(1/2-\varepsilon)}_{1\,1,}(\mathbb{R}^n)$ 的算子。现在对 F_k^2 迭代上述过程，最终可得到一个算子 $T^{\varphi}_{b_k}$，其 $b_k \in S^{-N}_{1\,1,}(\mathbb{R}^n)$ 对任意大的 N 都成立，因此可得

$$T^{\varphi}_{b_k} : F^s_{p,q} \to F^s_{p,q}$$

按照 [14, 定理 6.2 (ii)], 的证明进行，其中只用到了振幅的有限阶导数。还要注意，表示式 (96) 中 2^k 的负幂也有助于产生收敛级数。□

5.3. **Besov-Lipschitz 估计**。本节介绍具有经典型和奇异型振幅的傅里叶积分算子的 Besov-Lipschitz 有界性结果。我们还给出两个关于振幅属于 $S^m_{0,1}(\mathbb{R}^n)$ 和 $S^m_{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 的傅里叶积分算子的 Besov-Lipschitz 有界性结果。

我们还给出一个抽象定理，它允许将 $h^p \to L^p$ 有界性提升为 Besov-Lipschitz 有界性。该结果可应用于一大类振荡积分算子。

定理 5.14。设 $0 < p, q < \infty$, $m \le 0$, $a \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 满足条件，且 a 的支集包含于 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$。假设 φ 是满足(31) 的相位函数定理 3.1。若 T^{φ}_a是 $h^p \to L^p$-有界的，则 T^{φ}_a对所有 $s \in \mathbb{R}$ 都是从 $B^s_{p,q}$ 到其自身的有界算子。

证明。证明见 [14]。 □

定理 *5.15.* 设 $\rho \in [0,1]$, $\delta \in [0,1)$ 和 $0 < q \le \infty$。进一步假设 $\varphi(x,\xi) \in \Phi^2$ 是秩为 κ 的强非退化相位，满足定义 *2.18* 中的条件，且 $a \in S^{m_c(p)}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$，并令 T^{φ}_a 为相应的傅里叶积分算子。则对于所有 $s \in \mathbb{R}$，当 $\frac{n}{n+1} < p < \infty$ 时，T^{φ}_a 是一个从 $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 到 $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子。

证明。设 $\chi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ 的支集包含于 $\{|\xi| \lesssim 1\}$，并记

$$\begin{aligned} T^{\varphi}_a f(x) &:= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\varphi(x,\xi)}\, a(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\,(1-\chi(\xi))\,\mathrm{d}\xi + \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\varphi(x,\xi)}\, a(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\,\chi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= T_{\mathrm{high}} f(x) + T_{\mathrm{low}} f(x). \end{aligned}$$

T_{low} 的有界性由低频结果定理 2.20 得出。T_{high} 的有界性则可由 Besov-Lipschitz 提升定理 5.14 和命题 5.1 立即得到。□

下面两个定理涉及禁戒振幅。不过，这些结果的证明与第 5.2 节中的证明非常接近。因此，我们仅讨论证明之间的主要差异。

定理 5.16。设 $n \geq 1$ 且假设 $r \in [1,2]$、$r < p < \infty$、$r < q \leq \infty$、$_n$和 $\varphi \in \Phi^2$。那么，若 $a \in S^{\bar{}}_{0\,1}{}^{r}{}_{,}(\mathbb{R}^n)$，且 $\bar{s} > n(^{1}$ 最小值$\{1,p,q\}$ $^{-1)}$ 对于 $q < \infty$成立，并且当 $q = \infty$ 时 $s > {}^{n}_{p}$ 成立，则 傅里叶积分算子 T^{φ}_{a}是从 $B^{s}_{p,\ q}(\mathbb{R}^n) \to B^{s}_{p,\ q}(\mathbb{R}^n)$有界的。

证明。这一结果的证明与定理 5.12 的证明主要区别在于需要证明式 (92) 的 Besov-Lipschitz 类比结果。为此，只需使用引理 2.8 中 Besov-Lipschitz 部分即可。□

定理 *5.17*。设 $n \geq 1$ 且假设 $0 \leq \kappa \leq n-1$ 且 ${}^{n}_{n+1} < p < \infty$、$0 < q \leq \infty$，$\varphi \in \Phi^2$ 为强非退化，且在 $a(x,\xi)$ 的支集上，$\mathrm{rank}\,\partial^2_{\xi\xi}\varphi(x,\xi) = \kappa$。那么，$m = -\kappa\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$，$s > n\left(\ {}^{-1}\mathit{min}_{\{1,p,q\}} - 1\right)$ 对于 $q < \infty$成立，并且当 $q = \infty$时 $s > {}^{n}_{p}$成立，且 $a \in S^{m}_{1}$*,1(*$\mathbb{R}^n$*)*，傅里叶积分算子 T^{φ}_{a}是从 $B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \to B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$有界的。

证明。此证明与定理 5.13 的证明主要不同之处，在于要证明式（99）的 Besov-Lipschitz 类比结果。为此，只需使用引理 2.8 中 Besov-Lipschitz 部分，之后再用定理 5.15 替代定理 5.11。其余证明保持不变。□

注 5.18。事实上，例如，[26]，若 $-\infty < s_1 < s < s_2 < \infty$、$0 < p < \infty$ 和 $0 < q \leq \infty$、$0 < q_1 \leq \infty$和 $0 < q_2 \leq \infty$和 $s = \theta s_1 + (1-\theta)\ s_2$，那么 $(F^{s_1}_{p,\ q_1}(\mathbb{R}^n)$ $F^{s_2}_{p,\ q_2}(\mathbb{R}^n))_{\theta,\ q} = B^{s}_{p,\ q}(\mathbb{R}^n)$，在实插值的意义下。此外，*Besov* 空间与 q_1 和 q_2 无关，也与 s_1 和 s_2的选取无关。这个事实可用于从 *Triebel-Lizorkin* 结果推出 *Besov-Lipschitz* 有界性结果。

6. 与 Klein-Gordon 方程相关的振荡积分估计

本节将考察相位函数具有如下形式的振荡积分算子的有界性：$\varphi(x,\xi) = \varphi_0(x,\xi) + \varphi_1(x,\xi)$，其中 $\varphi_0(x,\xi) \in \Phi^2$ 和$\varphi_1 \in S^{-1}_{1\,0,}(\mathbb{R}^n)$, 当 $|\xi|$. 足够大时

这类相位函数的一个基本例子是 $x \cdot \xi + \langle\xi\rangle$，它出现在对常系数 Klein-Gordon 方程的研究中。事实上，容易看出，对于 $|\xi| \geq 1$，这个相位函数可以写成 $\varphi_0(x,\xi) + \varphi_1(x,\xi)$，其中$\varphi_0(x,\xi) = x \cdot \xi + |\xi| \in \Phi^2$ 且 $\varphi_1(x,\xi) = \lambda(\xi)$，其中 $\lambda \in S^{-1}_{1\,0,}(\mathbb{R}^n)$。

我们首先讨论振幅为 $S^{m}_{1,1}$ 或 $S^{m}_{0,1}$ 时，Klein-Gordon 方程的禁戒型 Triebel-Lizorkin 估计。以下结果给出了定理 5.12 和定理 5.13 的 Klein-Gordon 方程版本。

命题 6.1. 设 ρ 为 1 或 0。对于非齐次相位函数 $\varphi(x,\xi) = \varphi_0(x,\xi) + \varphi_1(x,\xi)$，定理 5.12 和定理 5.13 的结论（取各自对应的 p、q、s 和 m）同样成立。

证明。这是显然的，因为当 $a \in S^{m}_{\rho,1}(\mathbb{R}^n)$. 时，$e^{i\varphi_1(x,\xi)}a(x,\xi) \in S^{m}_{\rho,1}(\mathbb{R}^n)$。 □

现在我们继续讨论与具有经典振幅的 Klein-Gordon 方程相关的估计。

定理 6.2。 假设以下任一情形成立

(i) $2 < p < \infty$ 当 $0 < q \le p$,

(ii) $\frac{n}{n+1} < p < 2$ 当 $p \le q$,

(iii) $p = q = 2$,

进一步假设 $m = -(n-\rho)\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| - n\max\{0, (\delta-\rho)/2\}$ 且 $0 \le \rho \le 1$ 且 $0 \le \delta < 1$。那么，任何具有以下形式的振荡积分算子

$$T_a f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x,\xi)\, e^{ix\cdot\xi + i\langle\xi\rangle}\, \widehat{f}(\xi)\, đ\xi,$$

其振幅为 $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\,\delta}$，满足以下估计

$$\|T_a f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

证明。 首先，我们将算子分解为低频部分和高频部分， T_{a_L} andT_{a_H} 其中一个振幅紧支撑于 ξ，另一个的频率支集位于集合 $|\xi| \ge 1$中。对于 T_{a_L}，结论由 2.20 得出。对于T_{a_H}，注意到相位函数 $\langle\xi\rangle$ 可写为（当 $|\xi| \ge 1$时） $|\xi| + \lambda(\xi)$，其中 $\lambda \in S^{-1}_{1\,0,}$ $(\mathbb{R}^n)$。

现在，由于 $b(x,\ \xi) := e^{i\lambda(\xi)}\, a(x,\ \xi) \in S^m_{\rho,\,\delta}(\mathbb{R}^n)$，且 $x\cdot\xi + |\xi|$ 的秩等于$n-1$，由定理 5.11 可知，傅里叶积分算子

$$T_{a_H} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} b(x,\xi)\, e^{ix\cdot\xi + |\xi|}\, \widehat{f}(\xi)\, đ\xi,$$

是有界的。定理的证明至此结束。 □

参考文献

[1] G. Bourdaud，L^p 某些非正则伪微分算子的估计，《偏微分方程通讯》，7 (1982)，第 1023–1033 页。[2] P. Brenner，关于 $L_p - L_{p'}$ 波动方程的估计，《数学杂志》，145 (1975)，第 251–254 页。[3] A. J. Castro、A. Israelsson 和 W. Staubach，一般 *Hörmander* 类中振幅的傅里叶积分算子的正则性。（arXiv:2003.12878）。[4] M. Christ 和 A. Seeger，调和分析中向量值算子不等式的必要条件，《伦敦数学学会会刊》（第 3 辑），93 (2006)，第 447–473 页。[5] D. Dos Santos Ferreira 和 W. Staubach，加权与非加权空间上傅里叶积分算子的整体和局部正则性，《美国数学学会回忆录》，229 (2014)，第 xiv+65 页。[6] C. Fefferman，关于球面求和乘子的注记，《以色列数学杂志》，15(1973)，第 44–52 页。[7] C. Fefferman 和 E. M. Stein，一些极大不等式，《美国数学杂志》，93 (1971)，第 107–115 页。[8] M. Frazier 和 B. Jawerth，ϕ变换及其在分布空间中的应用，载于《函数空间与应用》（隆德，1986），《数学讲义》第 1302 卷，施普林格，柏林，1988，第 223–246 页。[9] ，分布空间的离散变换与分解，《泛函分析杂志》，93 (1990)，第 34–170 页。[10] ， ϕ 变换与小波变换在函数空间理论中的应用，载于《小波及其应用》，Jones and Bartlett，波士顿，马萨诸塞州，1992，第 377–417 页。[11] Y.-S. Han、M. Paluszyński 和 G. Weiss，*Triebel-Lizorkin* 空间的一种新原子分解，载于《调和分析与算子理论》（加拉加斯，1994），《当代数学》第 189 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1995，第 235–249 页。[12] L. Hörmander，伪微分算子与次椭圆方程。《奇异积分》（纯数学专题讨论会论文集，第 X 卷），美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，（1967），第 138–183 页。

[13] *L. Hörmander*，傅里叶积分算子 *I*，《数学学报》，*127 (1971)*，第 *79–183* 页。[14] *A. Israelsson*、*S. Rodríguez-López* 和 *W. Staubach*，*Besov-Lipschitz* 与 *Triebel-Lizorkin* 空间中双曲型方程的局部和整体估计。即将发表于《分析与偏微分方程》*2020*，*arXiv:1802.05932v4*。[15] *J. Johnsen*、*S. Munch Hansen* 和 *W. Sickel*，各向异性混合范数 *Lizorkin-Triebel* 空间与微分同胚映射，《函数空间杂志》，*(2014)*，第 *964794* 号文章，*15* 页。[16] *L. V. Kapitanskiĭ*，二阶线性双曲型方程解在 *Besov* 和 *Lizorkin-Triebel* 空间中的范数估计，《列宁格勒斯捷克洛夫数学研究所科学研讨会纪要》，*171 (1989)*，第 *106–162*、*185–186* 页。[17] *Y. Meyer*，非线性偏微分方程解的正则性（据 *J.-M. Bony*），载于《布尔巴基研讨会》，*1979/80* 年卷，《数学讲义》第 *842* 卷，施普林格，柏林—纽约，*1981*，第 *293–302* 页。[18] *L. Päivärinta*，*Hardy-Triebel*空间中的伪微分算子，《分析与应用杂志》，*2 (1983)*，第 *235–242* 页。[19] *M. Pramanik*、*K. M. Rogers* 和 *A. Seeger*，一种 *Calderón-Zygmund*估计及其在广义*Radon*变换和傅里叶积分算子中的应用，《数学研究》，*202 (2011)*，第 *1–15* 页。[20] *Q. J. Qiu*，某些傅里叶积分算子的*Besov*空间有界性，《数学学报（英文版）》，*5 (1985)*，第 *167–174* 页。[21] *S. Rodríguez-López*、*D. Rule* 和 *W. Staubach*，双线性傅里叶积分算子的 *Seeger-Sogge-Stein*定理，《数学进展》，*264 (2014)*，第 *1–54* 页。[22] *S. Rodríguez-López* 和 *W. Staubach*，粗糙傅里叶积分算子与伪微分算子的估计及其在多线性算子有界性中的应用，《泛函分析杂志》，*264 (2013)*，第 *2356–2385* 页。[23] *T. Runst* 和 *W. Sickel*，分数阶 *Sobolev* 空间、*Nemytskij*算子与非线性偏微分方程，*De Gruyter*非线性分析与应用丛书第 *3* 卷，*Walter de Gruyter*出版社，柏林，*1996*。[24] *A. Seeger*、*C. D. Sogge* 和 *E. M. Stein*，傅里叶积分算子的正则性，《数学年刊》（第 *2* 辑），*134 (1991)*，第 *231–251* 页。[25] *E. M. Stein*，《调和分析：实变方法、正交性与振荡积分》，普林斯顿数学丛书第 *43* 卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，*1993*。[26] *H. Triebel*，《函数空间理论》，数学及其在物理与技术中的应用第 *38* 卷 [数学及其在物理与技术中的应用], *Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G.*，莱比锡，*1983*。[27] ，伪微分算子在 F^s_p、$_q$空间中的应用，《分析与应用杂志》，*6 (1987)*，第 *143–150* 页。[28] *H. Triebel*，F^s_{pq} 空间的原子分解：在奇异型伪微分算子与傅里叶积分算子中的应用，《数学通讯》，*144 (1989)*，第 *189–222* 页。[29] *H. Triebel*，《函数空间理论 *II*》，数学专著丛书第 *84* 卷，*Birkhäuser*出版社，巴塞尔，*1992*。[30] ，《函数空间理论 *IV*》，数学专著丛书第 *107* 卷，*Birkhäuser*出版社，巴塞尔，*2020*。

Anders Israelsson、Tobias Mattsson、Wolfgang Staubach，乌普萨拉大学数学系，S-751 06 乌普萨拉，瑞典电子邮箱：anders.israelsson@math.uu.se、tobias.mattsson@math.uu.se、wulf@math.uu.se