arXiv:2302.00324v1 [math.AG] 1 Feb 2023

伽罗瓦点与克雷莫纳变换

AHMED ABOUELSAAD

Abstract. 本文研究平面曲线的伽罗瓦点，以及相应伽罗瓦群向 Bir$(\mathbb{P}^2)$ 的扩张。若伽罗瓦群的阶至多为 3，我们证明它总能扩张为与点 P 相关的 Jonqui`ères 群的一个子群。当次数至少为 4 时，我们证明这一结论不成立。我们给出一个伽罗瓦扩张的例子，其伽罗瓦群可以扩张到克雷莫纳变换群，但不能扩张到关于 $P$ 的 de Jonqui`ères 映射群。我们还给出一个伽罗瓦扩张的例子，其伽罗瓦群无法扩张到克雷莫纳变换群。

1. Introduction

设 k 为一个代数闭域。设 C 为 $\mathbb{P}^2$ 中的一条不可约平面曲线。给定一点 $P \in \mathbb{P}^2$，考虑投影 $\pi_P|_C \colon C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$，它是以 P 为中心的投影 $\pi_P \colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ 的限制。令 $K_P = \pi_P^*(k(\mathbb{P}^1))$。若 P 是伽罗瓦的，则称其为伽罗瓦，并在此情况下用 G_P 表示相应的伽罗瓦群。

de Jonqui`ères 映射是一种双有理映射 $\varphi$，存在点$P$、$Q \in \mathbb{P}^2$，使得 $\varphi$ 将经过 $P$ 的直线束映到经过 $Q$的直线束。保持经过给定点 $P \in \mathbb{P}^2$的直线束的 de Jonqui`ères 变换群记为 Jonq$_P \subset$Bir$(\mathbb{P}^2)$。

与 [Miu18], 一样，我们关注将 G_P 中的元素扩张到 Bir$(\mathbb{P}^2)$的问题。有两个值得关注的问题:

问题 1.1. 如果 P 是伽罗瓦的， G_P 能否扩张到 Bir$(\mathbb{P}^2)$?

问题 1.2. 如果一个元素能扩张到 Bir$(\mathbb{P}^2)$，它能否扩张为 de Jonqui`ères 映射? $i.e.$ 能否扩张为满足 $\pi_P \circ \varphi = \pi_P$的 Bir$(\mathbb{P}^2)$ 中的元素 φ？

考虑次数为 d 的平面曲线 C 上一个重数为 m_P 的点 $P \in \mathbb{P}^2$，我们稍后将证明扩张 $[k(C) \colon K_P]$ 的次数为 $d - m_P$。根据扩张的次数，我们分别回答前面的两个问题。因此，我们的第一个主要结果是以下定理。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14E07, 14H05, 14H50.

Key words and phrases. 伽罗瓦点、克雷莫纳变换、伽罗瓦群、Jon- qui`ères 映射。作者感谢外国学生奖学金联邦委员会（FCS）提供的资助。

定理 A. 设 $P \in \mathbb{P}^2$，设 $C \subset \mathbb{P}^2$ 是一条不可约曲线。若扩张 $k(C)/K_P$ 是次数至多为 3 的伽罗瓦扩张，则 G_P 总能扩张为 $\mathrm{Jonq}_P \subseteq \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ 的一个子群。

定理 A 源自定理 3.2，该定理提供了关于次数至多为 3 的伽罗瓦扩张以及点 P处相关伽罗瓦群的更多信息。这促使我们研究更高次数的伽罗瓦扩张，并确定它们的伽罗瓦群 G_P 是否总能扩张到 $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$以及 de Jonquières 映射群 P。以下定理是我们的第二个论据。

定理 B. 设 k 是一个特征为 $char(k) \neq 2$ 且包含一个本原四次单位根的域，并设 C 是由下列方程定义的不可约曲线

$$X^4 - 4ZYX^2 - ZY^3 + 2Z^2Y^2 - YZ^3 = 0, \tag{1}$$

那么点 $P = [1 : 0 : 0]$ 是 C 的外伽罗瓦点，且由投影 $\pi_P : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ 诱导的扩张是次数为 4 的伽罗瓦扩张。群 G_P可扩张到 $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ ，但不能扩张到 Jonq_P。

定理 B （作为引理4.9的推论）对伽罗瓦扩张次数至少为 4 的情形，为问题1.2 给出了否定答案。尽管伽罗瓦群 G_P 可以扩张到 $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$，但这并不一定意味着它可以扩张到 Jonq_P。我们还得到如下结果。

定理 C. 设 k 是一个含有本原五次单位根的 $char(k) \neq 5$ 域，并设 $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ 由下式给出

$$\phi : [u : v] \mapsto [uv^6 - u^7 : u^5(u^2 + v^2) : v^5(u^2 + v^2)].$$

我们定义 $C := \overline{\phi(\mathbb{P}^1)}$ ，它是次数为 $\mathbb{P}^2$ 的一条不可约曲线，则点$P = [1 : 0 : 0]$ 是 C 的内伽罗瓦点，且由投影 $\pi_P : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ 诱导的扩张是次数为 5 的伽罗瓦扩张。此外，恒等元是伽罗瓦群中唯一能扩张到 $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$的元素。

根据定理曲线 C，我们不能断言 G_P 对于次数至少为 4 的每个伽罗瓦扩张，$(\mathbb{P}^2)$ 都可以扩张到 Bir，参见引理 5.2。

Acknowledgement

我想感谢我的博士导师 J´er´emy Blanc 提出了这个问题，并在准备本文期间与我进行了有益的讨论。我还要感谢巴塞尔数学与计算机科学系的热情接待。

2. Preliminaries

不可约平面曲线的伽罗瓦点概念 $C \subset \mathbb{P}^2$ 由 [MY00], [Yos09], [Fuk09] 提出。为了研究从 G_P 到 $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$的元素扩张，我们需要以下定义。

定义 2.1. 设 $K_P = \pi_P^*(k(\mathbb{P}^1))$, 若域扩张 $k(C)/K_P$ 是伽罗瓦扩张，则称点 P 为 C 的伽罗瓦点。此外，若 $P \in C$ [，分别有 $P \notin C$], 则称 P 为内伽罗瓦点，分别为外伽罗瓦点。若 P 是伽罗瓦扩张，则记作 $G_P = Gal(k(C)/K_P)$，并称其为点 P 处的伽罗瓦群。

引理 2.2. 由 π_P, *i.e.*, π_P^*: $k(\mathbb{P}^1) \hookrightarrow k(C)$,*i.e.* 诱导的域扩张 $k(C)/K_P$的次数为 $d - m_P$，其中 m_P是 C 在 P处的重数，而 d 是 C的次数。

证明. 设 $F(X,Y,Z) = 0$是次数为 d的曲线 C的定义方程。通过改变坐标，我们可以将点 P设为点 $[1:0:0] \in \mathbb{P}^2$，并选择使得 C 不是直线 $Z = 0$。由于 P 的重数为 m_P，因此我们可以将曲线的方程写成如下形式。

$$F(X,Y,Z) = F_{m_p}(Y,Z)X^{d-m_p} + ... + F_{d-1}(Y,Z)X + F_d(Y,Z), \quad (2)$$

其中， $F_i(Y,Z)$ 是次数为 Y 的齐次多项式， Z 的次数为 i $(m_P \leqslant i \leqslant d)$ 且 $F_{m_P}(Y,Z) \neq 0$。由于 $F(X,Y,Z)$ 在 $k[X,Y,Z]$中不可约，且不是 Z的倍数，因此 $f = F(X,Y,1) \in k[X,Y]$ 在 $k[X,Y]$中也不可约。取仿射图 $Z = 1$，于是可将 f 视为关于 $k[X]$的不可约˜多项式，其中 $deg_X(f) = d - m_P$，且 $k = k(Y)$。因此，扩张 $k(C)/K_P$同构于 $(k(Y)[X]/(f))/(k(Y))$，故二者次数相同，等于不可约多项式 $f \in k[X]$˜的次数，由此得到 $[k(C): k] = deg_X(f) = d - m_P$。□

定义 2.3. 设 E/F 是一个域扩张。若存在非常数多项式 $f(X) \in F[X]$ 使得 $f(\alpha) = 0$，则称元素 $\alpha \in E$ 在 F 上是代数的；若 α 在 F 上不是代数的，则称其在 F 上是超越的；若 E 的每个元素都在 F 上是代数的，则称 E 是 F 的代数扩张。

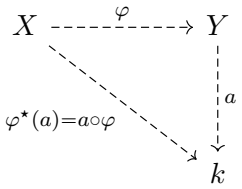
定义 2.4. 设 E/F 是一个域扩张，且 $\alpha \in E$ 是一个代数元素。在集合 $\{f(x) \in F[x]$ 中所有多项式里次数最低的首一多项式 $f(\alpha) = 0\}$ 称为 α 的最小多项式。

定义 2.5. 设 E/F 是一个代数扩张。若元素 $\alpha \in E$ 的最小多项式 $f(X) \in F[X]$ 在 E 的代数闭包中没有重根，则称其为可分的。若 E 的每个元素都是可分的，则称 E 是可分的。

定义 2.6. $\mathbb{P}_k^n$ 的有理映射是一种如下形式的映射: $[z_0 : z_1 : ... : z_n] \dashrightarrow [\phi_0(z_0, z_1, ..., z_n) : \phi_1(z_0, z_1, ..., z_n) : .... : \phi_n(z_0, z_1, ..., z_n)]$，其中 $\phi_i' s \in k[z_1, .., z_n]$ 表示次数相同且为正的齐次多项式；我们总可以假设它们没有公因子。

定义 2.7. 双有理映射 ϕ 从 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ 到 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ 是一个有理映射，且存在一个有理映射 ψ 从 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ 到 $\phi \circ \psi =$，满足以下性质$\psi \circ \phi = id$，其中 id: $[z_0 : z_1 : ... : z_n] \dashrightarrow [z_0 : z_1 : ... : z_n]$。$\phi \in$ Bir$(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n)$ 的次数是 ϕ_i多项式的次数，其中不含公因子。

定理 2.8. [Har77，定理 4。4] 对于任意两个簇 X 和 Y，占优有理映射集合 $\varphi:\ X \dashrightarrow Y$与域同态集合 $\varphi^{\star}:\ k(Y) \to k(X)$之间存在一个双射。该双射由 $\varphi \mapsto \varphi^{\star}$给出。



推论 2.9. 对于每个簇 X，我们都有一个群同构 $\mathrm{Bir}(X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Aut}_k(k(X))$，它将 φ 映射到 φ^*。

引理 2.10. 对于任意域 k，我们有 $\mathrm{Aut}_k(k(x)) = \{x \mapsto (ax+b)/(cx+d);\ \ a、\ b、\ c、\ d \in k、\ \ ad-bc \neq 0\}$ 和 $\mathrm{Aut}_k(k(x)) \cong \mathrm{Bir}(\mathbb{A}^1) \cong \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1)$。

证明。由于 $k(x)$ 是 $\mathbb{A}^1$ 的函数域，且 $\mathbb{P}^1$，我们有 $\mathrm{Bir}(\mathbb{A}^1) \cong \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1) \cong \mathrm{Aut}_k(k(x))$ 根据推论2.9。令 $a,\ b,\ c,\ d \in k$和 $ad-bc \neq 0$，则由 $x \mapsto (ax+b)/(cx+d)$ 给出的映射 f具有 g作为逆映射，其表达式为$x \mapsto (dx-b)/(-cx+a)$ 因为 $f \circ g = g \circ f = id$，所以 $f \in \mathrm{Aut}_k(k(x))$。

反过来，设 $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1)$ 由 $[u:\ v] \mapsto [f_1(u,v):\ f_2(u,v)]$ 给出，其中 f_1 和 f_2 次数相同，均为 d_1，且没有公因子。若 f 有一个次数为 d_2的逆映射 g，那么复合映射 $f \circ g$ 的次数为 $d_1 d_2$，因为无法约简；否则，$f_1(g_1,g_2)$ 与 $f_2(g_1,g_2)$的公因子会给出一个点 $\mathbb{P}^1$，该点经 g 映到 $(0,0)$，或者映到一个点 $\mathbb{P}^1$，再经f 映到 $[0:0]$。然而 $f \circ g = id$，因此 $1 = deg(id) = deg(f \circ g) = d_1 d_2$。由于 $\mathbb{P}^1$ 中无法约简，因此 $d_1, d_2 < 2$，从而 $deg(f) = 1$。所以f 由 $[u:\ v] \mapsto [au+bv:\ cu+dv]$ 给出，其中 $ad-bc \neq 0$。□

引理 2.11. 对任意域 k，设 $f:\ \mathbb{A}^n \dashrightarrow \mathbb{A}^n$ 是由 $(x_1,..,x_n) \mapsto (f_1,..,f_n)$给出的双有理映射，其中 $f_i \in k(x_1,..,x_n), i = 1,..,n$，则$k(x_1,..,x_n) = k(f_1,..,f_n)$。

证明。设 f 是一个双有理映射。根据推论 2.9，f^* 是 k–代数 $k(x_1,..,x_n)$，的一个自同构群，因此它是满射的，从而得到$k(x_1,..,x_n) = k(f_1,..,f_n)$。□

定义 2.12. $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ 上的双有理映射群记为 $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$，称为克雷莫纳群。若 $C \subset \mathbb{P}^2$ 是不可约曲线且 $\phi \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$，则称 ϕ 保持 C（或使 C 保持不变），如果 ϕ 在 C上的限制是一个双有理变换。如果该变换是恒等元，则称 ϕ 固定 C。

定义 2.13. 设 $P \in \mathbb{P}^2$，记为

$$\mathrm{Jonq}_P = \{\varphi \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2) | \exists\ \alpha \in\ \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1); \pi_P \circ \varphi = \alpha \circ \pi_P\}$$

并将其称为 P 的容克埃尔群。关于 P 的 de Jonqui`eres 映射是 $\mathbb{P}^2$ 的一个双有理映射，属于 Jonq_P；这相当于要求 ϕ 保持通过点 P 的直线束。

引理 2.14. 设 $P=[1:0:0]$，取一个仿射图后，关于 P 的 de Jonquière 映射是克雷莫纳变换的一种特殊情形，其形式为

$$\iota^{-1}\circ \mathrm{Jonq}_P\circ\iota=\{(x,y)\mapsto(\frac{ax+b}{cx+d},\frac{r_1(x)y+r_2(x)}{r_3(x)y+r_4(x)})\}$$

以及 $\iota:\ \mathbb{A}^2\hookrightarrow\mathbb{P}^2,\ (x,y)\longmapsto[x:\ y:\ 1]$，其中 $a,b,c,d\in k$ 与 $ad-bc\neq 0$ 以及 $r_1(x),r_4(x),r_2(x),r_3(x)\in k(x)$ 与 $r_1(x)r_4(x)-r_2(x)r_3(x)\neq 0$。

证明。我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{A}^2 & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & \mathbb{P}^2\\ (x,y) & \longmapsto & [x:y:1]\\ \pi_x & & \pi_P\\ \mathbb{A}^1 & \overset{\psi}{\hookrightarrow} & \mathbb{P}^1\\ x & \longmapsto & [x:1]\end{array}$$

由此得到等式,

$$\iota^{-1}\circ \mathrm{Jonq}_P\circ\iota=\{f\in \mathrm{Bir}(\mathbb{A}^2)|\exists\alpha\in \mathrm{Bir}(\mathbb{A}^1);\alpha\circ\pi_x=\pi_x\circ f\}.$$

设 $f\in\iota^{-1}\circ\mathrm{Jonq}_P\circ\iota$ 由 $(x,y)\mapsto(f_1(x,y),f_2(x,y)$给出，则 $\pi_x\circ f:(x,y)\mapsto f_1(x,y)$，但 $\alpha\circ\pi_x=\alpha(x)$，因此 $f_1(x,y)$ 仅依赖于 x，且具有如下形式 $f_1(x,y)=(ax+b)/(cx+d)$，其中 $a,b,c,d\in\mathbb{C}$以及 $ad-bc\neq 0$ 由引理 2.10 得出。由引理 2.11 可知，$k(x,y)=k((ax+b)/(cx+d),f_2(x,y)),$为了描述第二个分量 $f_2(x,y)$，定义双有理映射 $\tau:\ (x,y)\mapsto((dx-b)/(-cx+a),y),$，于是 $\tau\circ f:(x,y)\mapsto(x,f_2(x,y))$是双有理映射，因为 f和 τ都是双有理的。再次应用引理 2.11，得到 $k(x)(f_2(x,y))=k(x)(y)$。在域 $k(x)$ 上应用引理 2.10，可得 $f_2(x,y)=(r_1(x)y+r_2(x))/(r_3(x)y+r_4(x))$。□

引理 2.15. 设 $P,Q\in\mathbb{P}^2$ 和 $C,D\subset\mathbb{P}^2$ 是两条不可约曲线。若 $\phi\in\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ 且 $\phi|_C:\ C\dashrightarrow D$ 是双有理映射，假设存在 $\theta\in\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ 使得 $\pi_Q\circ\phi=\theta\circ\pi_P$，则 P 是 C 的伽罗瓦点，当且仅当 Q 是 D 的伽罗瓦点。此外，若 P 是伽罗瓦的，则 G_P 中的一个元素延拓 $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$（分别为 Jonq_P）中的一个元素，当且仅当它在 G_Q 中的像延拓 $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$（分别为 Jonq_Q）中的一个元素。

$$\begin{array}{ccc}C & \overset{\phi}{\dashrightarrow} & D\\ \pi_P & & \pi_Q\\ \mathbb{P}^1 & \overset{\theta}{\longrightarrow} & \mathbb{P}^1\end{array}$$

证明。由于 $\phi|_C$ 是从 C 到 D的双有理映射，因此 $\phi^*|_C:\ k(D)\to k(C)$是一个同构。此外，由于 $\pi_Q\circ\phi=\theta\circ\pi_P$，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc}k(D) & \overset{\phi^*|_C}{\longrightarrow} & k(C)\\ \pi_Q^*\uparrow & & \uparrow\pi_P^*\\ k(\mathbb{P}^1) & \overset{\theta^*}{\longrightarrow} & k(\mathbb{P}^1)\end{array}$$

因此，$k(D)/\pi_Q^*(k(\mathbb{P}^1))$ 是伽罗瓦的，当且仅当$k(D)/\pi_P^*(k(\mathbb{P}^1))$ 是伽罗瓦的。此外，ϕ 将 Jonq$_P$ 共轭到 Jonq$_Q$，并将 Bir$(\mathbb{P}^2)$中任何保持 C 的元素映到 Bir$(\mathbb{P}^2)$ 中保持 D的元素。□

例 2.16. 设 $P = Q \in \{[1:0:0],[0:1:0],[0:0:1]\}$ $\phi: [X:Y:Z] \mapsto [YZ: XZ: XY]$ 和 $\theta: [Y: Z] \mapsto [Z: Y]$，设 $C \subset \mathbb{P}^2$ 是一条不等于 $x = 0$, $y = 0$ 或 $z = 0$ 的不可约曲线，并设 $D = \phi(C)$，于是我们得到如下图

$$\begin{array}{ccc} C & \overset{\phi}{\dashrightarrow} & D \\ {\scriptstyle \pi_P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_P} \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

这表明，如果 P 是 C的伽罗瓦点，那么 P 就成为 D的伽罗瓦点；这是引理2.15 中对应于 [Miu08，推论 3]的一个特例。

3. Extensions of degree at most three

引理 3.1. 设 k 是一个域，且 $L = k[x]/(x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)$，其中 $f = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 是 $k[x]$ 中的可分不可约多项式，则域扩张 L/K 是伽罗瓦扩张，当且仅当存在一个 3 阶元素 $\sigma \in Gal(L/K)$，使得

$$\sigma : x \mapsto \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k$ 满足 $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$。

证明。由于 f 是一个 3 次可分不可约多项式，扩张L/K 是一个 3 次可分扩张。当且仅当存在一个$\sigma \in$自同构群(L/K)，其阶为 3 时，它才是伽罗瓦扩张，因此只需证明我们可以选取形式恰当的 σ。若 $\sigma \in$ 自同构群(L/K)，其中，$\sigma: x \mapsto \nu_2x^2 + \nu_1x + \nu_0$ 且 $\nu_i \in k$对 $i = 0$, 1, 2 成立，那么问题就在于能否找到 $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset K$ 满足$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$，使得下列等式成立。

$$\nu_2x^2 + \nu_1x + \nu_0 = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \tag{3}$$

我们可以找到一个解

$$\begin{aligned} \alpha &= a_2\nu_1\nu_2 - a_1\nu_2^2 + \nu_0\nu_2 - \nu_1^2 \\ \beta &= a\nu_0\nu_2 - a_0\nu_2^2 - \nu_0\nu_2 \\ \delta &= a_2\nu_2 - \nu_1 \\ \gamma &= \nu_2. \end{aligned}$$

我们注意到 $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$，否则我们有 $\sigma(x) \in K$，这与 $x \notin K$ 矛盾。□

定理 3.2. 设 $P \in \mathbb{P}^2$，设 $C \subset \mathbb{P}^2$ 是次数为 d、在 m_P处重数为 P的不可约曲线。因此由引理 2.2，$[k(C): K_P] = d - m_P$，故我们考虑以下情形。

(1) 若 $d - m_P = 1$，则 $\pi_P: C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ 是双有理的。

(2) 若 $d - m_P = 2$，则 P 是伽罗瓦的，当且仅当该域扩张可分；若条件成立，则 2 阶的非平凡元素 $\sigma \in G_P$ 可扩张为关于 P 的德·容基耶尔变换 `。

(3) 若 $d - m_P = 3$，且 P 是伽罗瓦的，则存在一个关于 P 的德·容基耶尔变换 `，可扩张该作用。

证明。我们可以改变坐标，并假设 $P = [1: 0: 0]$。令 $x = X/Z$ 和 $y = Y/Z$ 为仿射坐标。由于域扩张 $k(C)/\pi_P^*(k(\mathbb{P}^1))$ 的次数为 $d - m_P$，因此 $k(C) = k(y)[x]/(f),$，其中 $f \in k[x, y]$ 是曲线 C 在这些仿射坐标下的方程。

(1) 如果 $d - m_p = 1$，那么 $k(C) = \pi_P^*(k(\mathbb{P}^1))$，所以 $\pi_P^*: k(\mathbb{P}^1) \to k(C)$ 是一个同构，因此 $\pi_P: C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ 是双有理的。

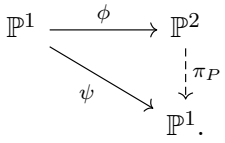
(2) 如果 $d - m_p = 2$，那么扩张 $k(C)/\pi_P^*(k(\mathbb{P}^1))$ 的次数为 2，因此当且仅当它是可分的时，它才是伽罗瓦扩张。$k(C)/\pi_P^*(k(\mathbb{P}^1))$ 是伽罗瓦扩张 $\Leftrightarrow$ 存在一个 2 阶元素 $\sigma \in G_P$，它置换 $f \Leftrightarrow f$ 的根。$f \Leftrightarrow f$ 可分 $\Leftrightarrow$ 该扩张可分。此外，2 阶元素 $\sigma \in G_P$ 可通过适当的坐标变换写成 $x \mapsto -x$。

(3) 如果 $d - m_P = 3$，可以将曲线方程写成以下形式 $f = F_{d-3}(y, 1)x^3 + F_{d-2}(y, 1)x^2 + F_{d-1}(y, 1)x + F_d(y, 1)$，因此直接将引理3.1 中的 k 替换为 $k(y)$，即可得到结论。

□

引理 3.3. 设 k 是一个含有本原三次单位根的 $char(k) \neq 3$ 域。设 $\phi: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ 由 $\phi: [u: v] \mapsto [uv^2 + u^2v: u^3: v^3]$给出。定义 $C := \overline{\phi(\mathbb{P}^1)}$ 是一条 $\mathbb{P}^2$曲线，那么点 $P = [1:0: 0]$ 是 C 上的一个伽罗瓦点，且由投影 $\pi_P: C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ 诱导的扩张是 3 次伽罗瓦扩张。3 阶元素可扩张为 Jonq$_P$中的一个元素

证明。曲线 C 通过 ϕ与 $\mathbb{P}^1$ 双有理等价，其逆映射为 $[X: Y: Z] \mapsto [X + Y: X + Z]$。定义投影为 $\pi_P: [X: Y: Z] \mapsto [Y: Z]$。令 $\psi = \pi_P \circ \phi$，则 $\psi: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ 将 $[u: v]$ 映射到 $[u^3: v^3]$，这是一个 3:1 映射，且该扩张是次数为 3 的伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为由 $\sigma: x \mapsto \omega \cdot x$ 生成的 G_P，其中 ω 是一个本原三次单位根。我们有如下交换图



根据定理3.2，我们知道，每个 3 阶元素都可以扩张为 Jonq 中的一个元素P。具体而言， σ 扩张为由下式给出的映射

$$[X:Y:Z]\mapsto[\frac{(Y-\omega Z)\,X+YZ(1-\omega)}{(\omega-1)X+Y\omega-Z}:Y:Z].$$

□

引理 3.4. 设 k 是一个域， $char(k)=3$ 和 $C\subset\mathbb{P}^2$ 由多项式 $f=X^3-Y^2X+Z^3$给出，则点 $P=[1:0:0]$ 是曲线 C C 上的伽罗瓦点，且由投影 $\pi_P\colon C\dashrightarrow\mathbb{P}^1$ 诱导的扩张是 3 次伽罗瓦扩张。

证明。定义双有理映射 $\phi:\ \mathbb{P}^1\dashrightarrow C$ ，其中 $\phi:[u:\ v]\mapsto[v^3:u^3:u^2v-v^3]$ ，其逆映射为 $[X:\ Y:\ Z]\mapsto[Y:\ Z+X]$。定义投影为$\pi_P:\ [X:\ Y:\ Z]\mapsto[Y:\ Z]$。令 $\psi=\pi_P\circ\phi$，则 $\psi:\ \mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ 将 $[u:\ v]$映到 $[u^3:\ u^2v-v^3]$，这是一个 3 : 1 映射，且该扩张是 3 次伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群由 $\sigma:\ [u:\ v]\mapsto[u:\ u+v]$生成，为 G_P。我们有如下图

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\ \phi\ } & \mathbb{P}^2\\ & \searrow^{\psi} & \downarrow{\scriptstyle \pi_P}\\ & & \mathbb{P}^1.\end{array}$$

根据定理3.2，我们知道，每个 3 阶元素都可扩张为 Jonq 中的一个元素P。具体而言， σ 可扩张为由下式给出的映射 σ 由下式给出 $[X:\ \ Y:\ \ Z]\mapsto[X+Y:\ \ Y:\ Z]$。 □

4. Curves that are Cremona equivalent to a line

定义 4.1。设 X 是一个光滑射影簇， D 是 X中的一个因子。令 K_X 表示 X的一个典范因子。我们将 $D\subset X$的椭圆维数记作 $\mathcal{K}(D,X)$ ，定义为当 $m>>0$时， $X\mapsto P(H^0(m(D+K_X)))$ 像的维数。按照惯例，若 $|m(D+K_X)|=\phi\ \forall m>0$，则称椭圆维数为 $\mathcal{K}(D,X)=-\infty$ 。

定理 4.2。[MKM83，推论 2.4] 设 X 是光滑有理曲面，且 $D\subset X$ 是一条与 $\mathbb{P}^1$同构的曲线，则以下条件等价：

(1) $\mathcal{K}(D,X)=-\infty$(
2) $|2K_X+D|=\phi$.(
3) $|2(K_X+D)|=\phi$.

定义 4.3。 设 $C\subset\mathbb{P}^2$ 为一条不可约曲线。若 C 是一条光滑曲线，则我们定义 $\bar{\mathcal{K}}(C,\mathbb{P}^2)$ 为 $\mathcal{K}(C,\mathbb{P}^2)$; 若 C是一条奇异曲线，我们取$X\to\mathbb{P}^2$ 为 C 在 $\mathbb{P}^2$ 中的奇点嵌入消解，其中 $\tilde{C}$是 C的严格变换，则定义 $\bar{\mathcal{K}}(C,\mathbb{P}^2)$ 为 $\mathcal{K}(\tilde{C},X)$。根据[MKM83], , 这与消解的选取无关。

定义 4.4. 设 C 是一条不可约光滑平面曲线。若存在一个双有理映射 φ: $\mathbb{P}^2\dashrightarrow\mathbb{P}^2$ ，将 C 映到一条直线，则称曲线 C 与一条直线克雷莫纳等价。

定理 4.5. *(Coolidge)* [MKM83，定理 2.6] 设 $C \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ 是一条不可约有理曲线。那么，存在一个克雷莫纳变换 σ，其作用于 $\mathbb{P}^2$，使得 $\sigma(C)$ 是一条直线，当且仅当 $\overline{\mathcal{K}}(C, \mathbb{P}^2) = -\infty$。

引理 4.6. 若 $C \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ 是次数为 $d < 6$ 的不可约有理曲线，则 C 等价于一条直线。

证明. 设 $\pi_1 : X_1 \to \mathbb{P}^2$ 是在 P_1 处对 $\mathbb{P}^2$ 进行的吹起，且设 $\pi_i : X_i \to X_{i-1}$ 是在 $P_i \in X_{i-1}$ 处对 X_{i-1} 进行的吹起。对于 $i \geqslant 2$, $\mathcal{E}_i = \pi_i^{-1}(P_i)$ 是一条 (-1) 曲线，其中 $\mathcal{E}_i^2 = -1$ 且 $\mathcal{E}_i \cong \mathbb{P}^1$。在吹起 n 个点后，设 $\pi : Y \mapsto \mathbb{P}^2$ 是吹起 π_i 的复合，其中 $Y = X_n$ 我们选取足够多的点，使得 C 的严格变换光滑。由归纳法可得，对于每个 $i = 1, ..., n$，有 $E_i = (\pi_{i+1} \circ ..... \circ \pi_n)^*(\mathcal{E}_i)$, $Pic(Y) = \pi^*(Pic(\mathbb{P}^2)) \oplus \mathbb{Z}E_1 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}E_n$, 并且对于每个 $i \neq j$，有 $E_i^2 = -1$。此外，

$$\begin{aligned} K_Y &= \pi_n^*....\pi_1^*(K_{\mathbb{P}^2}) + \Sigma_{i=1}^n \pi_n^*....\pi_{i+1}^*(\epsilon_i) \\ &= \pi^*(K_{\mathbb{P}^2}) + \Sigma_{i=1}^n E_i \\ &= -3\pi^*(L) + \Sigma_{i=1}^n E_i. \end{aligned}$$

˜ ˜严格变换 $C \subset C$等价于 $C = d \cdot \pi^*(L) - \Sigma_{i=1}^n m_{P_i}(C)E_i$。因此我们有

$$2K_Y + \tilde{C} = (-6 + d) \cdot \pi^*(L) + \Sigma_{i=1}^n (2 - m_{P_i}(C))E_i,$$

˜ ˜因此 $\pi^*(L) \cdot (2K_Y + C) = -6 + d$，因此 $|2K_Y + C| = \phi$ 对于次数为$d < 6$ 的每条曲线，根据 4.2，我们有 $\bar{\mathcal{K}}(C, \mathbb{P}^2) = -\infty$, 所以 C 等价于一条直线。□

引理 4.7. 若 C 与一条直线克雷莫纳等价 $L \subseteq \mathbb{P}^2$，且 P 是一个伽罗瓦点，则 G_P 中的每个非平凡元素都可扩张为 Bir$(\mathbb{P}^2)$中的一个元素。

证明。取一个 $\varphi \in$ Bir$(\mathbb{P}^2)$，将 C 映到一条直线 L。对于每个 $g \in G_P$, $\varphi|_C : C \dashrightarrow L$将 g 共轭为 Aut(L)中的一个元素，而该元素可扩张为 $\hat{}g \in$ Aut$t(\mathbb{P}^2)$中的元素。因此， g 可扩张为 $\varphi^{-1\hat{}}g\varphi \in$Bir$(\mathbb{P}^2)$。□

注 4.8. 设 C 为由 $C = \{[X : Y : Z] | Y^2 = XZ\} \subset \mathbb{P}^2$ 给出的光滑圆锥曲线，则 Aut$(\mathbb{P}^2, C) = \{g \in$ Aut$(\mathbb{P}^2) | g(C) = C\} = PGL_2$ 到 Aut $(\mathbb{P}^2) = PGL_3$ 中的自然嵌入由以下单群同态诱导

$$GL_2(k) \to GL_3(k), \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2ac & ad + bc & 2bd \\ c^2 & cd & d^2 \end{bmatrix}$$

其中 $\rho : [u : v] \mapsto [u^2 : uv : v^2]$，且下图可交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \overset{\rho}{\dashrightarrow} & \tilde{C} \subset \mathbb{P}^2 \\ \downarrow g & & \downarrow \tilde{g} \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

引理 4.9. 设 k 是一个特征为 $char(k) \neq 2$ 且包含本原四次单位根的域, 并设 C 是由下列方程定义的不可约曲线

$$X^4 - 4ZYX^2 - ZY^3 + 2Z^2Y^2 - YZ^3 = 0, \tag{4}$$

于是，点 $P = [1 : 0 : 0]$ 是曲线 C C 的外伽罗瓦点，且投影 $\pi_P \colon C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ 所诱导的扩张是次数为 4 的伽罗瓦扩张。群 G_P 可扩张至 Bir$(\mathbb{P}^2)$ ，但不能扩张至 Jonq$_P$。

证明。定义双有理映射 $\phi \colon \mathbb{A}^1 \dashrightarrow C$，其定义为 $\phi \colon t \mapsto [t+t^3 \colon t^4 \colon 1]$，逆映射为 $[X \colon Y \colon Z] \mapsto (X\,(Y+Z))\,/(X^2 - YZ + Z^2)$。因此， C 是一条次数为 4 的有理不可约曲线。因此，根据 Coolidge 定理 4.5，我们知道 G_P 中每个非平凡元素都可扩张为 Bir$(\mathbb{P}^2)$ 中的一个元素。我们将在下文给出明确证明。我们有 $K(C) = k(t)$ ，并定义投影为 $\pi_P \colon [X \colon Y \colon Z] \mapsto [Y \colon Z]$。令 $x = X/Z$ 和 $y = Y/Z$ 为仿射坐标。因此，仿射方程 $x^4 - 4yx^2 - y^3 + 2y^2 - y = 0$ 定义扩张域 $k(y)[x]/k(y) = k(t)/k(t^4)$。由于 k 含有 $4th$ 次单位根，该扩张是次数为 4 的伽罗瓦扩张，其基为 $\{1、\ t、\ t^2、\ t^3\}$，并且有以下图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{\ \phi\ } & C \subseteq \mathbb{P}^2 \\ & \searrow^{\psi} & \downarrow f \\ & & \mathbb{A}^1 \end{array}$$

其中 ψ 是一个 4 比 1 映射，由 $\psi \colon t \mapsto t^4$ 给出。通过反证法，我们证明存在一个扩张该作用的 de Jonqui`eres 映射 $f$ 。假设存在一个扩张该作用的 de Jonqui`eres 映射 g ， $i.e$ 那么存在 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta} \in k(y)$ ，使得 $\tilde{\alpha}\tilde{\delta} - \tilde{\beta}\tilde{\gamma} \neq 0$ 满足: $g \colon (x, y) \mapsto (\frac{\tilde{\alpha}x+\tilde{\beta}}{\tilde{\gamma}x+\tilde{\delta}}, y)$。由于$g \circ \phi = \phi \circ \sigma$，令 $\alpha = \tilde{\alpha}(t^4), \beta = \tilde{\beta}(t^4), \gamma = \tilde{\gamma}(t^4)$ ，且 $\delta = \tilde{\delta}(t^4)$ 其中$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k(t^4)$。我们得到方程

$$\mathrm{i}t - \mathrm{i}t^3 = \frac{\alpha(t+t^3)+\beta}{\gamma(t+t^3)+\delta}.$$

这给出 $\beta = \beta(t) = -(\mathrm{i}t^6 - \mathrm{i})\gamma t^2 - (\mathrm{i}\delta + \alpha)t^3 + (\delta\mathrm{i} - \alpha)t \in k(t^4)$ ，于是我们有 $(\mathrm{i}t^4 - \mathrm{i})\gamma = 0$、$\mathrm{i}\delta + \alpha = 0$ 和 $\delta\mathrm{i} - \alpha = 0$。这给出 $\alpha = 0, \gamma = 0$, 从而导出矛盾，因此不存在扩张该作用的 de Jonqui`eres 映射 f 。

将 C 视为 $\mathbb{P}^2$ 中的一条 4 次不可约曲线，曲线 $[0$ 上有三个奇点: $1 \colon 1]$, $[\mathrm{i}\sqrt{2} \colon -1 \colon 1]$, $[\mathrm{i}\sqrt{2} \colon 1 \colon -1]$。经过适当的坐标变换 $\sigma : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ ，由 $[X : Y : Z] \mapsto [-\mathrm{i}\sqrt{2}X - \mathrm{i}\sqrt{2}Z \colon 2X + Y - Z \colon 2X - Y + Z]$ 给出，此映射将曲线 C变为 $\tilde{C}$，其方程为 $\tilde{f} = X^2Y^2 + 6X^2YZ + X^2Z^2 + 4Y^2Z^2 = 0$ ，且这个新方程以 $\{[1 : 0 \colon 0], [0 : 1 \colon 0], [0 : 0 \colon 1]\}$ 为 2 阶重多点。在 $\mathbb{P}^2$ 中爆破这三个点 $\{[1 : 0 \colon 0], [0 : 1 \colon 0], [0 : 0 \colon 1]\}$ ，然后再次收缩，我们发现严格变换曲线的次数为

$d' = 2 \cdot d - m_1 - m_2 - m_3 = 2 \cdot 4 - 2 - 2 - 2 = 2$，因此它是一条圆锥曲线，其方程为 $F = 4X^2 + Y^2 + 6YZ + Z^2 = 0$；经过适当的坐标变换，使用以下矩阵，

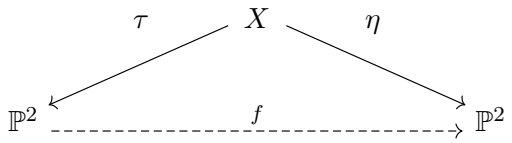
$$\begin{bmatrix} 4\mathrm{I} & 0 & -\mathrm{I} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 8 & -6\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

我们可以将圆锥曲线映到 $Y^2 - XZ = 0$。然后，我们可以利用注记 G_P显式地延拓 4。8 □

5. Example where G_P can not be extended to $Bir(\mathbb{P}^2)$

引理 5.1. 设 k 为代数闭域， $C \subset \mathbb{P}^2$ 为一条不可约曲线， $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ 为一个将曲线 C 映到自身的双有理映射，且$X \to \mathbb{P}^2$ 是 C 在 $\mathbb{P}^2$ 中的奇点嵌入消解，其中 $\tilde{C}$ 是 C的严格变换。若 C 的所有奇点的重数均为 $m_P(C) < deg(C)/3,$ ，则 f 是 $\mathbb{P}^2$的自同构。

证明。设 $deg(f) = d$，并反设 $d > 1$。我们取一个交换图，其中 π 和 η 是由一系列膨胀组成的序列



并且我们可以假设 C 的严格变换是光滑的，于是得到

$$\begin{aligned} \eta^*(L) &= d \cdot \pi^*(L) - \Sigma m_i E_i \\ K_X &= -3\pi^*(L) + \Sigma E_i \\ \eta^*(C) &= \tilde{C} = deg(C) \cdot \pi^*(L) - \Sigma m_{P_i}(C) E_i. \end{aligned}$$

但是 $deg(C) = C \cdot L = \eta^*(C) \cdot \eta^*(L) = d \cdot deg(C) - \Sigma m_i \cdot m_{P_i}(C)$，因此 $deg(C)(d-1) = \Sigma m_i \cdot m_{P_i}(C) < \Sigma m_i \cdot deg(C)/3,$ ，进而 $3(d-1) < \Sigma m_i$，这与 $\Sigma m_i = 3(d-1)$ 矛盾。□

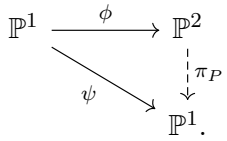
引理 5.2. 设 k 是一个域，满足 $char(k) \neq 5$ ，且包含一个本原五次单位根，并设 ϕ: $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ 由下式给出

$$\phi : [u : v] \mapsto [uv^6 - u^7 : u^5(u^2 + v^2) : v^5(u^2 + v^2)].$$

定义 $C := \overline{\phi(\mathbb{P}^1)}$ 是一条次数为 $\mathbb{P}^2$ 的曲线，则点 $P = [1 : 0 : 0]$ 是曲线 C 的内伽罗瓦点，且由投影π_P: $C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ 所诱导的扩张是次数为 5 的伽罗瓦扩张。此外，不存在双有理映射 f 能够延拓伽罗瓦群生成元的作用。

证明。曲线 C 通过 ϕ与 $\mathbb{P}^1$ 双有理等价，逆映射为 $[X : Y : Z] \mapsto [X^4Y + 4X^3Y^2 - 2X^3Z^2 + 6X^2Y^3 - 2X^2YZ^2 + 4XY^4 + XZ^4 + Y^5 : Z\left(X^4 + 2X^3Y + X^2Y^2 - 3X^2Z^2 - 3XYZ^2 + Z^4\right)]$。定义投影为 π_P: $[X : Y : Z] \mapsto [Y : Z]$。因此令 $\psi = \pi_P \circ \phi$ ，则 ψ: $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ 映射

$[u:\ v]$ 到 $[u^5:\ v^5]$，这是一个 5∶1 映射，且该扩张是次数为 5 的伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为 G_P，由 $\sigma:\ x \mapsto \zeta \cdot x$生成，其中 ζ 是 5次单位根，并且我们有如下图



现在证明曲线 C 没有重数为$m_P(C) \geqslant 3$的点 P。反设存在一个重数为 3 的点 $P = [P_0:\ P_1:\ P_2]$，再取两条经过点 P的不同直线 $a_1x + a_2y - a_3z = 0$ 和$b_2y - b_3z = 0$。我们在 $\mathbb{P}^1$中取原像，于是得到一个次数至少为 3 的公因子。

$$f_1(u,v) = a_1\left(-u^7 + u\,v^6\right) + a_2u^5\left(u^2+v^2\right) + a_3v^5\left(u^2+v^2\right),$$
$$f_2(u,v) = \left(u^2+v^2\right)\left(b_2u^5 + b_3v^5\right).$$

现在检查多项式 f_1 和 f_2 不可能有一个次数为 3 的公因子。首先假设 $u + \mathrm{I}v$ 同时整除这两个多项式，那么应有 $f_1(1,\ \mathrm{I}) = f_2(1,\ \mathrm{I}) = 0$ 推出 $a_1 = 0$，因此 $P = [1:0:\ 0]$ 是一个光滑点，这就产生矛盾。若假设 $u - \mathrm{I}v$ 同时整除这两个多项式，那么应有 $f_1(1,-\mathrm{I}) = f_2(1,-\mathrm{I}) = 0$，同样可得 $a_1 = 0$，因此这个次数为 3 的因子必定整除$b_2u^5 + b_3v^5$。若假设 u 整除多项式 f_2，那么 $b_3 = 0$ 和 u^3 应整除 f_1，但由于 $f_1 = -u(u^6 - v^6)$，这并不成立。若假设 v 整除多项式 f_2，那么 $b_2 = 0$ 和 v^3 应整除f_1，但由于 $f_1 = uv^2(u^4 + v^4)$，这并不成立。因此，这个次数为 3 的因子必定整除 $b_2u^5 + b_3v^5$, $b_2 \neq 0$ 和 $b_3 \neq 0$。于是我们可以假设 $a_1 = 1$，并用 $f_1 - a_3f_2/b_3$ 替换 f_1，从而令 $a_3 = 0$；除去倍数因子后，可以假设 $b_3 = 1, a_1 = 1$ 和 $b_2 = -\xi^5$。因此 $f_2 = -u^5\xi^5 + v^5$,$f_1 = \left(-u^7 + u\,v^6\right) + a_2u^5\left(u^2+v^2\right)$，于是 f_2的根为 $(u,\ v) = (1, \xi\zeta^i)$，其中 ζ 是一个 5–次单位根。又由于 f_1 和 f_2 应有三个公共根，因此令 $\{(1,\xi),(1,\xi\zeta),(1,\xi\rho)\}$ 为这三个公共根，其中 $\rho^5 = 1$ 和 $\zeta^5 = 1$，且 $\rho^5 \neq \zeta$ 不等于 1，因此 f_1 应在这三个根处为零。这给出三个方程

$$q_1 = \xi^6 - 1 + a_2\left(\xi^2+1\right) = 0$$
$$q_2 = a_2\left(\xi^2\zeta^2+1\right) + \xi^6\zeta - 1 = 0$$
$$q_3 = a_2\left(\rho^2\xi^2+1\right) + \rho\,\xi^6 - 1 = 0,$$

通过求解以下关于 a_2、ζ和 ρ的方程组，我们发现 $\zeta = \rho = (\xi^4+1)/(\xi^6-1)$,，这与 $\zeta \neq \rho$矛盾。因此， f_1 和 f_2 不能有次数为 $d \geqslant 3$的因子。由于 $m_P(C) < 3$ 对每个 $P \in \mathbb{P}^2$都成立，设存在一个双有理映射 g，它扩张了伽罗瓦群的生成元，那么由引理 5.1， g 是 $\mathbb{P}^2$的线性自同构，因此它由一个

矩阵给出，记作 $A \in PGL_3$。由于 $g \circ \phi = \phi \circ \sigma$，因此我们有

$$\begin{bmatrix} UV^6 - U^7 \\ U^5(U^2+V^2) \\ V^5(U^2+V^2) \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \zeta UV^6 - \zeta^2 U^7 \\ U^5(\zeta^2 U^2+V^2) \\ V^5(\zeta^2 U^2+V^2) \end{bmatrix}$$

其中， ζ是单位根的 $5th$次根。由于 UV^6、U^7、U^5V^2和 V^7线性无关，检查计算后我们发现 A 应为对角矩阵，但 $U^5(\zeta^2U^2+V^2)$不是 $U^5(\zeta^2U^2+V^2)$的倍数，因此产生矛盾。□

References

[福久09] Fukasawa，悟：任意特征下平面曲线的伽罗瓦点。载于：*Geom. Dedicata* 139 (2009)，211–218。https://doi.org/ 10 1007 10711 008 9325 2 0046 5755 2 。/s - - - 。– [77] Hartshorne *Algebraic geometry* ISSN – 哈尔，罗宾：。Springer-Verlag，纽约-海德堡，1977（Graduate Texts in Mathematics，第52卷）。– xvi+496 页。– ISBN 0–387–90244–9 2.8[三浦08] Miura，圭：平面曲线的伽罗瓦点与克雷莫纳变换。载于：*J. Algebra* 320 (2008)，第3期，987–995。https://doi.org/10 8693 2 1016 2008 04 018 0021 16 . /j.jalgebra. . . . – ISSN – .[三浦18] Miura，圭：属于某条平面四次曲线伽罗瓦点的双有理变换。（ 2018 1708 08195 1 ）。[83] Mohan Kumar Murthy https://arxiv.org/abs/。MKM，N.；，M. P.：有理曲面上负自交数的曲线。载于：*J. Math. Kyoto Univ.* 22 (1982/83)，第4期，767–777。https://doi.org/10.1215/kjm/1250521679。– ISSN 0023–608X 4.2、4.3、4.5[三00] Miura，圭；Yoshihara，久雄：平面四次曲线函数域的域论。载于：*Journal of Algebra* 226 (2000)，第1期，283-294。https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869399981735。– ISSN 0021–8693 2[吉田09] Yoshihara，久雄：具有伽罗瓦点和可延拓伽罗瓦自同构的有理曲线。载于：*J. Algebra* 321 (2009)，第5期，1463–1472。https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.11.035。– ISSN 0021–8693 2*Current address*：数学与计算机科学系，巴塞尔大学，4051 巴塞尔，瑞士

Email address: a.abouelsaad@unibas.ch

Mathematics Department, Faculty of Science, Mansoura University, Man-soura 35516, Egypt*Email address*: abuelsaad@mans.edu.eg