©2023 IEEE。允许个人使用本材料。对于所有其他用途，包括为广告或宣传目的重印/再版本材料、创作新的汇编作品、转售或重新分发至服务器或列表，或在其他作品中重复使用本作品的任何受版权保护的组成部分，均必须获得 IEEE 的许可。

含导体和绝缘体的介电模拟问题的低频稳定化

Devin Balia n、Melina Merkel、J¨org Ostrowski、Herbert De Gersem 和 Sebastian Sch¨ops *

2023年2月2日

arXiv:2302.00313v1 [cs.CE] 1 Feb 2023

摘要

在仿真电阻-电容电路，或导体与绝缘体共存的电准静态问题时，可以观察到，大时间步或低频会导致数值不稳定性，这与系统矩阵的条件数有关。本文通过对方程组进行缩放，提出了几种稳定的公式。这样便能可靠地计算极低频（甚至静态情形）或大时间步下的解。数值实验验证了这些发现。

关键词： 电介质、有限元分析、低频稳定化、稳定性分析

1 引言

例如，在高压应用中，低频电准静态场或电阻-电容电路仿真已在学术界和工业界得到广泛应用， [1]–[8]。其基础场近似忽略了感应效应，因此可以采用仅基于标量电势的简化公式。然而，如果耦合的电容性、感应性和电阻现象都很重要，则必须使用经典麦克斯韦公式；或者，在波传播可以忽略时，使用结合电准静态和磁准静态情形的达尔文型混合公式，参见例如 [9] 及其中的参考文献。众所周知，频域全波公式存在低频不稳定性。其原因在于，在静态极限下，麦克斯韦方程组解耦为三个独立问题：磁静态问题、静电问题和稳恒电流问题。尤其是，磁静态问题需要进行规范化；在极限情形下，这一点已得到充分理解，但对于非常小且非零的频率，数值处理仍颇为棘手。已有研究提出了多种稳定化形式，例如 Hiptmair [10]，、Jochum[11]，、Eller [12] 提出的方法，后来 Stysch [13] 和 Zhao [14]也采用了这些方法。

本文研究了电准静态场和电路形式中的一种类似低频不稳定性，该问题与规范化无关。该问题最初在 [15], [16] 中被观察到：在静态极限下，电准静态场问题会转变为稳态电流问题，但仅发生在导体内部。由于静态极限下位移电流密度为零，因此无法控制绝缘区域中的场。这会导致与全波情形相同的稳定性问题。在这种情况下，迭代求解器可能会受到过多浮点舍入误差的影响 [17]。因此，解会出现明显缺陷（例如图7(c)所示），也可能存在隐蔽缺陷；后者甚至更加危险，因为它们可能导致错误的工程决策。在[15]中，通过施加额外约束以确保非导电区域中的电荷中性，缓解了低频失效问题，但代价是增加了未知量。本文提出了几种涉及频率（或时间步长）的方程缩放方法，这些方法不会引入额外未知量，且易于实现。最后，我们展示了这一新方法的有效性。

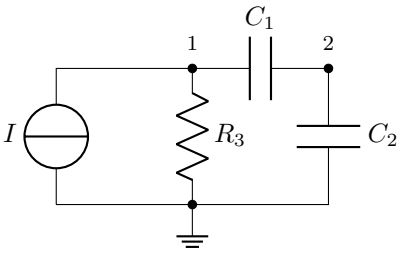


图1：一个低频特性存在问题的简单RC电路。

我们通过频域中的图1所示简单电流驱动电路来说明这个问题。我们不使用串联电容定律来简化模型。于是，节点分析得到

$$\left(\begin{bmatrix} R_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} C_1 & -C_1 \\ -C_1 & C_1 + C_2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中， ϕ_n 是与节点 n相关的电势， i_{src}是频率为 ω 时的给定电流， $j = \sqrt{-1}$ 是虚数单位； R_k 和 C_k 分别是支路 k的电阻和电容。所得方程组对任意频率 $\omega > 0$均有唯一解，但当$\omega \to 0$时，线性方程组的条件数会急剧增大，例如，

$$\kappa(\omega) = 1 + \frac{1}{2\omega RC} + \mathcal{O}(\omega)$$

对于 $C_1 = C_2 = C$、 $R_3 = R$ 和 $R^{-1} > 2\omega C$ ，并使用1-范数。在极限情况下，条件数为 $\kappa(0) = \infty$。

*第一、第二、第四和第五位作者任职于德国达姆施塔特工业大学电气工程与信息技术系。第三位作者任职于瑞士西门子数字化工业软件（联系邮箱：sebastian.schoeps@tu-darmstadt.de）。

这反映了一个事实：我们只能从 (1) 中恢复欧姆定律 $\phi_1 = R_3 i$ ，但没有关于 ϕ_2 的方程，也就是说，该变量未定义。幸运的是，只要适当地缩放方程组，例如使用 Jacobi 型预条件子，几乎就能轻而易举地解决这个问题。

本文结构如下：下一节将回顾常见的电阻电容电路和电准静态场公式，并介绍按绝缘部分和导电部分进行划分的方法。第三节将介绍几种稳定化方案，并在第四节通过实例加以应用。最后，第五节总结全文。

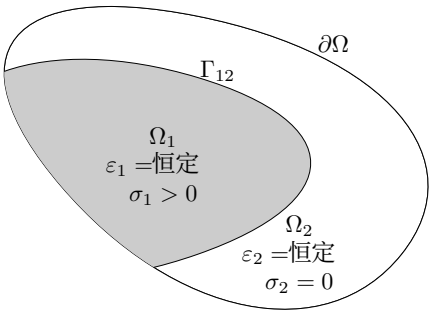


图2：计算域的抽象表示。

2 问题公式

本节将概述电阻电容（RC）电路和电准静态（EQS）场的公式。

2.1 RC电路

我们从频域中的电路入手，这些电路由改进节点分析描述；改进节点分析是学术界和工业界类 SPICE 求解器中最常见的形式化方法，[18]。问题是：求解 $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{C}^{N_\varphi}$，$\mathbf{i}_\mathrm{V} \in \mathbb{C}^{N_\mathrm{V}}$，使得

$$\left(\mathbf{A}_\mathrm{R}\mathbf{G}\mathbf{A}_\mathrm{R}^\top\right)\boldsymbol{\varphi} + j\omega\mathbf{A}_\mathrm{C}\mathbf{C}\mathbf{A}_\mathrm{C}^\top + \mathbf{A}_\mathrm{V}\mathbf{i}_\mathrm{V} = -\mathbf{A}_\mathrm{I}\mathbf{i}_\mathrm{src} \quad (2a)$$

$$\mathbf{A}_\mathrm{V}^\top\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}_\mathrm{src} \quad (2b)$$

其中，$\mathbf{A}_k$ 为各类元件 $k \in${R，C，I，V}对应的关联矩阵，N_φ维向量为未知节点电势 $\boldsymbol{\varphi}$，N_V维向量为流经电压源的未知电流 $\mathbf{i}_\mathrm{V}$，给定电流和电压源产生的电流$\mathbf{i}_\mathrm{src}$与电压$\mathbf{v}_\mathrm{src}$（均为复数），以及电导对角矩阵$\mathbf{G}$ 和电容对角矩阵$\mathbf{C}$。请注意，此类电路必须满足若干相容条件，例如，当 $\omega \to 0$ 时，不得在电容支路上指定电流。

2.2 电准静态场

RC电路对应的场等效形式是电准静态场公式，参见例如 [1], [2], 给定为

$$-\nabla\cdot\Big(\sigma\nabla\varphi\Big) - j\omega\nabla\cdot\Big(\varepsilon\nabla\varphi\Big) = \nabla\cdot\mathbf{J}_\mathrm{src} \quad \text{on } \Omega \quad (3a)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (3b)$$

其中 φ 为电标势，$\mathbf{J}_\mathrm{src}$ 为源电流密度，$\varepsilon > 0$ 和 $\sigma \geq 0$ 分别为空间相关的介电常数和电导率材料系数。为简化记号，我们同样为这些问题施加了齐次狄利克雷条件，并且不考虑恒定电势电极，因为这需要采用浮动电位条件。下文将简要介绍其引入方式。

我们来研究计算区域 $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ 包含一个均匀导体的情形 Ω_1 和一个绝缘体 Ω_2, ，见图2。问题表述如下

$$-\nabla\cdot\Big(\sigma_1\nabla\varphi_1\Big) - j\omega\nabla\cdot\Big(\varepsilon_1\nabla\varphi_1\Big) = \nabla\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{src},1} \text{ on } \Omega_1 \quad (4a)$$

$$-j\omega\nabla\cdot\Big(\varepsilon_2\nabla\varphi_2\Big) = \nabla\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{src},2} \text{ on } \Omega_2 \quad (4b)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_{12} \quad (4c)$$

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{J}_{\mathrm{tot},1} - \mathbf{J}_{\mathrm{tot},2}) = 0 \quad \text{on } \Gamma_{12} \quad (4d)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (4e)$$

其中，φ_p、$\mathbf{J}_{\mathrm{src},\,p}$、$\varepsilon_p$ 和 σ_p 分别定义在各个区域 Ω_p 上。它们通过界面条件在 $\Gamma_{12} = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$ 处连接，这些条件使用总电流密度 $\mathbf{J}_{\mathrm{tot},\,p} = -(\sigma_p + j\omega\varepsilon_p)\nabla\varphi_p$ 和界面的法向量 $\mathbf{n}$。在此公式中，显然必须要求相容条件 $\nabla\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{src},\,2} = 0$ 在极限 $\omega \to 0$ 下成立；这种性质在 [12]中称为“稳态极限下无散”。

离散化有两种选择：（a）我们针对 (3a) 推导整体弱形式，在总区域 Ω 上采用基函数，并允许材料系数发生跳变；或者（b）分别对 (4a)-(4e) 中的两个方程应用有限元（FE），采用支撑集分别位于 Ω_1 和 Ω_2 上的基函数，然后以弱形式将它们连接起来。我们只讨论第一种选择（a），因为大多数学术或工业电准静态求解器都采用了这种方法。第3节提出的正则化方法适用于这两种情况。

问题的弱形式为：求 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$，使得

$$\int_\Omega \nabla\varphi'\cdot\sigma\nabla\varphi + j\omega\nabla\varphi'\cdot\varepsilon\nabla\varphi \,\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \nabla\varphi'\cdot\mathbf{J}_\mathrm{src}\,\mathrm{d}\Omega \quad (5)$$

对于所有 $\varphi' \in H_0^1(\Omega)$，即，对于来自平方可积函数空间且具有平方可积梯度、在边界 [19] 上为零的函数。将范围限制在一个 N 维子空间 $V \subset H_0^1(\Omega)$ 内，我们可以用矩阵/向量表示法重写该系统，即求 $\boldsymbol{\varphi}$，使得

$$(\mathbf{K} + j\omega\mathbf{M})\,\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{r} \quad (6)$$

采用通常的有限元矩阵，其元素为

$$K_{mn} = \int_\Omega \nabla v_m\cdot\sigma\nabla v_n\,\mathrm{d}\Omega, \quad (7a)$$

$$M_{mn} = \int_\Omega \nabla v_m\cdot\varepsilon\nabla v_n\,\mathrm{d}\Omega \quad (7b)$$

以及右端项

$$r_m = -\int_\Omega \nabla v_m \cdot \mathbf{J}_{\mathrm{src}}\,\mathrm{d}\Omega \tag{8}$$

采用节点基函数 $v_n \in V$和 $m,\ n=1$、.....、 N。

在静电极限情形下，电势恒定但未知的导体通过浮动电位条件建模。在电准静态情形下，用浮动电位条件对高导电部件建模也是合理的。为适应这些条件以及非齐次狄利克雷条件，模型需要进行一些小幅调整；这里仅作简要说明，后文所用的符号中不再详述。引入浮动电位条件时，需要考虑 $H^1_0(\Omega)$ 的一个子空间，其中浮动电位部分上的电势为常数。非齐次狄利克雷条件则通过平移试验空间 [20] 来处理。在离散设置中，对 V 应用浮动电位条件的方法是，将与同一电极重合的所有节点基函数合并，从而减少自由度的数量 [21]。通过对系统矩阵 [22] 进行少量代数操作，即可高效实现这一技术。

2.3 分解

通过对自由度重新编号，系统 (2a)–(2b) 和 (6) 均可进行如下形式的分块矩阵划分：

$$\left(\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix}\mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12}\\ \mathbf{M}_{12}^\top & \mathbf{M}_{22}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1\\ \boldsymbol{\varphi}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\end{bmatrix}. \tag{9}$$

与电导率相关的算子中的零项是 Ω_2 中存在绝缘体所致。在实践中，无需显式重排序。可以使用索引集。例如，对于低阶有限元的情形，我们将 Ω_2 和 Ω_1 中的自由度索引集定义为

$$\mathcal{I}_2 = \{1 \le n \le N \mid \mathrm{supp}(v_n) \in \Omega_2, v_n \in V\} \tag{10a}$$
$$\mathcal{I}_1 = \{1 \le n \le N \mid n \notin \mathcal{I}_2\} \tag{10b}$$

由此可隐式得到系统 (6) 的结构。请注意，这些索引集将界面 Γ_{12} 上的自由度归入 $\boldsymbol{\varphi}_1$，因为与界面相关的基函数并未完全包含在 Ω_2 中。要得到 (9) 中的零块，这一点是必要的。

最后，我们观察到 (9) 与 (1) 具有相同的结构，因此预期 $\omega \to 0$ 也会出现相同的问题。事实上，在 [15] 中观察到了低频下较差的条件数。下一节将缓解这一问题。

3 低频稳定化

虽然 [16]提出了一种两步方法，但我们保留原始系统，同时对方程和未知量乘以包含 ω 的幂次因子的缩放，使得对于$\omega \to 0$，没有任何方程会消失。第一节中，我们研究标量值乘法（“缩放”），第二节中则研究矩阵值乘法（“预条件”）。我们先从四个标量 $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{C}$ 并按如下方式乘以 (9)

$$\left(\begin{bmatrix}a_1b_1\mathbf{K}_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix} + j\omega\begin{bmatrix}a_1b_1\mathbf{M}_{11} & a_1b_2\mathbf{M}_{12}\\ a_2b_1\mathbf{M}_{12}^\top & a_2b_2\mathbf{M}_{22}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_1\\ \boldsymbol{\xi}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1\mathbf{r}_1\\ a_2\mathbf{r}_2\end{bmatrix}$$

其中，新的（经过缩放的）未知量为 $\boldsymbol{\xi}_k = b_k^{-1}\boldsymbol{\varphi}_k$。我们提出以下频域缩放：

(i) symmetric: $a_2 = b_2 = \omega^{-1/2}$ and $a_1 = b_1 = 1$

(ii) non-symmetric: $a_2 = \omega^{-1}$ and $a_1 = b_1 = b_2 = 1$

这必须在解析层面应用，即在组装矩阵之前，必须确定 ω 的幂的乘积，以避免数值误差或除以零。这样，两种变体都能确保在极限 $\omega \to 0$ 下不会丢失任何方程，因为始终有 $\omega a_2 b_2 > 0$。此外，第一种方法 (i) 保持了所得线性方程组的对称性。这可以节省内存，并使专用求解方法得以应用，例如 Cholesky分解或预条件共轭梯度法。这也与全波情形中采用的思路非常一致，例如，ω 的分数幂缩放也曾在 [12] 中采用。然而，在极限 $\omega = 0$ 下无法重构电势。这是必然结果，因为电势从一开始就没有良好定义。另一方面，人们可能希望在 $\omega = 0$ 时获得 Ω_2 中的静电场解。变体 (ii) 保留了原始未知量，因此能够保证这一点，但代价是失去对称性。

请注意，同样的思路也可应用于时域仿真，其中当时间步长非常大时，也可能出现类似的稳定性问题。需要强调的是，这主要与公式有关，而非数值求解方法。更确切地说，这与许多（显式）时间步进方法在求解刚性微分方程时众所周知的时间步长限制无关 [23]。在时间离散情形下，每个时间步都会用时间步长的幂次而非频率对系统矩阵进行缩放。例如，按 (i) 缩放的隐式欧拉法的一个时间步写作

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11} + \frac{1}{\delta t_l}\mathbf{M}_{11} & \frac{1}{\sqrt{\delta t_l}}\mathbf{M}_{12}\\ \frac{1}{\sqrt{\delta t_l}}\mathbf{M}_{12}^\top & \mathbf{M}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1(t_{l+1})\\ \boldsymbol{\xi}_2(t_{l+1})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\delta t_l}\mathbf{M}_{11} & \frac{1}{\sqrt{\delta t_l}}\mathbf{M}_{12}\\ \frac{1}{\sqrt{\delta t_l}}\mathbf{M}_{12}^\top & \mathbf{M}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1(t_l)\\ \boldsymbol{\xi}_2(t_l)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{r}_1(t_{l+1})\\ \sqrt{\delta t_l}\mathbf{r}_2(t_{l+1})\end{bmatrix} \tag{11}$$

其中时间步长为 $\delta t_l = t_{l+1} - t_l$，且 $\boldsymbol{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{\delta t_l}}\boldsymbol{\varphi}_2$。

虽然这与低频病态问题并无直接关系，但在缩放中引入材料常数有助于进一步平衡系统矩阵的谱，从而降低条件数。例如，以下标量选择显然适用于该有限元问题：

(iii) symmetric with material: $a_1 = b_1 = (\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1)^{-1/2}$ and $a_2 = b_2 = (\varepsilon_2 j\omega)^{-1/2}$

(iv) non-symmetric with material: $a_1 = (\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1)^{-1}$, $a_2 = (\varepsilon_2 j\omega)^{-1}$ and $b_1 = b_2 = 1$

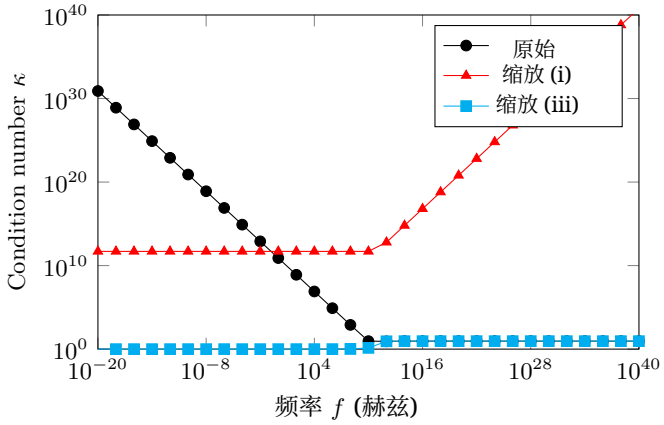


图3：RC电路示例（$C = 1 \cdot 10^{12}$ F 和 $R = 1\Omega$）的条件数随频率的变化。

变体 (iv) 与雅可比型预条件密切相关，但这里是在矩阵组装之前 应用的 [17, 第 4 节1]。雅可比型预条件使用对角元素的逆，例如：

$$a_1 = \Big(\operatorname{diag}(\mathbf{K}_{11}) + j\omega \operatorname{diag}(\mathbf{M}_{11})\Big)^{-1}, \tag{12}$$

$$a_2 = \frac{1}{j\omega}\Big(\operatorname{diag}(\mathbf{M}_{22})\Big)^{-1} \tag{13}$$

用于左乘（$b_1 = b_2 = 1$），或者按照变体 (iii) 的思路取平方根后从左侧和右侧相乘。如果要使用迭代方法求解所得方程组，这一思路还可以进一步推广。可以使用矩阵块的不完全逆作为（左）预条件器 [17, 第 10 节。3], 例如，

(v) frequency dependent block preconditioner:
$a_1 = (\mathbf{K}_{11}+j\omega\mathbf{M}_{11})^{-1}$, $a_2 = \frac{1}{j\omega}\mathbf{M}_{22}^{-1}$ and $b_1 = b_2 = 1$

(vi) 与频率无关的块预条件器：
$a_1 = (\mathbf{K}_{11}+j\omega_0\mathbf{M}_{11})^{-1}$ with a fixed ω_0, $a_2 = \frac{1}{j\omega}\mathbf{M}_{22}^{-1}$ and $b_1 = b_2 = 1$

这里假设可以计算此类（不完全）块逆矩阵。例如，当所有导电部分都接触狄利克雷边界时，便满足这一条件。

预条件器 (vi) 的一个优点是，由于逆矩阵不依赖于 ω ，因此可显著降低频率扫描中重复分解的计算成本。此外，选择 $\omega_0 = 0$ 时，可以使用非复数运算进行分解。另一方面，必须预期距离 $|\omega - \omega_0|$ 越大，性能就越差。

注意，我们假设计算域由一个导电子域和一个非导电子域组成。不过，稳定化变体 (i-iv) 很容易推广到具有不同材料属性的多个子域；变体 (v-vi) 则会自动考虑这一点。

4 个示例

我们讨论RC电路以及两个静电场问题的情况：一个学术性的玩具示例和一个高压套管。

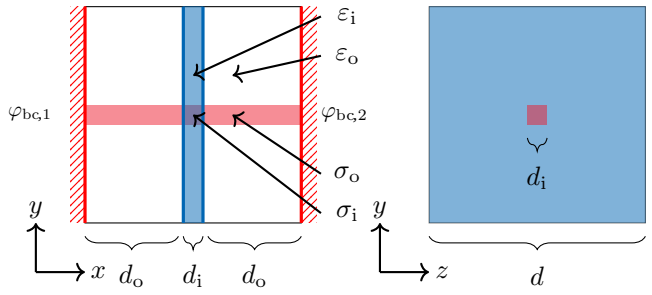


图4：测试配置的二维表示。图中显示了侧视图（左）和正视图（右）。此设置基于 [15]。

4.1 RC电路

让我们从频域中的简单电路示例（1）开始，并采用简化形式 $C_1 = C_2 = C$ 和$R_3 = R$。对应于（2a）-（2b）的关联矩阵为

$$\mathbf{A}_\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_\mathrm{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{A}_\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

以及电流 $I = 1\mathrm{A}$。不过，这种电流激励对后续的稳定性分析没有影响。第一种稳定化方法 (i) 得出

$$\begin{bmatrix} R^{-1} + j\omega C & -j\sqrt{\omega}C \\ -j\sqrt{\omega}C & j2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中 $\xi_2 = \sqrt{\omega}\phi_2$。相应的条件数在极限 $\omega \to 0$ 下为

$$\kappa_{(i)} = \frac{1}{2RC} + \mathcal{O}(\sqrt{\omega}) \tag{15}$$

其中我们使用了 $R^{-1} > 2\omega C$ 的假设。将集总元件的参数纳入缩放后，条件数可以得到改善，例如 $a_1 = b_1 = 1/\sqrt{R^{-1} + j\omega C}$ 和 $a_2 = b_2 = 1/\sqrt{j\omega 2C}$。这对应于变体 (iii)，得出

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1+j}{-2}\sqrt{\frac{\omega C}{R^{-1}+j\omega C}} \\ \frac{1+j}{-2}\sqrt{\frac{\omega C}{R^{-1}+j\omega C}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-I}{\sqrt{R^{-1}+j\omega C}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

它同时缩放两个未知量 $\xi_k = \varphi_k / b_k$。相应的条件数在极限情况下为 $\omega \to 0$ ，即使是最优情况也如此：

$$\kappa_{(iii)} = 1 + \mathcal{O}(\sqrt{\omega}). \tag{16}$$

请注意，在这两种情况下，如果满足 $\omega = 0$，则无法根据未知量 ξ_2 获得电势 ϕ_2 。

图3展示了两个电容器（电容为 $C = 1 \cdot 10^{12}$F）和一个电阻器（电阻为 $R = 1\ \Omega$）的条件数。数据通过 MATHEMATICA® [24] 半解析地得出。因此，计算成本可以忽略不计，且可计算的频率范围非常大，即从 $f = 1 \cdot 10^{-20}$赫兹到 $1 \cdot 10^{40}$赫兹。图中显示，原始公式在低于 $1 \cdot 10^{10}$赫兹的频率下会失效，而公式 (i) 和 (iii) 在低至 0 赫兹时仍保持稳定。公式 (iii) 具有相同的定性

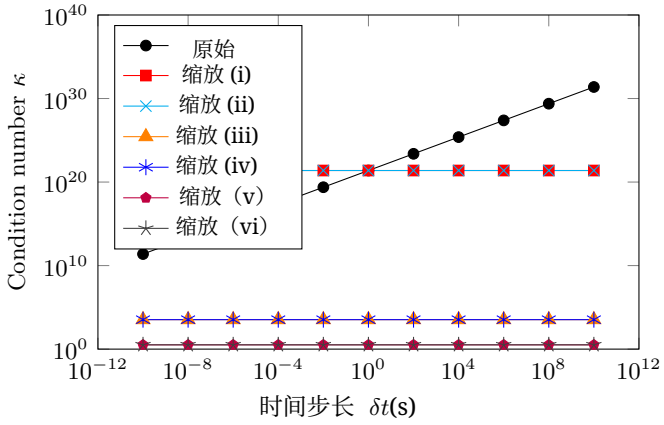


图5：电准静态示例的条件数随时间步长的变化。此处 $\omega \to 0$ 的失效对应于 $\delta t \to \infty$。

低频行为，与 (i) 一样，但条件数降低了 $5 \cdot 10^{11}$，即商 $1/(2RC)$，这符合预期。我们观察到，公式 (i) 在高于 $1 \cdot 10^{10}$赫兹的高频下会失稳。这同样在预料之中，因为导电贡献变得可以忽略不计，问题本质上是电容性的。全麦克斯韦公式的稳定化也呈现类似行为，参见例如 [12] 中的图5。

4.2 电准静态玩具示例

作为一个数值玩具示例，我们在时域中研究一个分层平行板电容器，其极板由导体连接（图4）。该基准算例最初由 [15] 提出，其构造使得整个计算域内的电位移场均匀。计算域 Ω 是边长为 $d = 22$ 厘米的立方体，见图4。计算域划分为 Ω_i（蓝色区域）和 Ω_o（其余区域）。Ω_i 沿 y 方向和 z 方向延伸至整个长度。红色区域沿 x 方向延伸，代表导体。另一区域不导电。Ω_i 区域的介电常数为 $\varepsilon_\mathrm{i} = \varepsilon_0$，电导率为 $\sigma_\mathrm{i} = 2.98 \cdot 10^7$ 西门子/米。Ω_o 区域的介电常数为 $\varepsilon_\mathrm{o} = 2\varepsilon_0$，电导率为 $\sigma_\mathrm{o} = 2\sigma_\mathrm{i} = 5.96 \cdot 10^7$ 西门子 / 米。几何参数为 $d_\mathrm{o} = 10$ 厘米和 $d_\mathrm{i} = 2$ 厘米。在盒体的左右边界上，电势 φ 采用狄利克雷条件。边界条件为 $\varphi_{\mathrm{bc},1} = 0$ 伏和 $\varphi_{\mathrm{bc},2} =$ (1 伏) $\sin(\omega t)$，角频率为 $\omega = 2\pi f$，频率为 $f = 50$ 赫兹。其余边界上采用齐次诺伊曼条件。此外，不施加电荷或电流密度。激励完全由边界条件实现。

该模型采用定义在最低阶六面体单元上的 $N = 11109$ 个自由度进行离散。从工程角度来看，对于给定的右端项，合适的时间步长应为 $\delta t = 2\,\mathrm{ms}$，以便充分解析正弦激励的每个周期。我们研究了隐式欧拉法 (11) 单步计算所得系统矩阵的条件数，并考察不同公式 (i-vi) 和时间步长

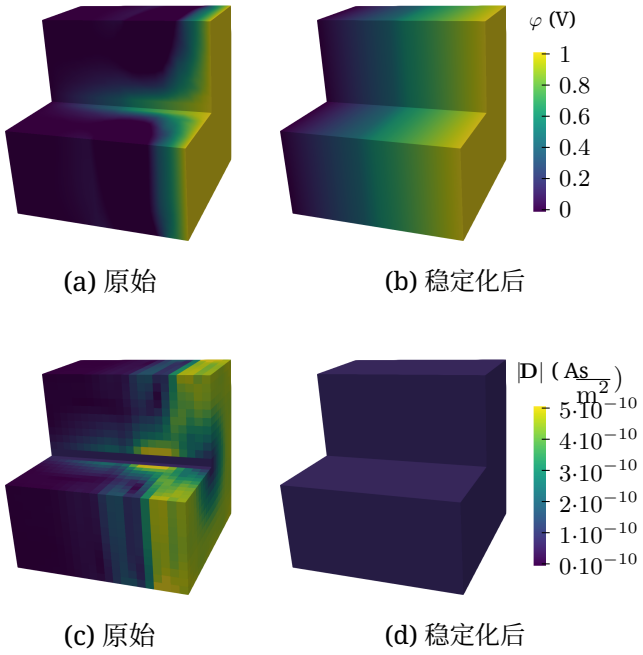


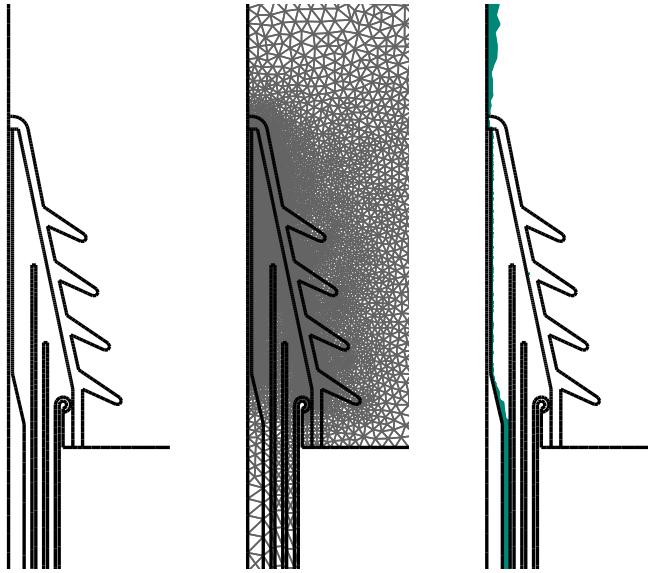
图6：图示了图4所示配置在峰值电压下的电标势 φ和位移场 $|\mathbf{D}|$。正确的解析解是一个恒定的位移场 $|\mathbf{D}| \approx 7.38 \cdot 10^{-11}\mathrm{As/m^2}$。图中显示了原始公式（左，不稳定）和公式 (iv)（右，稳定）的结果。时间步为 $\delta t = 1$ ms，使用的迭代求解器是 MATLAB® 函数“bicgstab”，未使用预条件器。原始问题需要 565 次迭代，而变体 (iv) 需要 232 次迭代，才能以 $1 \cdot 10^{-15}$ 的容差完成计算。

大小 $\delta t = 1 \cdot 10^{-10}$ s…, $1 \cdot 10^{10}$ s。我们使用基于 ∞-范数的 MATLAB® 函数“condest” [25] 估算条件数。图5展示了结果。为便于说明，图6展示了原始公式和稳定化形式所得的场。需要注意的是，只有稳定化形式能给出正确的行为，即位移场为常数。

所有稳定化方法都改善了$\delta t \to \infty$ 的条件数（低频对应较大的时间步长）。涉及材料系数的变体 (iii,iv) 显著降低了条件数（$\sim 10^{18}$），并且在整个频率范围内表现良好。然而，与电路示例不同，我们处理的不是标量，而是矩阵。因此，条件数仍维持在 $\kappa \approx 10^3$左右。最后，变体 (v,vi) 使用 MATLAB® 函数“ilu”，将条件数降至约 $\kappa \approx 3$。

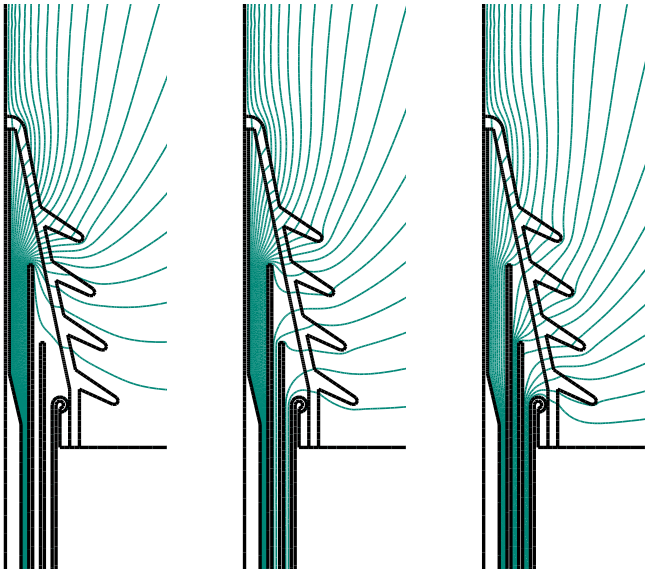
4.3 高压套管

这里以油浸电容式套管为例，说明其工业应用意义 [5], [26]（图 7）。伸入套管内的接地电极，以及安装在中央高压电极与外部接地电极之间的两个额外同心金属圆筒，可减小三结合点处的电应力



(a) 几何结构　(b) 网格　(c) 不稳定性

图7：高压套管的几何结构、网格及不稳定解。



(a) 0.5 赫兹　(b) 2 赫兹　(c) 50 赫兹

图 8：使用变体 (iii) 计算得到的三种工作频率下高压套管中稳定计算的电准静态场

。油的电导率为 $\sigma_{\text{oil}} = 1.0$pSm，介电常数为 $\varepsilon_{\text{oil}} = 2.2\varepsilon_0$。瓷外壳的介电常数为 $\varepsilon_{\text{prc}} = 6.5\varepsilon_0$。使用自研的低阶轴对称二维有限元求解器，在频域中对电准静态模型进行仿真，共考虑 7248 个自由度。所有金属部件均视为理想导电体，并采用浮动电位条件建模。

图7(c) 展示了低频失效导致的不稳定行为：在 0 赫兹下，对原始问题公式应用稀疏直接求解器所计算出的解是错误的。作为对比，图8展示了三种不同频率下的正确行为。

图9展示了前四种稳定化变体的条件数随频率的变化。条件数再次使用 MATLAB® 函数'condest'基于 ∞-范数进行估算，[25]。这一更贴近实际的配置所得结果与之前的研究相似，并验证了理论：所有变体都显著改善了低频下的表现，直至 0 赫兹。与之前一样，前两种变体 (i) 和 (ii) 在高频下可能会出现问题，而高频与电准静态范围无关。变体 (iii) 和 (iv) 在所有考察频率下均表现出色。未纳入雅可比型变体 (v)-(vi)，因为通常无法保证所有导电部分都与狄利克雷边界接触。

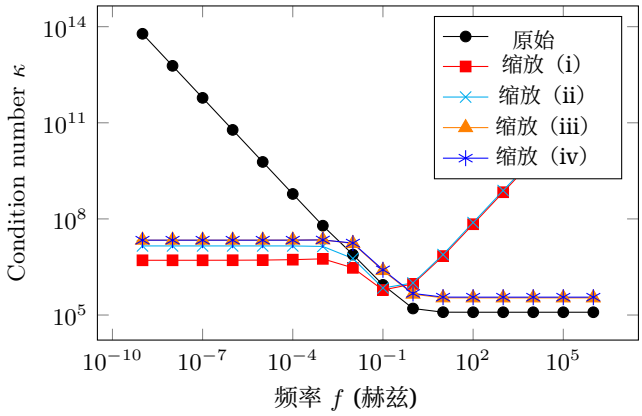


图 9：高压套管算例的条件数随频率变化的关系。

4.4 讨论

从实际角度比较这些变体：如果使用稀疏对称线性方程组的直接求解器，那么公式 (i) 或 (iii) 都很适用。后者效果更好，但需要了解材料数据，这可能会给实现带来不便；也可以采用雅可比型实现 (12)-(13)。如果直接求解器不利用对称性，那么 (ii) 和 (iv) 是不错的选择。它们还有一个额外优点：求解过程结束后无需重新缩放。请注意，一些稀疏直接求解器，尤其是 UMFPACK[27]，，会基于启发式方法自行缩放，这可能会削弱手动缩放的效果（如果 $\omega > 0$），但也不会造成危害，因为数值计算开销可以忽略不计。

最后，如果使用迭代求解器，则取决于可用的预条件器。例如，变体 (vi) 计算成本低且适用，例如用于低频范围内的频率扫描。

5 结论

我们讨论了电准静态问题中的低频不稳定性，这一问题不如全波公式中的低频不稳定性广为人知。我们提出了几种简单的系

统矩阵缩放方法，适用于时域和频域，可避免数值失效。所有方法均有效，且实现起来几乎毫不费力。数值算例证实，对介质电路和场问题进行低频稳定化是必要的。

致谢

作者感谢 Markus Clemens 就电准静态和达尔文场公式的诸多问题进行了富有成效的讨论。作者谨此致谢 TU Darmstadt 的研究生院 CE 以及德国研究联合会（CRC TRR 361 和 SCHO 1562/6-1）提供的资助。

参考文献

[1] H. A. Haus 和 J. R. Melcher, *Electromagnetic Fields and Energy* 1989 。

Prentice-Hall，。[2] H. K. Dirks，“微电子应用的准静态场”，*Electr. Eng.*，第 79 卷，第 2 期，第 145–155 页，1996年。[3] U. van Rienen、M. Clemens 和 T. Weiland，“轻度污染高压绝缘子中的低频场仿真”，*IEEE Trans. Magn.*，第 32 卷，第 3 期，第 816–819 页，1996年。[4] M. Clemens、T. Weiland 和 U. van Rienen，“应用于高压问题的复线性系统克雷洛夫型方法比较”，*IEEE Trans. Magn.*，第 34 卷，第 5 期，第 3335–3338 页，1998年。[5] S. Monga、R. Gorur、P. Hansen 和 W. Massey，“基于电场计算的高压套管设计优化”，*IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul.*，第 13 卷，第 6 期，第 1217–1224 页，2006年。[6] D. Weida、T. Steinmetz 和 M. Clemens，“包含非线性场强控制材料层二维模型的大型绝缘子结构电准静态高压场仿真”，*IEEE Trans. Magn.*，第 45 卷，第 3 期，第 980–983 页，2009年。[7] T. Christen、L. Donzel 和 F. Greuter，“非线性电阻性电场均压，第一部分：理论与仿真”，，第 卷，第 期，第–页。[8] C. Zhang、J. J. Kester、C. W. Daley 和 S. J. Rigby，“使用有限元法进行高压设备电场分析”，载于 *2010 Annual Report Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena (CEIDP)* 2010 1 ，，第–4页。[9] M. Clemens、M.-L. Henkel、F. Kasolis、M. G¨unther、H. De Gersem 和 S. Sch¨ops，“时域中的准静态达尔文模型场公式”，*ICS Newslett.*，第 29 卷，第 1 期，第 3–9 页，2022年。[10] R. Hiptmair、F. Kramer 和 J. Ostrowski，“适用于全频段的稳健麦克斯韦公式”，*IEEE Trans. Magn.*，第 44 卷，第 6 期，第 682–685 页，2008年。[11] M. T. Jochum、O. Farle 和 R. Dyczij-Edlinger，“一种用于电磁场有限元仿真的新型低频稳定电势公式”，*IEEE Trans. Magn.*，第 51 卷，第 3 期，第 7 402 304 页，2015年。[12] M. Eller、S. Reitzinger、S. Sch¨ops 和 S. Zaglmayr，“一种适用于工业应用的对称低频稳定宽带麦克斯韦公式”，*SIAM J. Sci. Comput.*，第 39 卷，第 4 期，B703–B731，2017年。[13] J. Stysch、A. Klaedtke 和 H. D. Gersem，“有限元阻抗计算的低频稳定化”，*IEEE Trans. EMC* 64, 3, 750 759, 2022 ，第 卷，第 期，第–页。[14] Y. Zhao 和 Z. Tang，“用于三维瞬态全波麦克斯韦问题的对称场路耦合公式”，*IEEE Trans. Magn.*，第 55 卷，第 6 期，第 1–4 页，2019年。

[15] J. Ostrowski 和 R. Hiptmair，“电准静态规范下频率稳定的完整麦克斯韦公式”，*SIAM J. Sci. Comput.*，第 43 卷，第 4 期，B1008–B1028，2021年。[16] F. Kasolis、M.-L. Henkel 和 M. Clemens，“基于连续延拓的低频稳定电准静态场公式”，载于 *31st European Conference on Mathematics for Industry (ECMI 2021)* ，M. Ehrhard 编，欧洲工业数学联盟，伍珀塔尔，2021年。[17] Y. Saad，*Iterative Methods for Sparse Linear Systems*，第 2 版。美国马萨诸塞州波士顿：工业与应用数学学会，2003年。[18] C.-W. Ho、A. E. Ruehli 和 P. A. Brennan，“网络分析的改进节点法”，*IEEE Trans. Circ. Syst.* 22, 6, 504 509, 1975 ，第 卷，第 期，第–页。[19] P. Monk，*Finite Element Methods for Maxwell's Equations*。牛津：牛津大学出版社，2003年。[20] S. C. Brenner 和 L. R. Scott，*The mathematical theory of finite element methods* 3 2008, ，第 版。纽约：施普林格，第 15 卷。[21] P. Dular、W. Legros 和 A. Nicolet，“各种有限元公式中局部量和全局量的耦合及其在静电学、静磁学和磁动力学中的应用”，*IEEE Trans. Magn.* 34, 5, 3018 3021, ，第 1998 卷，第 期，第–页。[22] H. De Gersem、R. J. M. Belmans 和 K. Hameyer，“静电和电动有限元模型中的浮动电位约束与场路耦合”，*COMPEL*，第 22 卷，第 1 期，第 20–29 页，2003年。[23] E. Hairer、S. P. Nørsett 和 G. Wanner，*Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems* 2 2002 ，第 版。德国柏林：施普林格，。[24] Wolfram，*Mathematica*，2020年。[25] Mathworks，*MATLAB getting started guide*，9.8.0 (R2020a)，2020年。[26] E. Kuffel、W. S. Zaengl 和 J. Kuffel，*High Voltage Engineering - Voltage* 2 2000 ，第 版。Newnes，。[27] T. A. Davis，“算法 832：UMFPACK v4.3——非对称模式多前沿法”，*ACM Trans. Math. Software* 30, 2, 196 199, 2004 ，第 卷，第 期，第–页。